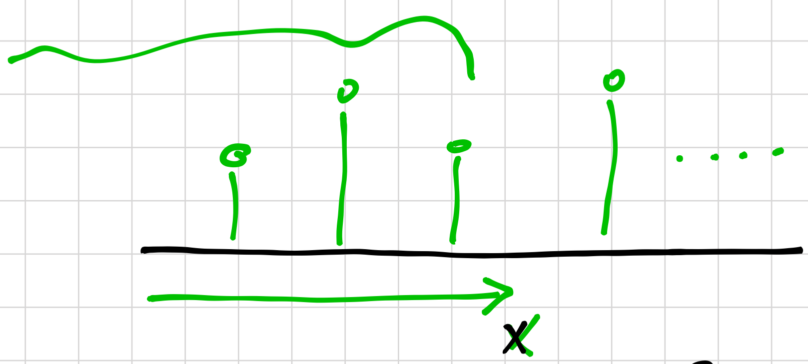
1* Tekrar . .   Ayrık R.D. için
Birikimli Dağılım Fonk.

$$F(x) = \sum_{k=-\infty}^{x} f(k)$$

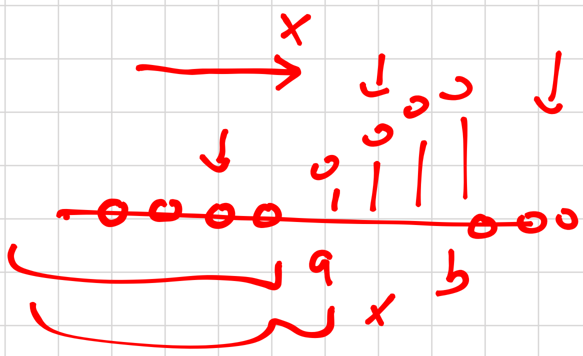


$F(x)$ artan bir fonksiyon

$$\lim_{x \to \infty} F(x) = 1$$

Örnek

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x < a \\ f_1(x) & a \leq x < b \\ 0 & x > b \end{cases}$$

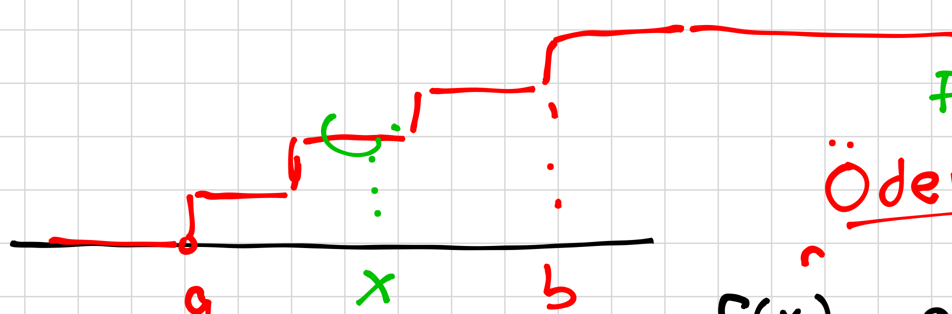


BDF
örnek

$x < a \qquad F(x) = 0$

$a \leq x \leq b \qquad \sum_{k=a}^{x} f_1(k) = F(x) = \sum_{k=-\infty}^{a-1} 0 + \sum_{k=a}^{x} f_1(k)$

$x > b \qquad \sum_{k=a}^{b} f_1(k) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f_1(k) = 1 = F(x)$



$F(x)$

Ödev   Ayrık RD

$$f(x) = \alpha e^{-|x|} \qquad -\infty < x < \infty$$

α - BDF - ?

örnek

X bir AYRIK RD, OKF

$$f(x) = \alpha e^{-|x|}, \quad x \in \mathbb{Z}$$

a) $\alpha = ?$ b) BDF

a) $\sum_{x=-\infty}^{+\infty} f(x) = 1 \qquad \sum_{x=-\infty}^{-1} \alpha e^{x} + \sum_{x=0}^{\infty} \alpha e^{-x} = 1$

$\alpha = \ldots$

b) $F(x) = \sum_{k=-\infty}^{x} f(k) \qquad x < 0$ için $F(x) = \sum_{k=-\infty}^{x} \alpha e^{x}$

$x \geq 0$ için
$F(x) = \sum \ldots$

$x \geq 0$ için $F(x) = \sum_{k=-\infty}^{-1} \alpha e^{k} + \sum_{k=0}^{x} \alpha \cdot e^{-k} = \sim$

