2.6特征分解

1.特征值与特征向量

定义：

设A是n阶方阵，若数λ和n维非零列向量x，使得

$$Ax = \lambda x$$

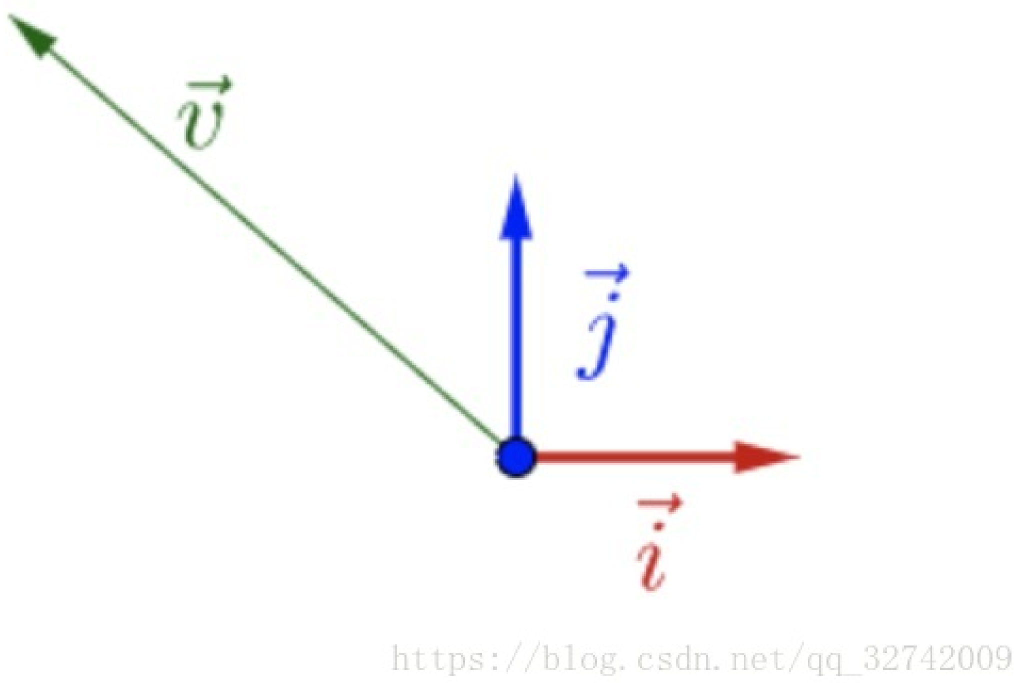
则称**λ**是方阵A的一个**特征值**，**x**为方阵A的对应于特征值λ的一个**特征向量**

用特征分解去分析矩阵A时，得到特征向量x构成的矩阵vecs和特征值构成的向量vals；

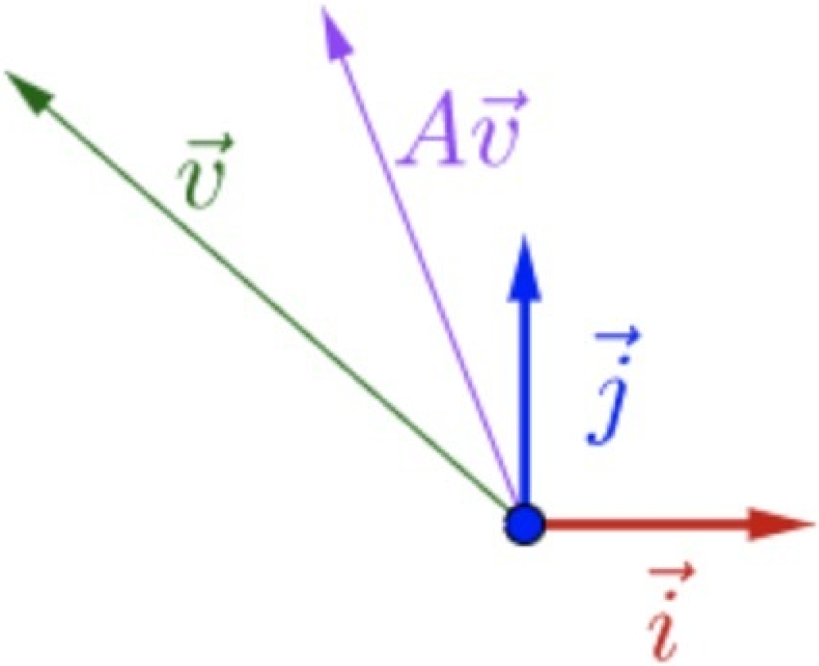
$$A = vecs \times vals \times vecs^{-1}$$

