

UNIVERSIDAD DE GUANAJUATO



Simulaciones Cosmológicas de N-Cuerpos

TESIS

PARA OBTENER EL TÍTULO DE

LICENCIADO EN FÍSICA

PRESENTA

ALEJANDRA GUTIERREZ AGUIRRE

ASESOR: DRA. ALMA XÓCHITL GONZÁLEZ MORALES

Co-ASESOR: DR. LUIS ARTURO UREÑA LÓPEZ

MÉXICO, GUANAJUATO, LEÓN.

FEBRERO 2018

Agradecimientos

Principalmente agradezco a mi padre, madre y hermana por su apoyo, motivación y sobretodo paciencia de inicio a fin, que sin ellos nada de esto hubiera sido igual. A los amigos de verdad que estuvieron para ayudar, exhortar e impulsar sin importar las circunstancias, entre ellos Elizabeth Moreno, Daniel Palafox y Úrsula Ruiz. También agradezco a mis asesores académicos por su paciencia y guía a cada paso de esto. Finalmente, a quien estuvo pero ya no está para ver cómo tiempo después su apoyo se ve reflejado.

Índice general

1. Introducción	1
2. Modelo Cosmológico	5
2.1. Geometría y Dinámica del Universo	5
2.2. Modelo Λ CDM	11
2.3. Observaciones fundamentales	12
2.3.1. Homogeneidad e Isotropía	12
2.3.2. Expansión del Universo	13
2.3.3. Radiación de Fondo Cósmico	15
2.3.4. Curvatura	15
2.4. Ajustes de Planck	16
3. Construcción de Simulaciones Cosmológicas	19
3.1. El problema de las perturbaciones	20
3.2. El problema de N-cuerpos	23
3.3. Cálculo de la fuerza entre los cuerpos	24
3.3.1. Partícula-Partícula (PP)	25
3.3.2. Partícula-Malla (PM)	26
3.3.3. Partícula-partícula/Partícula-malla (P3M)	27
3.3.4. Treecode (TC)	28
3.4. Integrador	30
3.4.1. Método de Euler	30
3.4.2. Método de Runge Kutta	32
3.4.3. Método de Leapfrog	33
3.5. Condiciones de frontera periódicas	36
3.6. Parámetro de amortiguamiento	38

3.7. Coordenadas comóviles y contenido de materia	39
3.8. Condiciones iniciales	42
4. Simulaciones	45
4.1. Esquema general de las simulaciones	46
4.2. Análisis de las simulaciones	49
4.2.1. Función de correlación y Espectro de Potencias . . .	49
4.2.2. Resultados	52
5. Conclusiones	63
A. Unidades de Medida en cosmología	65
B. Deducción de las Ecuaciones de Friedmann	67
Bibliografía	71

Capítulo 1

Introducción

De las múltiples áreas que la física estudia se encuentra la cosmología, que se dedica al estudio del Universo como un todo, en otras palabras; es la investigación de las características del Universo a escalas sumamente grandes, por grande o difícil que esto parezca. En la cosmología se intentará responder preguntas fundamentales que la humanidad ha tenido desde el inicio de los tiempos, preguntas como “¿De dónde venimos? ¿A dónde vamos? ¿De qué estamos hechos?” No es que se filosofe sobre estas preguntas, sino que se intenta responderlas por el método científico y entonces responder las preguntas “¿De qué está hecho el Universo? ¿Cómo y cuándo se originó? ¿Tendrá un final?” Responder estas preguntas es el reto de los cosmólogos hoy en día.

Los científicos han intentado describir el Universo a través de diversas teorías y modelos, que han cambiado a lo largo del tiempo para mejorar la descripción de lo que se conoce de él. Existen, entonces, diferentes modelos cosmológicos, ninguno de ellos exento de preguntas sin resolver o parámetros sin ajustar a detalle.

