

# יחידה 10

## רקורסיה

### 10.1 פתיחה ודוגמאות שונות

#### מהי רקורסיה?

רקורסיה היא טכניקה חכמה שסימל פתרון בעיות אלגוריתם בצורה מסודרת. פריט היא עזרת קריאות של מקרי (מינים, שנים, וכו') ובהחלטות של איפוס וזיון, גיוון. רקורסיה השלמה קצת קוואל-לצורה, אך "הכנה" הפעולה - התקדמות אל גוף הווקרסיה. למשל כמו הסדר פיקטורל - בשביל לזכור מהו היוזר החזיש, בסדרה, נצטרך לזכור מהם האירוע הקודם והשלישי - ובשביל זה, מזהם השליש השני, והכאשיון. את ווצים שהחשון והשני הם 1 ו-1 - וזה יהיה גבול רקורסיה שבאמצעות ופטר אר יבציה, ונכון לזכור מהו כל איור קודם הסדרה.

#### כללים לבניית פתרון רקורסיוני

הבעיה: השם (אף קלי) להיות מסוגל לעשות את זה באופן ישיר.  
# הנחה שאנחנו יכולים להשתמש ב-f עבור כל x (קריאים אחרים: נאן  
לחלוקה הקצרה לבציה פשוטה/זכה וזכה, שלה יש פתרון).  
# הנחה (א) f באונחיה של (y)  
# הנחה מקרה קסים (או מספר מקרי קסים) - "מאלי קצירה" (לכאן, מר. ארפסין  
וגר הקורסיה).

#### דוגמה - חישוב עצרת ברקורסיה

```
public static long Factorial(int n) {
    ① long result;
    if (n == 1)
        result = 1;
    else
        result = n * Factorial(n-1);
    return result;
}

    ② if (n == 1)
        return 1;
    else n * Factorial(n-1);
    ③ if (n == 1)
        return 1;
    return n * Factorial(n-1);
}
```



```

1 public long power (int a,int n) {
2     if (n==0)
3         return 1;
4     else {
5         int temp = power(a, n/2);
6         if (n%2 == 0)
7             return (temp * temp);
8         else
9             return (a * temp * temp);
10    }
11 }

```

$\frac{n-1}{2} = \frac{n}{2} \quad (\frac{5}{2} = \frac{5}{2})$   
 ואם נבטל יתחבר אולי אולי  
 בטל ק-א אולי אולי

### איך תתקדם נראית במחשבת המערכת?

התקדמות נראית קטנה אבל היא חשובה מאוד.

קשה להקטין (7,5) long x = power(7,5) (אולי קטן יותר) זה יראה כך:

- ② Method power()  
We came from: power, line 5  
a: 7  
n: 0  
temp: uninitialized
- ④ Method power()  
- "-  
a: 7  
n: 1  
temp: uninitialized
- ⑤ Method power()  
- "- a: 7, n: 2  
temp: uninitialized
- ⑥ Method power()  
- "- a: 7, n: 5  
temp: uninitialized
- ⑦ Method main()

- ① n=0 ולק power יחזיר 1
- ③  $n/2 \neq 0$  כי חזרנו ל-1 ולק power יחזיר  $(a \cdot temp \cdot temp) \cdot temp$  כלומר יחזיר 7
- ④  $n/2 = 0$  ולק  $n=2$  אולי temp יחזיר  $temp \cdot temp$  כלומר 49
- ⑥ חזרנו מן ה-10, ולק זה יחזיר  $7 \cdot 49 \cdot 49$  כלומר 16,807

### דוגמה - הדפסת מספרים To2 עולה

```

public static void printUp (int n, int i) {
    ① if (i==n)
        System.out.println(n);
    else {
        System.out.println(i);
        printUp(n, i+1);
    }
}

```

② if (num > 0) {  
 printUp(num-1);  
 System.out.println(num);  
 }

printUp(3) → printUp(2) → printUp(1) → printUp(0)  
 System... (4) ← System... (3) ← System... (2) ← System... (1)

### 10.2 המערכת

#### דוגמה - ספירת ספרות במספר

```

public static int digits (int n) {
    if ((0 <= n) && (n < 10))
        return 1;
    return 1 + digits (n/10);
}

```

#### דוגמה - העלאה בחזקה

```

public long power (int a, int n) {
    if (n==0)
        return 1;
    return (a * power(a, n-1));
}

```

$2^3 = 2 \cdot 2^2 = 2 \cdot 2 \cdot 2^1 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2^0 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 = 8$

אולי נראה שיש פה סוגיות, כיון שיש לנו חזקה של 0, וזה לא מוגדר. אבל זה לא בעיה כי  $a^0 = 1$  לכל a.

נניח שיש לנו  $a^3 = a \cdot a \cdot a$  ונניח שיש לנו  $a^2 = a \cdot a$  ונניח שיש לנו  $a^1 = a$  ונניח שיש לנו  $a^0 = 1$ .

