

# Compression d'images par ondelettes

Benjamin CATINAUD

Année 2017 - 2018

# Introduction

- Plus de 2200 photos mises en ligne sur Facebook par seconde<sup>1</sup>
- Débit moyen en France : 8.9 Mbps
- Environ 2 millions d'emails envoyés et reçus par seconde

---

<sup>1</sup>Source : [www.planetoscope.com](http://www.planetoscope.com)

## 1 Théorie des ondelettes

- Une ondelette, c'est quoi ?
- Analyse multi-résolution - Espaces d'approximation
- Analyse multi-résolution - Espaces de détails

## 2 Algorithme de Mallat

- Définitions
- Algorithme de transformation  $WT$
- Algorithme de reconstruction  $WR$
- Et concrètement ?

## 3 Un algorithme efficace ?

- Complexité
- Taux de compression
- Estimation de l'erreur

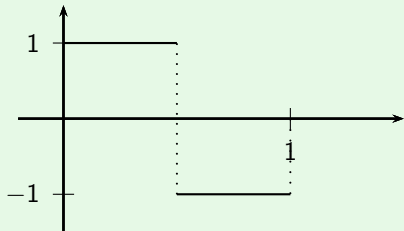
## 4 Bilan visuel

## 5 Conclusion

## Définition : Ondelette

- Fonction  $\psi$  de carré intégrable sur  $\mathbb{R}$   $\left( \int_{\mathbb{R}} |\psi|^2 < +\infty \right)$
- Support de  $\psi$  compact
- $\int_{\mathbb{R}} \psi$  converge et vaut 0

## Exemples : Ondelette de Daubechies et de Haar



## Analyse multi-résolution : Espaces d'approximation

### Définition

Soit  $j \in \mathbb{Z}$ . **Espace d'approximation à l'échelle  $2^j$**  : espace vectoriel  $V_j$  des fonctions de  $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  constantes sur les intervalles de la forme  $[2^j k; 2^j(k+1)[$ ,  $k \in \mathbb{Z}$

### Propriétés fondamentales

- $\forall j \in \mathbb{Z}, V_{j+1} \subseteq V_j$
- $\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j$  est dense dans  $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

### Caractérisation

$$\forall j \in \mathbb{Z}, V_j = \left\langle \left\{ \phi_{j,k} = \frac{1}{\sqrt{2^j}} \mathbb{1}_{[2^j k; 2^j(k+1)[}, k \in \mathbb{Z} \right\} \right\rangle$$

## Analyse multi-résolution

### Définition des espaces de détails

On définit  $W_j$ , pour  $j \in \mathbb{Z}$ , tel que

$$V_{j-1} = V_j \overset{\perp}{\bigoplus} W_j$$

### Caractérisation des espaces de détails

$\forall j \in \mathbb{Z}, W_j =$

$$\left\langle \left\{ \psi_{j,k} = \frac{1}{\sqrt{2^j}} (\mathbb{1}_{[2^{j-1}k; 2^{j-1}(k+1)[} - \mathbb{1}_{[2^{j-1}(k+1); 2^{j-1}(k+2)[}), k \in \mathbb{Z} \right\} \right\rangle$$

### Propriété des fonctions génératrices

On remarque la relation de récurrence :

$$\begin{aligned} \phi_{j,k} &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\phi_{j-1,2k} + \phi_{j-1,2k+1}) \\ \psi_{j,k} &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\phi_{j-1,2k} - \phi_{j-1,2k+1}) \end{aligned}$$

## Définition : Vecteurs associés à la transformation par ondelettes de Haar

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_a &= \frac{1}{2}(1, 1) \in \mathbb{R}^2 \text{ pour les espaces } (V_j)_{j \in \mathbb{Z}} \\ \mathcal{H}_d &= \frac{1}{2}(1, -1) \in \mathbb{R}^2 \text{ pour les espaces } (W_j)_{j \in \mathbb{Z}}\end{aligned}$$

## Définition : Fonction filtre

Pour  $b, x \in \mathbb{R}^n$  et  $a \in \mathbb{R}^*$ , la fonction filtre  $\Phi_{a,b}$  est telle que

$$\forall i \in [1; n], \left( \Phi_{a,b}(x) \right)_k = \frac{1}{a} \sum_{i=1}^k b_i x_{k-i}$$

On notera  $\Phi$  la fonction filtre sur les espaces d'approximation et  $\Psi$  celle sur les espaces de détails

