לוגיקה

קְשָׁרים

קֶשֶׁר השלילה *negation*

קֶשֶׁר חד-מקומי כלומר פועל על פסוק אחד

סימון : $\neg$ $=$ $!$ $\sim$ NOT

שלילה של פסוק למשל $\neg p$ משמעו לא p (ולא ההיפך מ p)

p	$\neg p$
T	F
F	T

קֶשֶׁר "וגם" *conjunction*

מילת קישור המשלבת שני פסוקים לפסוק אחד

קֶשֶׁר דו-מקומי כלומר קֶשֶׁר הפועל על שני פסוקים

סימון : $\wedge$ וגם ו & && AND

כאשר שני הפסוקים q, p הוא אמת, אז p^q הוא אמת

כאשר אחד מהפסוקים q, p הוא שקר, אז p^q הוא שקר

p	q	$p \wedge q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

קֶשֶׁר "או" *disjunction*

מילת קישור המשלבת שני פסוקים לפסוק אחד

קֶשֶׁר דו-מקומי כלומר קֶשֶׁר הפועל על שני פסוקים

סימון : $\vee$ או | || OR

כאשר לפחות אחד מהפסוקים q, p הוא אמת, אז $p \vee q$ הוא אמת

כאשר שני הפסוקים q, p הם שקר, אז $p \vee q$ הוא שקר

p	q	$p \vee q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

קֶשֶׁר Xor *exclusive or*

מילת קישור המשלבת שני פסוקים לפסוק אחד

קֶשֶׁר דו-מקומי כלומר קֶשֶׁר הפועל על שני פסוקים

סימון : $\oplus$ XOR

כאשר רק אחד בלבד מהפסוקים q, p הוא אמת, אז $p \oplus q$ הוא אמת

כאשר שני הפסוקים יחד q, p הם אמת, אז $p \oplus q$ הוא שקר

כאשר שני הפסוקים יחד q, p הם שקר, אז $p \oplus q$ הוא שקר

p	q	$p \oplus q$
T	T	F
T	F	T
F	T	T
F	F	F

קֶשֶׁר "אם...אז..." *if then*

סימון : $p \Rightarrow q$ חץ

הפסוק $p \Rightarrow q$ הוא שקר כאשר p הוא אמת ו q הוא שקר

בכל מקרה אחר הפסוק $p \Rightarrow q$ הוא אמת

p	q	$p \Rightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

קֶשֶׁר "...אם ורק אם..." *if and only if*

סימון : $p \Leftrightarrow q$ אסם אם"ם iff

הפסוק $p \Leftrightarrow q$ הוא אמת כאשר p הוא אמת ו q הוא אמת

או כאשר p הוא שקר ו q הוא שקר

p	q	$p \Leftrightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

פסוק $proposition$

משפט או פסוק המביע טענה שהיא **אמת** או **שקר.** אמת ושקר במובן של נכון או לא נכון.

סימון אמת : 1 T True בקורס נשתמש ב T

סימון שקר : 0 F False בקורס נשתמש ב F

פסוק פורמאלי שהעמודה הימנית בלוח האמת שלו מכילה רק T נקרא **טאוטולוגיה** (tautology)

פסוק פורמאלי שהעמודה הימנית בלוח האמת שלו מכילה רק F נקרא **סתירה** (contradiction)

שני פסוקים פורמאליים נקראים שקולים טאוטולוגית ובקיצור שקולים אם יש להם אותו לוח אמת.

נסמן שקילות ב $\equiv$

שקילות טאוטולוגית

לכל שני פסוקים פורמאליים יש לבנות לוח אמת המכיל את כל המשתנים הפסוקיים המופיעים **לפחות באחד משני הפסוקים.**

זוג פסוקים פורמאליים עם אותו לוח אמת נקראים שקולים טאוטולוגית ובקיצור – שקולים.

<u>טאוטולוגיות</u>

$$p \Rightarrow t\,, \quad f \Rightarrow p\,, \quad p \vee (\neg p) \quad ,p \Leftrightarrow p \quad ,p \Rightarrow p$$

<u>סתירות</u>

$$t \Rightarrow f \quad , \quad p \wedge (\neg p) \quad , \quad p \Leftrightarrow (\neg p)$$

שלילת טאוטולוגיה היא סתירה

שלילת סתירה היא טאוטולוגיה

המשפטים הבאים אומרים את אותו דבר

- β **<u>נובע</u>** מ α אם בכל מקרה בו α מקבל ערך T גם β יקבל ערך T.
- β **<u>נובע</u>** מ α אם בכל מקרה בו β מקבל ערך F גם α יקבל ערך F.
- α **<u>גורר</u>** את β אם בכל מקרה בו α מקבל ערך T גם β יקבל ערך T.
- α **<u>גורר</u>** את β אם בכל מקרה בו β מקבל ערך F גם α יקבל ערך F.
- מ α **<u>נובע</u>** β אם בכל מקרה בו α מקבל ערך T גם β יקבל ערך T.
- מ α **<u>נובע</u>** β אם בכל מקרה בו β מקבל ערך F גם α יקבל ערך F.

וההיפך

- α **<u>נובע</u>** מ β אם בכל מקרה בו β מקבל ערך T גם α יקבל ערך T.
- α **<u>נובע</u>** מ β אם בכל מקרה בו α מקבל ערך F גם β יקבל ערך F.
- β **<u>גורר</u>** את α אם בכל מקרה בו β מקבל ערך T גם α יקבל ערך T.
- β **<u>גורר</u>** את α אם בכל מקרה בו α מקבל ערך F גם β יקבל ערך F.
- מ β **<u>נובע</u>** α אם בכל מקרה בו β מקבל ערך T גם α יקבל ערך T.
- מ β **<u>נובע</u>** α אם בכל מקרה בו α מקבל ערך F גם β יקבל ערך F.

α **גורר** את β אם ורק אם $\alpha \Rightarrow \beta$ היא **טאוטולוגיה**.

אם α **גורר** את β וגם β **גורר** את α אז $\alpha \equiv \beta$ כלומר α ו β **שקולים**.

טאוטולוגיה נובעת מכל פסוק

סתירה גוררת כל פסוק

אם **פסוק נובע מטאוטולוגיה** אז הוא בעצמו **טאוטולוגיה**.

אם **פסוק גורר סתירה** אז הוא בעצמו **סתירה**.

גורר	נובע	טאוטולוגיה	סתירה						
α	β	$\alpha \Rightarrow \beta$	$\alpha \wedge \neg\beta$	$\alpha \Rightarrow \neg\beta$	$\alpha \wedge \beta$	$\neg\alpha \wedge \neg\beta$	$\neg\alpha \Rightarrow \beta$	$\neg\alpha \wedge \beta$	$\neg\alpha \Rightarrow \neg\beta$
T	T	T	F	F	T	F	T	F	T
F	F	T	F	T	F	T	F	F	T
F	T	T	F	T	F	F	T	T	F
F	F	T	F	T	F	T	F	F	T

כַּמָּתִים

נועד לאינסוף טענות

כַּמָּת – לכל all

מקביל ל וגם

סימון : $\forall$

שימוש : $\forall x\ p(x)$ כל x מקיים p

דוגמא : $\forall x\ (x^2 \geq 0)$

"לכל x מתקיים x^2 גדול או שווה ל 0 "

כַּמָּת – קיים $exists$

מקביל ל או

סימון : $\exists$

שימוש : $\exists x\ p(x)$ קיים x שמקיים p

דוגמא : $\exists x\ (x < 0)$

"קיים x כך ש x קטן מ 0 "

השלילה של "כל" או "לכל" היא "קיים לא" והשלילה של קיים היא "לכל לא"

פסוק : **כל** עכבר אפור **מחפש** אוכל בלילה.

שלילה : **קיים** עכבר אפור **שאינו מחפש** אוכל בלילה.

פסוק : **קיים** עכבר **שהוא** אפור **וגם** זריז.

שלילה : **כל** העכברים **הם לא** אפורים **וגם לא** זריזים.

פסוק : **לכל** מספר טבעי **קיים** מספר טבעי הקטן ממנו.

שלילה : **קיים** מספר טבעי **שכל** מספר טבעי **לא** קטן ממנו.

שקילויות שימושיות

שלילה כפולה

$$\neg\neg p \equiv p$$

חילוף

$$p \land q \equiv q \land p$$

$$p \lor q \equiv q \lor p$$

קיבוץ

$$(p \land q) \land r \equiv p \land (q \land r)$$

$$(p \lor q) \lor r \equiv p \lor (q \lor r)$$

פילוג

$$p \land (q \lor r) \equiv (p \land q) \lor (p \land r)$$

$$p \lor (q \land r) \equiv (p \lor q) \land (p \lor r)$$

חוקי דה-מורגן

$$\neg(p \land q) \equiv (\neg p) \lor (\neg q)$$

$$\neg(p \lor q) \equiv (\neg p) \land (\neg q)$$

עקרון ה contrapositive

$$p \Rightarrow q \equiv (\neg q) \Rightarrow (\neg p)$$

הבעת חץ בעזרת קַשָּׁרִים אחרים

$$p \Rightarrow q \equiv \neg\big(p \land (\neg q)\big) \equiv (\neg p) \lor q$$

$$p \Leftrightarrow q \equiv (p \Rightarrow q) \land (q \Rightarrow p)$$

$$p\Delta q = p \oplus q \equiv \neg(p \Leftrightarrow q) \equiv (p \land \neg q) \lor (\neg p \land q) \equiv (p \lor q) \land \neg(p \land q)$$

שקילויות עבור חץ כפול

$$p \Leftrightarrow q \equiv q \Leftrightarrow p \equiv (p \Rightarrow q) \land (q \Rightarrow p) \equiv (p \land q) \lor \big((\neg p) \land (\neg q)\big)$$

-

$$p \land f \equiv f \qquad p \land t \equiv p \qquad p \land p \equiv p$$

$$p \lor f \equiv p \qquad p \lor t \equiv t \qquad p \lor p \equiv p$$

-

$$p \Rightarrow (q \Rightarrow r) \equiv (p \land q) \Rightarrow r$$

חוקי דה-מורגן לכַּמָּתִים

$$\neg\forall x \quad p(x) \equiv \exists x \ \neg p(x)$$

$$\neg\exists x \quad p(x) \equiv \forall x \ \neg p(x)$$

$$\forall x \quad p(x) \equiv \neg\exists x \ \neg p(x)$$

תורת הקבוצות

קבוצה – שם כללי לתיאור אוסף של איברים.

- קבוצה מאופיינת ע"י האיברים שבה
- בכל קבוצה יש לעצמים שבה לפחות תכונה אחת משותפת
- תכונה זו מבדילה בינם לבין כל העצמים שאינם בקבוצה זו
- ניתן לתאר קבוצה בשפה פשוטה או בצורה פורמאלית:
  - רשימה של איברי הקבוצה

    $K = \{1, 2, 3, \dots \mathbb{N}\}$
  - תכונה מאפיינת לפיה קובעים אילו הם איבריה

    $K = \{n | n \in \mathbb{N}\}$
  - { כל המספרים האי זוגיים החיוביים }
- אין חשיבות לסדר בה רשומים איברי הקבוצה
- גם אם איבר מופיע פעמים אחדות בתיאור הקבוצה , אין הוא נחשב יותר מאשר איבר אחד בה

  $A = \{1, 2, 3\} = \{1, 1, 2, 2, 3, 3\}$
- אוספים בעלי איבר אחד או ללא איברים הם גם קבוצות
- כל קבוצה חלקית לעצמה $A \subseteq A$
- כל קבוצה שווה לעצמה $A = A$
- כל קבוצה שקולה לעצמה
- אוסף שאין בו איברים נקרא **קבוצה ריקה** וסימנו $\emptyset$
- יש רק קבוצה ריקה אחת ולכן אפשר לקרוא לה **הקבוצה הריקה**
- **הקבוצה הריקה** חלקית לכל קבוצה אחרת כולל לעצמה.
- **הקבוצה הריקה** שקולה לעצמה
- כל קבוצה היא סופית או אינסופית
- קבוצה אשר ניתן לערוך רשימה הכוללת את כל איבריה היא בוודאי סופית
- קבוצות שקולות הן קבוצות בעלות מספר זהה של איברים
  - ניתן להשוות מספר איברים של שתי קבוצות באופנים הבאים:
    - ספירה - אינה מתאימה לקבוצות אינסופיות.
    - התאמה של זוגות איברים, איבר אחד מכל קבוצה.

- התאמה היא חד חד ערכית בין איברי קבוצה A לאיברי קבוצה B אם בהתאמה זו לכל איבר של A מותאם איבר אחד ויחיד של B ולכל איבר של B מותאם איבר אחד ויחיד של A.

  לצורך התאמה חד חד ערכית יש לנסח כלל התאמה בין שתי הקבוצות.

  $A = \{n \,|n \in \mathbb{N}\} \qquad B = \{2n | n \in \mathbb{N}\}$

  - ההתאמה היא לכל

    $x \in A$
  - מתקיים

    $y = 2x \qquad y \in B$
  - וגם לכל

    $y \in B$
  - מתקיים

    $x = \frac{y}{2} \qquad x \in A$

שתי קבוצות נקראות שקולות אם קיימת התאמה חד חד ערכית ועל ???בין איבריהן

- על שתי קבוצות שקולות נאמר שהן שוות עוצמה
- שתי קבוצות סופיות הן שקולות (שוות עוצמה) אם ורק אם יש בהן אותו מספר איברים.
- קבוצה A חלקית לקבוצה B אם עבור כל איבר בקבוצה A קיים איבר זהה בקבוצה B.

  $A \subseteq B$

  לכל $x \in A$ קיים $x \in B$

- קבוצה A חלקית ממש לקבוצה B אם עבור כל איבר בקבוצה A קיים איבר בקבוצה B <u>**וגם**</u> קיים איבר אחד לפחות בקבוצה B שאינו קיים בקבוצה A.

  $A \subset B$

  לכל $x \in A$ מתקיים $x \in B$ וגם מתקיים $y \in B \text{ and } y \notin A$

- קבוצה A שווה לקבוצה B אם קבוצה A חלקית לקבוצה B וגם קבוצה B חלקית לקבוצה A

  $A = B \leftrightarrow A \subseteq B \text{ and } B \subseteq A$

- קבוצה היא אינסופית אם קיימת קבוצה החלקית לה ממש ושקולה
- קבוצה היא סופית אם אינה אינסופית כלומר אם אין קבוצה החלקית לה ממש ושקולה לה.
- קבוצה S היא סופית אם קיים $n \in \mathbb{N}$ כך ש $|S| = |\{0, 1, 2, 3, \dots, n-1\}|$

- **איחוד** של קבוצות $A \cup B = \{x | x \in A$ או $x \in B\}$
- איחוד של A עם B הם כל האיברים השייכים ל A או ל B או לשתי הקבוצות יחד

$$A \cup B = B \cup A \quad \leftrightarrow \quad B \subseteq A \cup B, \quad A \subseteq A \cup B$$

- באיחוד של יותר משתי קבוצות סדר האיחוד אינו משנה.
- מספר האיברים ב $A \cup B$ אינו בהכרח סכום מספר האיברים של A וB אבל הוא לעולם אינו גדול מסכום זה.
- את איחוד הקבוצות $S_1, S_2, S_3, \dots, S_n$ ניתן לרשום גם כך $S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup \dots \cup S_n$ או בקצרה כך

$$\bigcup_{i=1}^{n} S_i$$

- **חיתוך** של קבוצות $A \cap B = \{x | x \in A$ וגם $x \in b\}$
- החיתוך A ו B הם כל האיברים השייכים גם לקבוצה A וגם לקבוצה B.

$$A \cap B \subseteq B, \quad A \cap B \subseteq A, \quad A \cap B = B \cap A$$

- כאשר $A \subseteq B$ מתקיים $A \cap B = A$
- שתי קבוצות שהחיתוך שלהן הוא הקבוצה הריקה נקראות קבוצות זרות.
- שתי קבוצות זרות אחת לשנייה אם אין לשתיהן אף איבר משותף כלומר
A ו B זרות אם $A \cap B = \emptyset$
- את חיתוך הקבוצות $S_1, S_2, S_3, \dots, S_n$ ניתן לרשום גם כך $S_1 \cap S_2 \cap S_3 \cap \dots \cap S_n$ או בקצרה כך

$$\bigcap_{i=1}^{n} S_i$$

- כאשר מבצעים איחוד וחיתוך יחד חשוב להקפיד על סימן הסוגריים כלומר על סדר הפעולות

- **הפרש** בין קבוצות $A \setminus B = \{x \in A$ וגם $x \notin B\}$

$$(A \cup B) \setminus B = A \setminus B$$

בדרך כלל מתקיים

$$A \setminus B \neq B \setminus A$$

- אם A ו B הן שתי קבוצות אז A פחות B הם כל האיברים השייכים לקבוצה A וגם אינם איברים בקבוצה B.