Actualmente el *Modelo Estándar de la Cosmología* (o modelo Λ CDM) es el que mejor describe nuestro Universo, sin embargo sigue teniendo preguntas sin resolver como “¿Por qué se expande aceleradamente el Universo? ¿Qué es la materia oscura?”. Resolver estas interrogantes no ha sido cosa sencilla por lo que diferentes grupos de cosmólogos han intentado encon-

trar la respuesta de diferentes manera, así que podemos encontrar muchos modelos que dan una respuesta. Estos modelos deben de ser probados y comparados con observaciones pero para resolver las ecuaciones que estos plantean para sistemas astrofísicos no siempre se puede utilizar un método analítico, así que se utilizan simulaciones de N-cuerpos que construyen una representación del universo planteado por estos nuevos modelos por medio del cómputo. Estas simulaciones al ser avanzadas en el tiempo se pueden comparar con los datos que se tienen de las observaciones.

Este tipo de simulaciones es una forma de atacar el problema de n-cuerpos en física, usando métodos numéricos para solucionar las ecuaciones de movimiento del sistema, que puede estar sometido a distintas condiciones, como que las partículas estén inmersas en un fluido, que solo interactúan entre ellas electromagnéticamente, gravitacionalmente, o las distintas condiciones en las que un sistema de n-partículas se puede encontrar.

El interés que tenemos aquí es mostrar todo el proceso (o gran parte de él) que requiere la construcción de un código de simulaciones y así, que este texto sea una pequeña guía sobre el fondo que existe en una simulación de n-cuerpos para que el uso de un código de este tipo sea más fácil de entender. Además de esto, tenemos mucho más interés en sacar el mayor provecho posible a los resultados arrojados por las simulaciones. En particular, nos interesa el tema de la formación de estructura y el cómo se involucra la materia oscura en ese proceso, por lo que aquí se mostrarán simulaciones realizadas con ella y su análisis enfocado en este tema. Queremos, además mostrar cómo es que las simulaciones cosmológicas nos ayudan entender qué pasa con esas fluctuaciones iniciales en la densidad y su relación con la estructura que se ha formado al paso del tiempo.

Dentro de este trabajo, primero platearemos los supuestos con los que la cosmología se rige para después hablar del modelo que se considera como el Modelo Estándar Cosmológico. Como parte de este mismo capítulo mencionamos y damos una breve explicación de las observables que afirman nuestros modelo, para terminar hablamos de ajuste que Planck hace a los parámetros del Modelo Λ CDM.

Como parte de este texto, también hablamos sobre la construcción de un código de simulaciones de N-cuerpos, pasando desde el planteamiento de las ecuaciones clásicas a las ecuaciones en coordenadas comóviles. Se tocan los temas más importantes del código, como el integrador, las condiciones de frontera, los parámetros a ajustar, el cálculo de la fuerza entre los cuerpos y el cómo ajustar las condiciones iniciales.

Para finalizar se encuentra una sección en la que están contenidos los análisis y desarrollo de algunas simulaciones que se hicieron con el código Gadget-2. En esta parte se da un esquema general de las simulaciones y posteriormente se muestran resultados arrojados al hacer algunos de los análisis más básicos que se realizan en las simulaciones de este tipo.

Capítulo 2

Modelo Cosmológico

Como ya mencionábamos, no existe un modelo seleccionado como el correcto, pero sí existe un modelo con el que se trabaja más activamente en la cosmología, éste es el modelo Λ CDM. Aquí describiremos este modelo, las condiciones y parámetros que se necesitan para trabajar en él.¹

La cosmología yace sobre un principio, que por ahora será un supuesto y después mencionaremos las pruebas que lo fundamentan, de nombre no muy difícil: El Principio Cosmológico. Este principio tiene una idea simple: no ocupamos un lugar privilegiado dentro del Universo. Se establece entonces que el Universo es homogéneo e isotrópico.

Alrededor del Principio Cosmológico se construirá un modelo que describa adecuadamente el Universo.

2.1. Geometría y Dinámica del Universo

Desde un punto de vista relativista, la cosmología es la tarea de encontrar soluciones a las ecuaciones de campo de Einstein que encajen con las características del Universo a gran escala. De la Relatividad General sa-

¹Cabe mencionar que los resultados que se obtendrán estarán normalizados de manera tal que $c = 1$.

bemos que la información sobre la geometría del sistema a analizar estará contenida en la métrica con la que trabajemos, o de manera equivalente en un elemento de línea, que será usada en las ecuaciones de campo de Einstein, así que, primero resolveremos la parte geométrica de estas ecuaciones.

La forma general del elemento de línea está dada por

$$ds^2 \equiv g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (2.1)$$

donde se usa la notación de Einstein para sumar índices.

