Řešení soustavy lineárních rekurentních vztahů

Zadání:

$$\boxed{\begin{aligned} a_{n+1} &= 2a_n - b_n + 2, \quad & a_0 = 0 \\ b_{n+1} &= -a_n + 2b_n - 1, \quad & b_0 = 1 \end{aligned}}$$

Řešení pomocí převedení soustavy na rekurentní vztah vyššího řádu:

Z první rovnice vyjádříme b_n:

$$b_n = -a_{n+1} + 2a_n + 2$$

Vzhledem k tomu, že tento vztah platí pro všechna n, dosadíme za b_{n+1} a b_n do druhé rovnice:

$$\begin{aligned} -a_{n+2} + 2a_{n+1} + 2 &= -a_n - 2(a_{n+1} + 2a_n + 2) - 1 \\ a_{n+2} - 4a_{n+1} + 3a_n &= -1 \end{aligned}$$

Zbývá dopočítat druhou počáteční podmínku (a_1). Snadno ji dostaneme dosazením a_0 a b_0 do první rovnice soustavy ze zadání:

$$a_1 = 2 \cdot 0 - 1 + 2 = 1$$

Rekurentní vztah je zadán rovnicí

$$\boxed{a_{n+2} - 4a_{n+1} + 3a_n = -1, \quad a_0 = 0,\, a_1 = 1}$$

Dále pokračujeme tradičně (začneme řešením homogenní rovnice):

$$\begin{aligned} \lambda^2 - 4\lambda + 3 &= 0 \\ (\lambda - 1)(\lambda - 3) &= 0 \\ \lambda_1 &= 1 \\ \lambda_2 &= 3 \end{aligned}$$

$$a_n^h = K_1 + K_2 3^n$$

Nyní pokračujeme nalezením partikulárního řešení. Všimněte si, že podle tabulky bychom měli vystačit s konstantou A. Ta by se nám na levé straně odečetla a tak přistoupíme k lehkému zobecnění pravé strany a vezmeme lineární polynom.

$$a_n^p = An + B$$

Dosazením získáme:

$$\begin{aligned} A(n+2) + B - 4(n+1) - 4B + 3An - 3B &= -1 \\ An(1 - 4 + 3) + A(2 - 4) + B(1 - 4 + 3) &= -1 \\ -2A &= -1 \\ A &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Partikulární řešení je tedy (B si můžeme zvolit libovolně, tedy třeba $B = 0$):

$$a_n^p = \frac{n}{2}$$

a obecné řešení je ve tvaru:

$$a_n = K_1 + K_2 3^n + \frac{n}{2}$$

Zbývá dopočítat konstanty pomocí počátečních podmínek:

$$\begin{aligned} 0 &= K_1 + K_2 \\ 1 &= K_1 + 3K_2 + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Odečtením první rovnice od druhé získáme:

$$\begin{aligned} 1 &= 2K_2 + \frac{1}{2} \\ K_2 &= \frac{1}{4} \\ K_1 &= -\frac{1}{4} \end{aligned}$$

a dostáváme stejnou posloupnost a_n jako v případě řešení pomocí vytvořujících funkcí:

$$a_n = \frac{3^n}{4} - \frac{1}{4} + \frac{n}{2} = \frac{1}{4}(2n - 1 + 3^n)$$

Na závěr zbývá dosadit do vztahu pro b_n:

$$\begin{aligned} b_n &= -a_{n+1} + 2a_n + 2 \\ b_n &= -(\frac{3^{n+1}}{4} - \frac{1}{4} + \frac{n+1}{2}) + 2(\frac{3^n}{4} - \frac{1}{4} + \frac{n}{2}) + 2 \\ b_n &= -\frac{3^n}{4} + \frac{5}{4} + \frac{n}{2} = \frac{1}{4}(2n + 5 - 3^n). \end{aligned}$$

Řešení pomocí vytvořujících funkcí:

$$\boxed{\begin{array}{ll} a_{n+1} = 2a_n - b_n + 2, & a_0 = 0 \\ b_{n+1} = -a_n + 2b_n - 1, & b_0 = 1 \end{array}}$$

Základní značení:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$$

Nejdříve převedeme na soustavu pro vytvořující funkce:

$$a_{n+1} = 2a_n - b_n + 2, \qquad / \cdot x^{n+1} \quad / \sum_{n=0}^{\infty}$$
$$b_{n+1} = -a_n + 2b_n - 1 \quad / \cdot x^{n+1} \quad / \sum_{n=0}^{\infty}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} x^{n+1} = 2x \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n - x \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n + 2x \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$
$$\sum_{n=0}^{\infty} b_{n+1} x^{n+1} = -x \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + 2x \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n - x \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

$$f(x) - a_0 = 2xf(x) - xg(x) + \frac{2x}{1-x}$$
$$g(x) - b_0 = -xf(x) + 2xg(x) - \frac{x}{1-x}$$

Soustava pro vytvořující fuknce:

$$\boxed{\begin{aligned} (1-2x)f(x) + xg(x) &= \frac{2x}{1-x} \\ xf(x) + (1-2x)g(x) &= -\frac{x}{1-x} + 1 \end{aligned}}$$

