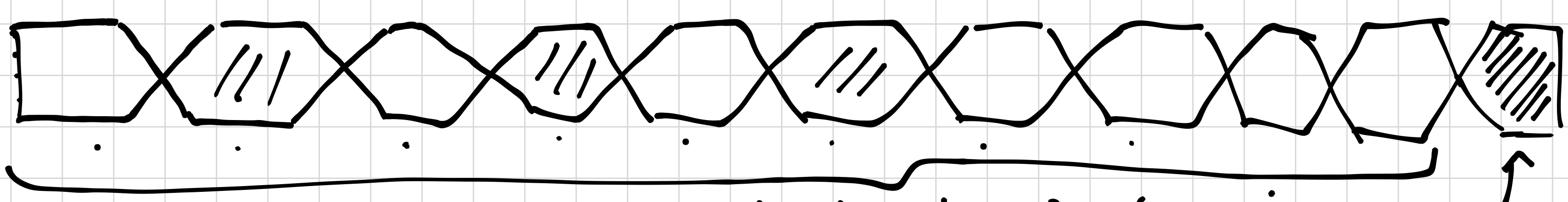
Negatif Binom Dağılımı:

Örnek Bir dijital kanaldan gönderilen bir bitin hatalı olma ihtimali 0.1'dir. Bitlerin birbirinden bağımsız olduğunu varsayarsak, X 4. hatalı bitle karşılaşıncaya kadar gönderilen bit sayısı ise, $X=10$ olma ihtimali nedir



$$P(X=10) = \underbrace{\binom{9}{3} 0.1^3\, 0.9^6}_{\text{binom}} \times 0.1$$

$$= \binom{9}{3} 0.1^4\, 0.9^6$$

Tanım Bir rastgele deney bir dizi Bernoulli denemesinden oluşuyor ve her denemenin başarılı olma olasılığı p olsun. X: r adet başarılı deneme oluşuncaya kadar yapılan deneme sayısı ise, X bir "negatif binomiyel rastgele değişken"dir ve parametreleri p ve r'dir.

OKF:

$$P(X=x) = f(x) = \binom{x-1}{r-1} \cdot (1-p)^{x-r}\, p^r \qquad x = r, r+1 \ldots$$

Ortalama ve Varyans

$$E(X^k) = \sum_{x=r}^{\infty} x^k \binom{x-1}{r-1} (1-p)^{x-r}\, p^r$$

$$/*\quad x\binom{x-1}{r-1} = r\binom{x}{r} \quad */$$

$$E(X^k) = \sum_{x=r}^{\infty} x \cdot x^{k-1} \binom{x-1}{r-1} (1-p)^{x-r} \cdot p^r$$

$Y = X+1$

$$= \sum_{x=r}^{\infty} r \cdot x^{k-1} \cdot \binom{x}{r} \cdot (1-p)^{x-r}\, p^r$$

$y = x+1$

$$= \frac{r}{p} \cdot \sum_{y=r+1}^{\infty} (y-1)^{k-1} \binom{y-1}{r} \cdot p^{r+1} \cdot (1-p)^{y-(r+1)}$$

$$= \frac{r}{p} \cdot E\left[(Y-1)^{k-1}\right] = E(X^k)$$

Y'nin parametreleri $r+1$ ve p'dir.

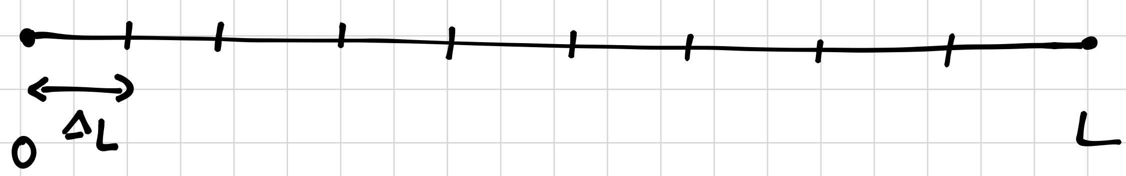
$$k=1 \rightarrow E(X) = \frac{r}{p} E(1) = \frac{r}{p}$$

$$E(X^2) = \frac{r}{p} E(Y-1) = \frac{r}{p}\left[\frac{r+1}{p} - 1\right]$$

$$\sigma^2 = V(X) = E(X^2) - \mu^2 = \frac{r}{p}\left[\frac{r+1}{p} - 1\right] - \frac{r^2}{p^2}$$

$$= \frac{r(1-p)}{p^2} \quad \blacksquare$$

Poisson Dağılımı



n adet parçaya bölelim. $\Delta L = \frac{L}{n}$ olsun.