## Définition : Fonction d'échantillonnage

$$\begin{aligned}\downarrow_2: \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^{\lfloor n/2 \rfloor} \\ (x_1, x_2, \dots, x_n) &\longmapsto (x_2, x_4, \dots, x_{2\lfloor n/2 \rfloor})\end{aligned}$$

---

## Algorithme 1 Transformée par ondelettes d'une matrice

---

**Entrée(s)** une matrice  $M \in M_{n,m}(\mathbb{R})$  et un entier  $j_V \in \mathbb{N}$

Normaliser  $M$

**pour**  $k = 0$  à  $j_V - 1$  **faire**

**pour**  $i = 1$  à  $n/2^k$  **faire**

        Affecter au vecteur  $M_{i,[1;\frac{m}{2^{k+1}}]}$  le résultat de  $(\downarrow_2 \circ \Phi)\left(M_{i,[1;\frac{m}{2^k}]}\right)$

        Affecter au vecteur  $M_{i,[\frac{m}{2^{k+1}}+1;\frac{m}{2^k}]}$  le résultat de  $(\downarrow_2 \circ \Psi)\left(M_{i,[1;\frac{m}{2^k}]}\right)$

**fin du pour**

**pour**  $j = 1$  à  $m/2^k$  **faire**

        Affecter au vecteur  $M_{[1;\frac{n}{2^{k+1}}],j}$  le résultat de  $(\downarrow_2 \circ \Phi)\left(M_{[1;\frac{n}{2^k}],j}\right)$

        Affecter au vecteur  $M_{[\frac{n}{2^{k+1}}+1;\frac{n}{2^k}],j}$  le résultat de  $(\downarrow_2 \circ \Psi)\left(M_{[1;\frac{n}{2^k}],j}\right)$

**fin du pour**

**fin du pour**

**Sortie(s)** La matrice  $M$  ainsi obtenue

---



---

## Algorithme 2 Reconstruction d'une matrice

---

**Entrée(s)** une matrice  $M \in M_{n,m}(\mathbb{R})$  et un entier  $j_V \in \mathbb{N}$

**pour**  $k = j_V - 1$  **à** 0 **faire**

**pour**  $j = 1$  **à**  $m/2^k$  **faire**

Affecter au vecteur  $M_{[1; \frac{n}{2^k}], j}$  la somme de  $(\Gamma \circ \uparrow_2) \left( M_{[1; \frac{n}{2^{k+1}}], j} \right)$

et de  $(\Omega \circ \uparrow_2) \left( M_{[\frac{n}{2^{k+1}} + 1; \frac{n}{2^k}], j} \right)$

**fin du pour**

**pour**  $i = 1$  **à**  $n/2^k$  **faire**

Affecter au vecteur  $M_{i, [1; \frac{m}{2^k}]}$  la somme de  $(\Gamma \circ \uparrow_2) \left( M_{i, [1; \frac{m}{2^{k+1}}]} \right)$  et

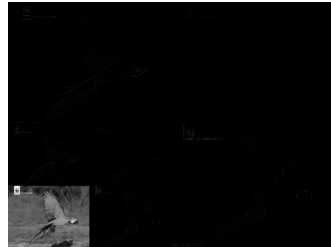
de  $(\Omega \circ \uparrow_2) \left( M_{i, [\frac{m}{2^{k+1}} + 1; \frac{m}{2^k}]} \right)$

**fin du pour**

**fin du pour**

**Sortie(s)** La matrice  $M$  ainsi obtenue

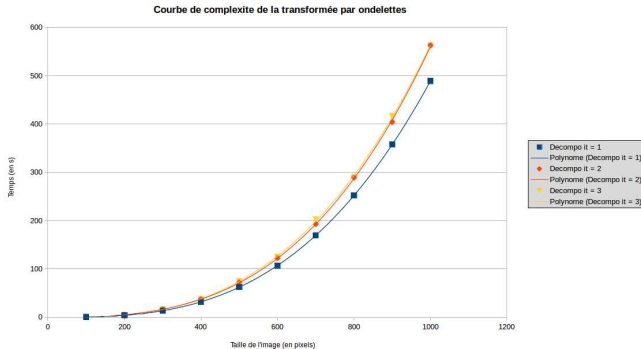
---

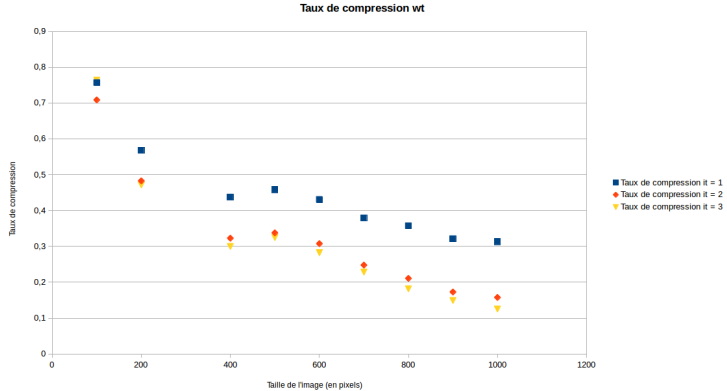


## Complexité de la fonction $WT$

Pour une image de taille  $nm$  pixels, on a une complexité de :