- הגדרת האיחוד

$$\{A_i\} \quad i \in X \quad B = \{1, 2, 3\}$$

$$\bigcup_{i \in B} A_i = \{x \mid \exists(i \in B)(x \in A_i)\}$$

- הגדרת חיתוך

$$\{A_i\} \quad i \in X \quad B = \{1, 2, 3\}$$

$$\bigcap_{i \in B} A_i = \{x \mid \forall(i \in B)(x \in A_i)\}$$

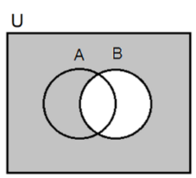
- **הקבוצה האוניברסלית**

B קבוצה חלקית ל קבוצה האוניברסלית U. הקבוצה שמשלימה את B ביחס ל U או בקיצור "המשלים של B" ביחס ל U היא הקבוצה שאיבריה הם כל האיברים שהם איברים של U וגם אינם איברים של B.

כאשר אין מקום לספק בשאלה מהי הקבוצה האוניברסלית שעליה נסב הדיון מסמנים את המשלים של B כך B^c או B'. c הוא קיצור של *complement* .

אם יש ספק בשאלה מהי הקבוצה האוניברסלית ניתן לסמן כך $B^c(E)$

$$U \setminus B \;=\; B^c \;=\; B^c(U) \;=\; B' \;=\; B'(U)$$



אם B חלקית לקבוצה האוניברסלית E, כל איבר של E שאינו איבר ב B הוא איבר ב B^c לפיכך איחוד שלו ושל B הוא E.

$$B \cup B^c = E$$

B^c מכילה בדיוק את אותם איברים של E שאינם איברים ב B לפיכך B ו B^c הן קבוצות זרות.

$$B \cap B^c = \emptyset$$

- **קבוצת החזקה P**

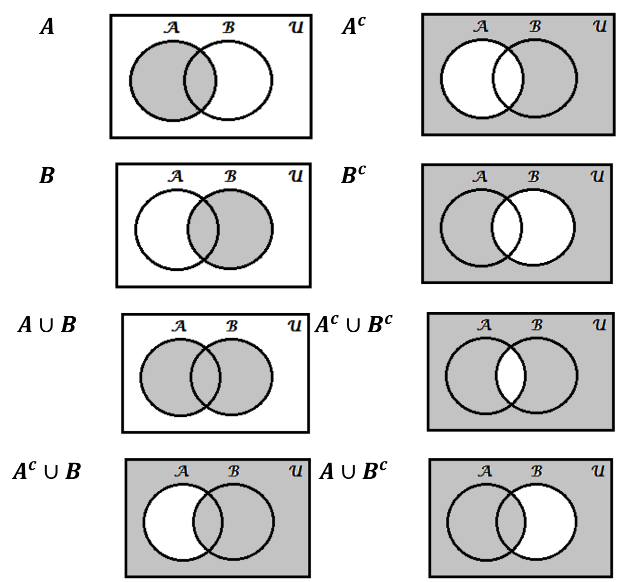
קבוצה החזקה של A כלומר $P(A)$ מכילה את כל הקבוצות החלקיות ל A כלומר $A \subseteq P(A)$

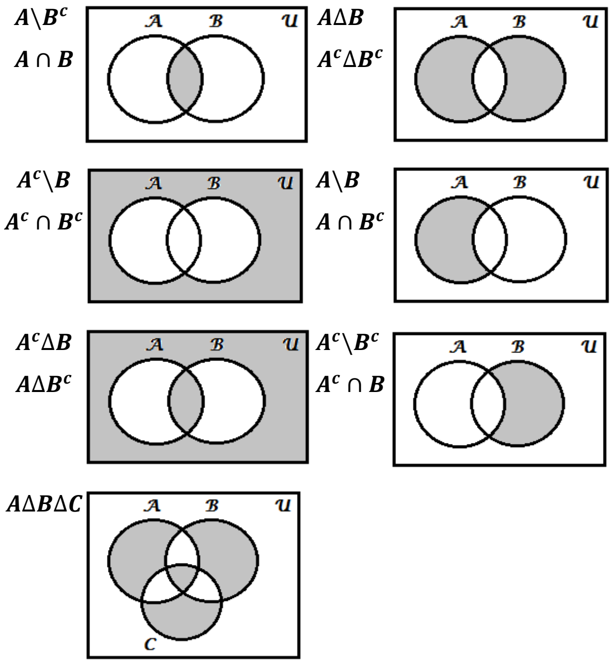
- לכל קבוצה A מתקיים $\emptyset \in P(A)$
- לכל קבוצה $A \neq \emptyset$ מתקיים $A \in P(A)$ וגם $\emptyset \in P(A)$
- אם A קבוצה סופית אז גם $P(A)$ קבוצה סופית.
- אם A בעלת n איברים אז $P(A)$ מכילה 2^n איברים.
- אם A קבוצה אינסופית אז גם $P(A)$ היא קבוצה אינסופית שכן כל קבוצה המורכבת מאיבר אחד בלבד של A היא איבר ב $P(A)$ וקבוצות אלה בלבד הן אוסף אינסופי למרות שהן רק חלק מאיברי $P(A)$. ב $P(A)$ יש נוסף על קבוצות אלה איברים נוספים שהם קבוצות החלקיות ל A לדוגמא קבוצות המכילות שני איברים של A .
- לכל קבוצה אינסופית A קיימת קבוצה אינסופית $P(A)$ שאינה שקולה לA ובפרט לא כל הקבוצות האינסופיות שקולות אלו לאלו.

$$A \subseteq P(A)$$

משפט קנטור – לכל קבוצה A, A אינה שקולה ל $P(A)$ ולכן לכל קבוצה A קיימת קבוצה שאינה שקולה ל A.

כדי להוכיח ששתי קבוצות כגון B ו $P(B)$ אינן שקולות עלינו להוכיח כי כל התאמה ביניהן אינה חד חד ערכית





אלגברה של קבוצות

$A \cup B = B \cup A$

$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

$A \cap B = B \cap A$

$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

$A \cup (A \cap B) = A$

$A \backslash B = A - B = A \cap B' = A \cap B^c$

$A \neq \emptyset \wedge (A \times B = A \times C) \Rightarrow B = C$

$A \times B \setminus A \times C = A \times (B \backslash C)$

- **חוקי דה מורגן**

$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

$(A^c)^c = A$

$E^c = \emptyset$

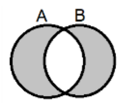
$\emptyset^c = E$

$A^c \cup A = E$

$A^c \cap A = \emptyset$

- **הפרש סימטרי**

$A \oplus B = B \oplus A = A \Delta B = B \Delta A = (A - B) \cup (B - A) = (A \cup B) - (A \cap B)$



$x \in A \oplus B$

הוכחה :

$$x \in (A - B) \cup (B - A)$$

$$(x \in A - B) \vee (x \in B - A)$$

$$(x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in B \wedge x \notin A)$$

$$(x \in A \vee x \in B) \wedge \underbrace{(x \in A \vee x \notin A)}_{p\vee\neg p \text{ טאוטולוגיה}} \wedge \underbrace{(x \notin B \cup x \in B)}_{p\vee\neg p \text{ טאוטולוגיה}} \wedge (x \notin B \vee x \notin A)$$

$$(x \in A \vee x \in B) \wedge (x \notin B \vee x \notin A)$$

$$(x \in A \vee x \in B) \wedge \neg(x \in B \wedge x \in A)$$

$$x \in A \cup B \wedge x \notin A \cap B$$

$$x \in (A \cup B) - (A \cap B)$$

$\emptyset \subseteq \emptyset$

$\emptyset \subseteq A$

$\emptyset = \emptyset$

$A \neq \emptyset \quad only\ if \qquad \emptyset \subset A$

$A \subseteq A$

$A \setminus B = A \cap B^c$

$A \cap A^c = \emptyset$

$A \cup A^c = E\ (\ Universe\ )$

$(A^c)^c = A$

$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

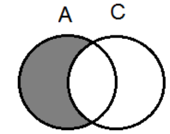
$A \setminus B \subseteq A$

$A \subseteq A \cup B$

$A \cap B \subseteq A$

$A = B \leftrightarrow (A \subseteq B) \vee (B \subseteq A)$

$x \in A \setminus C \ \leftrightarrow (x \notin C) \vee (x \in A)$



$A \subset B \leftrightarrow (A \subseteq B) \vee (B \nsubseteq A)$

$A \subset B \leftrightarrow (A \subseteq B) \vee \ (B \neq A)$

$P(A) = \{X | X \subseteq A\}$

$A = \{1,2\} \quad \leftrightarrow \quad P(A) = \{\{1\},\{2\},\{1,2\},\emptyset\}$

<u>אקסיומות בתורת הקבוצות</u>

I. קיימת קבוצה ריקה : $\exists X \ \ \forall y\ y \in X \leftrightarrow (p \wedge \neg p)$

II. קיימת קבוצה שהאיברים שלה שייכים או לA או ל B

$$\forall A, \forall B \ \ \exists C \quad \forall y \ \ \big(y \in C \leftrightarrow (y \in A \vee y \in B)\big)$$

קבוצה כזו מסומנת ב $A \cup B$

III. קיימת קבוצה שהאיברים שלה שייכים גם ל A וגם ל B

$$\forall A, \forall B \ \ \exists C \quad \forall y \ \ \big(y \in C \leftrightarrow (y \in A \wedge y \in B)\big)$$

קבוצה כזו מסומנת ב $A \cap B$

IV. קיימת קבוצה שהאיברים שלה שייכים ל A ואינם שייכים ל B

$$\forall A \ \ \forall B \quad \exists C \ \ (x \in C \leftrightarrow (x \in A \wedge x \notin B))$$

קבוצה כזו מסומנת ב $A \setminus B$

V. לכל קבוצה A קיימת הקבוצה $\{A\}$

$$\forall A \ \ \exists C \ \ (\forall x (x \in C \leftrightarrow x = A)$$

קיימת הקבוצה $\{\emptyset\} \neq \emptyset$

$$|\{\emptyset\}| = 1$$

$$|\emptyset| = 0$$

VI. שתי קבוצות הן שוות אם ורק אם יש להן אותם איברים

$$\forall A = \forall B \leftrightarrow (\forall x (x \in A \leftrightarrow x \in B)$$

$$\forall A = \forall B \leftrightarrow ((\forall x \in A\ \exists x \in B) \wedge (\forall y \in B\ \exists y \in A)$$

עוצמה של קבוצות (Cardinality)

סימון : $|A|$

העוצמה של קבוצה סופית היא מספר האיברים בה .

שתי קבוצות A,B הן שוות עוצמה אם קיימת פונקציה חח״ע בין A ו B ואז נרשום $|A|=|B|$

כל קבוצה שוות עוצמה ל $\mathbb{N}$ נקראת בת-מניה ומסומנת ב $|\mathbb{N}|=\aleph_0$

$|\mathbb{N}| = |$קבוצת הטבעיים הזוגיים$|$

$\forall(n\in\mathbb{N})\to 2n\in\mathbb{N}$

$|\mathbb{N}|=|\mathbb{Z}|$

$$\forall(n\in\mathbb{N})\to x\in\mathbb{Z}\begin{cases} x=\frac{n}{2} & \text{זוגי} \\ x=-\frac{n+1}{2} & \text{אי זוגי}\end{cases}$$

קבוצת המספרים הממשיים בין 0 ו 1 אינה בת-מנייה

$\aleph_0\neq|\{x\in\mathbb{R}|0<x<1\}$

נקרא לעוצמה של הקבוצה הזאת **עוצמת הרצף** ונסמנה באות c

סדר של עוצמות

עבור קבוצות **סופיות** מתקיים $|B|>|A|$ אם ורק אם A שוות עוצמה לקבוצה חלקית ממש של B.

זה לא מתקיים עבור קבוצות **אינסופיות** כי בכל קבוצה אינסופית B מתקיים :

קיימת קבוצה חלקית ממש ל B וגם שוות עוצמה לה (שקולה לה) ובמילים אחרות

קבוצה היא אינסופית אם קיימת קבוצה החלקית לה ממש ושוות עוצמה לה (שקולה לה).

עבור קבוצות כלשהן (אינסופיות וסופיות) מתקיים :

$|A|\leq|B|$ אם ורק אם A שוות עוצמה לקבוצה חלקית של B .

הגדרה : $|A|<|B| \Leftrightarrow |A|\leq|B| \wedge |A|\neq|B|$

שאלה : מי גדולה יותר $\aleph_0$ או c ?

תשובה : $\mathbb{N}\subseteq\mathbb{R}$

הסבר : $\aleph_0\leq c$ וגם $\aleph_0\neq c$ ולכן $\aleph_0<c$

משפט קנטור-שרדר-ברנשטיין (ק-ש-ב)

עבור k, m עוצמות.

אם $k\leq m$ וגם $m\leq K$ אז m=k

היחס $\leq$ שהגדרנו הוא יחס סדר חלקי.

