Applications linéaires

deux semaines 1/2

Table des matières

ECUE concerné

Cette feuille de TD concerne le premier chapitre constituant l'ECUE ALM : applications linéaires et matrices. Elle fait partie du B4.

Les **prérequis** sont :

— l'ECUE S1B1 OBM : pour les parties « Logique, ensembles, fonctions »
— l'ECUE S2B3-B4 EV : espaces vectoriels

Motivation

Les applications linéaires sont sous-jacentes aux suites récurrentes ou aux équations différentielles ***linéaires*** qu'on a évoquées au cours des TD précédents. Quand on étudie la suite récurrente donnée par $u_0 = 1$ et

$$\forall n \geq 1 \quad u_{n+1} = 2u_n$$

on demande en réalité que u_{n+1} soit égale à l'image de u_n par l'application linéaire $f : x \mapsto 2x$. On pourrait mettre en évidence la même situation avec l'équation différentielle

$$f = 2f'.$$

Ces applications, et leurs généralisations à la dimension supérieure, justifient à elles seules le fait de s'intéresser aux applications linéaires de plus près. Une autre raison vient également apporter son soutien à cet intérêt : les mathématiques modernes mettent l'emphase non sur les objets mais sur les opérations sur ceux-ci ; autrement dit sur les applications entre ces objets. Il est plus important de savoir qu'on peut transformer notre position GPS en une autre (se déplacer) que de connaître une fois pour toute notre position GPS à la naissance. De manière plus marquante pour vous un *objet* au sens de la ***POO*** n'est qu'une donnée si elle ne contient pas de méthodes. Dans la suite de cette feuille on étudie les *méthodes* de l'algèbre linéaire.

Attendus

À la fin de ce chapitre, vous devez être capables de :

— Reconnaitre une application linéaire (par exemple un projecteur ou une symétrie).
— Déterminer le noyau et l'image d'une application linéaire (par exemple en exploitant le théorème du rang).

Plus en détails, vous devez être capables de :

— Déterminer si une application est linéaire ou non.
— Déterminer le noyau et l'image d'une application linéaire, en trouver une base si on est en dimension finie.
— Utiliser le théorème du rang pour valider ou anticiper ses résultats sur le noyau et l'image si l'espace vectoriel de départ est de dimension finie.
— Déterminer si une application linéaire est injective, surjective, bijective.
— Analyser un projecteur.
— Dessiner l'action d'un projecteur ou d'une symétrie dans le plan.

1 Définition de la linéarité

1.1 Résumé

Dans cette première partie on vise à vous faire assimiler la notion d'application linéaire. Une application est un procédé qui permet d'associer à un élément d'un ensemble de départ un élément dans un ensemble d'arrivée. La linéarité spécifie la ***manière*** dont on réalise cette association. Une application

f ne peut être linéaire que si les espaces de départ et d'arrivée, E et F, sont des $\mathbb{R}$-ev et si pour tout couple (x, y) de vecteurs de E, pour tout réel λ,

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \qquad \text{et} \qquad f(\lambda x) = \lambda f(x).$$

On dit dans ce cas que f est compatible avec les structures d'espaces vectoriels de E et F ; elle respecte les opérations sur E et F.

1.2 MiMos à travailler

Mimo : Définition d'une application linéaire
Mimo : Exemples d'applications linéaires

1.3 Exercices

Exercice 1.1

On se place dans un premier temps dans le cas d'une fonction numérique d'une variable réelle. Ce sont les applications que vous avez le plus manipulées jusqu'ici.

1. Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, que signifie f est linéaire ? Quelle est sa représentation graphique dans le plan ?
2. On suppose f linéaire. Soient u et v deux réels, quelle est l'image de $u+v$ par f ? Soit α un réel, que dire de l'image de αu ? Que vaut $f(0)$?
3. Soit g une fonction affine de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Répondez à nouveau aux questions précédentes.
4. Soit h la fonction carré de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Répondez à nouveau aux mêmes questions.