Vyjádříme $g(x)$ z první rovnice a dosadíme do druhé:

$$g(x) = \frac{2x}{x(1-x)} - \frac{(1-2x)f(x)}{x} = \frac{2x - (1-x)(1-2x)f(x)}{x(1-x)}$$

$$
\begin{aligned}
xf(x) + (1-2x)\frac{2x-(1-x)(1-2x)f(x)}{x(1-x)} &= -\frac{x}{1-x} + 1 \\
x^2(1-x)f(x) + (1-2x)(2x-(1-x)(1-2x)f(x)) &= -x^2 + x(1-x) \\
x^2(1-x)f(x) - (1-2x)(1-x)(1-2x)f(x) &= -x^2 + x(1-x) - 2x(1-2x) \\
f(x)(1-x)(x^2-(1-2x)^2) &= 2x^2 - x \\
f(x)(1-x)(-3x^2+4x-1) &= 2x^2 - x \\
f(x)(1-x)(3x-1)(1-x) &= 2x^2 - x \\
f(x)(1-x)^2(3x-1) &= 2x^2 - x \\
f(x) &= \frac{2x^2-x}{(1-x)^2(3x-1)}
\end{aligned}
$$

Dopočítáme $g(x)$:

$$
\begin{aligned}
g(x) &= \frac{2x-(1-x)(1-2x)\frac{2x^2-x}{(1-x)^2(3x-1)}}{x(1-x)} \\
g(x) &= \frac{2x-(1-2x)\frac{-x(1-2x)}{(1-x)(3x-1)}}{x(1-x)} \\
g(x) &= \frac{2(1-x)(3x-1)+(1-2x)^2}{(1-x)^2(3x-1)} \\
g(x) &= \frac{-2x^2+4x-1}{(1-x)^2(3x-1)}
\end{aligned}
$$

Rozložíme na parciální zlomky:

$$
\begin{aligned}
f(x) = \frac{2x^2-x}{(1-x)^2(3x-1)} &= \frac{A}{(1-x)^2} + \frac{B}{1-x} + \frac{C}{3x-1} \quad /(1-x)^2(3x-1) \\
2x^2 - x &= A(3x-1) + B(1-x)(3x-1) + C(1-x)^2 \\
2x^2 - x &= x^2(-3B+C) + x(3A+4B-2C) - A - B + C \\
-3B + C &= 2 \\
3A + 4B - 2C &= -1 \\
-A - B + C &= 0 \\
A &= \frac{1}{2} \\
B &= -\frac{3}{4} \\
C &= -\frac{1}{4} \\
f(x) &= \frac{\frac{1}{2}}{(1-x)^2} + \frac{-\frac{3}{4}}{1-x} + \frac{-\frac{1}{4}}{3x-1}
\end{aligned}
$$

Podobně rozložíme $g(x)$:

$$g(x) = \frac{\frac{1}{2}}{(1-x)^2} + \frac{\frac{3}{4}}{1-x} + \frac{\frac{1}{4}}{3x-1}$$

Závěrem identifikujeme příslušné posloupnosti příslušné parciálním zlomkům:

$$\begin{array}{ll}
\frac{\frac{1}{2}}{(1-x)^2} \quad \dots & \frac{1}{2}\cdot 1, \frac{1}{2}\cdot 2, \frac{1}{2}\cdot 3, \dots, \frac{1}{2}(n+1), \dots \\
\frac{-\frac{3}{4}}{1-x} \quad \dots & -\frac{3}{4}, -\frac{3}{4}, -\frac{3}{4}, \dots \\
\frac{-\frac{1}{4}}{3x-1} = \frac{\frac{1}{4}}{1-3x} \quad \dots & \frac{1}{4}\cdot 3^0, \frac{1}{4}\cdot 3^1, \frac{1}{4}\cdot 3^2, \dots, \frac{3^n}{4}, \dots
\end{array}$$

$$\boxed{a_n = \frac{1}{2}(n+1) - \frac{3}{4} + \frac{3^n}{4} = \frac{1}{4}(2n - 1 + 3^n)}$$

$$\begin{array}{ll}
\frac{\frac{1}{2}}{(1-x)^2} \quad \dots & \frac{1}{2}\cdot 1, \frac{1}{2}\cdot 2, \frac{1}{2}\cdot 3, \dots, \frac{1}{2}(n+1), \dots \\
\frac{\frac{3}{4}}{1-x} \quad \dots & \frac{3}{4}, \frac{3}{4}, \frac{3}{4}, \dots \\
\frac{\frac{1}{4}}{3x-1} = \frac{-\frac{1}{4}}{1-3x} \quad \dots & -\frac{1}{4}\cdot 3^0, -\frac{1}{4}\cdot 3^1, -\frac{1}{4}\cdot 3^2, \dots, \frac{-3^n}{4}, \dots
\end{array}$$

$$\boxed{b_n = \frac{1}{2}(n+1) + \frac{3}{4} + \frac{-3^n}{4} = \frac{1}{4}(2n + 5 - 3^n)}$$

Poznámka:

Posloupnost příslušnou vytvořující funkci $\frac{1}{(1-x)^2}$ dostaneme derivováním z vytvořující funkce $\frac{1}{(1-x)}$.

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \quad /'$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} n x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) x^n = \frac{1}{(1-x)^2}$$

a tedy příslušnou posloupností je $a_n = n + 1$.