# Compression d'images par ondelettes

Benjamin CATINAUD

Année 2017 - 2018

# Introduction

- Plus de 2200 photos mises en ligne sur Facebook par seconde[1]
- Débit moyen en France : 8.9 Mbps
- Taille d'une image : de l'ordre du mégaoctet

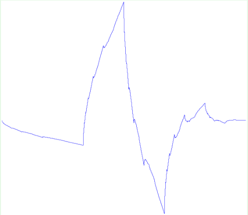
[1] Source : *www.planetoscope.com*

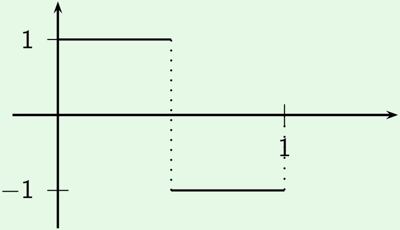
1. Théorie des ondelettes
   - Une ondelette, c'est quoi ?
   - Analyse multi-résolution - Espaces d'approximation
   - Analyse multi-résolution - Espaces de détails
2. Algorithme de Mallat
   - Définitions
   - Algorithme de transformation *WT*
   - Algorithme de reconstruction *WR*
   - Et concrètement ?
3. Un algorithme efficace ?
   - Complexité
   - Taux de compression
   - Estimation de l'erreur
4. Bilan visuel
5. Conclusion

## Définition : Ondelette

- Fonction $\psi$ de carré intégrable sur $\mathbb{R}$ $\left( \int_{\mathbb{R}} \mid \psi \mid^2 < +\infty \right)$
- Support de $\psi$ compact
- $\int_{\mathbb{R}} \psi$ converge et vaut 0
- Création d'une famille d'ondelettes par dilatation et translation de l'ondelette mère $\left( \psi_{a,b}(t) = \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) \right)$

## Exemples : Ondelette de Daubechies et de Haar





## Analyse multi-résolution : Espaces d'approximation

### Définition

Soit $j \in \mathbb{Z}$. **Espace d'aproximation à l'échelle** $2^j$ : espace vectoriel $V_j$ des fonctions de $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ constantes sur les intervalles de la forme $[2^j k ; 2^j(k+1)[$, $k \in \mathbb{Z}$

### Propriétés fondamentales

- $\forall j \in \mathbb{Z}, V_{j+1} \subseteq V_j$
- $\bigcup\limits_{j \in \mathbb{Z}} V_j$ est dense dans $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

### Caractérisation

$$\forall j \in \mathbb{Z}, V_j = \left\langle \left\{ \phi_{j,k} = \frac{1}{\sqrt{2^j}} \mathbb{1}_{[2^j k ; 2^j(k+1)[}, \ k \in \mathbb{Z} \right\} \right\rangle$$

## Analyse multi-résolution

### Définition des espaces de détails

On définit $W_j$, pour $j \in \mathbb{Z}$, tel que

$$V_{j-1} = V_j \overset{\perp}{\bigoplus} W_j$$

### Caractérisation des espaces de détails

$$\forall j \in \mathbb{Z}, W_j =$$

$$\left\langle \left\{ \psi_{j,k} = \frac{1}{\sqrt{2^j}} \left( \mathbb{1}_{[2^{j-1}k ; 2^{j-1}(k+1)[} - \mathbb{1}_{[2^{j-1}(k+1) ; 2^{j-1}(k+2)[} \right),\ k \in \mathbb{Z} \right\} \right\rangle$$

### Propriété des fonctions génératrices

On remarque la relation de récurrence :

$$\phi_{j,k} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\phi_{j-1,2k} + \phi_{j-1,2k+1})$$
$$\psi_{j,k} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\phi_{j-1,2k} - \phi_{j-1,2k+1})$$

### Définition : Vecteurs associés à la transformation par ondelettes de Haar

$$\mathcal{H}_a = \frac{1}{2}(1,1) \in \mathbb{R}^2 \text{ pour les espaces } (V_j)_{j\in\mathbb{Z}}$$
$$\mathcal{H}_d = \frac{1}{2}(1,-1) \in \mathbb{R}^2 \text{ pour les espaces } (W_j)_{j\in\mathbb{Z}}$$

