David Pedroza Segoviano

09/03/2020

Ejercicios en clase:

1.- Calcule el producto $(\mathbb{A}+\mathbb{B})^2$ de dos matrices $n\times n$.

Using asociative properties we have:

$$(\mathbb{A}+\mathbb{B})^2 = (\mathbb{A}+\mathbb{B})(\mathbb{A}+\mathbb{B}) = \mathbb{A}(\mathbb{A}+\mathbb{B}) + \mathbb{B}(\mathbb{A}+\mathbb{B}) = \mathbb{A}^2 + \mathbb{A}\mathbb{B} + \mathbb{B}\mathbb{A} + \mathbb{B}$$

2.- Si $\mathbb{A}$ y $\mathbb{B}$ son matrices simétricas que conmutan. Pruebe que el producto $\mathbb{A}\mathbb{B}$ también es simétrico.

Let's do $(\mathbb{A}\mathbb{B})^T$:

$(\mathbb{A}\mathbb{B})^T = \mathbb{B}^T\mathbb{A}^T$; But $\mathbb{B}=\mathbb{B}^T$ and $\mathbb{A}=\mathbb{A}^T$, so

$(\mathbb{A}\mathbb{B})^T = \mathbb{B}\mathbb{A} = \mathbb{A}\mathbb{B}$ Because $\mathbb{A}$ and $\mathbb{B}$ comute.

3.- Para matriz $\mathbb{A}_{n\times n}$ demuestre por qué es imposible encontrar soluciones para $\mathbb{X}_{n\times n}$ en la ecuación matricial.

$$\mathbb{A}\mathbb{X} - \mathbb{X}\mathbb{A} = \mathbb{I}$$

$$tr(\mathbb{A}\mathbb{X} - \mathbb{X}\mathbb{A}) = tr(\mathbb{A}\mathbb{X}) - tr(\mathbb{X}\mathbb{A}) = tr(\mathbb{A}\mathbb{X}) - tr(\mathbb{A}\mathbb{X})$$

Because $tr(\mathbb{A}\mathbb{B}) = tr(\mathbb{B}\mathbb{A})$; now we have:

$tr(\mathbb{A}\mathbb{X} - \mathbb{X}\mathbb{A}) = \emptyset$

In the other hand: $tr(\mathbb{I}) = n$, the we would have

$$tr(\mathbb{A}\mathbb{X} - \mathbb{X}\mathbb{A}) = \emptyset = n = tr(\mathbb{I})$$

but this is not possible because $n \neq \emptyset$.

Inversas:

1: Cuando sea posible encuentre la inversa de cada una de los siguientes matrices: Applying Gauss-Jordan method:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; This is singular

c) $\begin{pmatrix} 4 & -8 & 5 \\ 4 & -7 & 4 \\ 3 & -4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{R_2-4R_1 \\ R_3-3R_1}]{\frac{R_1}{4}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5/4 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -7/4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -3/4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad -\frac{3}{4} + \frac{8}{4}$

$\xrightarrow[R_3-2R_2]{R_1+2R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3/4 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -7/4 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 5/4 & -2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_2+R_3]{4R_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -4 & 3 \\ 4 & -7 & 4 \\ 5 & -8 & 4 \end{pmatrix}$

2: Encuentre $\mathbb{X}$ tal que $\mathbb{X} = \mathbb{A}\mathbb{X} + \mathbb{B}$ donde

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } \mathbb{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$$

Applying some inverse matrix properties:

$$\mathbb{X} = \mathbb{A}\mathbb{X} + \mathbb{B} \Rightarrow \mathbb{X} - \mathbb{A}\mathbb{X} = \mathbb{B} \Rightarrow \mathbb{X}(\mathbb{I} - \mathbb{A})\mathbb{X} = \mathbb{B}$$

where $\mathbb{I} - \mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \mathbb{X} = (\mathbb{I} - \mathbb{A})^{-1}\mathbb{B}$ ∴ $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\therefore\ \mathbb{X} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$$

3: Diga qué enunciados son verdaderos:

a) Si $\mathbb{A}$ contiene una columna o fila con ceros, entonces $\mathbb{A}$ es singular. ¡Cierto!

b) Si $\mathbb{A}$ contiene dos filas o columnas iguales, entonces $\mathbb{A}$ es singular. ¡Cierto!

c) Si $\mathbb{A}$ contiene una columna o fila múltiplo de otra, entonces $\mathbb{A}$ es singular.
¡Cierto!