Sürekli RD'ler fonksiyonlarına devam ediyoruz

Örnek

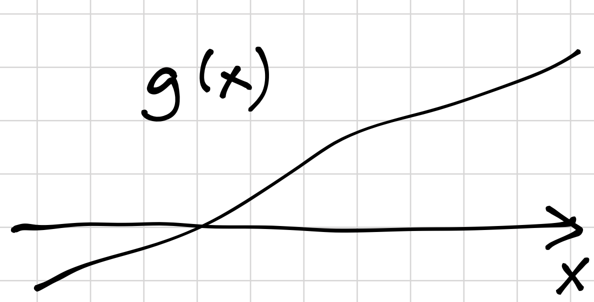
X bir sürekli R.D ve OYF f_X olsun. $Y = |X|$'in OYF'nu bulunuz.

$y \geq 0$ olur. ~~$y \alpha$~~

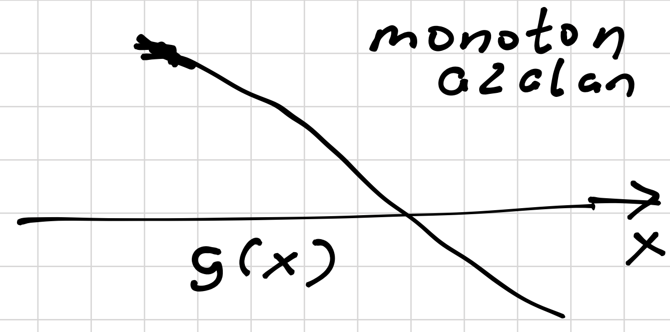
$$F_Y(y) = P(Y \leq y)$$
$$= P(|X| \leq y)$$
$$= P(-y \leq X < y)$$
$$= F_X(y) - F_X(-y) \text{ olur.}$$

$$f_Y(y) = \frac{d}{dy} F_Y(y)$$
$$= \begin{cases} f_X(y) + f_X(-y), & y \geq 0 \text{ için} \\ 0, & y < 0 \text{ için} \end{cases}$$

Tanım Bir $g(x)$ fonksiyonu için herhangi $x_1, x \in \mathbb{R}$ ve $\boxed{x_1 < x_2}$ için $\boxed{g(x_1) < g(x_2)}$ ise $g(x)$'e monoton olarak artan fonksiyon denir. Eğer $\boxed{x_1 < x_2}$ için $\boxed{g(x_1) > g(x_2)}$ ise $g(x)$'e monoton olarak azalan bir fonksiyon denir.



monoton artan



Teorem X bir Sürekli R.D. ve Olasılık Yoğunluk fonksiyonu f_X olsun. $g(x)$, x'in monoton olarak artan VEYA azalan bir fonksiyonu olsun. $Y=g(X)$ olarak verile bir R.D'in Olasılık Yoğunluk Fonksiyonu aşağıdaki gibi bulunur.

$y=g(x)$ yazarsak $x=g^{-1}(y) \triangleq u(y)$

$$f_Y(y)=\begin{cases} f_X[u(y)]\cdot\left|\dfrac{du(y)}{dy}\right|, & y=g(x),\ \forall x\in\mathbb{R} \text{ için} \\ 0, & y\neq g(x) \text{ olduğunda} \end{cases}$$

İspatı $g(x)$, x'in m. artan bir fonksiyonu olsun. $Y=g(X)$ için

$$F_Y(y)=P(g(X)\leq y)$$
$$=P[X\leq g^{-1}(y)]$$
$$=F_X[g^{-1}(y)]$$

$f_Y(y)=\dfrac{d}{dy}F_Y(y)$ idi, burdan

$f_Y(y)=f_X[g^{-1}(y)]\cdot\dfrac{d}{dy}[g^{-1}(y)]$ olduğu görülür.

($g^{-1}(y)$ y'nin azalmayan bir fonksiyonudur, bu yüzden türevi pozitiftir.)

Ödev $\longrightarrow$ $g(x)$, x'in mon. azalan fonksiyonu ise ispat yapınız.

Örnek

X, SRD ve OYF

$$f(x)=\begin{cases} 2x, & \underline{\underline{0}}<x<\underline{\underline{1}} \\ 0, & \text{diğer} \end{cases}$$

$Y=g(X)=4X$ 'in OYF'nu bulunuz.