### Définition : Fonction filtre

Pour $b, x \in \mathbb{R}^n$ et $a \in \mathbb{R}^*$, la fonction filtre $\Phi_{a,b}$ est telle que

$$\forall i \in [1; n], \ \Big(\Phi_{a,b}(x)\Big)_k = \frac{1}{a}\sum_{i=1}^{k} b_i x_{k-i}$$

On notera $\Phi$ la fonction filtre sur les espaces d'approximation et $\Psi$ celle sur les espaces de détails

### Définition : Fonction d'échantillonage

$$\downarrow_2 : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^{\lfloor n/2 \rfloor}$$
$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) \longmapsto (x_2, x_4, \ldots, x_{2\lfloor n/2 \rfloor})$$

**Algorithme 1** Transformée par ondelettes d'une matrice

**Entrée(s)** une matrice $M \in M_{n,m}(\mathbb{R})$ et un entier $j_V \in \mathbb{N}$

Normaliser $M$

**pour** $k = 0$ **à** $j_V - 1$ **faire**

  **pour** $i = 1$ **à** $n/2^k$ **faire**

    Affecter au vecteur $M_{i,[1;\frac{m}{2^{k+1}}]}$ le résultat de $(\downarrow_2 \circ \Phi)\left(M_{i,[1;\frac{m}{2^k}]}\right)$

    Affecter au vecteur $M_{i,[\frac{m}{2^{k+1}}+1;\frac{m}{2^k}]}$ le résultat de $(\downarrow_2 \circ \Psi)\left(M_{i,[1;\frac{m}{2^k}]}\right)$

  **fin du pour**

  **pour** $j = 1$ **à** $m/2^k$ **faire**

    Affecter au vecteur $M_{[1;\frac{n}{2^{k+1}}],j}$ le résultat de $(\downarrow_2 \circ \Phi)\left(M_{[1;\frac{n}{2^k}],j}\right)$

    Affecter au vecteur $M_{[\frac{n}{2^{k+1}}+1;\frac{n}{2^k}],j}$ le résultat de $(\downarrow_2 \circ \Psi)\left(M_{[1;\frac{n}{2^k}],j}\right)$

  **fin du pour**

**fin du pour**

**Sortie(s)** La matrice $M$ ainsi obtenue

**Algorithme 2** Reconstruction d'une matrice

**Entrée(s)** une matrice $M \in M_{n,m}(\mathbb{R})$ et un entier $j_V \in \mathbb{N}$

**pour** $k = j_V - 1$ **à** $0$ **faire**

  **pour** $j = 1$ **à** $m/2^k$ **faire**

    Affecter au vecteur $M_{[1;\frac{n}{2^k}],j}$ la somme de $(\Gamma \circ \uparrow_2)\left(M_{[1;\frac{n}{2^{k+1}}],j}\right)$ et de $(\Omega \circ \uparrow_2)\left(M_{[\frac{n}{2^{k+1}}+1;\frac{n}{2^k}],j}\right)$

  **fin du pour**

  **pour** $i = 1$ **à** $n/2^k$ **faire**

    Affecter au vecteur $M_{i,[1;\frac{m}{2^k}]}$ la somme de $(\Gamma \circ \uparrow_2)\left(M_{i,[1;\frac{m}{2^{k+1}}]}\right)$ et de $(\Omega \circ \uparrow_2)\left(M_{i,[\frac{m}{2^{k+1}}+1;\frac{m}{2^k}]}\right)$