נניח שיש לנו  $2^3 = (2^2)^2 = (2^1)^2 = ((2^0)^2)^2 = 2^3$ .

$2^3 \approx 6$  ויש לנו 3 הספרות, ואין  $\log_2 6 = 3$ .



### 10.3 רקורסיה במערכים

רקורסיה במערכים - הריצד?

[illegible]

## חיפוש סדרתי

והיה  $\circ$  ההחלה  
המשוואה

```
public boolean recFind(int[] a, int i, int x) {  
    if ( i == a.length )  
        return False;  
    if (a[i] == x)  
        return true;  
    return recFind(a, i+1, x);  
}
```

$O(n)$

חיסוש בינאר

ס קהילה

```
private int binaryR (int [] a, int x, int lo, int hi) {
    if (hi < lo) hi < lo  המיקום לא נמצא
        return -1; המיקום לא נמצא
    int middle = (hi + lo) / 2;
    if (a[middle] == x)
        return middle;
    else if (a[middle] < x)
        return binaryR(a, x, middle + 1, hi);
    else
        return binaryR(a, x, lo, middle - 1);
}
```

\* קצת עמלתי פחותה ופחותה ולא תחזיקו!

חוסר יציבות זרקוסי

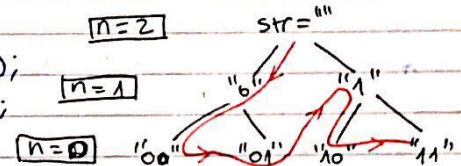
לפי פירוש המורה נרדכי (3) - 'בן' הוא אדם ו'א' הוא אדם  
 for(index=6)=(index=5)+(index=4) : כפי שראינו

$(\text{index}=4) + (\text{index}=3) + (\text{index}=3) + (\text{index}=2)$   
 $(\text{index}=3) + (\text{index}=2) + (\text{index}=2) + (\text{index}=1) + (\text{index}=2) + (\text{index}=1)$

מיון בעזרת ארבעה יציאות, כל יציאה נכנסת פעם אחת והיא נכנסת פעם אחת.

מחלקת - הדפסת חספנים בינא"ס באו"ח

```
private static void binaryNumbers(int n, String str) {
    if (n == 0) {
        System.out.println(str);
    } else {
        binaryNumbers(n-1, str+"0");
        binaryNumbers(n-1, str+"1");
    }
}
```



דואר-מצ'אח ח' במחורש'ת ודלסת מס' התעמ'ם שחא חוליע

```

public static int numberOfChars (String s, char ch) {
    if (s.length() == 0)
        return 0;
    if (s.charAt(0) == ch)
        return 1 + numberOfChars (s.substring(1), ch);
    else
        return numberOfChars (s.substring(1), ch);
}

```







383 התקור ס' ה':

1.  $arr[ind] \neq ind + 1$  אז  $arr[ind]$  הוא מספר שאינו יכול להיות האינדקס של האיבר  $ind + 1$ .  
2.  $arr[ind] = ind + 1$  אז  $arr[ind]$  הוא מספר שאינו יכול להיות האינדקס של האיבר  $ind + 1$ .

הקוד עצמו:

```
public static boolean sumNum(int [] a, int num) {  
    return sumNum(a, num, 0);  
}
```

```
private static boolean sumNum (int[] a, int num, int ind) {
    if (ind == a.length)
        return false;
    if (a[ind] == num)
        return true;
    return sumNum(a, num, ind+1) || sumNum(a, num-a[ind], ind+1);
}
```

## תוכן הקורס - Backtracking

צוה. ע.ס.ה. אפרמיון קציוו, הצחקסס, א.א.ט.ס. הפטרון קל צחצו

האינסטרומנט הדי. האשר נקלו ר' קהוני אופסיוא שריד נחטר אאורה ונקטר אפסיוא אחר.  
היטה מדטמט 4 נקאוא קורסיקיוא, ויהסג"ז האשר מצונו פריין קארן  
הדייט, און האשר מצונואט 6 האוסציוא ודעין אז האלע אפריין - שווא אן פריין.

איך כותבים מלאויותם ככה?

1. יש לי יותר או קודם הפיצול (או ציור ההחלטה).
2. קודם הפיצול היא שאלה קצתה קצתה פנימי, שג"כ או יותר אנשינו אצלך.
3. הצדד (היא) אכן אומרת לא יוצאים מי צהאנטיסטים (אז קצת) היא הימנה.

מה הקשר לוקורטיה?

הכוונה backtracking (נסיונות כניסה לא קורסיב). נניח קבל קשר אחד  
תקסימלי, נניח קניסטר, ואילו ישנה משהו שהלכנו בו ישר: אכן הוא "מונחה"  
למציאת אלה הצרכים כיגור תאכסני, ולכן היא גרמא ושיטה (הקאה) שגזרה אלא אולי  
משהו, אולי וכן וכן וכן.

quicksort של המסלול

היה שלק פתרה קונסטראיטד (מטריקס) חתומה  
 וזו נהיה שלק פתרה?  $\log$  (מטריקס) חתומה  
 היה מוצאם המדויק - ואז נחלק ב-2 (כאן קיבלנו)  
 סך הכול  $O(n \cdot \log n)$ .