אם $|B|\leq|A|$ וגם $|A|\leq|B|$ אז $|A|=|B|$ או $A\sim B$

עוצמה של A היא מחלקת שקילות של היחס $\sim$ ותסומן $|A|=[A]$

בהינתן 2 עוצמות α,β מגדירים $\alpha\leq\beta$ אם כש $\alpha=[A],\quad\beta=[B]$

אז קיימת פונקציה חח״ע $f:A\to B$

כלומר אם $\alpha=[A']$, כלומר $A'\sim A$ וגם $\beta=[B']$ כלומר $B'\sim B$

וגם אם קיים $|A|\leq|B|$ כלומר פונקציה חח״ע $f:A\to B$

אז קיימת פונקציה חח״ע $f':A'\to B'$

ולכן יש $h:A'\to A$ וגם $g:B\to B'$ כלומר

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ h\uparrow & & \downarrow g \\ A' & \xrightarrow{f'} & B' \end{array}$$

$f'=g\circ f\circ h:A'\to B'$

f' הרכבה של פונקציות חח״ע ולכן חח״ע

אם $|A|\leq|B|$ אז קיימת פונקציה חח״ע מ A ל B או פונקציה על מ B ל A כלומר $f:A\to B$

אם $|B|\leq|A|$ אז קיימת פונקציה חח״ע מ B ל A או פונקציה על מ A ל B כלומר $g:B\to A$

ולכן קיימת פונקציה חח״ע ועל מ A ל B כלומר $h:A\to B$

הגדרה : $\alpha<\beta$ אם $\alpha\leq\beta$ וגם $\beta\nleq\alpha$

משפט קנטור

לכל קבוצה A מתקיים $|A| < |P(A)|$

כלומר ... $|A| < |P(A)| < |P(P(A))| < P\left(P(P(A))\right)$

מסקנה : **קיימות אינסוף עוצמות אינסופיות.**

$\mathbb{R}$ אינה ניתנת להימנות כלומר אין $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ על

פעולות על עוצמות

חיבור עוצמות

בהינתן עוצמות כלשהן m, k , נבחר קבוצות* נציגים **<u>כלשהן</u>** A, B כך ש $|A| = k$ $\quad |B| = m$ ו $A \cap B = \emptyset$

נחשב את העוצמה של קבוצות האיחוד ונגדיר $|A \cup B| = k + m$

יש להוכיח שאין תלות בנציגים כלומר אם יש קבוצות C, D כך ש $|C| = |A|$ וגם $|D| = |B|$

אז $|A \cup B| = |C \cup D|$

לדוגמא :

$\aleph_0 + n = \aleph_0$ $\quad A=\{n,n+1,\dots,\infty\}$, $B=\{0,1,\dots,n-1\}$ $\quad |A|=\aleph_0$, $|B|=n$ $\quad f:\mathbb{N}\to A$, $f(x)=x+n$ $\quad A \cup B = \mathbb{N}$

$\aleph_0 + c = c$ $\quad A=\{0,1,2,\dots,\infty\}$, $B=\{0<x<1\}$ $\quad |A|=\aleph_0$, $|B|=c$

$A \cup B = \{x|x \in \mathbb{N}\} \cup \{y|(y \in \mathbb{R}) \wedge (0 < y < 1)\}$

$B \subseteq A \cup B \quad \to \ c \leq |A \cup B|$

$A \cup B \subseteq \mathbb{R} \quad \to |A \cup B| \leq c$

ולכן לפי ק-ש-ב נקבל ש

$|A \cup B| = c$

$\aleph_0 + c = c$

$c + c = c$ $\quad A = \{0 < x \leq 1\}$, $B = \{1 < x \leq 2\}$ $\quad |A| = c$, $|B| = c$ $\quad f: \{0 < x < 1\} \to B$, $f(x): x + 1$

$A \cap B = \emptyset$

$A \cup B = \{0 < x < 2\}$

$|A \cup B| = c$

$f: \{0 < x < 1\} \to \{0 < x < 2\}$

$f(x) = 2x$

$c + c = c$

לכל עוצמה אינסופית k מתקיים $\aleph_0 + \mathrm{k} = \mathrm{k}$

$|\mathbb{N}| = \aleph_0$ טבעיים

$|\mathbb{Q}| = \aleph_0$ רציונליים

$|\mathbb{R}| = \aleph$ ממשיים

$|P(\mathbb{N})| = \aleph$ קבוצת החזקה של $\mathbb{N}$

$|P(\mathbb{N})| \geq |\mathbb{N}|$

כפל עוצמות

בהינתן עוצמות כלשהן m,k , נבחר קבוצות נציגים **<u>כלשהן</u>** A,B כך ש $|A|=k$ $\quad |B|=m$

נחשב את העוצמה של קבוצת האיחוד ונגדיר $k\cdot m=|A\times B|$

הגדרה זו מתאימה גם לקבוצות סופיות

יש להוכיח שאין תלות בנציגים כלומר אם יש קבוצות C,D כך ש $|C|=|A|$ וגם $|D|=|B|$

אז $|C\times D|=|A\times B|$

תכונות עבור k_1,k_2,k_3 עוצמות

חוק חילוף

$$k_1\cdot k_2=k_2\cdot k_1 \qquad k_1+k_2=k_2+k_1$$

חוק קיבוץ

$$k_1\cdot(k_2\cdot k_3)=(k_1\cdot k_2)\cdot k_3 \qquad (k_1+k_2)+k_3=k_1+(k_2+k_3)$$

חוק פילוג

$$k_1\cdot k_2+k_3=k_1\cdot k_2+k_1\cdot k_3$$

חזקת עוצמות

בהינתן עוצמות כלשהן m,k , נבחר קבוצות* נציגים **<u>כלשהן</u>** A,B כך ש $|A|=k$ $\quad |B|=m$

נחשב את העוצמה של A^B ונגדיר $k^m=|A^B|$

יש להוכיח שאין תלות בנציגים כלומר אם יש קבוצות C,D כך ש $|C|=|A|$ וגם $|D|=|B|$

אז $|C^D|=|A^B|$

בהינתן קבוצות A ו B נגדיר את הקבוצות A^B כך:

$$A^B=\{f:B\to A\}$$

כלומר A^B היא קבוצת כל הפונקציות מ B ל A .

לדוגמא $A=\{1,2,3\}$ $\quad B=\{4,5\}$

אז A^B היא קבוצת כל הפונקציות מ B ל A כלומר לכל אחד מאיברי B יש 3 תמונות אפשריות בטווח כלומר

$$|A^B|=|A|^{|B|}$$

עבור כל קבוצה מתקיים $|P(A)|=2^{|A|}$

לכל עוצמה k מתקיים $k<2^k$

משפט: $|P(\mathbb{N})|=c$

תכונות חזקה: (עבור k_1,k_2,k_3 עוצמות)

$$(k_1k_2)^{k_3}=k_1^{k_3}k_2^{k_3}$$
$$k_1^{k_2}k_1^{k_3}=k_1^{k_2+k_3}$$
$$k_1^{k_2k_3}=\left(k_1^{k_2}\right)^{k_3}$$

קבוצות חשובות של מספרים

- **המספרים הטבעיים*** (קבוצת כל המספרים השלמים החיוביים):

$$\mathbb{N}=\{0,1,2,3,4,\dots\}$$

-בקורס מתמטיקה בדידה 0 הוא איבר טבעי שלם וזוגי. כלומר $\mathbf{0\in\mathbb{N}}$

- **המספרים השלמים** (חיוביים, שליליים או 0):

$$\mathbb{Z}=\{0,1,-1,2,-2,3,-3,\dots\}$$

- **המספרים הרציונליים** (קבוצת כל המספרים שהם מנות של שלמים):

$$\mathbb{Q}=\{\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{n}}|\mathrm{m},\mathrm{n}\in\mathbb{Z},\mathrm{n}\neq 0\}$$

כל מספר שלם הוא רציונלי ובפרט המספר 0.

- **המספרים הממשיים** (קבוצת כל המספרים הרציונליים והאי רציונליים) מסומנת באות $\mathbb{R}$

$$\mathbb{N}\subsetneq\mathbb{Z}\subsetneq\mathbb{Q}\subsetneq\mathbb{R} \qquad \mathbb{N}\subset\mathbb{Z}\subset\mathbb{Q}\subset\mathbb{R}$$

תת קבוצות של $\mathbb{R}$ וסימוניהן

תיאור	סימון מפורט	סימון מקוצר
הקטע הסגור מ a עד b כולל הקצוות	$\{x\in\mathbb{R}\|a\le x\le b\}$	$[a,b]$
הקטע הפתוח מ a עד b לא כולל הקצוות	$\{x\in\mathbb{R}\|a<x<b\}$	(a,b)
הקטע הסגור משמאל ופתוח מימין מ a עד b	$\{x\in\mathbb{R}\|a\le x<b\}$	$[a,b)$
הקטע הפתוח משמאל וסגור מימין מ a עד b	$\{x\in\mathbb{R}\|a<x\le b\}$	$(a,b]$
הקרן היוצאת מ a ימינה כולל הקצה a (קרן סגורה)	$\{x\in\mathbb{R}\|x\ge a\}$	$[a,\infty)$
הקרן היוצאת מ a ימינה ללא הקצה a (קרן פתוחה)	$\{x\in\mathbb{R}\|x>a\}$	(a,∞)
הקרן היוצאת מ a שמאלה כולל הקצה a (קרן סגורה)	$\{x\in\mathbb{R}\|x\le a\}$	$(-\infty,a]$
הקרן היוצאת מ a שמאלה ללא הקצה a (קרן פתוחה)	$\{x\in\mathbb{R}\|x<a\}$	$(-\infty,a)$

ריכוז משפטים מהספר

- עקרון המינימום
  לכל קבוצה לא ריקה של מספרים טבעיים יש מספר קטן ביותר

1.1. **אקסיומה :** יהיו A,B קבוצות. $A=B$ אם ורק אם כל איבר של A הוא איבר של B וכל איבר של B הוא גם איבר של A. $A=B \Leftrightarrow \forall x(x\in A \Leftrightarrow x\in B)$

1.2. **הגדרה** : קבוצה A תיקרא **קבוצה ריקה** אם אין בה איברים. $\forall x(x\notin A)$
קבוצה ריקה תסומן ב $\emptyset$

1.3. **משפט** : לא קיימות שתי קבוצות ריקות שונות.

1.4. **הגדרה** : יהיו A,B קבוצות. נאמר ש A חלקית ל B, או ש A תת קבוצה של B אם כל איבר של A הוא איבר של B. $A\subseteq B \Leftrightarrow \forall x(x\in A\to x\in B)$
אם הקבוצה A אינה חלקית לקבוצה B נסמן $A\nsubseteq B$
$A\nsubseteq B$ אם ורק אם יש איבר של A שאינו איבר של B.

1.5. **הגדרה** : קבוצת כל התת קבוצות של קבוצה A נקראת קבוצת החזקה של A וסימנה $P(A)$

1.6. **משפט** : תהי A קבוצה סופית. אם $|A|=n$ אז $|P(A)|=2^n$

1.7. **משפט** : תהי A קבוצה סופית.
אם $B\subseteq A$ אז גם B סופית ו $|B|\le|A|$
אם $B\subset A$ אז $|B|<|A|$

1.8. **הגדרה** : יהיו A,B קבוצות.
האיחוד של A עם B הוא קבוצת כל העצמים הנמצאים ב A או ב B.
$A\cup B=\{x|x\in A\lor x\in B\}$

1.9. **משפט** : פעולת **האיחוד** היא **חילופית** $A\cup B=B\cup A$
פעולת **האיחוד** היא **קיבוצית** $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$

1.10. **משפט** : לכל קבוצה A וקבוצה B
$A\subseteq A\cup B$ וגם $B\subseteq A\cup B$
לכל קבוצה A מתקיים $A\cup A=A$
לכל קבוצה A מתקיים $A\cap A=\emptyset$

1.11. **משפט** : $A\subseteq B$ אם ורק אם $A\cup B=B$

1.12. **משפט** : $A\cup B\subseteq C$ אם ורק אם $A\subseteq C$ וגם $B\subseteq C$.

1.13. **הגדרה** : החיתוך של הקבוצה A עם הקבוצה B הוא קבוצת כל העצמים הנמצאים גם ב A וגם ב B. $A\cap B=\{x|x\in A\land x\in B\}$

1.14. **הגדרה** : קבוצות A,B זרות אם $A\cap B=\emptyset$ כלומר אין להן איברים משותפים.
ניתן לומר גם ש A רה ל B או ש B זרה ל A .

1.15. **משפט** : פעולת **החיתוך** היא **חילופית** כלומר $A\cap B=B\cap A$
פעולת **החיתוך** היא **קיבוצית** כלומר $(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$

1.16. **משפט** : לכל קבוצה A וקבוצה B, $A\cap B\subseteq A$ וגם $A\cap B\subseteq B$
לכל קבוצה A $\quad A\cap A=A$
לכל קבוצה A $\quad A\cap\emptyset=\emptyset$

1.17. **משפט** : לכל A,B , $A\subseteq B$ אם ורק אם $A\cap B=A$

1.18. **משפט** : לכל A,B,C , $C\subseteq A\cap B$ אם ורק אם $C\subseteq A$ וגם $C\subseteq B$

1.19. **משפט** : אם A ו B הן קבוצות סופיות אז $|A\cup B|=|A|+|B|-|A\cap B|$

1.20. **משפט** : חוקי ה**פילוג** של **החיתוך מעל האיחוד** ושל **האיחוד מעל החיתוך**
לכל 3 קבוצות A,B,C , $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$
לכל 3 קבוצות A,B,C , $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$

1.21. **הגדרה** : ההפרש בין הקבוצה A ולבין הקבוצה B הוא קבוצה שאיבריה שייכים ל A ושאינם שייכים ל B. $A\backslash B=\{x\in A|x\notin B\}$

1.22. **הגדרה** : תהי A קבוצה חלקית לקבוצה האוניברסלית U.
הקבוצה המשלימה ל A ביחס ל U היא קבוצת איברי U, שאינם ב A
הסימון יהיה $A^c(U)$. שים לב ש $U\backslash A=A^c(U)$

1.23. **משפט** : לכל A מתקיים א. $A\cup A^c=U$ ב. $A\cap A^c=\emptyset$ ג. $(A^c)^c=A$

1.24. **משפט** : $A\backslash B=A\cap B^c$

1.25. **משפט** : $A\subseteq B$ אם ורק אם $B^c\subseteq A^c$

1.26. **כללי דה מורגן** : $(A\cup B)^c=A^c\cap B^c$ $\qquad (A\cap B)^c=A^c\cup B^c$

1.27. **הגדרה** : תהי Γ קבוצה לא ריקה. לכל איבר $\alpha \in \Gamma$ תהי A_α קבוצה.

לאיברי Γ נקרא אינדקסים, ונאמר ש α הוא האינדקס של A_α

איחוד כל ה A_α–ים, כאשר $\alpha \in \Gamma$ הוא קבוצת העצמים הנמצאים

ב A_α ל α אחד, לפחות ב Γ.

$$\bigcup_{\alpha\in\Gamma} A_n = \{x | \exists\alpha \in \Gamma(x \in A_\alpha)\}$$

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i \text{ בא במקום } \bigcup_{\alpha\in\Gamma} A_n \text{ כאשר } \Gamma = \{1, 2, 3, \dots, n\}$$

$$\bigcup_{i=m}^{n} A_i \ (m < n) \text{ בא במקום } \bigcup_{\alpha\in\Gamma} A_n \text{ כאשר } \Gamma = \{m, m+1, \dots, n\}$$

אם Γ היא קבוצת המספרים השלמים מ m ואילך נוכל לרשום

$$\bigcup_{i=m}^{\infty} A \text{ במקום } \bigcup_{\alpha\in\Gamma} A_n$$

חיתוך כל ה A_α–ים, כאשר $\alpha \in \Gamma$ הוא קבוצת האיברים המשותפים לכל ה A_α .

$$\bigcap_{\alpha\in\Gamma} A_n = \{x | \forall\alpha \in \Gamma(x \in A_\alpha)\}$$

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i \text{ בא במקום } \bigcap_{\alpha\in\Gamma} A_n \text{ כאשר } \Gamma = \{1, 2, 3, \dots, n\}$$

$$\bigcap_{i=m}^{n} A_i \ (m < n) \text{ בא במקום } \bigcap_{\alpha\in\Gamma} A_n \text{ כאשר } \Gamma = \{m, m+1, \dots, n\}$$

אם Γ היא קבוצת המספרים השלמים מ m ואילך נוכל לרשום

$$\bigcap_{i=m}^{\infty} A \text{ במקום } \bigcap_{\alpha\in\Gamma} A_n$$

הגדרה

$$\bigcup_{\alpha\in\emptyset} A_\alpha = \emptyset = \{x | \exists\alpha(\alpha \in \emptyset \wedge x \in A_\alpha)\}$$

1.28. **משפט** : תהי Γ קבוצה לא ריקה של אינדקסים ויהי $\alpha_0 \in \Gamma$

$$\bigcap_{\alpha\in\Gamma} A_\alpha \subseteq A_{\alpha_0} \qquad A_{\alpha_0} \subseteq \bigcup_{\alpha\in\Gamma} A_\alpha$$

תהי B קבוצה לא ריקה של קבוצות ותהי $A_0 \in \mathrm{B}$

$$\bigcap_{\alpha\in\mathrm{B}} A \subseteq A_0 \qquad A_0 \subseteq \bigcup_{\alpha\in\mathrm{B}} A$$

1.29. **כללי הפילוג**

$$B \cap \left(\bigcup_{\alpha\in\Gamma} A_\alpha\right) = \bigcup_{\alpha\in\Gamma} (B \cap A_\alpha)$$

$$B \cup \left(\bigcap_{\alpha\in\Gamma} A_\alpha\right) = \bigcap_{\alpha\in\Gamma} (B \cup A_\alpha)$$

1.30. **כללי דה מורגן** :

$$\left(\bigcup_{\alpha\in\Gamma} A_\alpha\right)^c = \bigcap_{\alpha\in\Gamma} {A_\alpha}^c$$

$$\left(\bigcap_{\alpha\in\Gamma} A_\alpha\right)^c = \bigcup_{\alpha\in\Gamma} {A_\alpha}^c$$

לפי שאלה 31 בספר

$$\mathrm{A}\Delta\emptyset = \mathrm{A}$$

$$A\Delta A = \emptyset$$

פעולת ההפרש הסימטרי היא קיבוצית (לפי שאלה 32 בספר)

$$(A\Delta B)\Delta C = A\Delta(B\Delta C)$$

חוק הצמצום חל על פעולת ההפרש הסימטרי (לפי שאלה 32)

$$A\Delta B = A\Delta C \Rightarrow B = C$$

לפי שאלה 32 בספר

$$A\Delta B = C \Rightarrow (A\Delta C = B \wedge B\Delta C = A)$$

לפי שאלה 38 בספר

$$A\Delta U = A^c$$

$$A\Delta A^c = U$$

לפי שאלה 43 בספר

$$(A\Delta B)^c = A\Delta B^c = A^c\Delta B$$

יחסים

2.1. אקסיומה : אקסיומת ה n-יות הסדורות

יהי $n \geq 1$ מספר טבעי, לכל n-יה סדורה יש איבר ראשון יחיד, איבר שני יחיד וכן הלאה, ואיבר n-י יחיד. שתי n-יות סדורות הן שוות אם ורק אם יש להן אותו איבר ראשון, אותו איבר שני, וכן הלאה, ואותו איבר n-י.

