- Sınava 1 adet notlarınızı ve formüllerinizi yazdığınız (A4, arkalı-önlü) kağıtla gelebilirsiniz. Soru çözümleri OLMAYACAK.
- 1 adet hesap makinası.
- 1 adet silgi.

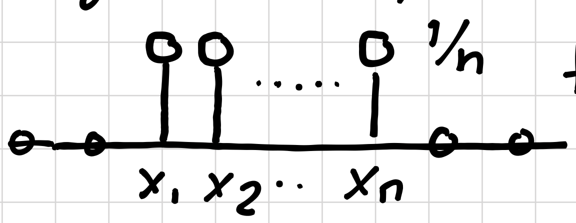
Olasılık Dağılımları

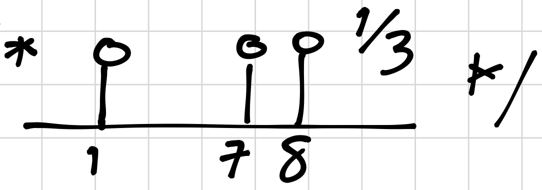
(*) Ayrık Birbiçimli (üniform) Dağılım.

Tanım : Bir rastgele değişken X için, X'in alabileceği değerler $x_1, x_2, \ldots, x_n$ eşit olasılıklara sahiplerse yani

$$P(X=x_i) = f(x_i) = \frac{1}{n} \quad (1 \leq i \leq n)$$

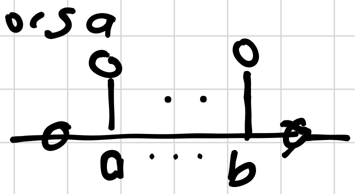
X "ayrık birbiçimli rastgele değişken"dir denir.





X_i belirli bir aralıkta tamsayılardan oluşuyorsa

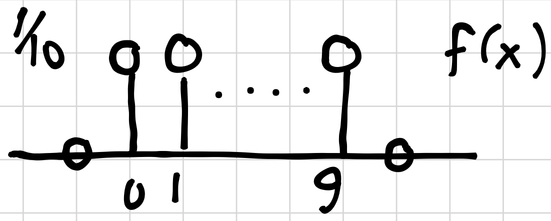
$$P(X=x) = f(x) = \begin{cases} 1/(b-a+1), & a \leq x \leq b \\ 0, & \text{diğer} \end{cases}$$



Örnek

Bir ürünün seri numarasının ilk rakamı eşit olasılıkla 0..9 arasında bir sayıdır. Bu rakamı rastgele değişken X ile gösterirsek, X'in dağılımı nedir. (OKF)

$n = 10$ $\quad f(x) = \begin{cases} 1/10, & 0 \leq x \leq 9 \\ 0, & \text{diğer} \end{cases}$



$$\boxed{/* \quad \sum_{k=a}^{b} k = \frac{b(b+1)-(a-1)a}{2}}$$

Ortalama ve Varyans

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a+1}, & a \leq x \leq b \\ 0, & \text{diğer} \end{cases}$$

beklenen değer $\mu = E(X) = \sum_{x=a}^{b} x \cdot \frac{1}{(b-a+1)} = \frac{b+a}{2}$

varyans $\sigma^2 = V(X) = E[(X-\mu)^2] = \frac{(b-a+1)^2 - 1}{12}$

$E[X^2] - \mu^2$

Binom Dağılımı

$\sum k^2 = \sim$

- Bir parayı 10 defa atalım. $X=$ gelen $\underbrace{\text{tura}}_{}$ sayısı
- Bir makinanın ürettiği ürünlerden %1'i hatalıdır. $X=25$ üründen hatalı ürün sayısı.

Bernoulli Denemesi (Bernoulli Trial)

Sadece muhtemel 2 sonucu olan bağımsız deneylere "Bernoulli Denemesi" denir. Muhtemel sonuçlardan birine «başarılı», diğerine «başarısız» denir. Hangi sonucun "başarılı" sayıldığını rastgele değişken belirler.

- Para denemesi – „tura" gelmesi başarılı sayılır.
- Makina örneğinde "hatalı ürün" gelmesi başarılı sayılır.