  **fin du pour**

**fin du pour**

**Sortie(s)** La matrice $M$ ainsi obtenue

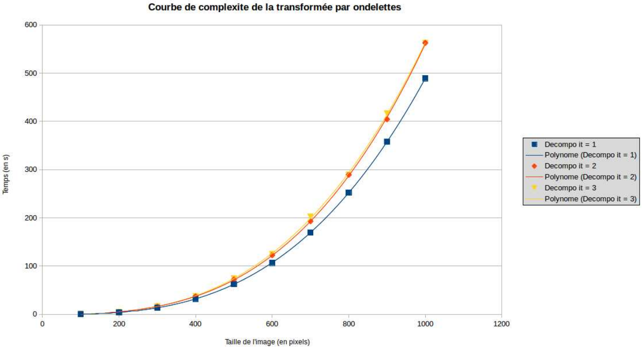

WWF
for a living planet
(c) WWF-Canon / Zig KOCH

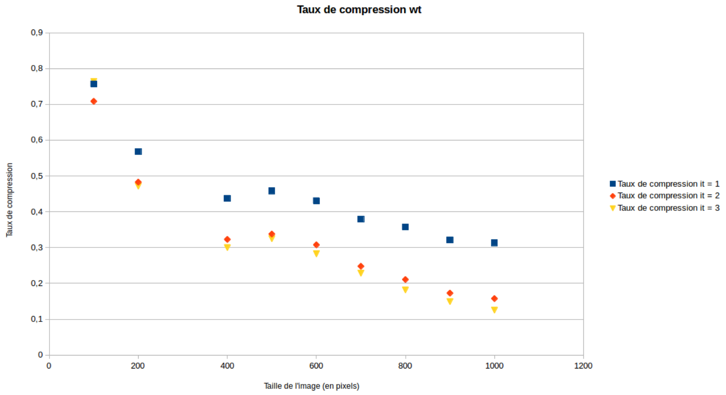

WWF
for a living planet
(c) WWF-Canon / Zig KOCH

## Complexité de la fonction *WT*

Pour une image de taille *nxm* pixels, on a une complexité de :

$$\boxed{O\left(nm + nm^2 + mn^2\right) \;=\; O\left(\left(\max(n,m)\right)^3\right)}$$




Taux de compression wt
Taux de compression
Taille de l'image (en pixels)
0,9
0,8
0,7
0,6
0,5
0,4
0,3
0,2
0,1
0
0
200
400
600
800
1000
1200
Taux de compression it = 1
Taux de compression it = 2
Taux de compression it = 3

## Distance de compression

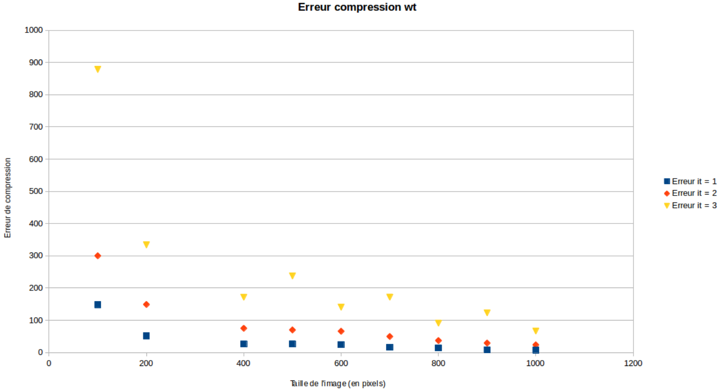
On peut définir une distance de la manière suivante :

$$d : M_{n,m}(\mathbb{R}) \times M_{n,m}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^+$$
$$(M, N) \longmapsto \frac{\|M-N\|}{nm}$$

## Définition : Fonction erreur

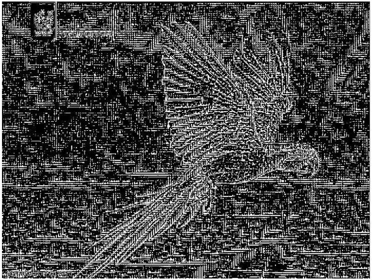
On définit la fonction erreur pour $j_V \in \mathbb{N}$ comme suit avec $\gamma_{j_V}$ la fonction de compression et $\rho_{j_V}$ la fonction de décompression :

$$\mathcal{E}_{j_V} : M_{n,m}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$M \longmapsto d\left(M, \left(\rho_{j_V} \circ \gamma_{j_V}\right)(M)\right)$$


Erreur compression wt
Erreur de compression
Taille de l'image (en pixels)
Erreur it = 1
Erreur it = 2
Erreur it = 3
0
100
200
300
400
500
600
700
800
900
1000
0
200
400
600
800
1000
1200


WWF
for a living planet
(c) WWF-Canon / Zig KOCH


WWF
for a living planet



# Conclusion

Merci pour votre attention !

# Bibliographie

- René Alt, *La transformation en ondelettes*, Professeur à l'université Pierre et Marie Curie.
- Philippe Carré and Rémi Cornillet, *Code matlab*, professeur de l'université de Poitiers et responsable de l'équipe Icones, étudiant à l'ENS de Rennes.
- Phillip K.Poon, *Wavelets*, Ph.D. thesis, College of Optical Sciences, University of Arizona, 2012.
- Olivier Rioul, *Ondelettes régulières: application à la compression d'images fixes*, Ph.D. thesis, Télécom ParisTech, 1993.
- Pascal Szacherski, *Compression, ondelettes et algorithmes afférents*.