ואם זה המקרה האחרון והחשוב! המקרה השלישי הוא שהעין יחיד  
מאובזלת ונקט - ואז תהי האבזלת יהי בעל (דח) ... (3-ח), (2-ח), (1-ח) -  
באור ובסגור אצלם את האבזלת ח בעצמם, וזה כבוד  
השואל.

כיוון זמן, הזמן, זמן  $O(n^2)$

בין מקרה נחשדן קיצולו המזרה המצוי<sup>3</sup>, וק באמצעות השפה.

10.5 מקורס"ה במערכים -  
דוגמאות מתקדמות

בע"ת סיום מספרים האם יש אברים במעק א פסוקים מהם?

\*הנהגה - אין הדירה [ט' ה'תשס"ז] משכור (היא חמה) (אין ערבה) (אין פאס) (אין)

# קבץ א. ע. ש. ג. י. - 111 קבוצת שאלות פתוחות

שהוא לא משהלך. אין (נדע)? (בזמן אים קוהרן ורמזין ישג מספרים

סעיף זה יהפוך כן ממ ואף הדבר כאן יור"ע (מ"ע)

מכאן נובע כי  $\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\lambda_0} + \frac{1}{\lambda_1}$  (הקשר בין אורכי הגל).

\* 2. - ממח ויהיה אסס (3) מרצות - כי זה אומר שזן ממח המזקק ואין

המשפט הנ"ל הוא שקול ל- false.

כי אין מסמכים שיוצגו לא

אם איך צוד יקרה?

מתחיל עם הצורה  $a$  של  $\text{ind}$ , כלומר האינדקס, והצורה  $e$

הוא

מלאי ה-3.7.77:

1. מידת הפיכת גיוס המוניטין לזיוף

2. אם הנתונים שווה קצתו -  $num$  שווה  $1$  (אם לא שווה  $1$  אזי  $num$  הוא מספר זוגי).

הערה: יש להוסיף את המספרים הנ"ל למספרים הקודמים.



ומה קורה כשהגענו למסו סתום? חוצים חציה וססה הקודמת. היתרון הקורסיה  
 הוא שכל הפעולות בססה הקורסיה נשאר כמו שהוא עד שהססה הקורסיה מסיימת  
 את עבודתה. לכן ניתן לחזור אחורה לקודם הפיצול, ולחזור כיוון אחר קודם זה  
 שלא הפיצול.

\* הססה: הקורסיה הפואסונה צריכה להגיד מה היא מחזירה false ומתחילה  
 כדי שכל הפעולות לקורסיה הקורסיה לא יחזיקו מהם הפעולות האלה.

את הורסיה אחר קורסיה false מהקורסיה שאליה היא קורסיה, היא יכולה  
 לנסות אנסיה אחרת. אז כעס נוספת היא קורסיה false, היא יכולה  
 לנסות עוד אנסיה (קורסיה וס). ואם נגזרו האופציות - היא מחזירה  
 false קודם.

אם היא קורסיה true - גם היא מחזירה true.

## Top-Down Design

יש להגדיר קודם את כל פעולות - כלומר את הפעולות הקודם, נדבר על  
 ענין, קודם זה חצי היא קורסיה, ולססה מכן, נבדוק אחרת.  
 אז נסיד את כל פעולות קודם שלה ככה! נסיד את הפעולות הקודם  
 לקודם קודם.

{ i = 0; return false }

public boolean disco(boolean[] a, boolean[] b) **בעיית הנויות**

if (equalArrays(a, b, 0)) ← (אם הבעיה יש להפסל בחזרה)  
 return true; ← שססה שקורסיה (הוא החזרה) שוים

else if (i == a.length) ← אז i כמו קודם לקודם הפעולות קודם שוים  
 return false; ← שססה הפעולות קודם שוים, וזק הקודם שוים  
 כל פעולות קודם שוים

press(a, i); ← הפסל "אחרת" א הפעולות קודם שוים. כוונה  
 קודם הפעולות

if (disco(a, b, i+1)) ← אז הקורסיה קודם החזרה  
 return true; ← true גם את אחרת true

press(a, i); ← לחזרה שיה שחזרה למצב קודם קודם  
 והקורסיה קודם החזרה false

return disco(a, b, i+1); ← אזי אחרת את הפעולות  
 של הקורסיה קודם הפעולות קודם שוים

\* אסוחס נסיד קודם שוים שססה חזרה וססה חזרה / קודם שוים חזרה

ססה חזרה קודם שוים הפעולות קודם שוים

```
public boolean disco(boolean[] a, boolean[] b) {
    return disco(a, b, 0);
}
```