Exercice 1.2

Les applications suivantes sont-elles linéaires ?

$$f_1 : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \longmapsto (2x-z, 3x+y+z) \end{cases}$$

$$f_2 : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \longmapsto (2x-z, 3x+2+z) \end{cases}$$

$$f_3 : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \longmapsto (x+y, -y, 2x-y) \end{cases}$$

$$f_4 : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \longmapsto (x-y, xy, 2x) \end{cases}$$

$$\star\ f_5 : \begin{cases} \mathbb{R}^p & \longrightarrow \mathbb{R}^n \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} & \longmapsto \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1p}x_p \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{np}x_p \end{pmatrix} \end{cases} \quad \text{où les } a_{ij} \text{ sont des réels.}$$

$$f_6 : \textbf{(Travail personnel)} \begin{cases} E & \longrightarrow E \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & \longmapsto \begin{pmatrix} a-b & b-c \\ d & d \end{pmatrix} \end{cases}$$

$$\text{où } E = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, (a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 \right\} \text{ est le } \mathbb{R}\text{-ev étudié au cours du TD précédent.}$$

$$f_7 : \begin{cases} \mathbb{R}^{\mathbb{N}} & \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (u_n) & \longmapsto (u_0, u_1) \end{cases}.$$

$$f_8 : \begin{cases} \mathbb{R}^{\mathbb{N}} & \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (u_n) & \longmapsto (u_0, |u_1|) \end{cases}.$$

$$f_9 : \begin{cases} \mathbb{R}[X] & \longrightarrow \mathbb{R}[X] \\ P & \longmapsto 2(X+1)P - X^2 \end{cases}.$$

$$f_{10} : \begin{cases} \mathbb{R}[X] & \longrightarrow \mathbb{R}[X] \\ P & \longmapsto 2(X+1)P - (X^2-2X+1)P' \end{cases}.$$

$$\phi : \begin{cases} \mathscr{C}^0(\mathbb{R}) & \longrightarrow \mathbb{R} \\ f & \longmapsto \displaystyle\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t \end{cases}$$ où $\mathscr{C}^0(\mathbb{R})$ est l'ensemble des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

2 Noyau et image d'une application linéaire

2.1 Résumé

L'étude des applications linéaires passe par l'étude de deux sous-espaces vectoriels structurellement associés à toute application linéaire : le ***noyau*** et l'***image*** d'une application linéaire. On peut y penser respectivement comme le lieu qui ne laisse (presque) aucune trace dans l'espace d'arrivée et le lieu qui représente toute la trace de celle-ci. Le noyau est donc une partie de l'ensemble de départ et l'image une partie de l'espace d'arrivée.

2.2 MiMos à travailler

Mimo : Image et noyau d'une application linéaire

2.3 Exercices

Exercice 2.3

1. Soient E et F deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Rappeler la définition du noyau de f et la définition de l'image de f. Montrer que le noyau de f est un sev de E et que l'image de f est un sev de F.
2. Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto (x+y, 0) \end{cases}$
   (a) Montrer que f est linéaire
   (b) Déterminer le noyau de f et le représenter dans le plan.
   (c) Déterminer l'image de f et la représenter dans le plan.
   (d) De quel type de sous ensembles de $\mathbb{R}^2$ s'agit-il ?

Exercice 2.4

Déterminer le noyau et l'image des applications linéaires suivantes. Les exprimer sous forme d'espaces vectoriels engendrés lorsque c'est possible.

$$f_1 : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \longmapsto (x-y, 2x-y+z) \end{cases}$$

$$f_2 : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x, x+z, z) \end{cases}$$

$$f_3 : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \longmapsto & (x, 2x+y, 3y) \end{cases}$$

$$f_4 : \begin{cases} \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_2[X] \\ P & \longmapsto & P' \end{cases}$$ Même question si $f_4 : \mathbb{R}[X] \longrightarrow \mathbb{R}[X]$.

$$f_5 : \begin{cases} \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ P & \longmapsto & (P(0), P(1)) \end{cases}$$

Exercice 2.5

Soient E, F deux $\mathbb{R}$-ev et $f \in \mathscr{L}(E, F)$.

1. (a) Montrer que si f est injective alors : $\forall u \in E,\ f(u) = 0_F \Longrightarrow u = 0_E$
   (b) Montrer que si $\text{Ker}(f) = \{0_E\}$ alors : $\forall (u,v) \in E^2,\ f(u) = f(v) \Longrightarrow u = v$
   (c) Montrer que f injective si et seulement si $\text{Ker}(f) = \{0_E\}$.
2. Montrer que f surjective si et seulement si $\text{Im}(f) = F$.

Exercice 2.6

Indiquer pour chacune des applications de l'exercice 2.4 si elle est injective et/ou surjective.

3 Théorème du rang

3.1 Résumé

Le noyau et l'image d'une application linéaire sont liés : vous devriez avoir pu, à ce stade, constater qu'une application linéaire qui a un *gros* noyau a une *petite* image, inversement une application linéaire qui a une *grosse* image a un petit *petit* noyau. Cette intuition est tout à fait vraie dans le cas des applications linéaires entre espaces vectoriels de dimensions finies. Elle se traduit par le ***théorème du rang*** qui explicite le lien entre la dimension du noyau et de l'image d'une application linéaire en dimension finie (et ***uniquement en dimension finie***). Ce théorème permet dans la pratique de faciliter des calculs fréquents lors de la résolution de systèmes linéaires.