Bu parçalar yeterince küçük ~~olsun~~ olsun öyle ki her parçadaki en fazla 1 adet hata bulunuyor olsun ve bu hatanın oluşma olasılığı p olsun, ayrıca her parçadaki hata oluşma olayı birbirinden bağımsız olsun.

ΔL küçültüp, n'i artıralım öyle ki L boyunca ortalama hata sayısı λ sabit kalsın. Bu kablo hata sayısı "Poisson Süreci" dediğimiz bir süreci takip eder.

Tanım Bir rastgele deneyde reel sayıların bir aralığında rastgele olaylar oluşuyor. Bu reel sayı aralığı alt aralıklara bölünebiliyor ve

1. Birden fazla olayın aynı alt aralığa gelme olasılığı 0
2. Her alt-aralıktaki olay olma ihtimali bütün alt aralıklar için aynı,
3. Her alt aralıktaki olay diğer alt-aralıklardaki olaylardan bağımsız

ise bu rastgele deneye "Poisson Süreci" denir.

X: bu aralıktaki olay ulusma sayısını gösteren rastgele değişken ise, X bir "Poisson rastgele değişkeni" dir ve OKF'si, λ aralıktaki ortalama hata sayısı $E(X)=\lambda$ ise

$$P(X=x)=f(x)=\frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!} \qquad x=0,1\ldots$$

Örnek İnce bir bakır telin üzerindeki hataların Poisson sürecini takip ettiğini varsayalım, ve ortalamada 2.3 hata/mm olsun. 1 mm telde 2 hata olma olasılığı nedir.

X: 1 mm teldeki hata sayısı olsun

$$\lambda=E[X]=1\text{ mm}\times 2.3\text{ hata/mm}=2.3\text{ hata}$$

$$P(X=2)=\frac{e^{-2.3}\times 2.3^{2}}{2!}=0.265$$

5 mm telde 10 hata olma ihtimali?

Y: 5 mm teldeki hata sayısı

$$\lambda_Y=E[Y]=5\text{ mm}\times 2.3\text{ hata/mm}=11.5$$

$$P(Y=10)=\frac{e^{-11.5}\times 11.5^{10}}{10!}=0.113$$

Binom Dağılımı ve Poisson Dağılımları Arasındaki İlişki

Büyük n ve küçük p için, Poisson dağılımının binom dağılımını hesaplamada uygun bir yakınsama olduğunu gösterebiliriz.

Binom için $f(x)=\binom{n}{x}p^{x}(1-p)^{n-x}$

$$f(x)=\frac{n(n-1)\ldots(n-x+1)}{x!}\cdot p^{x}\cdot(1-p)^{n-x}$$

$$=\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{x-1}{n}\right)}{x!}(np)^{x}\left(1-\frac{np}{n}\right)^{n-x}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{x-1}{n}\right)=1$$

$\lambda=np$ sabit kalsın

$$\left(1-\frac{np}{n}\right)^{n-x} = \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n} \Big/ \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{x}$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n} \cong e^{-\lambda}$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{x} = 1$$

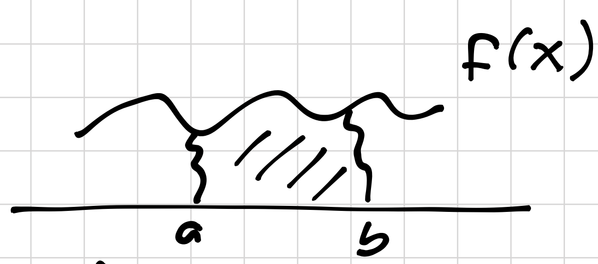
$$\lim_{n\to\infty} f(x) = \frac{\lambda^{x} \cdot e^{-\lambda}}{x!} \Bigg\} \checkmark$$