El principio cosmológico establece que el Universo a grandes escalas es homogéneo e isotrópico, por tanto, necesitamos encontrar una métrica que refleje eso, ésta es la métrica de Robertson Walker. Parte de esta última incluye la curvatura del espacio. La forma pictórica de describir la curvatura de nuestro espacio tridimensional presenta dificultad para ser imaginada, es por eso que me gustaría comenzar planteando el problema con un espacio bidimensional y de ahí haremos extrapolación a un espacio tridimensional.

Imaginamos que existe un ser bidimensional y lo más que puede percibir entonces son dos dimensiones espaciales. Para nosotros será fácil ver si el espacio en el que este ser vive tiene curvatura y cuál es ella, puesto que nuestro espacio es de tres dimensiones. Entonces, para darnos cuenta de la curvatura de un espacio bidimensional será necesario verlo desde un espacio tridimensional, añadiendo entonces una dimensión más a las ecuaciones, para así describir la superficie y proyectarla en una métrica de dos dimensiones.

En principio, la superficie sobre la que vive el ser bidimensional podría tener cualquier forma y curvatura, sin embargo, si éste siguiera el principio cosmológico solo tendría tres posibilidades que cumplieran con la homogeneidad e isotropía: plana, esférica o hiperbólica, esto es, nosotros podríamos ver si vive en la superficie de un plano, de una esfera o de algo con forma de una silla de montar.

Imaginemos que entonces esta superficie puede ser un plano con coordenadas x y y y una tercera coordenada $z = 0$, pues esto cumple la ecuación

del plano xy , así tendremos un segmento de línea totalmente plano, como

$$dl^2 = dx^2 + dy^2. \quad (2.2)$$

Este caso es muy simple, pero ahora pensemos en el segundo caso donde la superficie en la que vive el ser bidimensional es la superficie de una esfera tridimensional, entonces cumplirá la ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, donde a^2 es un radio arbitrario positivo, con elemento de línea

$$dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2. \quad (2.3)$$

En el último de los casos nos encontramos en una superficie hiperbólica tridimensional que cumplirá con la ecuación $z^2 - x^2 - y^2 = a^2$, con a^2 como un número arbitrario positivo, lo que nos dejará con un elemento de línea como sigue:

$$dl^2 = dx^2 + dy^2 - dz^2. \quad (2.4)$$

Podemos re-escalar las coordenadas

$$x' \equiv ax, \quad y' \equiv ay, \quad z' \equiv az. \quad (2.5)$$

Haciendo a un lado las primas, reescribimos el elemento de línea

$$dl^2 = a^2 [dx^2 + dy^2 \pm dz^2], \quad z^2 \pm (x^2 + y^2) = 1. \quad (2.6)$$

La diferenciación de $z^2 \pm (x^2 + y^2) = 1$ nos da $zdz = \mp(xdx + ydy)$, así

$$dl^2 = a^2 \left[dx^2 + dy^2 \pm \frac{(xdx + ydy)^2}{1 \mp (x^2 + y^2)} \right]. \quad (2.7)$$

Podemos extender esto al caso de un espacio plano, escribiendo

$$dl^2 = a^2 \left[dx^2 + dy^2 + k \frac{(xdx + ydy)^2}{1 - k(x^2 + y^2)} \right], \quad (2.8)$$

donde

$$k = \begin{cases} +1 & \text{esférico} \\ -1 & \text{hiperbólico} \\ 0 & \text{plano} \end{cases} \quad (2.9)$$

Extrapolar los resultados anteriores es sencillo para un espacio tridimensional al seguir el mismo supuesto, es decir, ahora añadimos una superficie cuatridimensional y una coordenada nueva w , que ahora cumplirá con el siguiente elemento de línea:

$$dl^2 = a^2 [dx^2 + dy^2 + dz^2 \pm dw^2], \quad w^2 \pm (x^2 + y^2 + z^2) = 1, \quad (2.10)$$

que al seguir el mismo procedimiento nos llevará a

$$dl^2 = a^2 \left[dx^2 + dy^2 + dz^2 + k \frac{(xdx + ydy)^2}{1 - k(x^2 + y^2 + z^2)} \right], \quad (2.11)$$