2.2. הגדרה: מכפלה קרטזית

יהיו A, B קבוצות. המכפלה הקרטזית של A ב B היא קבוצת הזוגות הסדורים שבהם משמאל מופיע איבר של A ומימין מופיע איבר של B. מכפלה קרטזית זו תסומן ב $A \times B$

$$A \times B = \{\langle a,b\rangle | a \in A \wedge b \in B\}$$

2.3. לכל A, B, C מתקיים

1א. $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$

1ב. $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$

1ג. $A \times (B \backslash C) = (A \times B) \backslash (A \times C)$

2א. $(B \cup C) \times A = (B \times A) \cup (C \times A)$

2ב. $(B \cap C) \times A = (B \times A) \cap (C \times A)$

2ג. $(B \backslash C) \times A = (B \times A) \backslash (C \times A)$

$(A \cap B) \times (C \cap D) = (A \times C) \cap (B \times D)$ שיעור 4 – ישראל בר מאיר

$(A \cup B) \times (C \cup D) = (A \times C) \cup (A \times D) \cup (B \times C) \cup (B \times D)$

$|A \times B| = |A| \cdot |B|$

2.4. הגדרה

יהיו A, B קבוצות. יחס דו מקומי מ A ל B הוא תת קבוצה של $A \times B$.

יחס דו מקומי מ A ל A נקרא יחס דו מקומי על A .

2.5. הגדרה היחס ההופכי

יהי R יחס מהקבוצה A לקבוצה B. היחס ההופכי ל R הוא היחס הבא מ B ל A .

את היחס ההופכי ל R נסמן ב R^{-1}

$$\{\langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}\rangle | \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle \in \boldsymbol{R}\}$$

2.6. הגדרה ריבוע היחס

יהי R יחס על קבוצה A . היחס R^2 על A הוא היחס המקיים את התכונה הבאה :

לכל $a, b \in A$, $\langle a,b\rangle \in R^2$ אם ורק אם קיים $c \in A$ כך ש $\langle a,c\rangle \in R$ ו $\langle c,b\rangle \in R$

$$aR^2b \Leftrightarrow \exists x \in A(aRx \wedge xRb)$$

2.7. הגדרה רפלקסיביות

יחס R על קבוצה A נקרא **רפלקסיבי** אם לכל a ב A מתקיים aRa.

2.8. הגדרה אנטי רפלקסיביות

יחס R על קבוצה A נקרא **אנטי רפלקסיבי** אם לשום a ב A לא מתקיים aRa כלומר אם אינו מכיל שום זוג סדור מהצורה $\langle a,a\rangle$

2.9. הגדרה סימטריה

יהי R יחס על קבוצה A ייקרא **סימטרי** אם לכל a, b ב A המקיימים aRa מתקיים גם bRa.

2.10. הגדרה : **אנטי סימטריה**

יחס R על A ייקרא **אנטי סימטרי** אם לא קיימים a, b ב A כך ש aRb וגם bRa

כלומר $R \cap R^{-1} = \emptyset$

2.11. הגדרה: **טרנזיטיביות**

יחס R על קבוצה A יקרא **טרנזיטיבי** אם לכל a, b, c ב A, $aRb \wedge bRc \Rightarrow aRc$

2.12. משפט:

היחס R על A הוא **טרנזיטיבי** אם ורק אם $R^2 \subseteq R$

2.13. הגדרה: **יחס שקילות**

יחס על קבוצה A נקרא **יחס שקילות** אם הוא **רפלקסיבי**, **סימטרי וטרנזיטיבי**.

2.14. הגדרה: חלוקה

תהי קבוצה A קבוצה לא ריקה. חלוקה של A היא קבוצה של תת קבוצות לא ריקות של A שכל שתיים מהן זרות זו לזו, ואיחודן הוא A כולה. כל אחת מהקבוצות הללו נקראת תא.

2.15. משפט:

תהי A קבוצה לא ריקה ותהי π חלוקה של A

יהי $\equiv_\pi$ היחס הבא על A: $x \equiv_\pi y$ אם ורק אם x ו y נמצאים באותו תא של החלוקה π.

היחס $\equiv_\pi$ הוא יחס שקילות על A.

2.16. אם R הוא **יחס שקילות** על קבוצה לא ריקה A, קיימת חלוקה יחידה π של A, כך ש $R = \equiv_\pi$,

כלומר שהיחס R מושרה על ידי π .

2.17. הגדרה מחלקות שקילות

יהי R יחס שקילות על קבוצה A , ותהי π החלוקה של A המשרה את היחס R.

כל תא החלוקה π נקרא **מחלקת שקילות** של R .

2.18. הגדרה קבוצת המנה

יהי E יחס שקילות מעל קבוצה A. קבוצת **מחלקות השקילות** של E נקראת קבוצת המנה של A מעל E, וסימונה הוא $A \backslash E$.

2.19. הגדרה יחס סדר מלא

יחס R על קבוצה A נקרא יחס סדר מלא אם הוא

אנטי רפלקסיבי, **סימטרי ומשווה** כלומר לכל a, b, aRb או bRa או $a = b$

2.20. הגדרה יחס סדר חלקי

יחס R על קבוצה A נקרא **יחס סדר חלקי** או בקיצור **סדר חלקי** אם הוא **אנטי רפלקסיבי וטרנזיטיבי**

2.21. הגדרה קבוצה סדורה וקבוצה סדורה חלקית

קבוצה סדורה חלקית היא סוג סדור $\langle A,\prec\rangle$ כאשר A היא קבוצה ן $\prec$ הוא סדר חלקי על A .

קבוצה סדורה היא סוג סדור $\langle A,\prec\rangle$ כאשר A היא קבוצה ו $\prec$ הוא סדר מלא על A.

2.22. הגדרה תת קבוצה סדורה חלקית

תהי $\langle A,\prec\rangle$ תת קבוצה סדורה חלקית. $\langle A',\prec'\rangle$ תקרא תת קבוצה סדורה חלקית של $\langle A,\prec\rangle$

אם $A' \subseteq A$ ולכל $a,b \in A'$,$a \prec' b$ אם ורק אם $a \prec b$

אם $\langle A,\prec\rangle$ קבוצה סדורה, אז במקרה זה $\langle A',\prec'\rangle$ תיקרא תת קבוצה סדורה של $\langle A,\prec\rangle$

2.23. הגדרה איבר ראשון ואיבר אחרון

תהי $\langle A,\prec\rangle$ קבוצה סדורה חלקית

איבר $a \in A$ ייקרא איבר ראשון ב$\langle A,\prec\rangle$ אם לכל $x \in A$ מתקיים $a \prec x$ או $a = x$

איבר $b \in A$ ייקרא איבר אחרון ב$\langle A,\prec\rangle$ אם לכל $x \in A$ מתקיים $x \prec b$ או $x = b$

2.24. משפט

בקבוצה סדורה חלקית $\langle A,\prec\rangle$ אין יותר מאיבר ראשון אחד ואין יותר מאיבר אחרון אחד.

2.25. הגדרה איבר מינימלי ואיבר מקסימלי

איבר $a \in A$ ייקרא איבר מינימלי ב$\langle A,\prec\rangle$ אם אין $x \in A$ אשר $x \prec a$

איבר $b \in A$ ייקרא איבר מקסימלי ב$\langle A,\prec\rangle$ אם אין $x \in A$ אשר $b \prec x$

2.26. טענה

איבר ראשון ב $\langle A,\prec\rangle$ הוא מינימלי ואיבר אחרון ב $\langle A,\prec\rangle$ הוא מקסימלי.

2.27. טענה

בקבוצה סדורה (בסדר מלא) איבר הוא ראשון אם ורק אם הוא מינימלי ואיבר הוא אחרון אם ורק אם הוא מקסימלי

2.28. משפט

בקבוצה סדורה חלקית ולא ריקה $\langle A,\prec\rangle$ יש איבר מינימלי ואיבר מקסימלי.

2.29. הגדרה הרכבת יחסים

יהיו A,B,C קבוצות ויהיו R_1 יחס מ A ל B ו R_2 יחס מ B ל C.

ההרכבה R_1R_2 היא יחס מ A ל C המוגדר כך :

$$R_1R_2 = \{\langle a,c\rangle \in A \times C \mid \exists b \in B(\langle a,b\rangle \in R_1 \wedge \langle b,c\rangle \in R_2)\}$$

$$aR_1R_2c \Leftrightarrow \exists b \in B(aR_1b \wedge bR_2c)$$

סימונים

- מוכל ולא שווה או חלקי ממש או מוכל ממש : $\subset \quad \subsetneq$
- חלקי או מוכל : $\subseteq$
- שייך ל : $\in$
- אינו שייך ל : $\notin$
- איחוד : $\cup$
- חיתוך : $\cap$
- הפרש : $\setminus$ -
- מספר איברים בקבוצה. יש m איברים בקבוצה A : $|A| = m$
- מחלק – a מחלק את b ללא שארית : $a|b$
- שווה שארית : $246 \equiv 46(mod\ 100)$
- הפרש סימטרי : $\Delta \quad \oplus$

$$\sum_{n=a}^{b} f(n) = f(a) + F(a+1) + \cdots + f(b-1) + f(b)$$

$$\bigcup_{n=a}^{b} f(n) = f(n) \cup f(n+1) \cup \ldots \cup f(b-1) \cup f(b)$$

$$\bigcap_{n=a}^{b} f(n) = f(n) \cap f(n+1) \cap \ldots \cap f(b-1) \cap f(b)$$

$$\bigcap_{n=a}^{\infty} f(n) = f(n) \cap f(n+1) \cap \ldots \cap f(\infty)$$

המספרים הטבעיים של פון נוימן

$$\emptyset = \bar{0}$$

$$\bar{1} = \{\bar{0}\} = \{\emptyset\}$$

$$\bar{2} = \{\bar{0},\bar{1}\} = \bar{1} \cup \{\bar{1}\} = \{\emptyset\} \cup \{\{\emptyset\}\} = \{\emptyset,\{\emptyset\}\}$$

$$\bar{3} = \{\bar{0},\bar{1},\bar{2}\} = \bar{2} \cup \{\bar{2}\} = \{\emptyset,\{\emptyset\}\} \cup \{\{\emptyset,\{\emptyset\}\}\} = \{\emptyset,\{\emptyset\},\{\emptyset,\{\emptyset\}\}\}$$

$$\bar{4} = \{\bar{0},\bar{1},\bar{2},\bar{3}\} = \bar{3} \cup \{\bar{3}\} = \{\emptyset,\{\emptyset\},\{\emptyset,\{\emptyset\}\},\{\emptyset,\{\emptyset\},\{\emptyset,\{\emptyset\}\}\}\}$$

מכפלה קרטזית – היא קבוצה של זוגות סדורים בצורה הבאה :

אם A ו B קבוצות נגדיר $A \times B = \{(a,b) | a \in A, b \in B\}$

דוגמא :

$$A = \{1,2\} \qquad B = \{5,6\}$$

$$A \times B = \{(1,5),(2,5),(1,6),(2,6)\}$$

$$B \times A = \{(5,1),(6,1),(5,2),(6,2)\}$$

$$A \times B \neq B \times A$$

$$(|A| = m \quad \wedge \quad |B| = n) \Rightarrow |A \times B| = m \cdot n$$

המכפלה הקרטזית אינה חילופית (קומוטטיבית) ואינה קיבוצית (אסוציאטיבית)

יחסים

יחסים בינאריים

קבוצת הזוגות בניהם יש קשר כלומר קיימת קבוצת בסיס ואנו נתייחס לקבוצת הזוגות מתוכה.

לדוגמא R יחס על $\mathbb{N}$, קבוצת הזוגות אשר החלוקה בניהם תהיה תוצאה ללא שארית.

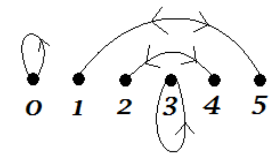
$$\begin{aligned} R = \{&(1,0),(1,1),(1,2),(1,3),\ldots \\ &(2,0),(2,2),(2,4),(2,6),\ldots \\ &(3,0),(3,3),(3,6),(3,9),\ldots \\ &\vdots \end{aligned}$$

$$(a,b) \in R \Leftrightarrow a|b$$

ציור יחסים בינאריים :

אם $(a,b) \in R$ או צורה אחרת לרשום זאת aRb נצייר ע"י חץ $b \rightarrow a$ לדוגמא :

הקבוצה היא Z_6 (קבוצת השאריות בחלוקה ב 6)

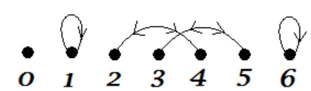


$$R = \{(0,0),(1,5),(5,1),(2,4),(4,2),(3,3)\}$$

והיחס הוא :

$$(a,b) \in R \Leftrightarrow a + b \equiv 0 (mod\ 6)$$

הקבוצה היא Z_7 (קבוצת השאריות בחלוקה ב 7)



$$R = \{(1,1),(2,4),(4,2),(3,5),(5,3),(6,6)\}$$

והיחס הוא :

$$(a,b) \in R \Leftrightarrow a \cdot b \equiv 1 (mod\ 7)$$

רלציה או יחס – כל תת קבוצה (קבוצה חלקית) של $A \times B$ נקראת יחס (רלציה) מ A ל B

דוגמא : $\{(1,5),(2,6)\}$ היא רלציה מ A ל B שבדוגמא שמעל.

