Travail de Recherche Encadré :
Preuve du théorème de complétude de Gödel

Benjamin CATINAUD

Année 2020-2021

Abstract

Introduction

I. Cadre de travail

Tout d'abord, on se place dans un langage des formules de la logique. On considère d'abord les atomes, que l'on va numéroter par un entier naturel, ainsi que le constructeur "et" ($\wedge$) :

```
Inductive form :=
    | Atome : nat -> form
    | And : form -> form -> form.
```

Pour pouvoir interpréter ces formules, on a alors besoin d'une sémantique. Dans ce travail, on va en définir 2 différentes, l'une est la sémantique de Kripke et l'autre la sémantique de Tarski. À chaque fois, la sémantique se base sur un modèle que l'on va d'abord définir.

Définition 1 (Modèle de Kripke)
On définit un modèle de Kripke comme un triplet $\mathcal{K} = (\mathcal{W}, \leqslant, h)$ où

- *$\mathcal{W}$ est l'ensemble des mondes, i.e. une fonction de la forme*
- *$\leqslant$ est une relation d'ordre sur les mondes de $\mathcal{W}$.*
- *$h_{\mathcal{K}}$ est une relation qui indique pour chaque atome X l'ensemble des mondes $\mathcal{W}$ où X est vraie. Traduit en théorie des types comme une fonction vers **Prop**.*

$$h_{\mathcal{K}} : \mathcal{W} \times \mathbb{N} \to \textbf{\textit{Prop}}.\square$$

On définit alors le modèle de Kripke standard, le modèle qui fait coïncider sémantique et prouvabilité sur les atomes :

$$\mathcal{K}_0 = \Big(\textbf{context}, \textbf{extend}, h_{\mathcal{K}_0}(\Gamma, X) \triangleq (\Gamma \vdash X)\Big)$$

Définition 2 (Sémantique de Kripke)
On définit la sémantique de Kripke à partir du modèle standard $\mathcal{K}_0$ comme suit :

- $\omega \Vdash_{\mathcal{K}_0} X \triangleq h_{\mathcal{K}_0}(\omega, X)$.
- $\omega \Vdash_{\mathcal{K}_0} \big(P \dot{\wedge} Q\big) \triangleq \big(\omega \Vdash_{\mathcal{K}_0} P\big) \wedge \big(\omega \Vdash_{\mathcal{K}_0} Q\big)$. $\square$

Définition 3 (Modèle de Tarski)
On définit un modèle de Tarski comme étant une fonction

$$\mathcal{M} : \mathbb{N} \to \textbf{\textit{Prop}}.\square$$

On remarque alors qu'un modèle de Tarski n'a pas de "mémoire" contrairement à un modèle de Kripke. C'est ce qui fait la difficulté de la preuve du théorème de complétude et qui nécessite donc l'appel au plugin *Forcing*.

Définition 4 (Sémantique de Tarski)
On définit la sémantique de Tarski à partir du modèle $\mathcal{M}$ comme suit :

- $[\![X]\!]_{\mathcal{M}} \triangleq \mathcal{M}(X)$
- $[\![P \wedge Q]\!]_{\mathcal{M}} \triangleq [\![P]\!]_{\mathcal{M}} \wedge [\![Q]\!]_{\mathcal{M}}$. $\square$

Théorème 1 (Théorème de Complétude de Gödel)
Toute formule φ valide, au sens de Tarski, est prouvable à partir du contexte vide : $\vdash \varphi$. $\square$