Théorème du rang :
Soient E et F deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels tels que E est de dimension finie.
Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$ alors :

— $\text{Im}(f)$ est de dimension finie. Cette dimension est appelée rang de f et notée $\text{rg}(f)$.

— On a l'égalité suivante : $\dim(\text{Im}(f)) + \dim(\text{Ker}(f)) = \dim(E)$

Cette section va nous permettre de nous familiariser avec le théorème du rang et d'en découvrir les implications.

3.2 MiMos à travailler

Pas de Mimos sur ce sujet. Il faut donc **apprendre le théorème par cœur** et le rajouter dans votre cours.

3.3 Exercices

Exercice 3.7

Reprendre les applications linéaires de l'exercice 2.4, identifier les dimensions des noyaux et des images de chaque application et vérifier le théorème du rang sur ces exemples.

Exercice 3.8

On considère l'application linéaire $f : \begin{cases} \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ P = aX^2 + bX + c & \longmapsto & (a+c, a+2b+3c) \end{cases}$

1. Trouver la dimension de $\mathrm{Ker}(f)$ en justifiant proprement votre raisonnement.
2. Quelle est la dimension de $\mathrm{Im}(f)$?
3. Trouver $\mathrm{Im}(f)$.
4. f est-elle injective ? surjective ? bijective ?

Exercice 3.9

(Travail personnel) Soient $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et l'application linéaire

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto (6x-4y-4z, 5x-3y-4z, x-y) \end{cases}$$

1. Déterminer $\mathrm{Ker}(f)$ et donner sa dimension en exhibant une de ses bases.
2. En déduire la dimension de $\mathrm{Im}(f)$.
3. Soient $u = e_1 + e_2$ et $v = e_2 - e_3$. Calculer $f(u)$ et $f(v)$.
4. En déduire que (u, v) est une base de $\mathrm{Im}(f)$.

Exercice 3.10

1. Soient E un $\mathbb{R}$-ev de dimension finie et $f \in \mathscr{L}(E)$ un endomorphisme de E.
   A l'aide du théorème du rang, montrer que :
   (a) si f est injective alors f est surjective,
   (b) si f est surjective alors f est injective,
   (c) f bijective $\Longleftrightarrow \mathrm{Ker}(f) = \{0_E\} \Longleftrightarrow \mathrm{Im}(f) = E$.
2. On se donne désormais un deuxième $\mathbb{R}$-ev F de dimension finie.
   Que dire d'une application linéaire $f \in \mathscr{L}(E, F)$ suivant les dimensions de E et de F ?

★ **Exercice 3.11**

Soient $(x_0, x_1, \cdots, x_n)$, $n+1$ réels distincts et f l'application linéaire définie par :

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}^{n+1} \\ P & \longmapsto & (P(x_0), P(x_1), \cdots, P(x_n)) \end{cases}$$

1. Montrer que f est injective puis qu'elle est bijective.
2. En déduire qu'en $n+1$ points du plan d'abscisses distinctes passe un et un seul polynôme de degré n.

Exercice 3.12

(Travail personnel) Soient $E = \mathbb{R}[X]$ et $f : \begin{cases} \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}[X] \\ P & \longmapsto & P' \end{cases}$.

1. Montrer f est un endomorphisme de E.
2. Déterminer le noyau et l'image de f.
3. f est-elle injective ? surjective ?
4. Qu'en pensez-vous ?

4 Projecteurs et symétries

4.1 Résumé

Parmi l'ensemble des applications linéaires certaines apparaissent plus fréquemment que d'autres. Les projecteurs font partie de cette catégorie. Ils permettent par exemple de projeter une partie de $\mathbb{R}^3$ sur un plan, comme on pourrait vouloir le faire pour représenter la terre sur une carte. C'est également des projecteurs qui apparaissent lorsque l'on souhaite réduire la dimension d'une image. On étudie ici quelques exemples de cette famille d'applications ainsi que de celle, sœur, des symétries.