גם $\emptyset$ היא רלציה מ A ל B כלומר $\emptyset \subseteq A \times B$

ניתן לסמן R רלציה מ A ל B במספר דרכים : $\quad \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \in R \qquad aRb \qquad (a,b) \in R$

לדוגמא $\quad A = \mathbb{N} \qquad A \times A = \{(n,n) | n \in \mathbb{N}\}$

היחס $\leq$ שווה ל

$$\begin{aligned} \leq = \{&(0,0),(0,1),(0,2),(0,3),\ldots \\ \{&(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),\ldots \\ \{&(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),\ldots \\ \{&(3,3),(3,4),(3,5),(3,6),\ldots \\ &\vdots \end{aligned}$$

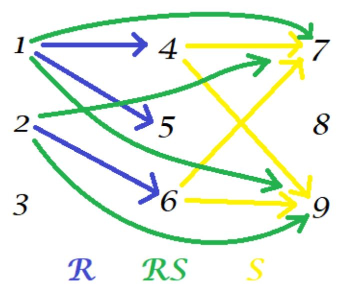
כפל רלציות

$$A = \{1,2,3\} \quad B = \{4,5,6\} \quad C = \{7,8,9\}$$

$$\mathrm{R} = \{(1,4),(1,5),(2,6)\}$$

$$S = \{(4,7),(4,9),(6,7),(6,9)\}$$

$$RS = \{(1,7),(1,9),(2,7),(2,9)\}$$



חוק החילוף **אינו מתקיים** בכפל רלציות.

בד"כ לא מתקיים $RS = SR$

חוק הקיבוץ **מתקיים** בין רלציות כלומר

$$R(ST) = (RS)T$$

רלציה היא הופכית אם $R \subseteq A \times B$

רלציה מ A ל B אז $R^{-1} \subseteq B \times A$ היא הרלציה ההופכית ל R ומוגדרת כך :

$$R^{-1}\{(b,a)|(a,b) \in R\}$$

לכפל רלציה R מ A ל B בהופכית שלה כלומר RR^{-1} נקרא

RR^{-1} מעל A

לכפל ההופכית של רלציה R מ A ל B ברלציה R נקרא

$R^{-1}R$ מעל B

כלומר אם $R \subseteq A \times A$ יחס מ A ל A נאמר כי R הוא יחס מעל A

$$R = \{(1,2),(1,3),(2,3)\}$$

$$R^{-1} = \{(2,1),(3,1),(3,2)\}$$

$$RR^{-1} = \{(1,1)\}$$

$$R^{-1}R = \{(2,2),(2,3),(3,2),(3,3)\}$$

סוגי יחסים (תכונות)

יחס הזהות/היחידה/האלכסון/השוויון : $I_A = \{(a,a)|a \in A\}$

לדוגמא :

$$A = \{1,2,3\}$$

$$I_A = \{(1,1),(2,2),(3,3)\}$$

A	1	2	3
1	x		
2		x	
3			x

כלומר לכל יחס R מעל A מתקיים

$$R \cdot I_A = I_A \cdot R = R$$

- מכפלה של R מעל A n פעמים תסומן כך $R^n = \underbrace{R \cdot R \cdot \ldots \cdot R}_{n \text{ פעמים}}$

A קבוצה <u>סופית</u> ו R יחס מעל A . נבדוק את מכפלות הרלציה $R^1, R^2, R^3, \ldots, R^n$

בשלב מסוים נגיע לרלציה שכבר חושבה קודם כלומר יש רק מספר <u>סופי</u> של רלציות שונות

ולכן קיימים בהכרח $k < m$ כך ש $R^k = R^m$

$$A = \{1,2,3,4\}$$

$$R = \{(1,4),(2,1),(3,3),(3,4),(4,3)\}$$

$$R^2 = \{(1,3),(2,4),(3,3),(3,4),(4,3),(4,4)\}$$

$$R^3 = \{(1,3),(1,4),(2,3),(3,3),(3,4),(4,3),(4,4)\}$$

$$R^4 = \{(1,3),(1,4),(2,3),(2,4),(3,3),(3,4),(4,3),(4,4)\}$$

$$R^5 = \{(1,3),(1,4),(2,3),(2,4),(3,3),(3,4),(4,3),(4,4)\}$$

$$R^6 = R^5 \cdot R = R^4 \cdot R = R^5 = R^4$$

לכל $k \geq 4$ מתקיים $R^k = R^4$

יחס רפלקסיבי $\boldsymbol{I_A \subseteq R}$

כל איבר מתייחס לעצמו כלומר $\forall a\ (a,a) \in R$

יהא R יחס על $\mathbb{N}$, $(a,b) \in R$

כל מספר שווה לעצמו $a = b$

כל מספר מתחלק בעצמו $a|b$

כל מכפלה של מספר טבעי בעצמו גדולה מ 0 $a \cdot b \geq 0$

R הוא יחס **רפלקסיבי אם ורק אם** $I_A \subseteq R$ כלומר לכל $a \in A$ מתקיים $(a,a) \in R$

יחס אנטי רפלקסיבי

יחס זר לאלכסון

הוא יחס בו כל איבר לא מתייחס לעצמו כלומר $\forall a\ (a,a) \notin R$

מספר לא יהיה גדול מעצמו $a > b$

מכפלה של מספר בעצמו לא תהיה קטנה מ 0 $a \cdot b < 0$

מספר לא יהיה שווה לעצמו ועוד 1 $a = b + 1$

יחס לא רפלקסיבי

יחס בו לא כל איבר מתייחס לעצמו כלומר $\exists a\ (a,a) \notin R$

קיימת מכפלה של מספר בעצמו שכן שווה ל 0 $a \cdot b \leq 0$

יחס סימטרי $\boldsymbol{R = R^{-1}}$

לכל שני איברים אם a מתייחס ל b אז b מתייחס לa כלומר $\forall a \forall b((a,b) \in R \Rightarrow (b,a) \in R)$

יהא R יחס על $\mathbb{N}$, $(a,b) \in R$

כל מספר שווה לעצמו $a = b$

כל מכפלה של מספר טבעי בעצמו גדולה מ 0 $a \cdot b \geq 0$

R הוא יחס **סימטרי אםם** $R = R^{-1}$ כלומר אם לכל $a,b \in A$ מתקיים $(a,b) \in R \Leftrightarrow (b,a) \in R$

יחס לא סימטרי או אָ-סימטרי

לכל שני איברים אם a מתייחס ל b אז b לא מתייחס ל a כלומר $\forall a \forall b(\ (a,b) \in R \Rightarrow (b,a) \notin R)$

$a = b + 1$

יחס אנטי סימטרי $\boldsymbol{R \cap R^{-1} \subseteq I_A}$

לכל שני איברים אם a מתייחס ל b אז b מתייחס ל a אם $a = b$

כלומר $\forall a \forall b(\ (a,b) \in R \Rightarrow (b,a) \notin R)$

$a|b$

$a \leq b$

R מעל A הוא יחס **אנטי סימטרי** אם $R \cap R^{-1} \subseteq I_A$ כלומר אם לכל $a,b \in A$ מתקיים

דוגמא ליחס אנטי סימטרי

$$(a,b) \in R \wedge (b,a) \in R \rightarrow a = b$$

$$A = \{1,2,3\}$$

$$R = \{(1,2),(1,3),(2,2)\}$$

$$R^{-1} = \{(2,1),(3,1),(2,2)\}$$

$$R \cap R^{-1} = \{(2,2)\} \subseteq I_A$$

דוגמא ליחס לא אנטי סימטרי:

$$R = \{(1,2),(1,3),(2,1)\}$$

$$R^{-1} = \{(2,1),(3,1),(1,2)\}$$

$$R \cap R^{-1} = \{(1,2),(2,1)\} \nsubseteq I_A$$

דוגמא ליחס סימטרי אנטי סימטרי

$$R = \{(1,2),(2,1),(2,2)\}$$

$$R^{-1} = \{(2,1),(1,2),(2,2)\}$$

$$R \cap R^{-1} = \{(1,2),(2,1)\} \nsubseteq I_A$$

$$R = R^1$$

יחס הזהות הוא גם **רפלקסיבי** וגם **סימטרי**

כמו כן גם $A \times A$ הוא גם **רפלקסיבי** וגם **סימטרי**

היחס $\leq$ הוא **אנטי סימטרי** : $m \leq n \wedge n \leq m \rightarrow m = n$

היחס $\subseteq$ הוא **אנטי סימטרי** : $X \subseteq Y \wedge Y \subseteq X \rightarrow X = Y$

יחס **אנטי סימטרי** ויחס **סימטרי אינן** תכונות הופכיות

	אנטי סימטרי	לא אנטי סימטרי
סימטרי	$\emptyset, \{(1,1)\}, I_A$	$\{(1,2),(2,1)\}$
לא סימטרי	$\{(1,3)\}, \{(1,2),(1,3)\}$	$\{(1,2),(2,1),(1,3)\}$

יחס טרנזיטיבי $\quad R^2 \subseteq R$

R יחס מעל A **טרנזיטיבי** אם $R^2 \subseteq R$ כלומר לכל $a, b, c \in A$ מתקיים

אם $(a,b) \wedge (b,c) \in A$ אז $(a,c) \in A$

דוגמא: $\emptyset, \{(1,2),(2,3),(1,3)\}, \{(1,1)\}, I_A, A \times A$

היחס $=$ הוא **טרנזיטיבי** כי לכל $l, m, n \in \mathbb{N}$ מתקיים $l = m \wedge m = n \Rightarrow l = n$

היחס $\leq$ הוא **טרנזיטיבי** כי לכל $l, m, n \in \mathbb{N}$ מתקיים $l \leq m \wedge m \leq n \Rightarrow l \leq n$

סְגוֹר של רלציה

סְגוֹר של רלציה R ביחס לתכונה מסוימת הוא הרלציה הקטנה ביותר שמכילה את R ומקיימת את התכונה המסוימת. משלימה רלציה נתונה במינימום שינויים על מנת שתמלא אחר תכונת היחס.

$$A\{1,2,3\}$$

$$R = \{(1,2),(2,3),(3,3)\}$$

הסְגוֹר סימטרי של R יהיה

$$S_S = \{(1,2),(2,3),(3,3),(2,1),(3,2)\}$$

$$S_S = R \cup R^{-1}$$

הסְגוֹר הרפלקסיבי של R יהיה

$$S_R = \{(1,2),(2,3),(3,3),(1,1),(2,2)\}$$

$$S_R = R \cup I_A$$

הסְגוֹר הטרנזיטיבי של R יהיה

$$S_T = \{(1,2),(2,3),(3,3),(1,3)\}$$

$$S_T = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \ldots \cup R^n$$

לא קיים הסְגוֹר האנטי סימטרי עבור G יהיה

$$G = \{(1,2),(2,1),(2,3)\}$$

יחס שקילות

איחוד של יחס רפלקסיבי, סימטרי וטרנזיטיבי על קבוצות זרות שנקראות מחלקות שקילות.

דוגמאות ליחסי שקילות:

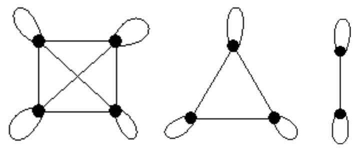
1) R על בני האדם: אותו שם משפחה $\quad f(man) = family\ name$

2) $=$ $\quad f(x) = x$

3) צבע חולצה זהה $\quad f(man) = shirt\ color$

4) אותה סיפרת ביקורת במספר ת.ז $\quad f(man) = id\ number$

5) לדוגמא בתרשימים הבאים נקודה מייצגת איבר וקו מייצג יחס



כל איבר מתייחס לכל האיברים האחרים בקבוצה

היחס בין איבר לאיבר הוא דו כיווני

אם R יחס שקילות על קבוצה S אז קיימת קבוצה T וקיימת $f: S \rightarrow T$ כך ש:

$$(S_1, S_2) \in R \Leftrightarrow f(S_1) = f(S_2)$$

לדוגמא A, B קבוצות ו f פונקציה כך ש $f: A \rightarrow B$

נגדיר יחס R על A כך

$$(x,y) \in R \Leftrightarrow f(x) = f(y)$$

דוגמא

$$S = \{(a,b) | a,b \in \mathbb{N},\quad b \neq 0\}$$

נגדיר יחס R כך $((a,b),(c,d)) \in R \Leftrightarrow ad = bc$

- נבדוק רפלקסיביות $((a,b),(a,b)) \overset{?}{\in} R$

$$ab = ba$$

- נבדוק סימטריות $((a,b),(c,d)) \in R \overset{?}{\Rightarrow} ((c,d),(a,b)) \in R$

$$ad = bc \Rightarrow cb = da$$

- נבדוק טרנזיטיביות $((a,b),(c,d)) \in R,\ ((c,d),(e,f)) \in R \overset{?}{\Rightarrow} ((a,b),(e,f)) \in R$

$$ad = bc, cf = de \Rightarrow af = be$$

נכפול ב f $\quad adf = bcf$

$$cf = de$$

$$bcf = bde$$

$$adf = bde$$

נצמצם ב d ונקבל $\quad af = be$

נגדיר $f: S \to \mathbb{Q}$ $\quad f((a,b)) = \frac{a}{b}$

$$((a,b),(c,d)) \in R \Leftrightarrow ad = bc \Leftrightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow f((a,b)) = f((c,d))$$

דוגמא נוספת

$$S = P(\mathbb{N}) = \{A | A \subseteq \mathbb{N}\}$$

נגדיר יחס R כך $(A,B) \in R \Leftrightarrow A\oplus B$ סופית

לדוגמא $A = \{2n | n \in \mathbb{N}\} \quad B = A \cup \{1\}$

$$(A,B) \in R$$

$$A\oplus B = \{1\}$$

רפלקסיביות – צ"ל ש $(A,A) \in R$

$A\oplus A = \emptyset$ סופית

סימטריות – צ"ל ש $(A,B) \in R \to (B,A) \in R$

$$A\oplus B = B\oplus A$$

טרנזיטיביות – צ"ל ש $A\oplus C$ סופית $\to$ $B\oplus C$ סופית $\quad A\oplus B$ סופית

$$A\oplus C = (A\oplus B)\oplus(B\oplus C) =$$

$$(A\oplus(B\oplus B)\oplus C) =$$

$$(A\oplus\emptyset)\oplus C =$$

$$A\oplus C$$

חלוקה של קבוצה

תהי קבוצה A אוסף תתי קבוצות של A, S נקרא חלוקה של A אם $S \subseteq P(A)$.

1. לכל שתי קבוצות $B,C \in S$ מתקיים $B = C$ או $B \cap C = \emptyset$.
2. $\cup S = A$

נגדיר יחס R על A כך

$$R = \{(a,b) | \exists B \in S: a,b \in B\}$$

חלוקה מושרית ע"י יחס שקילות

אם R **יחס שקילות** מעל A אז R משרה חלוקה של איברי A המוגדרת כך:

$\boldsymbol{(a,b) \in R} \Leftrightarrow$ **$\boldsymbol{a,b}$ באותה מחלקה**

$$A\{1,2,3,4\}$$

$$R = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4)\}$$

$$\frac{A}{R} = \{\{1\},\{2\},\{3\},\{4\}\}$$

$$R_1 = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(1,4),(4,1)\}$$

$$\frac{A}{R_1} = \{\{1,3\},\{2\},\{4\}\}$$

$$R_2 = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(1,4),(4,1),(3,4),(4,3)\}$$

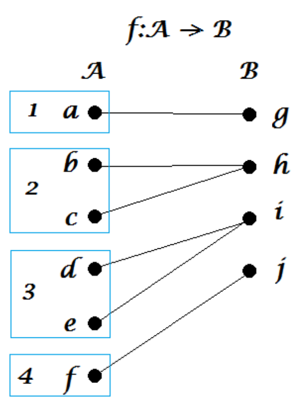
$$\frac{A}{R_2} = \{\underbrace{\{1,3,4\}}_{\text{מחלקה אחת}},\ \underbrace{\{2\}}_{\text{מחלקה שנייה}}\}$$

דוגמא הפוכה

$$\frac{A}{R} = \{\{1,2\},\{3,4\}\}$$

$$R = \{(1,2),(3,4),(2,1),(4,3),(1,1),(2,2),(3,3),(4,4)\}$$

דוגמא נוספת



מחלקות השקילות הן: $\{\{a\},\{b,c\},\{d,e\},\{f\}\}$

יחס סדר חלקי

יחס שהוא רפלקסיבי, אנטי סימטרי וטרנזיטיבי נקרא יחס סדר חלקי.***

יש להתייחס להגדרה מהספר כלומר אנטי רפלקסיבי וטרנזיטיבי.