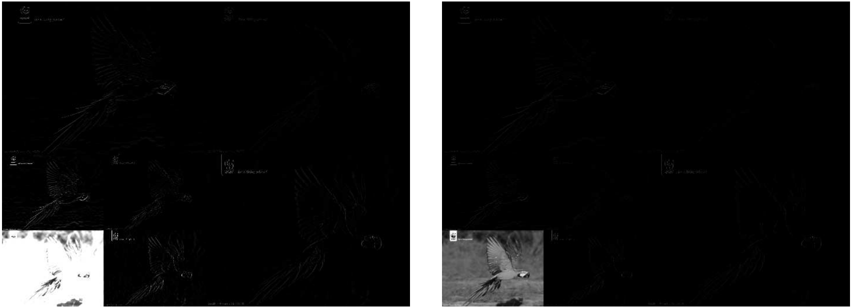
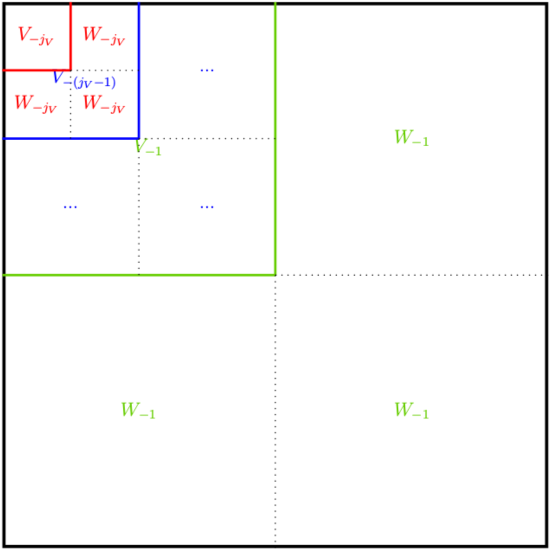


Figure: Exemple de la différence entre le choix du scalaire $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (à gauche) et du scalaire $\frac{1}{2}$ (à droite)


$V_{-j_V}$
$W_{-j_V}$
$V_{-(j_V-1)}$
$W_{-j_V}$
$W_{-j_V}$
...
$V_{-1}$
$W_{-1}$
...
...
$W_{-1}$
$W_{-1}$

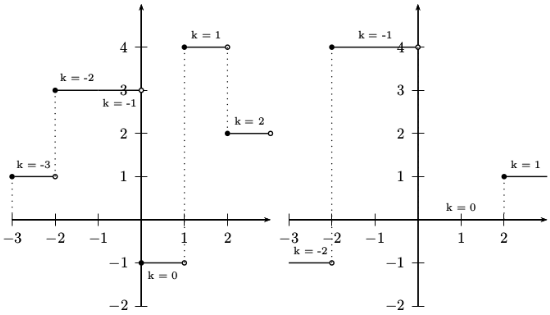



Figure: Exemple graphique d'une fonction de $V_0$ (à gauche) et de $V_1$ (à droite)

# Démonstration de la densité I

Soit $\varepsilon > 0$. Soit $f \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que $f$ est continue par morceaux un nombre fini de fois et de support compact et admettant une limite (nulle).
$f$ est continue par morceaux sur des intervalles que l'on va noter $(D_n)_{n \in I}$ avec $I \subset \mathbb{N}$, $I$ fini.
On va donc limiter l'étude à un intervalle $D_n$ pour $n \in I$.
On pose $D_n = ]\alpha; \beta[$.
<u>Cas 1 : $\alpha \neq -\infty$ et $\beta \neq +\infty$</u>

Ainsi la fonction $f$ est prolongeable par continuité sur $\overline{D_n} = [\alpha; \beta]$.

Par conséquent, $f$ est continue sur un segment donc, par théorème de Heine, elle y est uniformément continue.