几何意义：

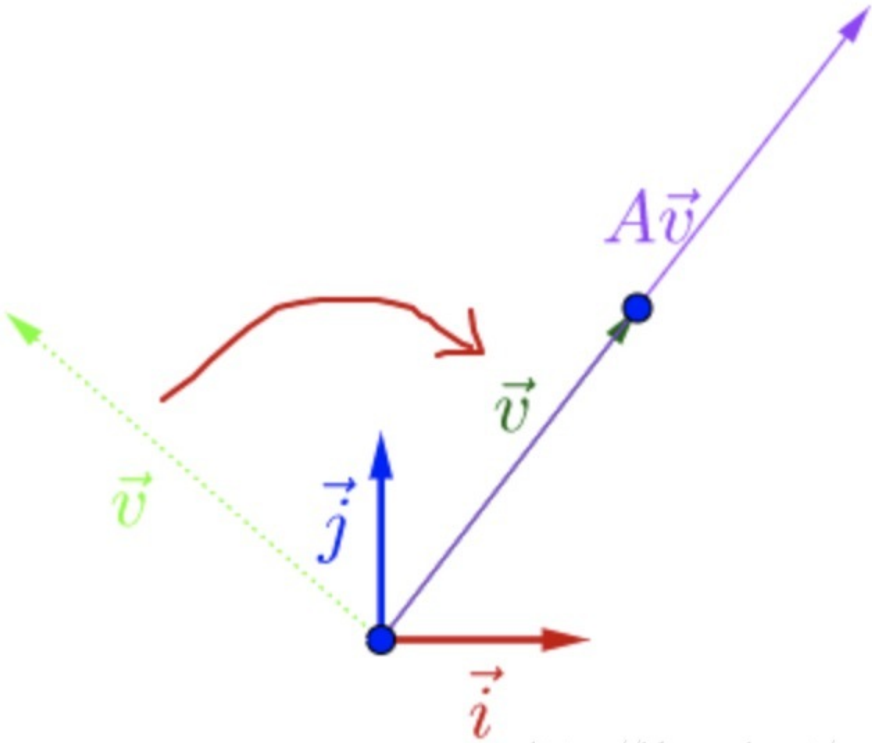
- **在$\vec{i}, \vec{j}$为基向量的空间下有个向量$\vec{v}$：**



- **对$\vec{v}$随便左乘一个矩阵A，即对$\vec{v}$进行一个线性变换：**



- **调整下$\vec{v}$的方向，使其特殊一点**

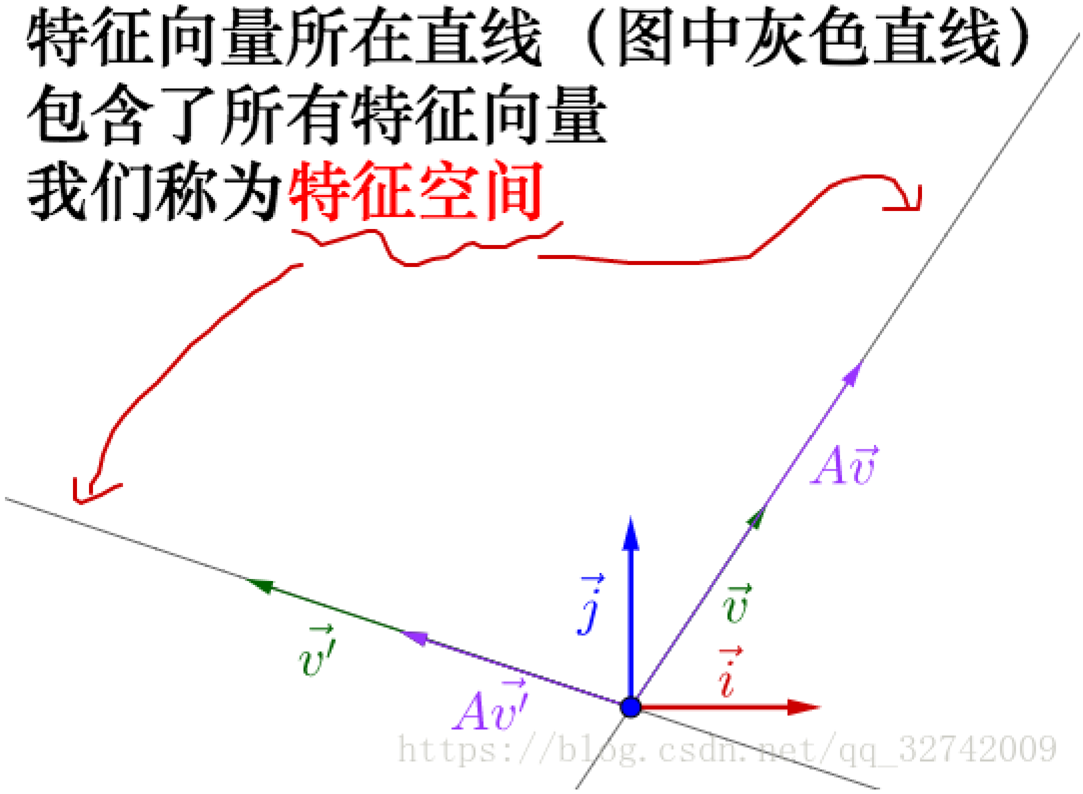


可以观察到，调整后的$\vec{v}$和$A\vec{v}$在同一直线上，只是$A\vec{v}$的长度相对$\vec{v}$的长度变长了。

此时，我们就称$\vec{v}$是A的特征向量，而$A\vec{v}$的长度是$\vec{v}$的长度的λ倍，λ就是特征值。

即 $T(\vec{v}) = A\vec{v} = \lambda\vec{v}$

- **从特征向量和特征值的定义中还可以看出，特征向量所在直线上的向量都是特征向量。**



2.Python代码实现及验证

numpy中的eig函数返回

```
import numpy as np
C=np.random.randint(-10,10,(4,4))
A=np.dot(C.T,C)
print(A)#生成正定对称矩阵

vals,vecs=np.linalg.eig(A)
print(vals)
print(vecs)#返回矩阵A的特征值组成的向量vals，特征向量组成的矩阵vecs
```

结果验证

```
x=np.dot(A,vecs[:,0])
y=np.dot(vals[0],vecs[:,0])
print(x,"\n",y)#验证Ax=λx

Lambda=np.diag(vals)
x=numpy.linalg.inv(vecs)
B=np.dot(np.dot(vecs,Lambda),x)
print(B)
```