Çözüm

$y=g(x)=4x$ verilen aralıkta x'in monoton artan bir fonksiyonudur.

$$y=g(x)=4x$$

$$x=u(y)=g^{-1}(y)=\frac{y}{4} \qquad \frac{du(y)}{dy}=\frac{1}{4}$$

Formülden:

$$f_Y(y)=f_X[y/4]\cdot\left|\frac{1}{4}\right|=2\cdot\frac{y}{4}\cdot\frac{1}{4}=\frac{y}{8} \qquad g(0)<y<g(1)$$

$$\underline{\underline{0<y<4}}$$

$$f_Y(y)=\begin{cases} y/8, & 0<y<4 \\ 0, & \text{diğer} \end{cases}$$

Örnek

X, bir S.R.D ve POZİTİF olsun,

(yani $x<0$ için $f_X(x)=0$)

$Y=X^n$ 'in O.YF'unu bulunuz.

Çözüm $y=g(x)=x^n$ diyelim.

$$x=u(y)=g^{-1}(y)=y^{1/n} \qquad \frac{du(y)}{dy}=\frac{1}{n}\cdot y^{\frac{1}{n}-1}$$

$x=0$ iken $g(x)=y=0$ 'dır. Bu yüzden $\underline{\underline{y>0}}$ için

$$f_Y(y)=\begin{cases} \left|\frac{1}{n}\cdot y^{\frac{1}{n}-1}\right|\cdot f_X\left[y^{1/n}\right], & y>0 \text{ için} \\ 0, & y\le 0 \text{ için} \end{cases}$$

Örnek X, SRD ve Birikimli Dağılım Fonksiyonu

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ (1 - e^{-2x}), & x \geq 0 \end{cases}$$

olarak verilmişse $Y = X^2$ için OYF nedir?

Çözüm X'in OYF

$$f_X(x) = \frac{d}{dx} F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 2 \cdot e^{-2x}, & x \geq 0 \end{cases}$$

$y = x^2 = g(x)$ dersek

$$x = u(y) = g^{-1}(y) = y^{1/2} \qquad \frac{du(y)}{dy} = \frac{1}{2} y^{-1/2}$$

$y \geq g(0) \Rightarrow y \geq 0$ için

$$f_Y(y) = f_X\left[y^{1/2}\right] \cdot \left| \frac{1}{2} \cdot y^{-1/2} \right|$$

$$= 2 \cdot e^{-2\sqrt{y}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{y}} = \frac{1}{\sqrt{y}} e^{-2\sqrt{y}}, \quad y \geq 0 \text{ için}$$

Örnek X, SRD ve

$$f_X(x) = \begin{cases} 2/x^2, & 1 < x < 2 \\ 0, & \text{diğer} \end{cases}$$

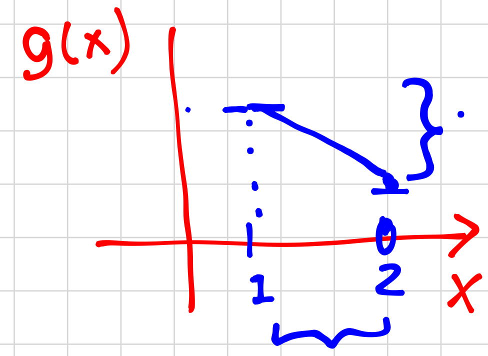
$Y = -\ln(X)$'in OYF = ?

Çözüm $\quad y = g(x) = -\ln(x)$ diyelim

verilen aralıkta $g(x)$ azalan bir fonksiyondur.

$$\ln(x) = -y$$

$$x = e^{-y} = u(y)$$



$$\frac{du(y)}{dy} = -e^{-y}$$

$$f_Y(y) = f_X\left[e^{-y}\right] \left|-e^{-y}\right|$$

$f_X(x) = \frac{2}{x^2}$

$\frac{2}{e^{-2y}}$

$$= \frac{2}{e^{-2y}} \cdot e^{-y} \qquad -\ln(2) < y < -\ln(1)$$

$$-0.6931 < y < 0$$

$$\boxed{f_Y(y) = 2 \cdot e^{+y} \qquad -\ln(2) < y < -\ln(1)}$$

— Genel Örnek Sorular —

örnek $\quad X$ bir sürekli R.D. ve OYF

$$f(x) = \begin{cases} c(1-x^2) & , -1 < x < 1 \\ 0 & , \text{diğer} \end{cases}$$

a) $c = ?$ $\quad$ b) X'in BDF $= ?$

a)

