# Věžové polynomy

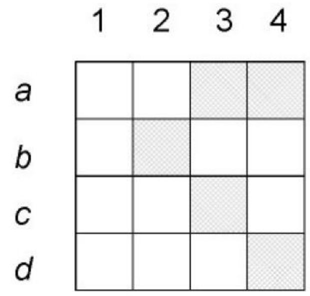
## 2.1 Definice věžových polynomů

Věžové polynomy jsou polynomy, jejichž koeficienty udávají, kolika různými způsoby lze na daná políčka šachovnice rozmístit určený počet neohrožujících se věží, tzn., že žádné dvě věže umístěné na šachovnici neleží ve stejném řádku ani sloupci.

Smyslem řešení věžových polynomů je hledání počtu způsobů $v_k(S)$, pomocí nichž lze na políčka šachovnice umístit $k$ neohrožujících se věží. Na základě počtu umístěných věží jsou získány jednotlivé koeficienty polynomu umožňující jeho následné sestavení, přičemž tento polynom je nazýván věžovým polynomem sítě $S$. Způsob aplikovatelnosti věžových polynomů je detailně vysvětlen na příkladu 8.

**Příklad 8**

Máme danou síť $S$ a vyšrafovaná pole znázorňují počet způsobů $v_k(S)$ rozmístění $k$ neohrožujících se věží (obr. 3). Sestavte věžový polynom sítě $S$.




Obr. 3: Síť $S$

**Řešení:**

Nejprve je nezbytné stanovit jednotlivé koeficienty polynomu $v_k(S)$ dané sítě $S$ podle obr. 3.

Pro $k=0$ se rovná $v_0(S)=1$.

Pro $k=1$ se jedná o celkový počet vyšrafovaných políček, tedy $v_1(S)=5$.

Pro $k=2$ jde o rozmístění dvou neohrožujících se věží

$$(a3,b2),(a3,d4),(a4,c3),(a4,b2),$$
$$(b2,c3),(b2,d4),(c3,d4),$$

pak $v_2(S)=7$.

Pro $k=3$ lze tři neohrožující se věže umístit na políčka

$$(a3,b2,d4),(a4,b2,c3),(b2,c3,d4),$$

takže $v_3(S)=3$.

Pro $k=4$ je $v_4(S)=0$.

Pro $k>4$ platí $v_k(S)=0$, neboť vyšrafovaná políčka leží ve čtyřech řádcích a čtyřech sloupcích, tedy nelze na ně umístit pět nebo více věží tak, aby se vzájemně neohrožovaly.

Na základě získání koeficientů sestavíme polynom

$$v_0(S)+v_1(S)x+v_2(S)x^2+v_3(S)x^3+v_4(S)x^4=1+5x+7x^2+3x^3+0x^4=$$
$$=1+5x+7x^2+3x^3,$$

který se nazývá věžovým polynomem sítě $S$.

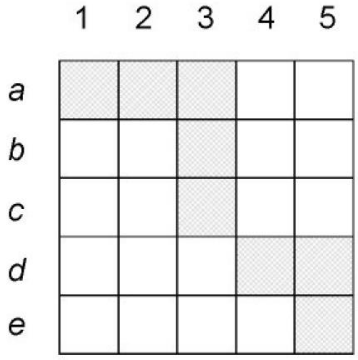
**Definice 7**

Věžový polynom $v(x,S)$ sítě $S$ je polynom definovaný vztahem

$$v(x,S)=v_0(S)+v_1(S)x+v_2(S)x^2+v_3(S)x^3+\ldots,$$

jehož koeficienty $v_k(S)$ pro $k>0$ udávají, kolika způsoby lze na políčka sítě $S$ rozmístit $k$ neohrožujících se věží. Koeficient $v_0(S)$ je roven jedné pro každou síť $S$.

Uvedený postup stanovení věžového polynomu sítě $S$ však není jediný. Existuje i jiný způsob, který platí za předpokladu, že síť $S$ podle obr. 5 je možné rozložit na disjunktní sítě $S_1$ a $S_2$, tzn., tyto sítě nemají společný řádek ani sloupec. Pak při dodržení této podmínky lze uvedený způsob aplikovat pro každou síť $S$.



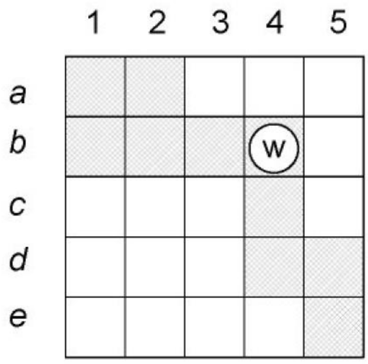

Obr. 5: Síť $S$

**Věta 1**

**Pokud je možné rozdělit síť $S$ na disjunktní sítě $S_1$ a $S_2$, pak konečný věžový polynom sítě $S$ je součinem jednotlivých věžových polynomů sítí $S_1$ a $S_2$, tedy**

$$v(x,S) = v(x,S_1) \cdot v(x,S_2).$$

Pomocí následující metody určíme věžový polynom sítě $S$ (obr. 7), kterou ovšem nelze rozložit na příslušné disjunktní sítě $S_1$ a $S_2$.




Obr. 7: Síť $S$

Pro snadné stanovení věžových polynomů sítí $S_w$ a $S'_w$ zavedeme vhodné políčko $w$ a vzniklé sítě označíme:

$S_w$ … síť $S$ bez políčka $w$,

$S'_w$ … síť $S$ bez celého řádku i sloupce, ve kterém leží políčko $w$ (včetně tohoto políčka),

Tedy

stojí-li na $w$ věž … je rozmístěno zbývajících $k-1$ věží na síti $S'_w$,

nestojí-li na $w$ věž … je rozmístěno $k$ věží na síť $S_w$.

**Věta 2**

Pro každou síť $S$ a sítě $S_w$ a $S'_w$ definované pomocí zvoleného políčka $w$ výše uvedeným způsobem platí

$$v(x,S) = v(x,S_w) + x \cdot v(x,S'_w).$$