Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования
Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана

Лабораторная работа №3
по курсу «Численные методы»
«Численное интегрирование»

Выполнил:
студент группы ИУ9-62
Иванов Георгий

Проверила:
Домрачева А.Б.

Москва, 2017

Цель:

Сравнительный анализ методов численного интегрирования:

1. Метод средних прямоугольников
2. Метод трапеций
3. Метод парабол (метод Симпсона)

Постановка задачи:

Дано: Интеграл

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

где $f(x)$ - подынтегральная функция, непрерывная на отрезке$[a, b]$.

Найти: значение интеграла

$$I^* \approx I$$

Тестовый пример:

$$I = \int_0^1 e^x\,dx = e^x\Big|_0^1 = e - 1 = 1.718282$$

Теоретические сведения:

Численное интегрирование — вычисление значения определённого интеграла (как правило, приближённое). Суть численного интегрирования состоит в расчёте значения определённого интеграла по взвешенным значениям подынтегральной функции, без использования первообразной функции.

Задача численного интегрирования состоит в замене исходной подинтегральной функции $f(x)$, для которой трудно или невозможно записать первообразную в аналитике, некоторой аппроксимирующей функцией $\phi(x)$. Такой функцией обычно является полином (кусочный полином).

$$\phi(x) = \sum_1^n c_i \varphi_i(x)$$

То есть вычисление интеграла сводится к

$$I = \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b \phi(x)\,dx + R$$

где $R = \int_a^b r(x)\,dx$ - априорная погрешность метода на интервале интегрирования, а $r(x)$ - априорная погрешность метода на отдельном шаге интегрирования.

В зависимости от степени и вида аппроксимисирующего полинома имеем различные численные методы интегрирования. Различают метод прямоугольников (левых, правых, средних), метод трапеций, метод парабол (метод Симпсона), метод Гаусса, метод Гаусса-Кронрода, метод Чебышёва, метод Монте-Карло.

В ходе данной лабораторной работы рассмотрим первые три метода, а именно метод прямоугольников, метод трапеций, метод парабол (Симпсона). Степени кусочных полиномов будут соотвественно равны нулю, единице, двойке.

1. Метод средних прямоугольников:

Метод прямоугольников — метод численного интегрирования функции одной переменной, заключающийся в замене подынтегральной функции на полином нулевой степени - отрезком, параллельным оси абсцисс. Если рассмотреть график подынтегральной функции, то метод будет заключаться в приближённом вычислении площади под графиком суммированием площадей конечного числа прямоугольников, ширина которых будет определяться расстоянием между соответствующими соседними узлами интегрирования, а высота — значением подынтегральной функции в этих узлах.

Пусть требуется определить значение интеграла функции на отрезке $[a, b]$. Тогда разобьем этот отрезок на n равных отрезков длиной $h = \frac{b-a}{n}$. Получим разбиение данного отрезка точками:

$$x_0 = a, x_1 = x_0 + h, x_2 = x_1 + h, ..., x_n = x_{n-1} + h = b$$

Значение интеграла на частичном отрезке $[x_{j-1}, x_j]$ будет вычисляться по формуле:

$$\int\limits_{x_{j-1}}^{x_j} f(x)\,dx \approx f(\frac{x_{j-1} + x_j}{2})h$$

Тогда применяя данную формулу ко всем отрезкам, составленных из разбиения отрезка $[a, b]$, получим приближенное значение интеграла на данном отрезке:

$$I^* = \int\limits_a^b f(x)\,dx \approx h\sum_{i=1}^{n} f(\frac{x_{j-1} + x_j}{2}) = h\sum_{i=1}^{n} f(a + i * h - \frac{h}{2})$$

2. Метод трапеций:

Метод трапеций — метод численного интегрирования функции одной переменной, заключающийся в замене подынтегральной функции на полином первой степени - отрезком, параллельным оси абсцисс. Если рассмотреть график подынтегральной функции, то метод будет заключаться в приближённом вычислении площади под графиком суммированием площадей конечного числа прямоугольных трапеций, высота которых будет определяться расстоянием между соответствующими соседними узлами интегрирования, а основания — значениями подынтегральной функции в этих узлах.