cumpliendo las mismas opciones para k que en (2.9). Para añadir esto a la geometría del espacio-tiempo, solo añadimos (2.11) en el elemento de línea espacio-temporal, con a ahora como una función arbitraria dependiente únicamente del tiempo (conocido como el Factor de Escala de Robertson-Walker), debido a isotropía y homogeneidad no puede depender de las coordenadas espaciales:

$$\begin{aligned} ds^2 &\equiv g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \\ &= -dt^2 + a^2(t) \left[dx^2 + dy^2 + dz^2 + k \frac{(xdx + ydy)^2}{1 - k(x^2 + y^2 + z^2)} \right]. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Usar coordenadas esféricas para este caso parece una manera más sencilla de escribir el elemento de línea en (2.12), en donde

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = dr^2 + r^2 d\Omega, \quad d\Omega \equiv d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2,$$

entonces nos quedaremos con un elemento línea de la manera siguiente

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\Omega \right]. \quad (2.13)$$

en cuyo caso la métrica se vuelve diagonal, con

$$g_{tt} = -1, \quad g_{rr} = \frac{a^2(t)}{1 - kr^2}, \quad g_{\theta\theta} = a^2(t)r^2, \quad g_{\phi\phi} = a^2(t)r^2 \sin^2 \theta. \quad (2.14)$$

La métrica que ya hemos obtenido será puesta en las ecuaciones de campo de Einstein:

$$R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}R + \Lambda g_{\alpha\beta} = 8\pi GT_{\alpha\beta}. \quad (2.15)$$

donde $R_{\alpha\beta}$ es el tensor de Ricci y R el escalar de Ricci, ambos funciones de $g_{\alpha\beta}(x)$, donde x se refiere a todas las coordenadas tanto espaciales como temporal; $T_{\alpha\beta}$ es el tensor de energía-momento donde estará contenida la información sobre la materia del Universo.

La demostración detallada de los resultados que se mostrarán enseguida se encuentra en el Apéndice B.

Debido al mismo principio cosmológico el tensor de energía momento que describirá satisfactoriamente el contenido de materia en el Universo será el de un fluido ideal, que en las coordenadas que usamos es:

$$T_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{pa^2(t)}{1-kr^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & pa^2(t)r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & pa^2(t)r^2 \sin^2 \theta \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

Al sustituir toda la información de la métrica y el tensor de energía momento obtenemos dos ecuaciones que son llamadas las ecuaciones de Friedmann, que son:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G \rho}{3} - \frac{k}{a^2} + \frac{\Lambda}{3} \quad (2.17)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p) + \frac{\Lambda}{3} \quad (2.18)$$

Estas dos ecuaciones (2.17) y (2.18) nos darán las dinámica de nuestro Universo, en añadidura de una extra, que es la ecuación del fluido que relaciona a p y ρ , cuya ecuación cambiará en relación al tipo de materia contenido en el Universo.

El factor de escala $a(t)$, contiene la información sobre la expansión del Universo a través del tiempo. Es convención fijar $a(t_0) = 1$, donde t_0 es el tiempo actual, así que el factor de escala al día de hoy es igual a 1. La función $a(t)$ depende del tipo de materia que estará contenido en el Universo, o mejor dicho, el tipo de materia que domina en ese etapa, por ejemplo, cuando la materia bariónica gobierna, usando su ecuación de estado $p = 0$, al sustituir en las ecuaciones de Friedmann tendremos una relación entre ρ y $a(t)$ como $\rho \propto \frac{1}{a^3}$ y si resolvemos para encontrar la relación entre a y t tendremos que $a(t) \propto t^{2/3}$. Así como en la materia bariónica, esto se hace con el diferente contenido en el Universo y su relación con el factor de escala estará determinada por su ecuación de estado.

Quiero introducir una cantidad que será usada en el futuro de esta tesis, ésta es el parámetro de densidad, denotado por Ω definido como

$$\Omega(t) = \frac{\rho}{\rho_c} \quad (2.19)$$

donde ρ en la densidad de la materia de la que se esté hablando, y ρ_c es la densidad crítica definida del Universo si éste fuera plano, dada como

$$\rho_c = \frac{3H^2}{8\pi G}, \quad (2.20)$$

donde a su vez $H = \frac{\dot{a}}{a}$ es el parámetro de Hubble, no confundir con la constante de Hubble H_0 que más adelante veremos.