$A = \{2,3,4,5,6,7,8\}$

$(a,b) \in S \Leftrightarrow a|b$

$S = \{(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6),(7,7),(8,8),$
$(2,4),(2,6),(2,8),(3,6),(4,8)\}$

דיאגרמת הָסֶה

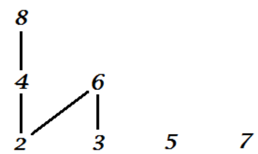
כל יחס סדר חלקי מאופיין ע"י דיאגרמת הסה שלו

כל איברי A מופיעים בגרף פעם אחת בלבד.

יש מסלול בין a ל b אם ורק אם (a,b) שייך ליחס

יש קו המחבר בין a ו b אם b מכסה את a (אין איבר בניהם)

אם הזוג (a,b) שייך ליחס אז b יופיע מעל a



יחס סדר מלא

יחס סדר חלקי, בו כל שני איברים ב A ניתנים להשוואה, נקרא יחס סדר מלא.

$A = \{1,2,3,4\}$

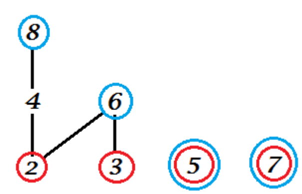
$(a,b) \in R \Leftrightarrow a \le b$

איבר מקסימלי - איבר שאין איבר מעליו ביחס. (בדיאגרמה של היחס)

איבר מינימלי - איבר שאין איבר מתחתיו ביחס. (בדיאגרמה של היחס)

איבר גדול ביותר - איבר שמעל כל איבר אחר

איבר קטן ביותר - איבר שמתחת לכל איבר אחר



פונקציה היא שלשה סגורה עם 3 קבוצות מהצורה $f = (A,B,F)$ כאשר

1. A קבוצה לא ריקה הנקראת **<u>תחום</u>** הפונקציה (*domain*)
2. B קבוצה לא ריקה הנקראת **<u>טווח</u>** הפונקציה (*range*)
3. F קבוצה של זוגות סדורים החלקית ל $A \times B$ (מכפלה קרטזית $-\times$) בעלת התכונה הבאה:

לכל $a \in A$ קיים $b \in B$ **<u>אחד ויחיד</u>** כך ש $(a,b) \in F$

יחס $f \subseteq A \times B$ הוא פונקציה אם מתקיימות שתי התכונות הבאות

1. לכל $x \in A$ קיים $x \in B$ כך ש $(x,y) \in f$
2. אם $(x,y) \in f$ וגם $(x,b) \in f$ אז $b = f$

- מספר ההתאמות בפונקציה $f: A \to B$ שווה ל m^n
כאשר m זה מספר האיברים ב B ו n מספר האיברים ב A
- ניתן לסמן פונקציה בצורה נוספת.
במקום $f = (A,B,F)$ נסמן גם $f: A \to B$
במקום $(a,b) \in F$ נסמן $f(a) = b$
ניתן לומר ש b הוא התמונה של a
וגם ש a הוא המקור של b
- הנוסחה $f(n) = 4n - 5$ אינה מגדירה פונקציה $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$
מכיוון ש $f(1) = 4 - 5 = -1$ כלומר $f(1) \notin \mathbb{N}, (1,-1) \notin \mathbb{N} \times \mathbb{N}$
לעומת זאת הנוסחה $g(n) = \begin{cases} 4n-5, n \ge 2 \\ 7, n = 1 \end{cases}$ מגדירה פונקציה $g: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$
- שוויון פונקציות
נאמר ששתי פונקציות $f = (A,B,F)$ ו $g = (C,D,G)$ הן שוות אם:
  - יש להן את אותו תחום - $A = C$
  - יש להן את אותו טווח - $B = D$
  - יש להן את אותה התאמה – $G = F$

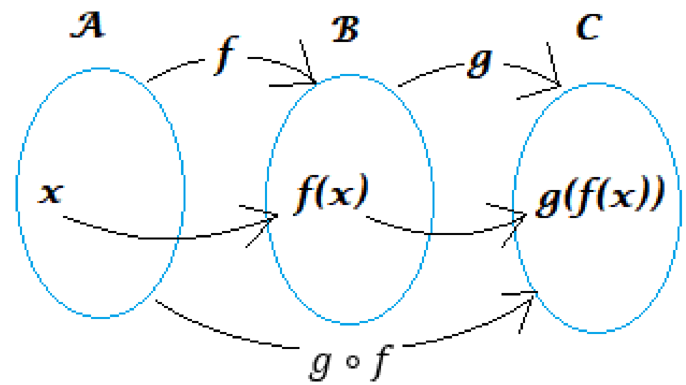
נסמן $f = g$

שתי פונקציות $f: A \to B$ ו $g: C \to D$ הן שוות אם
  - $A = C$ (אותו תחום)
  - $B = D$ (אותו טווח)
  - לכל $x \in A$ מתקיים $f(x) = g(x)$ (אותה התאמה)
- לכל A מתקיים $A \times \emptyset = \emptyset \times A = \emptyset$ - $\times$ מכפלה קרטזית
- מקבוצה בת m איברים לקבוצה בת n איברים יש n^m פונקציות.

הרכבת פונקציות

נניח ש $f: A \to B$ ו $g: B \to C$ פונקציות

פונקציית ההרכבה מוגדרת כך : לכל $x \in A$, $(g \circ f)(x) = g(f(x))$



- אם $f: A \to B$ ו $g: b \to B$ אז $g \circ f$ וגם $f \circ g$ קיימות

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} A$$
$$\xrightarrow{g \circ f : A \to A}$$

$$B \xrightarrow{g} A \xrightarrow{f} B$$
$$\xrightarrow{f \circ g : B \to B}$$

* אין להסיק מכך ש $g \circ f$ ו $f \circ g$ שוות

הרכבת פונקציות היא לא חלופית.

אם $g \circ f$ היא חח״ע אז f חייבת להיות חח״ע ו g אינה בהכרח חח״ע .

- **פונקציה אופיינית**

נתונה קבוצה אוניברסלית U וקבוצה A החלקית לקבוצה U.

הפונקציה האופיינית לA תסומן ב χ_A (באות היוונית כי, chi)לדוגמא :

$U = \mathbb{N} \qquad A = \{2n | n \in \mathbb{N}\}$

$\chi_A(0) = 1 \qquad \chi_A(25) = 0$

$\chi_A(1) = 0 \qquad \chi_A(36) = 1$

$\chi_A(2) = 1 \qquad \chi_A(53) = 0$

$\chi_A(3) = 0 \qquad \chi_A(72) = 1$

הגדרה

$$\chi_A(a) = \begin{cases} 1 & a \in A \\ 0 & a \notin A \end{cases}$$

פונקציית הזהות

פונקציה $g: A \to A$ היא **פונקציית הזהות** על A אם לכל $a \in A$ מתקיים $g(a) = a$.

לכל קבוצה לא ריקה מסמנים ב $I_A: A \to A$ את הפונקציה

המוגדרת על ידי $I_A(x) = x$ לכל $x \in A$.

I_A נקראת פונקציית הזהות של A .

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend left, "I_B \circ f"] & B \arrow[r, "I_B"] & B \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "I_A"] \arrow[rr, bend right, "f \circ I_A"'] & A \arrow[r, "f"] & B \end{tikzcd}$$

נניח ש $f: A \to B$ אז

$$f \circ I_A = I_B \circ f = f$$

- פונקציית הזהות היא איבר ניטרלי בקבוצת כל הפונקציות מ A ל A ביחס לפעולת ההרכבה.

פונקציות חד חד ערכיות - injective function

נאמר שפונקציה $f: A \to B$ היא חח״ע אם ורק אם:

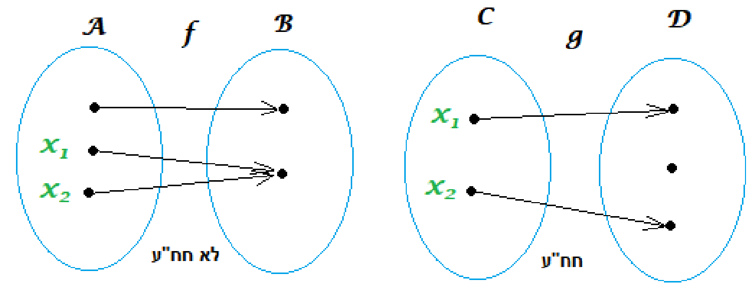
- לכל $x_1, x_2 \in A$, אם $x_1 \neq x_2$ אז $f(x_1) \neq f(x_2)$

או

- לכל $x_1, x_2 \in A$, אם $f(x_1) = f(x_2)$ אז $x_1 = x_2$

פונקציה חד חד ערכית אם לכל איבר בטווח יש לכל היותר מקור אחד בתחום

לאיברים שונים בתחום יש תמונות שונות בטווח.



בשתי הדוגמאות, לכל איבר בתחום מתאים איבר אחד ויחיד בטווח אבל בכל זאת רק g חח״ע.

הוכחה: נתון לכל $x_1, x_2 \in A$, אם $f(x_1) = f(x_2)$ אז $x_1 = x_2$

נבחר שני איברים $x \neq y$ $x, y \in A$ נניח בשלילה כי $f(x) = f(y)$

נקבל מהנתון $x = y$ ולכן – סתירה.

פונקציות על – *surjective function*

פונקציה $f: A \to B$ **תיקרא** פונקציית על אם תמונת f מתלכדת עם הטווח של f

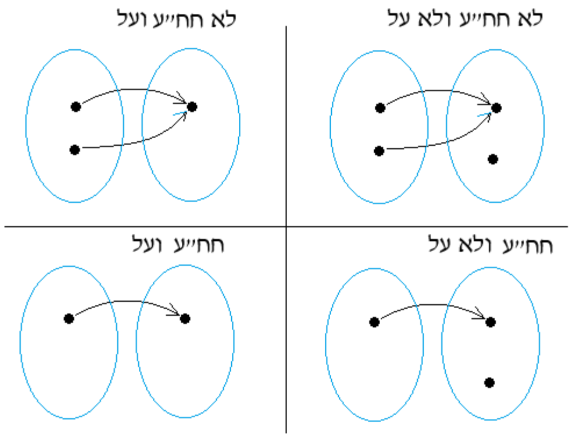
כלומר $f(A) = B$ או במילים אחרות

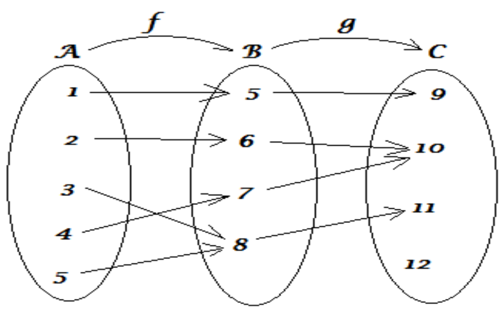
פונקציה $f: A \to B$ **תיקרא על** B אם **לכל** $y \in B$ קיים $x \in A$ כך ש $f(x) = y$

פונקציה $f: A \to B$ **לא תיקרא על** אם ורק אם **קיים** $y \in B$ כך שלכל $x \in A$, $f(x) \neq y$

פונקציה נקראת על אם לכל איבר בטווח יש לפחות איבר אחד בתחום

כל איבר בטווח הוא תמונה של איבר בתחום





אם f לא חח״ע אז לא קיימת g כך שההרכבה $g \circ f$ תהיה חח״ע

אם g לא על אז לא קיימת f כך שההרכבה $g \circ f$ תהיה על

פונקציה הפיכה

- אם $f: A \to B$ היא **חח"ע ועל** אז היא **הפיכה** וההופכית לה מסומנת ב $f^{-1}: B \to A$

ומתקיים $f^{-1} \circ f = I_A$ $\quad f^{-1} \circ f: A \to A$

וגם $f \circ f^{-1} = I_B$ $\quad f \circ f^{-1}: B \to B$

- אם $f: A \to B$ היא **הפיכה** אז היא **חח"ע ועל**
- אם $g: A \to B$ ו $g: B \to A$ הפיכות אז $f \circ g$, $g \circ f$ הפיכות ומתקיים

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$$

פונקציה $f: A \to B$ מקיימת את **תנאי ההיפוך** אם **כל** איבר של B הוא תמונה על-ידי f *של איבר **יחיד** ב A.*

פונקציה $f: A \to B$ המקיימת את תנאי ההיפוך נקראת **פונקציה הפיכה.**

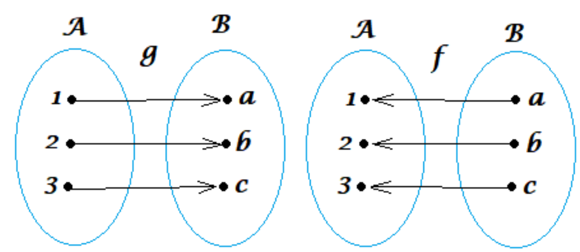
אם f מקיימת את תנאי היפוך, ההתאמה ההפוכה לזו של f (המתקבלת משינוי כיוון החיצים)

היא זו המתאימה לכל איבר b ב B את האיבר היחיד a ב A שתמונתו על-ידי f היא g .

- פונקציה $f: A \to B$ ההתאמה ההפוכה ל f מגדירה פונקציה מB ל A אם ורק אם f הפיכה.
- פונקציה $f: A \to B$ אם ההתאמה ההפוכה ל f מגדירה פונקציה g מ B ל A , אזי g נקראת

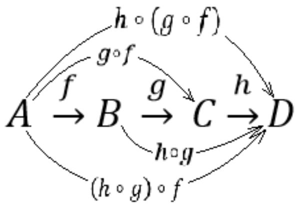
פונקציה הופכית ל f או **פונקציה הפוכה** ל f .

- פונקציה $f: A \to B$ מקיימת את תנאי ההיפוך (כל איבר של B הוא תמונה על-ידי f של איבר יחיד ב A) **אם ורק אם f היא פונקציית חח"ע מ A על B.**
- אם $f: A \to B$ היא פונקציה הפיכה, אזי הפונקציה ההפוכה שלה היא פונקציה חד חד ערכית מ B על A .
- אם f היא פונקציה הפיכה אז הפונקציה ההפוכה ל f מסומנת ב f^{-1}, היא חח"ע ועל.



הרכבה של שלוש פונקציות

נניח ש $f: A \to B, \quad g: B \to C, \quad h: C \to D$



לפיכך קיימות $(h \circ g) \circ f: A \to D$ וגם $h \circ (g \circ f): A \to D$

לכל שלוש פונקציות $f: A \to B, \quad g: B \to C, \quad h: C \to D$

$$[(h \circ g) \circ f](x) = (h \circ g)(f(x)) = h\Big(g\big(f(x)\big)\Big)$$

$$[h \circ (g \circ f)](x) = h((g \circ f)(x) = h(g(f(x)))$$

כלומר מתקיים השוויון הבא:

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$$

לפיכך הרכבת פונקציות היא **קיבוצית** בכל מקרה שהיא קיימת.