$$O(nm + nm^2 + mn^2)$$





## Distance de compression

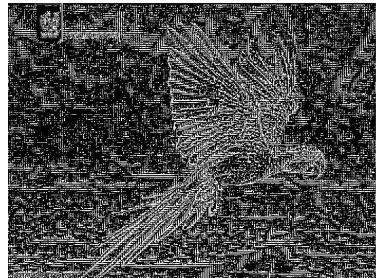
On peut définir une distance de la manière suivante :

$$\begin{aligned} d : M_{n,m}(\mathbb{R}) \times M_{n,m}(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ (M, N) &\longmapsto \frac{\|M - N\|}{nm} \end{aligned}$$

## Définition : Fonction erreur

On définit la fonction erreur pour  $j_V \in \mathbb{N}$  comme suit avec  $\gamma_{j_V}$  la fonction de compression :

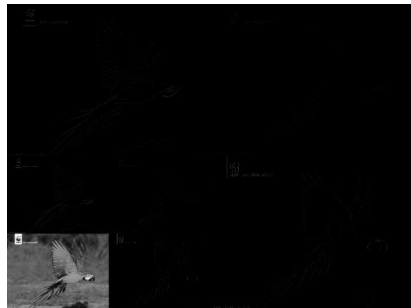
$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{j_V} : M_{n,m}(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ M &\longmapsto d \left( M, \left( (\gamma_{j_V})^{-1} \circ \gamma_{j_V} \right) (M) \right) \end{aligned}$$



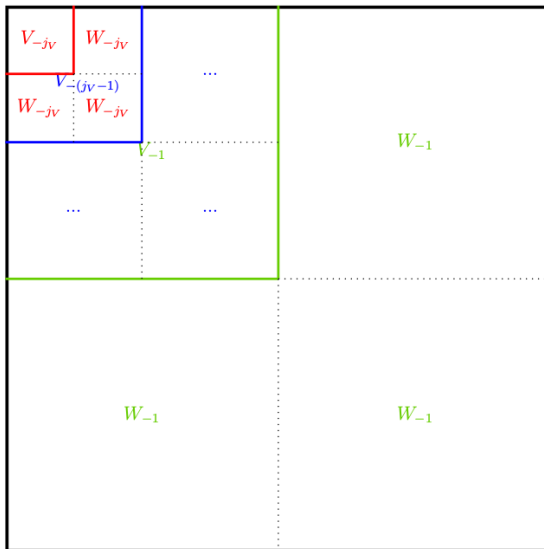
## Conclusion

Merci pour votre attention !





**Figure:** Exemple de la différence entre le choix du scalaire  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  (à gauche) et du scalaire  $\frac{1}{2}$  (à droite)



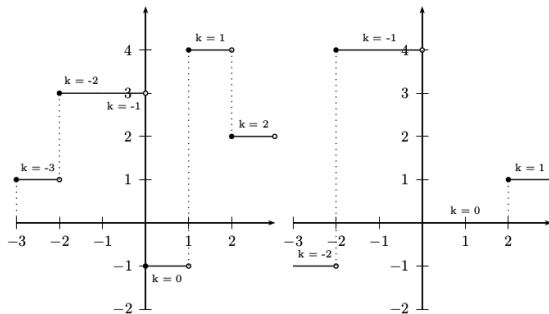


Figure: Exemple graphique d'une fonction de  $V_0$  (à gauche) et de  $V_1$  (à droite)

# Démonstration de la densité I

Soit  $\varepsilon > 0$ . Soit  $f \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  telle que  $f$  est continue par morceaux un nombre fini de fois et de support compact et admettant une limite (nulle).  $f$  est continue par morceaux sur des intervalles que l'on va noter  $(D_n)_{n \in I}$  avec  $I \subset \mathbb{N}$ ,  $I$  fini.

On va donc limiter l'étude à un intervalle  $D_n$  pour  $n \in I$ .

On pose  $D_n = ]\alpha; \beta[$ .