Ortalama ve Varyans

$\mu = E[X] = \lambda \qquad V(X) = \sigma^2 = \lambda$

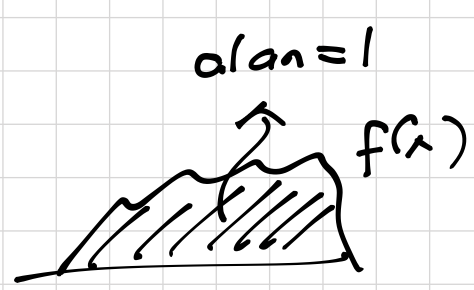
* Sürekli Rastgele Değişkenler *

Bir rastgele değişkenin alabileceği değerler sayılamaz sonsuz sayıdaki noktadan oluşuyorsa bu rastegele değişkene "sürekli R.D." denir.

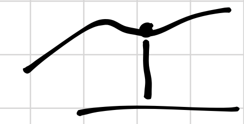


Tanım

X sürekli bir rastgele değişken ise, X'in olasılık yoğunluk fonksiyonu aşağıdaki şartları sağlar



1. $f(x) \geq 0$
2. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$
3. $P(a \leq X \leq b) = \int_{a}^{b} f(x)\,dx$



Bir sürekli rastgele değişken X için $P(X=x)=0$ yani tek bir noktada değer almalarının olasılığı "0" dır. Ayrıca

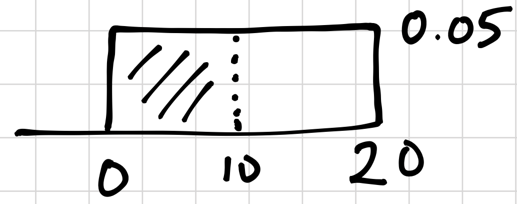
$$P(x_1 \leq X \leq x_2) = P(x_1 < X \leq x_2) = P(x_1 \leq X < x_2)$$
$$= P(x_1 < X < x_2)$$

Örnek X : bir S.R.D., OYF aşağıdaki gibidir

$$f(x) = \begin{cases} k, & 0 < x < 20, \quad k \in \mathbb{R} \\ 0, & \text{diğer} \end{cases}$$

$k = ?$ ayrıca $P(X < 10) = ?$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$$



$$\int_{0}^{20} k \cdot dx = kx \Big|_0^{20} = 20k = 1$$

$$k = 0.05$$

$$P(X < 10) = \int_0^{10} 0.05\,dx = \underline{\underline{0.5}}$$

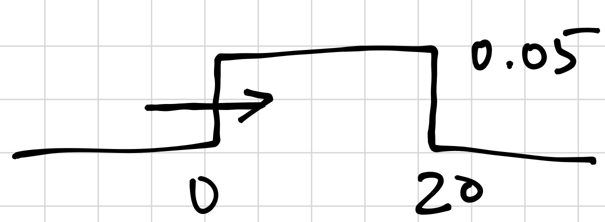
Birikimli Dağılım Fonksiyonları (BDF)

X : sürekli bir R.D., OYF $f(x)$ ise

BDF :

$$F(x) = P(X \leqslant x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)\,du$$

Örnek Bir önceki örnekteki RD için BDF'nu bulunuz.

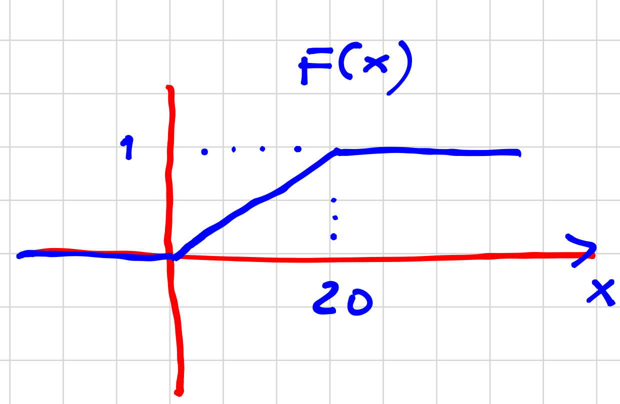


$x < 0 \rightarrow f(x) = 0 = F(x) = 0$

$0 < x < 20 \rightarrow F(x) = \int_0^x f(u)\,du = 0.05x$

$x > 20 \rightarrow F(x) = \int_0^{20} f(u)\,du = 1$

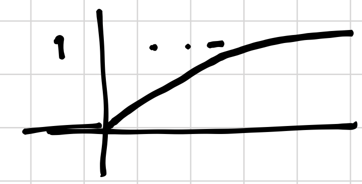
$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 0.05x, & 0 \leqslant x \leqslant 20 \\ 1, & x > 20 \end{cases}$$



$$\boxed{f(x) = \frac{d}{dx} F(x)}$$

Örnek Bir kimyasal reaksiyonun bitmesi için gereken süre BDF aşağıdaki gibi verilen bir rasgele değişken X olsun.