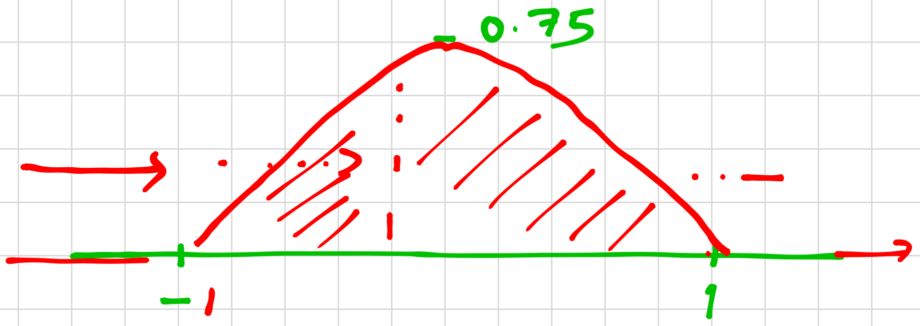
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = 1 \quad \text{olmalı}$$

$$\int_{-1}^{1} c(1-x^2)\, dx = 1$$

$$c\left(x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-1}^{1} = 1$$

$$c\left[\left(1 - \frac{1}{3}\right) - \left(-1 + \frac{1}{3}\right)\right] = 1$$

$$c = \frac{3}{4} = 0.75$$



$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)\,du$$

- $x < -1$ için $F(x) = 0$

- $-1 \leq x < 1$ için

$$F(x) = \int_{-1}^{x} 0.75(1-u^2)\,du$$

$$= \cdots = 0.75\left[x - \frac{x^3}{3} + \frac{2}{3}\right]$$

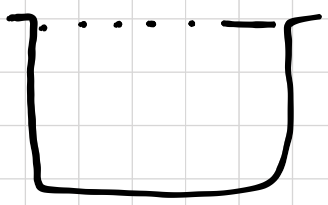
- $x \geq 1$ için $F(x) = 1$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < -1 \\ 0.75x - 0.25x^3 + 0.5, & -1 \leq x < 1 \\ 1, & x \geq 1 \end{cases}$$

Örnek Bir benzin istosyonunda haftada 1 kez benzin sağlanmanktadır. Bir haftada yapılan benzin satışı 1000-ton cinsinden aşağıdaki R.D ile gösterilmektedir.

$$f(x) = \begin{cases} 5(1-x)^4, & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{diğer} \end{cases}$$

1 haftada yapılan benzin satışının istasyonun deposundaki benzini bitirme ihtimalinin %1 olması için benzin deposunun kaç tonluk olması gerekir?



α : deponun büyüklüğü diyelim.

X : satılan benzin miktarı.

$$P(X \geqslant \alpha) = 0.01 = \int_{\alpha}^{1} 5(1-x)^4 \, dx$$

$$\Rightarrow \quad 5 \cdot \left(-\frac{1}{5}\right) \left[(1-x)^5\right]_{\alpha}^{1} = 0.01$$

$$(1-\alpha)^5 = 0.01$$

$$\alpha = 1 - \sqrt[5]{0.01} =$$

$$\alpha = 0.6019 \text{ bin ton}$$

$$\boxed{\alpha = 601.9 \text{ ton}}$$

Örnek Bir elektronik parçanın yaşam süresi yıl olarak X R.D. ile gösteriliyor ve X'in OYF :

$$f(x) = x \cdot e^{-x} \quad , \quad x \geqslant 0$$

Bu parçanın ortalama ömrü nedir?

$$E(X) = \int_0^{\infty} x \cdot x \cdot e^{-x} \, dx = \int_0^{\infty} x^2 e^{-x} \, dx$$

Gama Fonksiyonu — $\Gamma(r) = \int_0^{\infty} x^{r-1} \cdot e^{-x} \cdot dx$

$$\Gamma(r) = (r-1)!$$

$$E(x) = \Gamma(3) = 2!$$

$$E(X) = 2 \text{ yıl.}$$

Birleşik (Ortak) Olasılık Dağılımları

(Chapter 5)

Birleşik Olasılık Dağılımları

İki ve daha fazla ayrık olasılık değişkenleri

Örnek Bir uçağın kalkış saatini öğrenmek için cep telefonundan havayolunun otomatik cevaplama sistemini aradığımızı varsayalım. Bu cevaplama sisteminden bilgi alabilmek için telefonda kalkış şehrinin ismini söylememiz gerekiyor, eğer ses tanıma sistemi şehir ismini doğru algılarsa cevap veriyor, algılamazsa tekrar ettiriyor. Bu aramalar sırasında cep telefonunuzun sinyal kuvvet seviyesini ve ses tanıma sistemi şehir ismini doğru algılayıncaya kadar yapmanız gereken tekrar sayısını takip ettiğinizi varsayalım.