Par définition de continuité uniforme, on a :

$$\exists \delta_n > 0, \forall x, y \in D_n, \mid x - y \mid \leqslant \delta_n \Rightarrow \mid f(x) - f(y) \mid \leqslant \varepsilon$$

# Démonstration de la densité II

Or, d'autre part, $\lim\limits_{j \to -\infty} 2^j = 0$ et $\lim\limits_{j \to +\infty} 2^j = +\infty$ donc

$$\exists j_n \in \mathbb{Z}, 2^{j_n} \leqslant \delta_n < 2^{j_n+1}$$

Ainsi $\forall x, y \in D_n, \mid x - y \mid \leqslant 2^{j_n} \Rightarrow \mid f(x) - f(y) \mid \leqslant \varepsilon$.

Cas 2 : $\alpha \neq -\infty$ ou $\beta \neq +\infty$

Dans ce cas, on procéde de même en se ramenant à un segment en utilisant la définition de la limite appliquée à $\varepsilon$ en $\pm\infty$.

Dans tous les cas, on pose alors une fonction $\psi_n \in V_{j_n}$ telle que pour tout intervalle de la forme $[2^{j_n}k; 2^{j_n}(k+1)[$ où $k \in \mathbb{Z}$, il existe un $x_{n,k} \in J_n$ tel que $\forall y \in [2^{j_n}k; 2^{j_n}(k+1)[$, $\psi_n(y) = f(x_{n,k})$ (ce $x_{n,k}$ existe sous condition que $[2^{j_n}k; 2^{j_n}(k+1)[ \subset D_n$, si ce n'est pas le cas, on pose alors $\psi_n \mid_{[2^{j_n}k; 2^{j_n}(k+1)[} = 0$).

On obtient donc un ensemble d'indices $J_n = \left\{ j_n, n \in I \right\}$ et un ensemble de fonctions $\left\{ \psi_n, n \in I \right\} \subset \bigcup\limits_{j \in \mathbb{Z}} V_j$.

# Démonstration de la densité III

Par propriété d'inclusion $(i)$, en posant $j_\varepsilon = \min J_n$ (existe car $I$ est fini), et en définissant $P_{V_{j_\varepsilon}}$ à l'aide des $\psi_n$ pour $n \in I$, on obtient que :

$$\boxed{\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j \text{ est dense dans } L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})} \quad \blacksquare$$

# Démonstration de la complexité

Soit $j_V \in \mathbb{N}$. Soit $M \in M_{n,m}(\mathbb{R})$.
La complexité de la normalisation est de l'ordre de $O(nm)$.
Soit $k \in [0; j_v - 1]$. Soit $i \in [1; n/2^k]$
Comme la complexité de l'affectation est linéaire en la taille du vecteur, l'affectation a une complexité de $\frac{m}{2^{k+1}}$.
De plus, la fonction $\downarrow_2$ o $\varPhi$ s'effectue en un temps quadratique en la taille du vecteur (due à la fonction filtre).
Ainsi, le calcul du résultat de cette fonction appliqué au vecteur $M_{i,[1;\frac{m}{2^k}]}$ a une complexité de $C(\frac{m}{2^k})^2$ avec $C > 0$.
Ainsi, la première boucle s'effectue en $O\left(\frac{nm^2}{2^{3k-1}}\right)$.
On démontre de même que la deuxième boucle s'effectue en $O\left(\frac{mn^2}{2^{3k-1}}\right)$.
Ainsi la complexité de cet algorithme est bien de

$$\boxed{O\left(nm + nm^2 + mn^2\right)} \blacksquare$$

## Démonstration de $(WR)o(WT) = id$

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Par définition des algorithmes, il s'agit en fait de démontrer que :

$$\begin{aligned}
\Phi_{1,\mathcal{R}_a}\Big(\Phi_{1,\mathcal{H}_a}(x,y), \Phi_{1,\mathcal{H}_d}(x,y)\Big) &= x \\
\Phi_{1,\mathcal{R}_d}\Big(\Phi_{1,\mathcal{H}_a}(x,y), \Phi_{1,\mathcal{H}_d}(x,y)\Big) &= y
\end{aligned}$$

C'est à dire, par définition des fonctions filtres, qu'il s'agit de montrer que :

$$\begin{aligned}
\tfrac{x+y}{2} + \tfrac{x-y}{2} &= x \\
\tfrac{x+y}{2} - \tfrac{x-y}{2} &= y
\end{aligned}$$

Ce qui est clairement le cas $\blacksquare$