David Pedroza Segoviano 27-Ago-2020

Sistemas de Ecuaciones Lineales Ejercicios.

Ejercicios:

1. Resolver por Gauss: $\begin{cases} x-2y+z=13 \\ 3x-4y+2z=1 \\ 2x-2y+z=0 \end{cases}$

Expresamos el S.E.L como una matriz $A^*=(A|B)$ donde A es la matriz formada por los coeficientes del sistema y B es el vector de los terminos independientes.

$$A^* = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 13 \\ 3 & -4 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[R_3 \to R_3 - 2R_1]{R_2 \to R_2 - 3R_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 13 \\ 0 & 2 & -1 & -38 \\ 0 & 2 & -1 & -26 \end{array}\right] \xrightarrow{R_3 \to R_3 - R_2}$$

$$\to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 13 \\ 0 & 2 & -1 & -38 \\ 0 & 0 & 0 & 12 \end{array}\right]$$

; Note que el sistema nos sugiere que $0=12$, lo cual no es verdad, por tanto, no tiene solucion.

2. Resolver por Gauss: $\begin{cases} 2x-5y+3z=4 \\ x-2y+z=3 \\ 5x+y+7z=1 \end{cases}$

Hacemos lo mismo que en 1.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -5 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \\ 5 & 1 & 7 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[R_3 \to R_3 - \frac{5}{2}R_1]{R_2 \to R_2 - \frac{1}{2}R_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -5 & 3 & 4 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & \frac{27}{2} & -\frac{1}{2} & -9 \end{array}\right] \xrightarrow{R_3 \to R_3 - \frac{54}{2}R_2}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -5 & 3 & 4 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 13 & -36 \end{array}\right]$$

Lo que nos indica que $\boxed{z = -\frac{36}{13} = -2}$

$$\Rightarrow \frac{y}{2} - (-2)\left(\frac{1}{2}\right) = 1 \Rightarrow \boxed{y = 0}$$

$$\Rightarrow 2x - 5(0) + 3(-2) = 4 \Rightarrow \boxed{x = 5}$$

③ Resolver por Gauss:

$$\begin{cases} x - 3y + 7z = 10 \\ 5x - y + z = 8 \\ x + 4y - 10z = -11 \end{cases}$$

• Los mismo que en ①;

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 7 & 10 \\ 5 & -1 & 1 & 8 \\ 1 & 4 & -10 & -11 \end{array}\right] \xrightarrow[R_3 \to R_3 - R_1]{R_2 \to R_2 - 5R_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 7 & 10 \\ 0 & 14 & -34 & -42 \\ 0 & 7 & -17 & -21 \end{array}\right] \xrightarrow{R_3 \to R_3 - \frac{1}{2}R_2}$$

$$\to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 7 & 10 \\ 0 & 14 & -34 & -42 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right];$$

Como no hay una expresión especifica para z, entonces z será un parámetro λ que conduce a:

$$14y - 34\lambda = -42$$

$$x - 3y + 7\lambda = 10$$

$$\Rightarrow y = \frac{-42 + 34\lambda}{14} = -3 + \frac{17}{7}\lambda$$

y

$$x = 10 + 3y - 7\lambda = 10 - 9 + \frac{51}{7}\lambda - 7\lambda = 1 + \frac{2}{7}\lambda$$

$$\boxed{\begin{array}{ll} y = -3 + \frac{17}{7}\lambda & z = \lambda \\ x = 1 + \frac{2}{7}\lambda & \end{array}}$$

Ejercicios Gauss-Jordan:

a)

$$4x_2 - 3x_3 = 3$$
$$-x_1 + 7x_2 - 5x_3 = 4$$
$$-x_1 + 8x_2 - 6x_3 = 5$$

• Hacemos lo mismo que en 1 del ejercicio pasado, la parte de transformar el sistema en una matriz:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 4 & -3 & 3 \\ -1 & 7 & -5 & 4 \\ -1 & 8 & -6 & 5 \end{array}\right] \xrightarrow[\text{(2) } R_3 \leftrightarrow R_2^*]{\text{(1) } R_1 \leftrightarrow R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 7 & -5 & 4 \\ -1 & 8 & -6 & 5 \\ 0 & 4 & -3 & 3 \end{array}\right]$$

Lo que hicimos fue ordenar las filas del tal forma que evitemos el error de redondeo.

$$\xrightarrow[\text{(2) } R_2 \to R_2 + R_1]{\text{(1) } R_1 \to \frac{R_1}{-1}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -7 & 5 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & -3 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow[R_3 \to R_3 - 4R_2]{R_1 \to R_1 + 7R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2 \to R_2 + R_3}$$

$$\to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right] \xrightarrow{R_1 \to R_1 + 2R_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

Lo que nos indica

$$\boxed{\begin{array}{l} x_1 = 1 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = -1 \end{array}}$$

b) $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1$

$x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 0$

$x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 0$

$x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0$

• Haciendo lo mimo que en a): (Los pasos estilo $R_1 \to R_1 + R_2$ ya no se esribirán puesto que tendría que usar mucho espacio)

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & -1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right]$$

$$\to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$; Lo que implica

$$\boxed{\begin{array}{l} x_1 = 2 \\ x_2 = -1 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \end{array}}$$

Ejercicios: Resuelve por método de Cramer:

a) $x + y + z = 1$

$x - y + z = 1$

$-x + y + z = 1$

• Apliquemos $x_i = \dfrac{\det(B_i)}{\det(A)}$;

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 + 1 + 1 - (1 + 1 + 1) = -1 - 3 = -4$$

Ahora, para obtener $x_1 = x = \dfrac{\det(B_1)}{-4}$

donde $\det(B_1) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -1+1+1-(-1+1+1) = 0$

ahora $x_2 = y = \dfrac{\det(B_2)}{-4} = \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{-4}$ $= 1+1-1+1-1-1 = 0$

y $x_3 = z = \dfrac{\det(B_3)}{-4} = \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{-4} = \dfrac{-4}{-4} = 1$

por tanto $\boxed{\begin{matrix} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 1 \end{matrix}}$

b)

$2x - y + z - 2t = -5$

$2x + 2y - 3z + t = -1$

$-x + y - z = -1$

$4x - 3y + 2z - 3t = -8$

$\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -3 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ 4 & -3 & 2 & -3 \end{vmatrix} = -10$

$x_1 = x = \dfrac{\det(B_1)}{-10} = \dfrac{\begin{vmatrix} -5 & -1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & -3 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ -8 & -3 & 2 & -3 \end{vmatrix}}{10} = 0$

$y = \dfrac{\det(B_2)}{-10} = \dfrac{\begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & -3 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \\ 4 & -8 & 2 & -3 \end{vmatrix}}{-10} = \dfrac{-10}{-10} = 1$

$$z = \frac{\det(B_3)}{-10} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 & -5 & -2 \\ 2 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & \emptyset \\ 4 & -3 & -8 & -3 \end{vmatrix}}{10} = \frac{-20}{-10} = 2$$

$$t = \frac{\det(B_4)}{-10} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & -5 \\ 2 & 2 & -3 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ 4 & -3 & 23 & -8 \end{vmatrix}}{-10} = \frac{-30}{-20} = 3$$

Por tanto

$$\boxed{\begin{aligned} x &= \emptyset \\ y &= 1 \\ z &= 2 \\ t &= 3 \end{aligned}}$$