סיכום פונקציות

התמונה של C לפי פונקציה f $\qquad \boldsymbol{f(C)=\{f(x)|x\in C\}}$

המקור של D לפי פונקציה f $\qquad \boldsymbol{f^{-1}(D)=\{x\in A \mid f(x)\in D\}}$

נאמר שפונקציה $f: A\to B$ היא **חח"ע** אם ורק אם:

- לכל $x_1,x_2\in A$, אם $x_1\neq x_2$ אז $f(x_1)\neq f(x_2)$
- לכל $x_1,x_2\in A$, אם $f(x_1)=f(x_2)$ אז $x_1=x_2$

פונקציה $f:A\to B$ תיקרא **על** B אם לכל $y\in B$ קיים $x\in A$ כך ש $f(x)=y$

פונקציה $f:A\to B$ לא תיקרא **על** אם ורק אם קיים $y\in B$ כך שלכל $x\in A$, $f(x)\neq y$

פונקציה $g:A\to A$ היא **פונקציית הזהות** על A אם לכל $a\in A$ מתקיים $g(a)=a$.

פונקציה $f:A\to B$ מקיימת את **תנאי ההיפוך** אם **כל** איבר של B הוא תמונה על-ידי f *של איבר יחיד ב A.*

פונקציה $f:A\to B$ המקיימת את תנאי ההיפוך נקראת **פונקציה הפיכה.**

- פונקציה $f:A\to B$ ההתאמה ההפוכה ל f מגדירה פונקציה מB ל A אם ורק אם f הפיכה.
- פונקציה $f:A\to B$ אם ההתאמה ההפוכה ל f מגדירה פונקציה g מ B ל A , אזי g נקראת **פונקציה הופכית** ל f או **פונקציה הפוכה** ל f .
- פונקציה $f:A\to B$ מקיימת את תנאי ההיפוך (כל איבר של B הוא תמונה על-ידי f של איבר יחיד ב A) **אם ורק אם f היא פונקציית חח"ע מ A על B.**
- אם אם $f:A\to B$ היא פונקציה הפיכה, אזי הפונקציה ההפוכה שלה היא פונקציה חד חד ערכית מ B על A .
- אם f היא פונקציה הפיכה אז הפונקציה ההפוכה ל f מסומנת ב f^{-1}, היא חח"ע ועל.

עקרון האינדוקציה

אם טענה מקיימת

א. הטענה נכונה עבור n

ב. נכונות הטענה עבור מספר כלשהו גוררת את נכונות הטענה עבור המספר העוקב לו.

אז הטענה נכונה לכל המספרים הטבעיים.

איך פותרים :

Test

נבדוק שהטענה מתקיימת עבור $\boldsymbol{n=0}$

זהו **בסיס האינדוקציה**.

Assume

נניח שהיא נכונה עבור $\boldsymbol{m}$

זהו **שלב האינדוקציה**

Proof

ונוכיח שהיא נכונה ל $\boldsymbol{m+1}$

Explain

נסביר מה נעשה

הגדרה ברקורסיה

1. איברים אחדים מוגדרים בצורה מפורשת .
   זהו **בסיס הרקורסיה**
2. האיברים הנותרים מוגדרים באמצעות איברים שכבר הוגדרו.
   זהו **כלל הרקורסיה**

דוגמא לפתרון יחס נסיגה

$$a_0=1$$
$$a_1=5$$
$$a_n=3a_{n-1}+4a_{n-2}$$
$$a_n=x^n$$
$$x^2=3x+4 \qquad \text{משוואה אופיינית}$$
$$x^2-3x-4=0$$
$$(x-4)(x+1)=0$$
$$x_1=\ -1$$
$$x_2=4$$
$$a_n=A\cdot(-1)^n+B\cdot 4^n$$
$$a_0=A+B=1$$
$$a_1=a\cdot(-1)+B\cdot 4=5$$
$$B=1-A$$
$$-A+4(1-A)=5$$
$$-A+4-4A=5$$
$$-5A=1$$
$$A=-\frac{1}{5} \quad b=\frac{6}{5}\cdot 4^n$$
$$a_n=-\frac{1}{5}\cdot(-1)^n+\frac{6}{5}\cdot 4^n$$

קומבינטוריקה

עקרון החיבור

אם אפשר לבחור איבר1 ב x_1 דרכים

ולבחור איבר 2 ב x_2 דרכים

$\vdots$

ולבחור איבר n ב x_n דרכים

ורוצים לבחור בדיוק איבר אחד אז יש $x_1 + x_2 + \cdots + x_n$ דרכים לבחור אותו.

עקרון הכפל

אם אפשר לבחור איבר 1 ב x_1 דרכים

ולבחור איבר 2 ב x_2 דרכים

$\vdots$

ולבחור עצם n ב x_n דרכים

ורוצים לבחור n איברים אז יש $x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n$ דרכים לבחור אותו.

אם יש n איברים שונים אז מספר התמורות הוא:

$$\boldsymbol{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 1 = n!}$$

אין חזרות – ברגע שנעשה שימוש באות או איבר אין לעשות בו שימוש שוב.
חשיבות סדר הבחירה – הבחירה של 213 או 321 היא בחירה אחת של המספרים 123

תמורות (פרמוטציות) ללא חזרות

סידור של n איברים שונים כאשר **יש חשיבות לסדר הבחירה ואין חזרות**.

סידור של n ספרים שונים על מדף.

מספר **התמורות** של n איברים שונים

$$\boldsymbol{P(n) = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 1 = n!}$$

באופן פורמלי, תמורה היא פונקציה הפיכה מקבוצה סופית לעצמה.

תמורות (פרמוטציות) עם חזרות

מספר **התמורות** של n איברים כאשר יש m סוגים של איברים שונים

יש חשיבות לסדר הבחירה ויש חזרות

סידור של n ספרים על מדף כאשר קיימים ספרים עם k_i עותקים.

מספר התמורות של n איברים כאשר יש m סוגים שונים של איברים

k_1 איברים זהים

k_2 איברים זהים

$\vdots$

k_m איברים זהים

כך ש $k_1 + k_2 + \cdots + k_m = n$

$$\boldsymbol{P(n; k_1, k_2, \ldots, k_m) = \frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \ldots \cdot k_m!}}$$

חליפות ללא חזרות

חליפה כלומר סידור של איברים שונים

חליפה של k איברים שונים מתוך n כאשר יש חשיבות לסדר הבחירה ו**ללא** חזרות

$k \leq n$

לדוגמא הושבה על ספסל של k נציגים מתוך n תלמידים

מספר האפשרויות לבחור k איברים מתוך n איברים שונים כאשר **יש חשיבות לסדר הבחירה**.

חליפה של k איברים מתוך n כאשר $k \leq n$ נסמן ב $P(n,k)$ ונחשב

$$\boldsymbol{n(n-1)\cdot \ldots (n-(k-1)) =}$$

$$\boldsymbol{n(n-1)\cdot \ldots (n-k+1) =}$$

$$\boldsymbol{\frac{n!}{(n-k)!}}$$

$$\boldsymbol{P(n,k) = \frac{n!}{(n-k)!}}$$

חליפות עם חזרות

מספר החליפות עם חזרות של k איברים מתוך n איברים שונים

יש חשיבות לסדר הבחירה ויש חזרות

לדוגמא מספר הפונקציות מ $\{1,2,3,4,5,6\}$ ל $\{a,b,c\}$ או מספר המילים באורך 6

שאפשר לבנות מהאותיות a,b,c (אות יכולה להופיע יותר מפעם אחת) שווה ל

$$\boldsymbol{\underbrace{n\cdot n\cdot \ldots \cdot n}_{k \text{ פעמים}} = n^k}$$

צירופים (קומבינציות) ללא חזרות

צירוף k איברים **שונים** מתוך n איברים **שונים** כאשר **אין חשיבות לסדר הבחירה**.

הסבר : קיימות $P(n,k)$ חליפות של k איברים. אם קיימות חליפות המורכבות מאותם

איברים לדוגמא $abc\ acb\ bac$ הן נספרות כאותה חליפה כי אין חשיבות לסדר ולכן

יש לחלק את $P(n,k)$ במספר התמורות של אותם איברים כלומר ב $P(k)$ ולכן

$$\boldsymbol{C(n,k) = \frac{P(n,k)}{P(k)} = \frac{n!}{(n-k)!} : k! = \frac{n!}{(n-k)!}\cdot\frac{1}{k!} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}}$$

את $C(n,k)$ מסמנים גם ע״י $\binom{n}{k}$

צירופים עם חזרות

מספר הדרכים לפזר k איברים זהים בתוך n תאים שונים.

לדוגמא מספר האפשרויות בטבעיים של $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 10$

או בחירה של 6 סופגניות מתוך 4 סוגים שונים זה כמו לבחור 6 פעמים מתוך 4 אפשרויות

$$\boldsymbol{D(n,k) = \binom{n-1+k}{k} = \binom{n-1+k}{n-1}}$$

טבלת סיכום

יש חשיבות לסדר	**עם חזרות**	**בלי חזרות**
תמורות **באורך n**	$\boldsymbol{\frac{n!}{k_1!\cdot\ k_2!\cdot \ldots \cdot\ k_m!}}$	$\boldsymbol{n!}$
חליפות **באורך k מתוך n איברים שונים**	$\boldsymbol{n^k}$	$\boldsymbol{\frac{n!}{(n-k)!}}$
אין חשיבות לסדר		
צירופים **k מתוך n**	$\boldsymbol{\binom{n-1+k}{n-1}}$	$\boldsymbol{\frac{n!}{(n-k)!\,k!} = \binom{n}{k}}$

משולש פסקל

$$\binom{n}{0}=1 \ , \ \binom{n}{n}=1 \ , \ \binom{n+1}{k+1}=\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}$$

$\binom{0}{0}$	1	$n=0$
$\binom{1}{0}$ $\binom{1}{1}$	1 1	$n=1$
$\binom{2}{0}$ $\binom{2}{1}$ $\binom{2}{2}$	1 2 1	$n=2$
$\binom{3}{0}$ $\binom{3}{1}$ $\binom{3}{2}$ $\binom{3}{3}$	1 3 3 1	$n=3$
$\binom{4}{0}$ $\binom{4}{1}$ $\binom{4}{2}$ $\binom{4}{3}$ $\binom{4}{4}$	1 4 6 4 1	$n=4$
$\binom{5}{0}$ $\binom{5}{1}$ $\binom{5}{2}$ $\binom{5}{3}$ $\binom{5}{4}$ $\binom{5}{5}$	1 5 10 10 5 1	$n=5$
אלכסונים k	שורות n	

נוסחת הבינום של ניוטון

$$(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}n^k$$

$$\underbrace{(a+b)^n=(a+b)\cdot(a+b)\cdot\ldots\cdot(a+b)}_{n \text{ פעמים}}=$$

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^0=\mathbf{1}\boldsymbol{a}^0\boldsymbol{b}^0$$

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^1=\mathbf{1}\boldsymbol{a}^1\boldsymbol{b}^0+\mathbf{1}\boldsymbol{a}^0\boldsymbol{b}^1$$

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2=\mathbf{1}\boldsymbol{a}^2\boldsymbol{b}^0+\mathbf{2}\boldsymbol{a}^1\boldsymbol{b}^1+\mathbf{1}\boldsymbol{a}^0\boldsymbol{b}^2$$

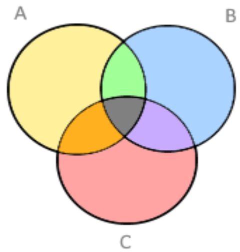
$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^3=\mathbf{1}\boldsymbol{a}^3\boldsymbol{b}^0+\mathbf{3}\boldsymbol{a}^2\boldsymbol{b}^1+\mathbf{3}\boldsymbol{a}^1\boldsymbol{b}^2+\mathbf{1}\boldsymbol{a}^0\boldsymbol{b}^3$$

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^4=\mathbf{1}\boldsymbol{a}^3\boldsymbol{b}^0+\mathbf{4}\boldsymbol{a}^2\boldsymbol{b}^1+\mathbf{6}\boldsymbol{a}^1\boldsymbol{b}^2+\mathbf{4}\boldsymbol{a}^1\boldsymbol{b}^2+\mathbf{1}\boldsymbol{a}^0\boldsymbol{b}^3$$

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^5=\mathbf{1}\boldsymbol{a}^3\boldsymbol{b}^0+\mathbf{5}\boldsymbol{a}^2\boldsymbol{b}^1+\mathbf{10}\boldsymbol{a}^1\boldsymbol{b}^2+\mathbf{10}\boldsymbol{a}^1\boldsymbol{b}^2+\mathbf{5}\boldsymbol{a}^1\boldsymbol{b}^2+\mathbf{1}\boldsymbol{a}^0\boldsymbol{b}^3$$

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^n=\binom{n}{0}\boldsymbol{a}^n\boldsymbol{b}^0+\binom{n}{1}\boldsymbol{a}^{n-1}\boldsymbol{b}^1+\binom{n}{2}\boldsymbol{a}^{n-2}\boldsymbol{b}^2+\cdots+\binom{n}{k-2}\boldsymbol{a}^2\boldsymbol{b}^{n-2}+\binom{n}{k-1}\boldsymbol{a}^1\boldsymbol{b}^{n-1}+\binom{n}{k}\boldsymbol{a}^0\boldsymbol{b}^n$$

עקרון ההכלה וההפרדה



$$|A\cup B\cup C|=(|A|+|B|+|C|)-(|A\cap B|+|A\cap C|+|B\cap C|)+|A\cap B\cap C|$$

*בקומבינטוריקה הקבוצות הן סופיות

תהי U הקבוצה האוניברסלית ו $A_1,A_2,\ldots,A_n\subseteq U$

מסי המחוברים

$\binom{n}{0}$ $$S_0=|U|$$

$\binom{n}{1}$ $$S_1=\sum_{i=1}^{n}|A_i|=|A_1|+|A_2|+\cdots+|A_n|$$

$\binom{n}{2}$ $$S_2=\sum_{1\le i<j\le n}|A_i\cap A_j|$$

$\binom{n}{3}$ $$S_3=\sum_{1\le i<j<k\le n}|A_i\cap A_j\cap A_k|$$

$\binom{n}{k}$ $$S_k=\sum_{1\le i_1<\cdots<i_k\le n}|A_{i_1}\cap\ldots\cap A_{i_k}|$$

$\binom{n}{n}$ $$S_n=|A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_n|$$

ואז מתקיים :

$$|\boldsymbol{A_1}\cup\boldsymbol{A_2}\cup\ldots\cup\boldsymbol{A_n}|=\boldsymbol{S_1}-\boldsymbol{S_2}+\boldsymbol{S_3}-+\cdots+(-1)^{k-1}\cdot\boldsymbol{S_k}+\cdots+(-1)^{n-1}\boldsymbol{S_n}$$

וגרסת המשלים :

$$|\boldsymbol{U}-\boldsymbol{A_1}\cup\boldsymbol{A_2}\cup\ldots\cup\boldsymbol{A_n}|=\boldsymbol{S_0}-\boldsymbol{S_1}+\boldsymbol{S_2}-+\cdots+(-1)^n\boldsymbol{S_n}$$

<u>פונקציות יוצרות</u>

נוסחאות חשובות

סכום סידרה הנדסית אינסופית

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots = \frac{1}{1-x}$$

סכום סידרה הנדסית סופית

$$\sum_{n=0}^{m} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^m = \frac{1-x^{m+1}}{1-x}$$

הפונקציה היוצרת של המקדמים הבינומיים

$$\sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} x^k = (1+x)^m$$

נוסחת הבינום השלילית

$$\frac{1}{(1-x)^r} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+1-1}{r-1} \cdot x^n$$

$$\left(\frac{1}{1-x}\right)^m = \frac{1}{(1-x)^m} = (1-x)^{-m} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} x^k\right) = \sum_{n=0}^{\infty} D(m,n) \cdot x^n$$

כפל בין טורים

$$\left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i\right) \cdot \left(\sum_{j=0}^{\infty} b_j x^j\right) = \sum c_k x^k$$

כאשר

$$c_k = \sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i}$$

$$(1-x) \cdot (1 + x + x^2 + x^3 + \cdots)$$
$$= 1 + (1-1)x + (1-1)x^2 + (1-1)x^3 + \cdots$$
$$= 1 + 0x + 0x^2 + 0x^3 + \cdots = 1$$
$$(1-x) \cdot (1 + x + x^2 + x^3 + \cdots) = 1$$
$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^{4n} = \sum_{n=0}^{\infty} (x^4)^n = \frac{1}{1-x^4}$$

$$(1-a^2)^m = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} (-a^2)^k = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} (-1)^k a^{2k}$$

משפט 1 (תכונות החיבור והכפל):

יהיו f, g, h טורים פורמליים. נסמן

$$1 = 1 + 0x + 0x^2 + \cdots \quad , \quad 0 = 0 + 0x + 0x^2 + \cdots,$$

וכן נסמן ב $(-f)$ את הטור המתקבל ע"י החלפת סימני כל המקדמים ב f .