Bu aramalar için

X: cep telefonunuzun sinyal kuvvet seviyesi

seviyesini ve ses tanıma sistemi şehir ismini doğru algılayıncaya kadar yapmanız gereken tekrar sayısını takip ettiğinizi varsayalım.

Bu aramalar için

X: cep telefonunuzun sinyal kuvvet seviyesi

Y: şehir ismini tekrar etme sayınız

olsun.

Ses tanıma sisteminin şehir ismini x ve y'nin değerlerine göre algılama olasılığını tabloya yazalım.

y: tekrar sayısı	x = sinyal kuvvet seviyesi: 1	2	3
4	0.15	0.1	0.05
3	0.02	0.1	0.05
2	0.02	0.03	0.2
1	0.01	0.02	0.25

Bu sayede biz X ve Y'nin birleşik olasılık dağılımını göstermiş olduk.

Tanım X ve Y rastgele değişkenleri için X ve Y ayrıksa "Birleşik O.K.F" aşağıdaki şartları sağlar.

1. $0 \leq f_{XY}(x,y) \leq 1 \quad \forall x,y$
2. $\sum_x \sum_y f_{XY}(x,y) = 1$
3. $f_{XY}(x,y) = P(X=x, Y=y)$

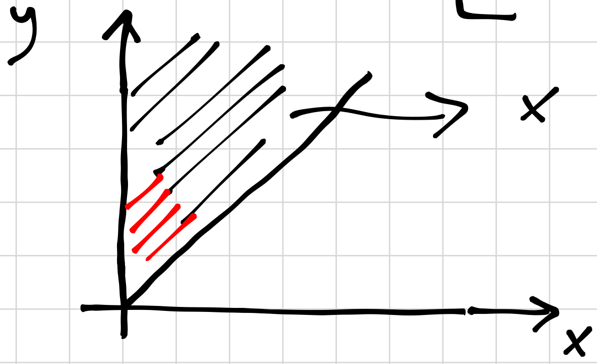
X, Y sürekli ise Birleşik O.Y.F. aşağıdaki şartları sağlar

1. $f_{XY}(x,y) \geq 0 \quad \forall x,y$
2. $\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x,y)\,dx\,dy = 1$
3. R, xy düzlemindeki herhangi bir bölge ise

$$P\left[(X,Y) \in R\right] = \iint_R f_{XY}(x,y)\,dx\,dy$$

Örnek Bir sürekli X, Y rastgele değişken çiftinin birleşik O.Y.F şöyledir.

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} 12\, e^{-x-3y}, & x>0 \text{ ve } x<y \text{ için} \\ 0, & \text{diğer} \end{cases}$$

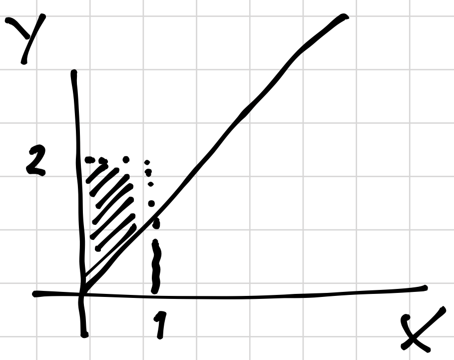


→ x ve y'nin sıfırdan farklı olduğu bölge

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x,y)\,dx\,dy =$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{x}^{\infty}\left(12\cdot e^{-x}e^{-3y}\right)dy\,dx = 1$$

b) $P(X<1,\ Y<2) = ?$



$$= \int_{0}^{1}\left(\int_{x}^{2} 12\cdot e^{-x}\cdot e^{-3y}\,dy\right)dx$$

$$= 12\int_{0}^{1} e^{-x}\left[\int_{x}^{2} e^{-3y}\,dy\right]dx$$

$$= 4\int_{0}^{1}\left(e^{-4x} - e^{-6}e^{-x}\right)dx = 0.9754$$

Bileşen Olasılık Dağılımları