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ 1 - e^{-0.01x}, & x > 0 \end{cases}$$



X'in OYF'nu bulunuz

$$f(x) = \frac{d}{dx} F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ 0.01\, e^{-0.01x}, & x > 0 \end{cases}$$

Sürekli R.D.'in ortalama ve varyansı

Tanım: X bir S.R.D ise

Beklen Değeri $\mu = E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f(x)\, dx$

Varyansı
$$\begin{aligned} \sigma^2 = V(X) &= E\left((X-\mu)^2\right) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^2 f(x)\, dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\, dx - \mu^2 \\ &= E(X^2) - \left(E(X)\right)^2 \end{aligned}$$

Standard sapma

$$\sigma = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\sigma^2}$$

Örnek

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0,\ x > 20 \\ 0.05, & 0 \leq x \leq 20 \end{cases}$$

$$\mu = \int_0^{20} x \cdot 0.05 \cdot dx = 0.05\, x^2/2 \Big|_0^{20} = 10$$

$$\sigma^2 = \int_0^{20} (x-10)^2\, 0.05\, dx = 0.05 \frac{(x-10)^3}{3} \Big|_0^{20}$$

$$= \underline{33.33}$$

Rastge Değişkenlerin Fonksiyonlarının Beklenen Değeri

Örnek

$$f(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{diğer} \end{cases}$$

$$E(e^x) = ?$$

$Y = e^X$ diyelim. ve Y'nin birikimli dağılım fonksiyonu ile başlayalım,

Y'nin BDF F_Y olsun.

$x=0$ için $y = e^0 = 1$ olur

$x=1$ " $y = e^1 = e$ olur.

$$F_Y(x) = P(Y \leq x) = P(e^X \leq x)$$

$$= P(X \leq \ln(x))$$

$$= \int_0^{\ln(x)} f_X(y)\, dy = \ln(x)$$

$$f_Y(x) = \frac{d}{dx} F_Y(x) = \frac{1}{x} \qquad 1 \leq x < e$$

$$E(e^X) = E(Y) = \int_1^e x \cdot \frac{1}{x} \cdot dx = e - 1$$

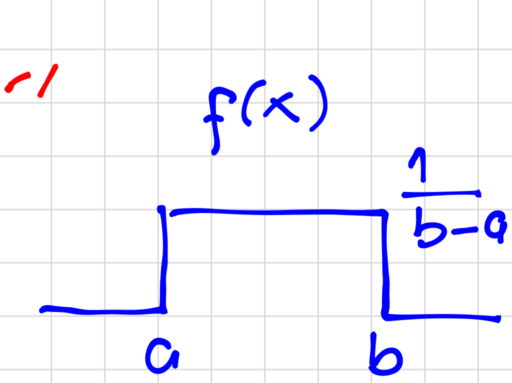
Tanım $g(X)$, X'in bir fonksiyonu ise

$$E[g(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f(x)\, dx$$

$$- \quad E[e^X] = \int_0^1 e^x \cdot 1 \cdot dx = e - 1$$

Sürekli Olasılık Dağılımları

– Sürekli birbiçimli Dağılım



X sürekli bir R.D ve OYF

$$f(x) = \begin{cases} 1/b-a, & a \leq x \leq b, \\ 0, & \text{diğer} \end{cases}$$

ise X bir sürekli birbiçimli rastgele değişkendir.

Ortalama ve Varyans

$$E(X) = \int_a^b X \cdot \frac{1}{b-a} \cdot dx = \frac{1}{b-a} \cdot \frac{1}{2} \cdot x^2 \Big|_a^b = \frac{a+b}{2}$$

$$V(X) = \int_a^b \frac{1}{b-a} \left[x - \frac{b+a}{2}\right]^2 \cdot dx$$

$$= \frac{(b-a)^2}{12}$$