החיבור קיבוצי וחילופי

$$(f + g) + h = f + (g + h) \qquad f + g = g + f$$

0 ניטרלי בחיבור

$$0 + f = f + 0 = 0$$

$-f$ הוא הנגדי של f ביחס לחיבור

$$f + (-f) = (-f) + f = 0$$

הכפל קיבוצי וחילופי

$$(f \cdot g) \cdot h = f \cdot (g \cdot h) \qquad f \cdot g = g \cdot f$$

1 ניטרלי בכפל

$$1 \cdot f = f \cdot 1 = 1$$

חוק הפילוג בכפל מעל החיבור והחיסור

$$f \cdot (g \pm h) = f \cdot g \pm f \cdot h$$

משפט 2 (בחוג הטורים הפורמליים אין מחלקי אפס)

אם f, g הם טורים פורמליים המקיימים $f \cdot g = 0$ אז $f = 0$ או $g = 0$ או $f = g = 0$

משפט 3 (צמצום בכפל טורים פורמליים)

אם f, g, h הם טורים פורמליים המקיימים $f \cdot h = g \cdot h$ ו $h \neq 0$ אז $f = g$

הגדרה (חילוק טורים פורמליים)

אם f, g, h הם טורים פורמליים המקיימים $f \cdot g = h$ אז נאמר ש $f = \frac{h}{g}$ וכן $g = \frac{h}{f}$

פעולת החילוק **<u>אינה</u>** מוגדרת לכל 2 טורים.

הגדרה (חזקה טבעית של טור פורמלי)

אם $f(x)$ הוא טור פורמלי, $\left(f(x)\right)^n$ הוא סימון מקוצר עבור $f(x) \cdot f(x) \cdot \ldots \cdot f(x)$ (n גורמים)

$$(1 + x + x^2 + \cdots)^3 = (1 + x + x^2 + \cdots) \cdot (1 + x + x^2 + \cdots) \cdot (1 + x + x^2 + \cdots)$$

הצבה בטורים פורמליים

$$\frac{1}{1 - \mathrm{x}} = 1 + x + x^2 + \cdots$$

נציב $z = -x$ כלומר $1 - z = 1 + x$ ולכן

$$\frac{1}{1 + x} = \frac{1}{1 - z} = 1 + z + z^2 + \cdots = 1 - x + x^2 - x^3 = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k$$

נציב $y = x^2$ כלומר $1 - y = 1 - x^2$

$$\frac{1}{1 - x^2} = \frac{1}{1 - y} = 1 + y + y^2 + \cdots = 1 + x^2 + x^4 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} x^{2k}$$

כפל שני טורים פורמליים אינסופיים

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

$$a_0 = 1, a_1 = 1, a_2 = 1, a_3 = 1, \ldots$$

$$g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

$$b_0 = 1, b_1 = 2, b_2 = 3, b_3 = 4, \ldots$$

$$(1 + x + x^2 + x^3 + \cdots) \cdot (1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots)$$
$$= 1 \cdot 1 + (1 \cdot 2 + 1 \cdot 1)x + (1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 3)x^2 + (1 \cdot 4 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 3 + 2 \cdot 1)x^3 + \cdots$$
$$= 1 + 3x + 6x^2 + 10x^3 + \cdots$$

$g(x)$ \ $f(x)$	a_0	$a_1 x$	$a_2 x^2$	$a_3 x^3$	$\cdots$
b_0	$1 \cdot 1$	$1 \cdot 1$	$1 \cdot 1$	$1 \cdot 1$	
$b_1 x$	$1 \cdot 2$	$1 \cdot 2$	$1 \cdot 2$	$1 \cdot 2$	
$b_2 x^2$	$1 \cdot 3$	$1 \cdot 3$	$1 \cdot 3$	$1 \cdot 3$	
$b_3 x^3$	$1 \cdot 4$	$1 \cdot 4$	$1 \cdot 4$	$1 \cdot 4$	
$\vdots$					

$$f(x) \cdot g(x) = h(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$$

$$c_0 = a_0 b_0$$

$$c_1 = a_0 b_1 + a_1 b_0$$

$$c_2 = a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0$$

$$c_3 = a_0 b_3 + a_1 b_2 + a_2 b_1 + a_3 b_0$$

$$\left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i\right) \cdot \left(\sum_{i=0}^{\infty} b_i x^i\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\overbrace{\sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i}}^{c_k}\right) x^k = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$$

תורת הגרפים

גרף $G = (V, E)$ כאשר V זה קבוצת הצמתים ו E קבוצת הקשתות

v כלומר $vertices$ נקרא **צומת** או קדקוד

e כלומר $edge$ נקרא **קשת** או גשר

גרף פשוט – גרף ללא לולאות וללא קשתות מקבילות

דרגה של צומת – סימן $\deg(v)$ כלומר מספר הקשתות המחוברות לצומת.

משפט : סכום הדרגות בגרף שווה לפעמיים מספר הקשתות.

$$\sum_{v \in V} \deg(v) = 2 \cdot |E|$$

כלומר סכום הדרגות הוא תמיד זוגי.

בכל גרף מספר הצמתים בעלי דרגה אי זוגית הוא זוגי.

אם בגרף מספר הצמתים הוא אי זוגי, אז יש בו לפחות צומת אחת עם דרגה זוגית.

מסלול – מסלול המחבר שני צמתים ע״י רצף של צמתים וקשתות. אורכו שווה למספר הקשתות שבו.

גרף קשיר – גרף בו בין כל שני צמתים יש מסלול

רכיב קשירות – תת קבוצה לגרף בה בין כל שני צמתים יש מסלול.

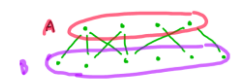
גרף מלא – גרף בו כל צמת מחובר לכל הצמתים האחרים. מספר הקשתות בגרף מלא K_n שווה ל

$$\frac{n \cdot (n-1)}{2} \qquad n - \text{צמתים}$$

גרף משלים – גרף המשלים גרף כלשהו לגרף מלא

הגרף האדום משלים את הגרף הירוק וההיפך.

גרף דו צדדי – גרף שניתן לחלק את צמתיו לשתי קבוצות לא ריקות A, b כך שלכל קשת של G יש קצה אחד ב A וקצה שני ב B . לשתי הקבוצות נקרא הצדדים של הגרף.



גרף דו צדדי מלא – $K_{p,q}$ הוא גרף דו צדדי פשוט בעל p צמתים בצד אחד ובעל q צמתים בצד השני ומכיל את כל $p \cdot q$ הקשתות האפשריות.

משפט : גרף (עם לפחות שני צמתים) הוא גרף דו צדדי אם״ם <u>אין</u> בו מעגל באורך אי זוגי.

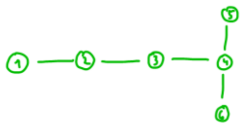
עץ - גרף קשיר ללא מעגלים.

יער – גרף שכל רכיב קשירות שלו הוא עץ.

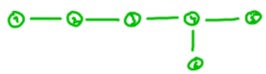
עלה – צומת בדרגה 1.

גרף איזומורפי –

גרף מתויג –



איזומורפי ל



אבל לא איזומורפי ל

משפט

הטענות הבאות שקולות

א) G הוא עץ

ב) בין כל שני צמתים ב G יש מסלול יחיד.

ג) G הוא גרף קשיר מינימלי

ד) G הוא קשיר ומתקיים $|E| = |V| - 1$

ה) ב G אין מעגל ומתקיים $|E| = |V| - 1$

ו) ב G אין מעגל אבל אם נוסיף קשת כלשהי ייווצר מעגל.

מספר הקשתות בעץ שווה למספר הצמתים פחות אחד

$$|E| = |V| - 1$$

מספר הקשתות ביער עם k עצים שווה למספר הצמתים פחות מספר רכיבי הקשירות

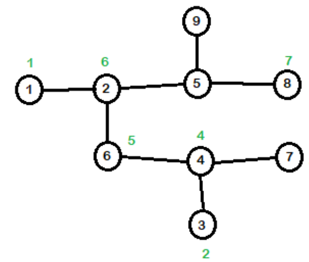
$$|E| = \sum_{i=1}^{k} E_i = \sum_{i=1}^{k} (|V_i| - 1) = |V| - k$$

סדרת פרופר (Prüfer) של עץ מתויג

שלבי בניית הסדרה

- מצא את העלה עם המספר הקטן ביותר
- מחק אותו, ורשום את המספר של הצומת אליו היה מחובר העלה
- עדכן את קבוצת העלים
- חזור על התהליך עד שנשארים בדיוק שני צמתים

לדוגמא



הסדרה $\{2,4,4,6,2,5,5,\}$

הצמתים הנותרים $\{5,9\}$

- העלים אינם נרשמים בסדרה
- כל צומת נרשם בסדרה מספר פעמים כדרגה שלו פחות 1.
- אורך סדרת פרופר הוא מספר הצמתים פחות 2.

יש התאמה חח"ע ועל בין עצים עם n עלים וסדרות באורך $n-2$ הבנויות ממספרים $\{1,2,\dots,n\}$

כלומר חליפות עם חזרות באורך $n-2$ מתוך n איברים שונים

מסקנה (משפט קיילי) :

יש n^{n-2} עצים מתויגים שונים עם n צמתים.

מסלול אוילר

בגרף G הוא מסלול בו כל קשת של G מופיעה בדיוק פעם אחת.

מעגל אוילר

בגרף G הוא מעגל שעובר על כל הקשתות של G.

מסלול המילטון

בגרף G הוא מסלול שעובר בכל הצמתים של G בדיוק פעם אחת.

מעגל המילטון

בגרף G הוא מעגל שעובר על כל הצמתים של G בדיוק פעם אחת.

גרף נקרא **אוילרי** אם יש בו מעגל **אוילר**

משפט 3.1 - גרף קשיר הוא **אוילרי** אם"ם דרגת כל צומת היא זוגית

גרף נקרא **המילטוני** אם יש בו מעגל **המילטון**.

משפט אור - עבור גרף עם n צמתים ו $3 \le n$: אם לכל שני צמתים שאינם שכנים מתקיים

$$\deg(n)+\deg(v)\ge n$$

אז הוא **המילטוני**

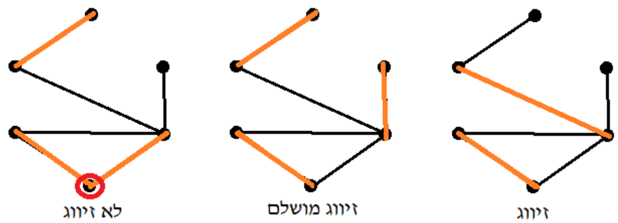
מסקנה (**משפט דירק**):

עבור גרף עם n צמתים ו $3\le n$ אם לכל צומת מתקיים $\deg(v)\ge \frac{n}{2}$ אז G **המילטוני**.

זיווג בגרף

תת קבוצה של קשתות שלא כוללת את אותו צומת יותר מפעם אחת.

זיווג מושלם הוא זיווג המזווג את כל הצמתים בגרף.



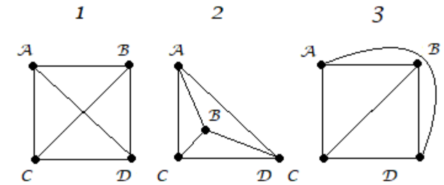
עבור X תת קבוצה של צמתים בגרף G, אז $\Gamma_G(X)$, קבוצת **השכנים** של X מוגדרת להיות כל הצמתים שמחוברים בקשת לאיזשהו צומת ב X.

משפט הול:

בגרף דו צדדי $G=(A\cup B,E)$ יש זיווג מושלם אם"ם לכל $X\subseteq A$ מתקיים $|\Gamma_G(X)|\ge|X|$

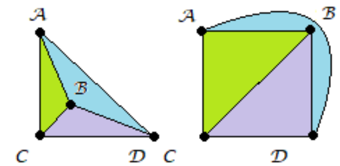
גרף נקרא **מישורי** אם אפשר לשרטט אותו כך שהקשתות לא חותכות זו את זו.

לדוגמא שלושה גרפים זהים המשורטטים בצורה שונה, ב 1 הקשתות חותכות זו את זו וב 2 ו3 אינן.



אם נתון שיכון מישורי של גרף G אז הוא מחלק את המישור לחלקים. כל חלק נקרא פאה.

לדוגמא כל פאה צבועה בצבע אחר. בעץ יש פאה אחת בלבד כי אין בו מעגלים. בדוגמאות הבאות הפאות צבועות בצבעים כחול, ירוק , סגול ולבן (הלבן הוא הפאה המקיפה את הגרף כלומר חיצונית לו).



מספר הפאות אינו תלוי באיזה שיכון מישורי בוחרים.

ניתן למצוא את מספר הפאות באמצעות נוסחת אוילר

$$f = m - n + 2$$

כאשר m מספר הקשתות ו n מספר הצמתים

מספר הקשתות המקסימלי בגרף מישורי עם n צמתים הוא $3n-6$

אם G מישורי, אז $m \le 3n-6$

בכל גרף מישורי פשוט יש צומת שדרגתו $5 \ge$

מספר הקשתות המקסימלי בגרף מישורי דו צדדי קשיר עם n צמתים הוא $2n-4$

אם G מישורי דו צדדי, קשיר , אז $m \le 2n-4$

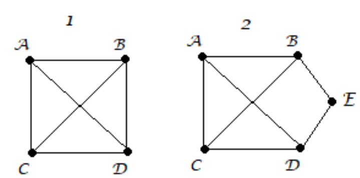
K_5 איננו מישורי.

ב K_5 יש $10 = \frac{5\cdot 4}{2}$ קשתות כלומר יותר מ $(3\cdot 5)-6=9$

$K_{3,3}$ איננו משורי.

ב $K_{3,3}$ יש $9 = 3\cdot 3$ קשתות כלומר יותר מ $(2\cdot 6)-4=8$

עידון של גרף – החלפת קשת במסלול באורך 2 לדוגמא ציור 2 הוא עידון של ציור 1.



טענה : גרף הוא מישור אס"ם כל עידון שלו הוא מישורי

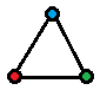
משפט קורטובסקי- גרף הוא מישורי אס"ם הוא לא מכיל כתת גרף עידון של K_5 או $K_{3,3}$.

צביעה חוקית (נאותה) של גרף היא צביעה של הצמתים כך ששכנים צבועים בצבעים שונים

$\mathrm{X}(G)$ – מספר הצביעה של גרף, הוא מספר הצבעים המינימלי בצביעה חוקית של G

גרף G נקרא k- צביע אם $\mathrm{X}(G) \ge k$

$\mathrm{X}(K_3) = 3$



$\mathrm{X}(K_4) = 4$

$$\mathbf{X}(\boldsymbol{K_n}) = \boldsymbol{n}$$