David Pedroza Segoviano. 09/01/2020

Ejercicios Matrices.
ALA

- Probar $(\mathbb{A}+\mathbb{B})^* = \mathbb{A}^* + \mathbb{B}^*$

Sea $\mathbb{A} \equiv a_{ij}$ y $\mathbb{B} \equiv b_{ij}$; Por tanto:

$$(\mathbb{A}+\mathbb{B})^* = \left(\overline{a_{ij}+b_{ij}}\right)^t = \overline{\left(a_{ji}+b_{ji}\right)} = \bar{a}_{ji} + \bar{b}_{ji} = \bar{a}_{ij}^{\,t} + \bar{b}_{ij}^{\,t} = \mathbb{A}^* + \mathbb{B}^*$$

Esto por la propiedad del complejo conjugado: $\boxed{\overline{a+b} = \bar{a} + \bar{b}}$

- Probar $(\alpha\mathbb{A})^T = \alpha\mathbb{A}^T$ and $(\alpha\mathbb{A})^* = \bar{\alpha}\mathbb{A}^*$

De igual manera:

- $(\alpha\mathbb{A})^T = (\alpha a_{ij})^T = \alpha a_{ji} = \alpha\mathbb{A}^T$
- $(\alpha\mathbb{A})^* = \left(\overline{\alpha a_{ij}}\right)^T = \overline{\alpha a_{ji}} = \bar{\alpha}\,\bar{a}_{ji} = \boxed{\bar{\alpha}\mathbb{A}^*}$

1: Determine el valor de las cantidades desconocidas de las siguientes expresiones:

a) $3X = \begin{pmatrix} \emptyset & 3 \\ 6 & 9 \end{pmatrix} \Rightarrow X = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} \emptyset & 3 \\ 6 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \emptyset & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

b) $2\begin{pmatrix} x+2 & y+3 \\ 3 & \emptyset \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ y & z \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 3 & y \\ 6 & z \end{pmatrix}$

De aquí podemos obtener las relaciones:

$2x+4=3, \quad 2y+6=y$

$\boxed{z=\emptyset} \Rightarrow \boxed{\begin{matrix} x=-\frac{1}{2} \\ y=-6 \end{matrix}}$

2: Identifique para cada caso la simetría que existe, en caso de estar presente,

a) $\begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ -3 & 4 & -3 \\ 3 & 3 & \emptyset \end{bmatrix}$; No tiene simetría
$a_{ij} \neq a_{ji}$
$a_{ij} \neq -a_{ji}$

b) $\begin{bmatrix} \emptyset & -3 & -3 \\ 3 & \emptyset & 1 \\ 3 & -1 & \emptyset \end{bmatrix}$, Esta es anti-simétrica
$a_{ij} = -a_{ji}$.

c) $\begin{bmatrix} \emptyset & -3 & -3 \\ -3 & \emptyset & 3 \\ -3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$; Esta es simétrica.
$a_{ij} = a_{ji}$

d) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & \emptyset \\ 2 & 1 & \emptyset \end{bmatrix}$; No es simétrica porque no es cuadrada.

3) Probar:

a) Si, $A=(a_{ij})$ es anti simétrica, entonces $a_{jj}=0$, para cada valor de j.

La anti-simetría se puede escribir como:

$$\boxed{A=-A^T} \Longrightarrow \quad A=a_{ij}, \quad A^T=(a_{ij})^T=a_{ji}$$

Note que para que se cumpla la antisimetría se debe cumplir $a_{ij}=-a_{ji}$ $\forall i,j$, cuando $i=j$ (La diagonal principal) entonces:

$a_{ii}=-a_{ii}$; pero eso sólo es posible si $\boxed{a_{ii}=0}$

b) Si, $A=(a_{ij})$ es anti-hermitiana, entonces cada a_{jj} es un imaginario puro, es decir, múltiplo de la unidad imaginaria i.