Tanım

Bir rastgele deney (n) adet Bernoulli denemesinden oluşuyorsa, öyle ki

1. Deneyler birbirinden bağımsız
2. Her deneyin muhtemel 2 sonucu var: "Başarılı" ve "başarısız"
3. Her denemede başarı ihtimali (P)

X bu deneydeki başarılı sonuç sayısını gösteren bir rastgele değişken ise X bir "binomiyel rastgele değişken"dir ve parametreli n ve p'dir. OKF

$$P(X=x)=f(x)=\binom{n}{x}p^{x}(1-p)^{n-x} \qquad x=0,1,\dots,n$$

Örnek Bir haberleşme sistemi $\underline{\underline{n}}$ adet parçadan oluşmaktadır, her bir parçanın bozulma olayı diğerlerinden bağımsızdır ve çalışma ihtimali p'dir. Bu sistemin çalışır sayılması için parçaların <u>en az</u> yarısının çalışması gerekmektedir.

a) p'nin hangi değerleri için 5-parçalı bir sistem, 3 parçalı bir sistemden daha güvenilirdir.

X: 5 parçalı bir sistemde (1. sistem) çalışan parça sayısı

Y: 3 " " (2. sistem) " " "

Bu iki R.D. binom dağılımına sahiptir.

1. sistemin çalışması için $X \geq 3$ olmalı
2. " " için $Y \geq 2$ "

$$P(X \geq 3) > P(Y \geq 2)$$

$$P(X\geq 3) = P(X=3) + P(X=4) + P(X=5)$$
$$= f_X(3) + f_X(4) + f_X(5)$$
$$= \binom{5}{3} p^3(1-p)^{5-3} + \binom{5}{4} p^4 (1-p)^{5-4}$$
$$+ \binom{5}{5} p^5 (1-p)^0$$
$$= 10p^3(1-p)^2 + 5p^4(1-p) + p^5$$

$$P(Y\geq 2) = \binom{3}{2} p^2(1-p) + p^3$$
$$= 3p^2(1-p) + p^3$$
$$\vdots$$
$$3(p-1)^2(2p-1) > 0$$
$$\vdots$$
$$p > \frac{1}{2}$$

Binom Dağılımının Özellikleri

$$E(X^k) = \sum_{x=0}^{n} x^k \cdot \binom{n}{x} \cdot p^x (1-p)^{n-x}$$
$$= \sum_{x=1}^{n} x^k \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$$

$$x\binom{n}{x} = n\binom{n-1}{x-1}$$

Y: parametreleri $n-1$ ve p olan bir binomiyel R.D ise

$$x \cdot \frac{n!}{(n-x)!\,x!} = n \cdot \frac{(n-1)!}{(n-x)!\,(x-1)!}$$

$$E(X^k) = np \sum_{x=1}^{n} x^{k-1} \binom{n-1}{x-1} p^{x-1} \cdot (1-p)^{n-x} \qquad j = x-1$$
$$= np \sum_{j=0}^{n-1} (j+1)^{k-1} \binom{n-1}{j} p^j (1-p)^{n-1-j}$$
$$= n.p \cdot E\left[(Y+1)^{k-1}\right]$$

(Y: binom $n-1, p$)

$$k=1 \qquad E(X^1) = \mu = n.p\, E\left[(Y+1)^0\right] = n.p$$

$$k=2 \qquad E(X^2) = np\, E(Y+1)$$

$$E(Y+1) = E(Y) + 1$$

$$= np\left[(n-1)p + 1\right]$$

σ^2

$$V(X) = E(X^2) - \mu^2 = \boxed{np(1-p)}$$

-1: Y: binomiyel $n-1$, p

$$f_Y(y) = \binom{n-1}{y} \cdot p^y \cdot (1-p)^{n-1-y}$$

$$E[\underbrace{(Y+1)^k}_{g(Y)}] = \sum_{y=0}^{\infty} (y+1)^k \cdot \binom{n-1}{y} p^y (1-p)^{n-1-y}$$

y yerine j yazarsan aynı şey olduğunu görürsünüz.

