Travail de Recherche Encadré :
Preuve du théorème de complétude de Gödel

Benjamin CATINAUD

Année 2020-2021

Abstract

Introduction

Ce papier a pour but d'écrire une preuve du théorème de complétude de Gödel qui établit un rapport entre les formules valides et prouvables. Plusieurs preuves existent déjà, en particulier en utilisant la sémantique de Kripke, en utilisant plutôt la partie "programme" de l'équivalence entre les preuves et les programmes.

Dans ce papier, nous allons montrer ce théorème en utilisant la sémantique de Tarski et en écrivant une preuve avec l'assistant aux preuves Coq. La sémantique de Tarski se distingue de la sémantique de Kripke au sens où cette dernière possède une "mémoire" ce qui aide à prouver le théorème.

Nous allons donc utiliser un procédé, le forcing, qui permet d'étendre les modèles de Tarski en des modèles étendus équivalents aux modèles de Kripke.

Ce travail a été fait avec l'aide du docteur Hugo Herbelin.

I. Cadre de travail

Tout d'abord, on se place dans un langage des formules de la logique. On considère d'abord les atomes, que l'on va numéroter par un entier naturel, ainsi que le constructeur "et" ($\wedge$) :

```
Inductive form :=
    | Atome : nat -> form
    | And : form -> form -> form.
```

Sur cet ensemble de formules, on peut définir la notion de prouvabilité afin de déterminer la valeur de vérité d'une formule. On définit d'abord la relation $\vdash$ sur les listes de formules notée

$$\Gamma \vdash \Delta.$$

La liste Γ est appelée la liste *subséquente* et la liste Δ la liste *conséquente*. On a alors que si les prédicats de Γ sont vrais alors l'une des conséquences de Δ est vraie.

Lorsque la liste Γ est vide, on note plus simplement $\vdash \Delta$.

En pratique dans ce qui suit, on va considérer que Δ est réduite à une seule formule. De plus, on définit Γ en Coq comme étant une liste de formule appelée **context** :

```
Definition context := list form.
```

Définition 1 (Prouvabilité d'une formule)
On définit la prouvabilité d'une formule comme étant un séquent dérivable à partir d'un certain nombre de règles d'inférence et d'axiomes. Dans notre cadre les règles sont les règles de la logique intuitionniste définies comme suit :

- ***(Axiome)*** $\overline{\Gamma \vdash A}$ *lorsque* $A \in \Gamma$.
- ***($\wedge$-intro)*** $\dfrac{\Gamma \vdash A \quad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \wedge B}$
- ***($\wedge$-élim$_{1,2}$)*** $\dfrac{\Gamma \vdash A \wedge B}{\Gamma \vdash A}$ *et* $\dfrac{\Gamma \vdash A \wedge B}{\Gamma \vdash B}$. $\square$

On définit alors cette notion en Coq comme suit :

```
Inductive provable : context -> form -> Prop :=
    | Ax { ctx A } : In A ctx -> provable ctx A
    | AndI { ctx A B } : provable ctx A -> provable ctx B
                                                -> provable ctx (And A B)
    | AndE1 { ctx A B } : provable ctx (And A B) -> provable ctx A
    | AndE2 { ctx A B } : provable ctx (And A B) -> provable ctx B
```

Pour pouvoir interpréter ces formules, on a alors besoin d'une sémantique. Dans ce travail, on va en définir 2 différentes, l'une est la sémantique de Kripke et l'autre la sémantique de Tarski. À chaque fois, la sémantique se base sur un modèle que l'on va d'abord définir.

Définition 2 (Modèle de Kripke)
On définit un modèle de Kripke comme un triplet $\mathcal{K} = (\mathcal{W}, \leqslant, h)$ *où*

- $\mathcal{W}$ *est l'ensemble des mondes.*
- $\leqslant$ *est une relation d'ordre sur les mondes de* $\mathcal{W}$*.*
- $h_{\mathcal{K}}$ *est une relation qui indique pour chaque atome* X *l'ensemble des mondes* $\mathcal{W}$ *où* X *est vraie. Traduit en théorie des types comme une fonction vers **Prop**.*

$$h_{\mathcal{K}} : \mathcal{W} \times \mathbb{N} \to \textit{\textbf{Prop}}.\square$$

On définit alors le modèle de Kripke standard, le modèle qui fait coïncider sémantique et prouvabilité sur les atomes :

$$\mathcal{K}_0 = \Big(\textbf{context}, \textbf{extend}, h_{\mathcal{K}_0}(\Gamma, X) \triangleq (\Gamma \vdash X)\Big)$$

Définition 3 (Sémantique de Kripke)
On définit la sémantique de Kripke à partir du modèle standard $\mathcal{K}_0$ *comme suit :*

- $\omega \Vdash_{\mathcal{K}_0} X \triangleq h_{\mathcal{K}_0}(\omega, X)$.
- $\omega \Vdash_{\mathcal{K}_0} \big(P \dot{\land} Q\big) \triangleq \big(\omega \Vdash_{\mathcal{K}_0} P\big) \land \big(\omega \Vdash_{\mathcal{K}_0} Q\big)$. $\square$

Définition 4 (Modèle de Tarski)
On définit un modèle de Tarski comme étant une fonction

$$\mathcal{M} : \mathbb{N} \to \textit{\textbf{Prop}}.\square$$

On remarque alors qu'un modèle de Tarski n'a pas de "mémoire" contrairement à un modèle de Kripke. C'est ce qui fait la difficulté de la preuve du théorème de complétude et qui nécessite donc l'appel au plugin *Forcing*.

Définition 5 (Sémantique de Tarski)
On définit la sémantique de Tarski à partir du modèle $\mathcal{M}$ *comme suit :*

- $[\![X]\!]_{\mathcal{M}} \triangleq \mathcal{M}(X)$
- $[\![P \land Q]\!]_{\mathcal{M}} \triangleq [\![P]\!]_{\mathcal{M}} \land [\![Q]\!]_{\mathcal{M}}$. $\square$

Théorème 1 (Théorème de Complétude de Gödel)
Toute formule φ *valide, au sens de Tarski, est prouvable à partir du contexte vide :* $\vdash \varphi$. $\square$

II. Présentation du plugin *Forcing*

III. Preuve du théorème de complétude

Pour prouver le théorème, on va avoir besoin d'effectuer plusieurs étapes. Tout d'abord, on traduit via le *forcing* **valid** et **provable**. Ensuite, en spécialisant le modèle au modèle de Kripke standard, on se retrouve à montrer que $\textbf{sem}^f$ implique $\textbf{provable}^f$. Comme le *forcing* permet d'avoir une équivalence entre $\textbf{sem}^f$ et **semK** ainsi qu'entre $\textbf{provable}^f$ et **provable**, on se retrouve alors à montrer que :

$$\forall \varphi, \Vdash_{\mathcal{K}_0} \varphi \implies \vdash \varphi. \tag{1}$$

1)