La "anti-hermitianeidad" se escribe como:

$$A=-A^* \quad \forall A \in M_{n\times n};$$

y para que se cumpla esto $A=a_{ij}=-\bar{a}_{ji}=-A^*$, tiene que cumplirse $a_{ij}=-\overline{a_{ji}}$ $\forall i,j$; cuando $i=j$ necesitamos $a_{ii}=-\overline{a_{ii}}$

si $a\in\mathbb{R}$, entonces $a_{ii}=0$ $\forall i$; pero en general, si $a_{ii}\in\mathbb{C}$ entonces, sea $a_{ii}=x+iy$, ~~x~~ si $a_{ii}=-\bar{a}_{ii}$ quiere decir:

$$a_{ii}=x+iy=-x+iy, \text{ por tanto } x=0$$

y tenemos $\boxed{a_{ii}=iy}$ lo cual es un imaginario puro.

c) Si, A es real y simétrica, entonces $B=iA$ es anti hermitiana:

$A=(a_{ij}) \Rightarrow B=b_{ij}=ia_{ij}=iA$; Si hacemos B^* entonces

$B^*=(iA)^*=\bar{i}A^*=\bar{i}(\bar{a}_{ji})$, Pero $\bar{a}_{ji}=a_{ij}$ porque es real simétrica:

$B^*=-ia_{ij}=-iA=-B$ ✓✓

4) Sea $A \in M_{n \times n}$ $\forall n \in \mathbb{N}$

a) Probar que $A + A^T$ es simétrica, y $A - A^T$ es antisimétrica

Sea $B = A + A^T$, then $B^T = (A + A^T)^T = A^T + (A^T)^T = A^T + A = B$

Now: $D = A - A^T \Rightarrow D^T = (A - A^T)^T = A^T - A = -(A - A^T) = -D$

b) Probar que existe una y solo una forma de escribir A como la suma de una matriz simétrica y una antisimétrica.

Let $A = B + D$, I want $B = B^T$ and $D = -D^T$

From a) we can say $2B = A + A^T$ and $2D = A - A^T$. Then if we sum $B + D$ we got:

$$B + D = \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}A^T + \frac{1}{2}A - \frac{1}{2}A^T = A$$

5) Si A y B son dos matrices de las mismas dimensiones, probar que:

a) $(A + B)^* = A^* + B^*$

I did it at the beginning.

b) $(\alpha A)^* = \bar{\alpha} A^*$

I already did it too.

Multiplicación de matrices:

1: Para $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1/2 & \alpha \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$, determine $\lim_{n \to \infty} \mathbb{A}^n$ $\alpha < 1$.

$$\mathbb{A}^2 = \begin{pmatrix} 1/2 & \alpha \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/2 & \alpha \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/4 & \alpha \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{A}^3 = \begin{pmatrix} 1/4 & \alpha \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/2 & \alpha \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/8 & \frac{3\alpha}{4} \\ 0 & 1/8 \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{A}^4 = \begin{pmatrix} 1/8 & \frac{3\alpha}{4} \\ 0 & 1/8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/2 & \alpha \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/16 & \frac{\alpha}{2} \\ 0 & 1/16 \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{A}^n = \begin{pmatrix} 2^{-n} & \frac{n\alpha}{2^{n-1}} \\ 0 & 2^{-n} \end{pmatrix} \Rightarrow \lim_{n \to \infty} \mathbb{A}^n = \emptyset_{2\times 2}$$

2: Si $\mathbb{A} = [a_{ij}(t)]$ es una matriz cuyos elementos son funciones de la variable t. La derivada de $\mathbb{A}$ con respecto al tiempo es definida como la derivada de la matriz, es decir

$$\frac{d\mathbb{A}}{dt} = \left[\frac{da_{ij}}{dt}\right]$$

obtenga la expresión para la regla del producto,

$$\frac{d(\mathbb{A}\mathbb{B})}{dt} = \frac{d\mathbb{A}}{dt}\mathbb{B} + \mathbb{A}\frac{d\mathbb{B}}{dt}$$

Since: $\mathbb{A}\mathbb{B} = \sum a_{ik}b_{kj} = a_{ik}b_{kj}$ by Einstein's convention.

$$\frac{d}{dt}(\mathbb{A}\mathbb{B}) = \frac{d}{dt}(a_{ik}b_{kj}) = \frac{d}{dt}(a_{ik})\,b_{kj} + a_{ik}\frac{d}{dt}(b_{kj}) = \frac{d}{dt}(\mathbb{A})\,\mathbb{B} + \mathbb{A}\frac{d\mathbb{B}}{dt}$$