Пусть требуется определить значение интеграла функции на отрезке $[a, b]$. Тогда разобьем этот отрезок на n равных отрезков длиной $h = \frac{b-a}{n}$. Получим разбиение данного отрезка точками:

$$x_0 = a, x_1 = x_0 + h, x_2 = x_1 + h, ..., x_n = x_{n-1} + h = b$$

Значение интеграла на частичном отрезке $[x_{j-1}, x_j]$ будет вычисляться по формуле:

$$\int\limits_{x_{j-1}}^{x_j} f(x)\,dx \approx \frac{f(x_{j-1}) + f(x_j)}{2} h$$

Тогда применяя данную формулу ко всем отрезкам, составленных из разбиения отрезка $[a, b]$, получим приближенное значение интеграла на данном отрезке:

$$I^* = \int\limits_a^b f(x)\,dx \approx \frac{h}{2}\sum_{i=0}^{n} f(x_i) = h(\frac{f(a)+f(b)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)))$$

3. Метод Симпсона:

Метод Симпсона — метод численного интегрирования функции одной переменной, заключающийся в приближении подынтегральной функции $[a; b]$ на интерполяционный полином второй степени, то есть квадратичной параболой $y = a_i x^2 + b_i x + c_i$, проходящей через точки $(x_{i-1}; f(x_{i-1}))$, $(x_{i-0.5}; f(x_{i-0.5}))$, $(x_i; f(x_i))$ Это делается для того, чтобы в качестве приближенного значения определенного интеграла $\int\limits_{x_{j-1}}^{x_j} f(x)\,dx$ взять $\int\limits_{x_{j-1}}^{x_j} a_j x^2 + b_j x + c_j\,dx$, который мы можем вычислить по формуле Ньютона-Лейбница.

Пусть требуется определить значение интеграла функции на отрезке $[a, b]$. Тогда разобьем этот отрезок на n равных отрезков длиной $h = \frac{b-a}{n}$. Получим разбиение данного отрезка точками:

$$x_0 = a, x_1 = x_0 + h, x_2 = x_1 + h, ..., x_n = x_{n-1} + h = b$$

Парабола Симпсона представлена формулой:

$$a_j x^2 + b_j x + c_j = f(x_{i-0.5}) + \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{h}(x - x_{i-0.5}) + \frac{f(x_i) - 2f(x_{i-0.5}) + f(x_{i-1})}{\frac{h^2}{2}}(x - x_{i-0.5})^2$$

Значение интеграла на частичном отрезке $[x_{j-1}, x_j]$ будет вычисляться по формуле:

$$\int\limits_{x_{j-1}}^{x_j} f(x_{j-0.5})\,dx + \frac{f(x_j) - f(x_{j-1})}{h}\int\limits_{x_{j-1}}^{x_j} (x - x_{j-0.5})\,dx + \frac{f(x_j) - 2f(x_{j-0.5}) + f(x_{j-1})}{\frac{h^2}{2}}\int\limits_{x_{j-1}}^{x_j} (x - x_{j-0.5})^2\,dx =$$

$$= \frac{h}{6}(f(x_{j-1}) + 4f(x_{j-0.5}) + f(x_j))$$

Тогда применяя данную формулу ко всем отрезкам, составленных из разбиения отрезка $[a, b]$, получим приближенное значение интеграла на данном отрезке:

$$I^* = \int\limits_a^b f(x)\,dx \approx \frac{h}{6}(f(a) + f(b) + 4\sum_{i=1}^{n} f(x_{i-0.5}) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)))$$

Вычисление интервалов различными методами с учётом погрешности:

$I = \int\limits_a^b f(x)\,dx$

$I = I^* + O(h^k)$, где k - порядок точности метода.

$k = 2$ - для методов средних прямоугольников и трапеций. $k = 4$ - для методов Симпсона.

$O(h^k) \approx ch^k$, где h - шаг, c - некоторая константа. Равенство приблизительное из-за вычислительной погрешности.

Тогда: $I \approx I_h^* + ch^k$, где I_h^* - приближенное значение интеграла, вычисленного с помощью определенного метода с шагом h

Считаем, что вычисления проводятся без вычислительной погрешности, можно записать строгое равенство:

$$I = I_h^* + ch^k$$

Соответственно, при вычислении значения интеграл с шагом метода $\frac{h}{2}$ равенство будет иметь вид:

$$I = I_{\frac{h}{2}}^* + c(\frac{h}{2})^k$$

Из двух равенств следует равенство:

$$I_h^* + ch^k = I_{\frac{h}{2}}^* + c(\frac{h}{2})^k$$

$$c(\frac{h}{2})^k = \frac{I_h^* - I_{\frac{h}{2}}^*}{1 - 2^k}$$

Тогда получим значение интеграла с погрешностью:

$$I = I_{\frac{h}{2}}^* + \frac{I_h^* - I_{\frac{h}{2}}^*}{1 - 2^k}$$

где значение R уточнение по Ричардсону:

$$R = \frac{I_h^* - I_{\frac{h}{2}}^*}{1 - 2^k}$$

Далее, используем правило Рунге, чтобы построить процедуру приближенного вычисления интеграла с заданной точностью ε . Будем начинать вычисления с некоторого значения шага h, затем последовательно уменьшать это значения в два раза, каждый раз вычисляя приближенное значение I_h^*. Условие остановки приближенного вычисления интеграла с заданной точностью ε с уточнением по Ричардсону:

$$|R| < \varepsilon$$

Практическая реализация: Листинг 1. Численное интегрирование

```
#!python
# -*- coding: utf-8 -*-
import math
```

```python
def func(x):
    return math.exp(x)

def method_of_rectangles(func,a,b,n):
    h = (b-a)/n
    return h*sum(func(a+i*h+h/2) for i in range(n))

def method_of_trapezoid(func,a,b,n):
    h = (b-a)/n
    series_of_sum = sum(func(a+i*h) for i in range(1,n))
    return h * ((func(a)+func(b))/2 + series_of_sum)

def method_of_simpson(func,a,b,n):
    h = (b-a)/n
    series_of_sum  = sum(func(a+i*h-h/2) for i in range(1,n+1))
    series_of_sum1 = sum(func(a+i*h)     for i in range(1,n))
    return h/6 * (func(a)+func(b) + 4*series_of_sum + 2*series_of_sum1)

def richardson(int_h,int_h2,k):
    return (int_h - int_h2) / (2**k-1)

def calc_integral(epsilon,method,k,func,a,b):
    for eps in epsilon:
        print("Eps = " + str(eps))
        n = 1
        r = float("+inf")
        iteration = 0
        int_h = 0
        while abs(r) >= eps:
            n *= 2
            int_h2 = int_h
            int_h = method(func,a,b,n)

            r = richardson(int_h,int_h2,k)
            iteration += 1

        print(" Iterations = %d" % (iteration))
        print(" Result = " + str(int_h))
```

```python
        print(" Result with Richardson: " + str(int_h + r))

if __name__ == "__main__":
    eps = [0.1 ** i for i in range(1,4)]
    print("Method of rectangles: ")
    calc_integral(eps,method_of_rectangles,2,func,0,1)
    print("Method of trapezoids: ")
    calc_integral(eps,method_of_trapezoid ,2,func,0,1)
    print("Method of Simpson: ")
    calc_integral(eps,method_of_simpson   ,4,func,0,1)
```

Результаты:

Для тестирования полученной программы был выбран интеграл

$$I = \int\limits_0^1 e^x\,dx = e^x\Big|_0^1 = e - 1 = 1.718282$$

В качестве ε для каждого метода были выбраны следующие значения:

$$\varepsilon = 0.1, \varepsilon = 0.01, \varepsilon = 0.001$$

Ниже приведена таблица результата полученной программы (Листинг 1) на указанных выше методах:

Метод	Кол-во итераций	Значение интеграла без уточнения по Ричардсону	Значение интеграла с уточнением по Ричардсону
		$\varepsilon = 0.1$	
Метод средних прямоугольников	2	1.713815279771087	1.7182494674780466
Метод трапеций	2	1.7272219045575166	1.718318841921747
Метод Симпсона	2	1.7182841546998966	1.7182818422184398
		$\varepsilon = 0.01$	
Метод средних прямоугольников	2	1.713815279771087	1.7182494674780466
Метод трапеций	2	1.7272219045575166	1.718318841921747
Метод Симпсона	2	1.7182841546998966	1.7182818422184398
		$\varepsilon = 0.001$	
Метод средних прямоугольников	4	1.7180021920526605	1.7182817010716516
Метод трапеций	4	1.7188411285799945	1.718281974051892
Метод Симпсона	2	1.7182841546998966	1.7182818422184398

Выводы:

В ходе выполнения лабораторной работы были рассмотрены три различных численных метода интегрирования: метод средних прямоугольников, метод трапеций, метод парабол (Симпсона). Была написана реализация данных методов на языке программирования Python.

Сравнивая результаты в таблице вычислений, метод парабол (Симпсона) является наиболее точным по сравнению с другими численными методами (меньшее количество итераций и более точный результат вычислений).

Кроме этого, анализируя оставшиеся два метода численного интегрирования, метод средних прямоугольников точнее, чем метод трапеций, так как погрешность метода трапеций в два раза выше, чем у метода средних прямоугольников. Однако на практике найти среднее значение на элементарном интервале можно только у функций, заданных аналитически (а не таблично), поэтому использовать метод средних прямоугольников удаётся далеко не всегда в отличие от метода трапеций с произвольным шагом. В силу разных знаков погрешности в формулах трапеций и средних прямоугольников истинное значение интеграла обычно лежит между двумя этими оценками.