Cas 1 :  $\alpha \neq -\infty$  et  $\beta \neq +\infty$

Ainsi la fonction  $f$  est prolongeable par continuité sur  $\overline{D_n} = [\alpha; \beta]$ .

Par conséquent,  $f$  est continue sur un segment donc, par théorème de Heine, elle y est uniformément continue.

Par définition de continuité uniforme, on a :

$$\exists \delta_n > 0, \forall x, y \in D_n, |x - y| \leq \delta_n \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$$

## Démonstration de la densité II

Or, d'autre part,  $\lim_{j \rightarrow -\infty} 2^j = 0$  et  $\lim_{j \rightarrow +\infty} 2^j = +\infty$  donc

$$\exists j_n \in \mathbb{Z}, 2^{j_n} \leq \delta_n < 2^{j_n+1}$$

Ainsi  $\forall x, y \in D_n, |x - y| \leq 2^{j_n} \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$ .

Cas 2 :  $\alpha \neq -\infty$  ou  $\beta \neq +\infty$

Dans ce cas, on procède de même en se ramenant à un segment en utilisant la définition de la limite appliquée à  $\varepsilon$  en  $\pm\infty$ .

Dans tous les cas, on pose alors une fonction  $\psi_n \in V_{j_n}$  telle que pour tout intervalle de la forme  $[2^{j_n}k; 2^{j_n}(k+1)[$  où  $k \in \mathbb{Z}$ , il existe un  $x_{n,k} \in J_n$  tel que  $\forall y \in [2^{j_n}k; 2^{j_n}(k+1)[$ ,  $\psi_n(y) = f(x_{n,k})$  (ce  $x_{n,k}$  existe sous condition que  $[2^{j_n}k; 2^{j_n}(k+1)[ \subset D_n$ , si ce n'est pas le cas, on pose alors  $\psi_n|_{[2^{j_n}k; 2^{j_n}(k+1)[} = 0$ ).

On obtient donc un ensemble d'indices  $J_n = \{j_n, n \in I\}$  et un ensemble de fonctions  $\{\psi_n, n \in I\} \subset \bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j$ .

# Démonstration de la densité III

Par propriété d'inclusion (i), en posant  $j_\varepsilon = \min J_n$  (existe car  $I$  est fini), et en définissant  $P_{V_{j_\varepsilon}}$  à l'aide des  $\psi_n$  pour  $n \in I$ , on obtient que :

$$\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j \text{ est dense dans } L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$$

# Démonstration de la complexité

Soit  $j_V \in \mathbb{N}$ . Soit  $M \in M_{n,m}(\mathbb{R})$ .

La complexité de la normalisation est de l'ordre de  $O(nm)$ .

Soit  $k \in [0; j_V - 1]$ . Soit  $i \in [1; n/2^k]$

Comme la complexité de l'affectation est linéaire en la taille du vecteur, l'affectation a une complexité de  $\frac{m}{2^{k+1}}$ .

De plus, la fonction  $\downarrow_2 \circ \Phi$  s'effectue en un temps quadratique en la taille du vecteur (due à la fonction filtre).

Ainsi, le calcul du résultat de cette fonction appliqué au vecteur  $M_{i,[1;\frac{m}{2^k}]}$  a une complexité de  $C(\frac{m}{2^k})^2$  avec  $C > 0$ .

Ainsi, la première boucle s'effectue en  $O\left(\frac{nm^2}{2^{3k-1}}\right)$ .

On démontre de même que la deuxième boucle s'effectue en  $O\left(\frac{mn^2}{2^{3k-1}}\right)$ .

Ainsi la complexité de cet algorithme est bien de  $O\left(nm + nm^2 + mn^2\right)$

# Démonstration de $(WR) \circ (WT) = id$

Soit  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ . Par définition des algorithmes, il s'agit en fait de démontrer que :

$$\begin{aligned}\Phi_{1, \mathcal{R}_a} \left( \Phi_{1, \mathcal{H}_a}(x, y), \Phi_{1, \mathcal{H}_d}(x, y) \right) &= x \\ \Phi_{1, \mathcal{R}_d} \left( \Phi_{1, \mathcal{H}_a}(x, y), \Phi_{1, \mathcal{H}_d}(x, y) \right) &= y\end{aligned}$$

C'est à dire, par définition des fonctions filtres, qu'il s'agit de montrer que :

$$\begin{aligned}\frac{x+y}{2} + \frac{x-y}{2} &= x \\ \frac{x+y}{2} - \frac{x-y}{2} &= y\end{aligned}$$

Ce qui est clairement le cas.