/* $E(aX+b) = a\,E(X) + b$ */

Binomiyel R.D, X'in

Beklenen Değeri } $\mu = E(X) = n \cdot p$

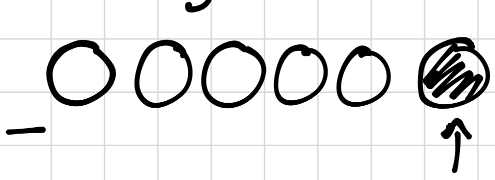
Varyansı } $\sigma^2 = V(X) = np(1-p)$

Geometrik Dağılım

örnek: Bir dijital kanaldan geçen bir bitin hatalı olma ihtimali 0.1'dir.

X: Hatalı bit saptanıncaya kadar incelenen bit sayısı.

O : hatası ⊘ : hatalı



O: Hatasız bit olayı E: hatalı bit olayı

$$P(\underbrace{OO\ldots O}_{x-1}E) = (1-p)^{x-1} \cdot p$$

Tanım: Bir dizi Bernoulli denemesinden oluşan bir ratgele deneyde her denemede başarılı sonuç ihtimali p dir ve başarılı bir sonuç bulununcaya kadar yapılan deney sayısını X rastele değişkeni ile gösterirsek X bir "geometrik rastgele değişken" dir ve parametresi p'dir. OKF:

$$f(x) = P(X=x) = (1-p)^{x-1} \cdot p$$

Ortalama • $q = 1-p$ dersek $\qquad \sum$

$$E(X) = \sum_{x=1}^{\infty} x \cdot q^{x-1} \cdot p = \sum_{x=1}^{\infty} (x-1+1)\, q^{x-1} \cdot p$$

$$= \sum_{x=1}^{\infty} (x-1) \cdot q^{x-1} \cdot p + \sum_{x=1}^{\infty} q^{x-1} \cdot p \qquad y = x-1$$

$$+ p \sum_{x=1}^{\infty} q^{x-1}$$

$$= \sum_{y=0}^{\infty} y \cdot q^{y} \cdot p \qquad + p \cdot \underbrace{\sum_{y=0}^{\infty} q^{y}}$$

$$= q \cdot \underbrace{\sum_{y=1}^{\infty} y \cdot q^{y-1} \cdot p}_{E(X)} \qquad + \underbrace{p \cdot \frac{1}{1-q}}_{1}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \beta^{k} = \frac{1}{1-\beta} \qquad 0<\beta<1$$

$$E(X) = q \cdot E(X) + 1$$

$$E(X) = \frac{1}{1-q} = 1/p$$

Geometrik rastgele değişkenin beklen değeri $\boxed{E(X) = \mu = 1/p}$

Ödev: Açıklamalı varyans ve beklenen değeri bulunuz.

Varyans $\qquad \sigma^2 = V(X) = \dfrac{1-p}{p^2}$

Hafızasızlık Özelliği

$$P(X \geq k+i \mid X > i) = P(X \geq k)$$

Bir geometrik rastgele değişken ilk başarılı denemeye kadar yapılan deneme sayısı olarak tanımlandı. Denemeler birbirinden bağımsız olduğu için bir sonraki başarılı denemeye kadar yapılan denemeleri saymaya herhangi bir noktadan itibaren başlayabiliriz. Mesela bir veri transfer probleminde, 100 bit transfer edildikten sonra 106. bitte hata oluşma olasılığı, baştan sayarsak 6. " " " " " ile aynıdır.

$P(X \geq 106 \mid X \geq 100) = P(X \geq 6)$

$P(X \geq 106 \mid X \geq 100) =$

Bu yüzden geometrik R.D.'de hafızasızlık vardır denir.

Ortalama (Tekrar)

$$f(x) = (1-p)^{x-1} \cdot p \qquad (x \geq 1) \qquad q = 1-p \text{ diyelim}$$

$$E(X) = \sum_{x=1}^{\infty} x \cdot f(x) = \sum_{x=1}^{\infty} x \cdot q^{x-1} \cdot p$$

$$p \sum_{k=1}^{\infty} q^{k} = \frac{p \cdot q}{1-q}$$

/* $\frac{d}{dq} q^{x} = x \cdot q^{x-1}$ */

$$E(X) = \frac{d}{dq} \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} p \cdot q^{k}}_{} =$$

$$= \frac{d}{dq} \frac{pq}{1-q} = \frac{p}{(1-q)^2} = \frac{p}{p^2} = 1/p$$