4: Si $\mathbb{A}$ es no singular y simétrica, probar que $\mathbb{A}^{-1}$ es simétrica.

• We know that $\mathbb{A}^T = \mathbb{A}$, and $\mathbb{A}\mathbb{A}^{-1} = \mathbb{I}$, then; if we apply transpose we have:

$$(\mathbb{A}\mathbb{A}^{-1})^T = \mathbb{I}^T \Rightarrow (\mathbb{A}^{-1})^T(\mathbb{A}^T) = \mathbb{I}^T \Rightarrow (\mathbb{A}^{-1})^T\mathbb{A} = \mathbb{I}$$

But, $\mathbb{A}^{-1}$ is unique, so $(\mathbb{A}^{-1})^T = \mathbb{A}^{-1}$, therefore, $\mathbb{A}^{-1}$ is symetric.

5: Si $\mathbb{A}$ es una matriz cuadrada tal que $\mathbb{I} - \mathbb{A}$ es no singular, prueba que $\mathbb{A}(\mathbb{I} - \mathbb{A})^{-1} = (\mathbb{I} - \mathbb{A})^{-1}\mathbb{A}$

If we multiply by $(\mathbb{I} - \mathbb{A})$ both sides in the equation

$$(\mathbb{I} - \mathbb{A})\mathbb{A}(\mathbb{I} - \mathbb{A})^{-1}(\mathbb{I} - \mathbb{A}) = (\mathbb{I} - \mathbb{A})(\mathbb{I} - \mathbb{A})^{-1}\mathbb{A}(\mathbb{I} - \mathbb{A})$$

$$(\mathbb{I} - \mathbb{A})\mathbb{A} = \mathbb{A}(\mathbb{I} - \mathbb{A})$$

$$\mathbb{A} - \mathbb{A}^2 = \mathbb{A} - \mathbb{A}^2$$

7.- Dado

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ and } A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Use la fórmula de Sherman-Morrinson para determinar la inversa de una matriz B, obtenido de cambiar el término a_{32} de 0 a 2.

$$\text{If } c = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ and } d = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow 1 + d^T A^{-1} c = 1 + (0 \; 1 \; 0)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$1 + d^T A^{-1} c = 1 + (0 \; 1 \; -1)\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 1 - 2 = \boxed{-1}$$

and $(A + cd^T)^{-1} = B^{-1}$, and for Sherman-Morris formula we have:

$$B^{-1} = A^{-1} - \frac{A^{-1} c d^T A^{-1}}{1 + d^T A^{-1} c} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} - \frac{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}(0 \; 1 \; 0)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}}{(-1)}$$

$$= A^{-1} + \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}(0 \; 1 \; 0)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = A^{-1} + \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 4 & -4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

8º Suponga que los elementos de las matrices A, X, B, son diferenciales y dependen del tiempo,

a) Asumiendo que $A(t)^{-1}$ existe, demuestre que:

$$\frac{dA(t)^{-1}}{dt} = -A(t)^{-1}A'(t)A(t)^{-1}$$

Este resultado. .

we start with $\mathbb{I} = AA^{-1}$ by definition let's derivate this respect time:

$$\frac{d}{dt}(AA^{-1}) = \frac{d}{dt}(\mathbb{I}) = \emptyset$$

By the product rule of the derivate we have:

$$\frac{d}{dt}(AA^{-1}) = \frac{d}{dt}(A)A^{-1} + A\frac{d}{dt}(A^{-1}) = A'A^{-1} + A\frac{dA^{-1}}{dt} = \emptyset$$

$$\Rightarrow A\frac{dA^{-1}}{dt} = -A'A^{-1} \Rightarrow \underline{\underline{\frac{dA^{-1}}{dt} = -A^{-1}A'A^{-1}}}, \text{ QED.}$$