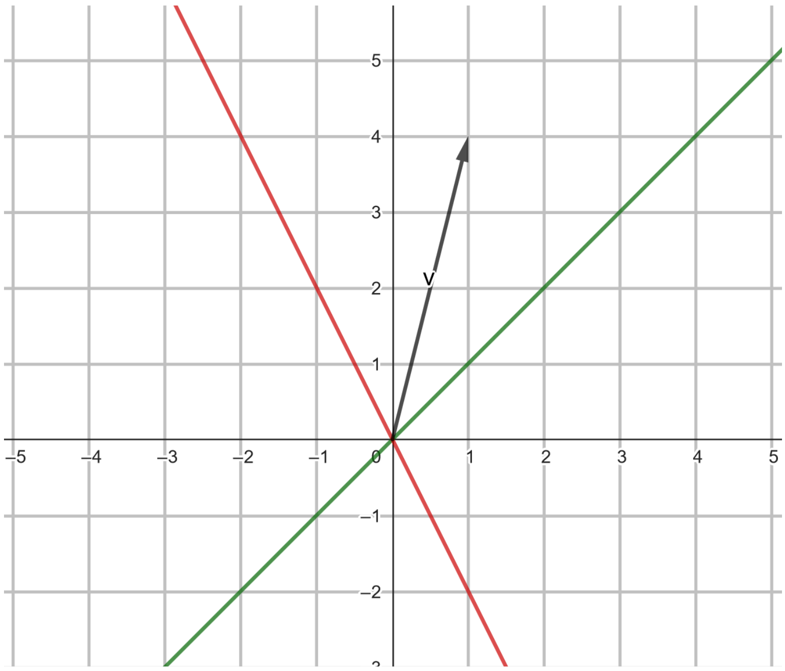
4.2 MiMos à travailler

Pas de Mimos sur ce sujet

4.3 Exercices

Exercice 4.13

Dans la plan $\mathbb{R}^2$ ci-dessous, on a représenté la droite D_1 d'équation $y = x$, la droite D_2 d'équation $y = -2x$ ainsi que le vecteur $v = (1, 4)$



1. En reliant à la théorie des espaces vectoriels, que peut-on dire des deux droites D_1 et D_2 ?
2. Construire le projeté v_1 de v sur D_1 parallèlement à D_2 ainsi que le projeté v_2 de v sur D_2 parallèlement à D_1. Quel est le lien entre v, v_1 et v_2.
3. Graphiquement quelles sont les coordonnées respectives de v_1 et v_2 ? Que remarquez-vous à nouveau ?
4. Quel serait le projeté de v_1 sur D_1 parallèlement à D_2 ? Quel serait le projeté de v_2 sur D_1 parallèlement à D_2 ?
5. Construire le symétrique de v par rapport à D_1 parallèlement à D_2.

Exercice 4.14

Soient p_1, p_2 deux endomorphismes de $\mathbb{R}^2$ définis par :

$$p_1 : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto (x,0) \end{cases}$$

$$p_2 : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto (x-y,0) \end{cases}$$

Pour chacune de ces applications linéaires :

1. Déterminer $\mathrm{Ker}(p)$ et $\mathrm{Im}(p)$. Les dessiner sur le plan.
2. Justifier graphiquement que $\mathrm{Ker}(p) \oplus \mathrm{Im}(p) = \mathbb{R}^2$.
3. Soient $u \in E$, $v \in \mathrm{Im}(p)$ et $w \in \mathrm{Ker}(p)$ tels que $u = v + w$.
   Que peut-on dire de $p(v)$? En déduire l'expression de $p(u)$ en fonction de v et w. En déduire la construction graphique de $p(u)$.
4. Expliquer pourquoi ce type d'application linéaire s'appelle un projecteur.
5. Vérifier que $p \circ p = p$
6. On note $f = 2p - \mathrm{id}$. Étudier l'image d'un vecteur du plan par f.
   Comment appelleriez-vous cette application ?

Exercice 4.15

Soit $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^2)$ définie par :

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto (4x-6y, 2x-3y) \end{cases}$$

1. Montrer que f est un projecteur, c'est à dire que $f \circ f = f$.
2. Déterminer $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sous forme de Vect, les dessiner sur le plan.
3. Justifier que $\mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}^2$.
4. Montrer que $\forall v \in \mathrm{Im}(f), \quad f(v) = v$.
5. Soient $u \in \mathbb{R}^2$ et $(v,w) \in \mathrm{Im}(f) \times \mathrm{Ker}(f)$ tels que $u = v + w$. Que vaut $f(u)$?

Exercice 4.16

(Travail personnel) Décrire les projections suivantes :

$$p_1 : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto \frac{1}{3}(x+y+z, x+y+z, x+y+z) \end{cases}$$

$$p_2 : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto (\frac{1}{2}(x-y), \frac{1}{2}(y-x), z) \end{cases}$$