Existe un parámetro de densidad para cada diferente tipo de materia, y aún para la constante cosmológica Λ , haciendo un poco de álgebra con la ecuación de Friedmann (2.17) y la definición del parámetro de densidad (2.19), obtenemos la siguiente relación:

$$\Omega - 1 = \frac{k}{a^2 H^2} \quad (2.21)$$

si ahora definimos

$$\Omega_k \equiv -\frac{k}{a^2 H^2} \quad (2.22)$$

y sustituimos (2.22) en (2.21) tendremos una forma de escribir la información contenida en la ecuación de Friedmann (2.17):

$$\Omega + \Omega_k = 1. \quad (2.23)$$

Será claro que si la curvatura espacial del Universo es cero, es decir, tenemos un espacio plano, entonces $\Omega = 1$.

2.2. Modelo Λ CDM

En la sección anterior obtuvimos las ecuaciones que rigen la evolución del Universo, pero queda la tarea de resolverlas y es aquí donde se plantean diferentes modelos, uno de ellos, y el más utilizado por su simplicidad para describir con bastante precisión las observaciones que obtenemos del Universo, es el Modelo Λ CDM (Lambda Cold Dark Matter), Lambda-CDM o LCDM.

La preferencia de este modelo sobre otros es que encaja muy bien con las observables que encontramos con tan solo pocos componentes. Además de ser parte de los modelos del Big Bang (cuya existencia se basa en la observación de la radiación de fondo cósmico), los puntos importantes o pilares del modelo LCDM residen en los siguientes puntos:

- Materia oscura fría. Este modelo es el más simple que se puede tener para definir a esta poco conocida materia. Este tipo de materia es materia no-bariónica y se dice fría porque se mueve a velocidades mucho más bajas que la de la luz. La materia oscura no tiene presión, es estable y no interactiva [9].
- La constante cosmológica Λ asociada con la energía oscura, que es responsable de la expansión acelerada en el Universo.

El modelo Λ CDM está basado en la Teoría Relatividad General y en el principio cosmológico, por lo que las ecuaciones de Friedmann (2.17) y (2.18) siguen siendo las ecuaciones que gobiernan la dinámica del Universo. Este modelo se basa en un Universo espacialmente plano, en expansión y cuyos constituyentes hoy en día son dominados por la materia oscura fría

(CDM, por sus siglas en inglés) y una constante cosmológica (Λ). El responsable de la formación de estructura son fluctuaciones con un espectro casi invariante a escala. Este modelo se describe por sólo seis parámetros clave. A pesar de su simplicidad, la base del modelo Λ CDM ha demostrado tener éxito en la descripción de los datos cosmológicos, además del CMB, incluyendo la relación magnitud-distancia de las supernovas de Tipo Ia, la medición de BAO (oscilaciones acústicas de bariones, por sus siglas en inglés), la agrupación en gran escala de galaxias, etcétera.[9]

2.3. Observaciones fundamentales

Ya contamos con un modelo que describirá con cierta precisión nuestro Universo, pero es obvio que para saber que lo describe bien, necesitamos hacer observaciones puesto que el experimento no es una solución en la cosmología. En esta sección se enlistan ciertas observaciones que ayudan a fundamentar todo lo dicho anteriormente sobre nuestro modelo.

2.3.1. Homogeneidad e Isotropía

Será adecuado empezar describiendo las observaciones que fundamentan el principio cosmológico. Al decir que el Universo es isotrópico nos referimos a que no importa hacia qué dirección se observe será lo mismo, es decir que no hay una dirección preferente. Homogeneidad corresponde a que no importa en qué lugar del Universo nos situemos, éste será igual a cualquier otro. Es importante remarcar que el principio cosmológico, esta homogeneidad e isotropía, es a grandes escalas. Para todos es obvio que la homogeneidad no se cumple a escalas pequeñas, al menos en las escalas que estamos acostumbrados a convivir en la vida diaria, pues basta con situarnos en cualquier cuarto con personas, por ejemplo un salón de clases, y nos daremos cuenta que nada parece homogéneo, al contrario es demasiado diverso, ni aun en las escalas a las del sistema solar. Hablar de grandes escalas se refiere a escalas de aproximadamente 100 Mpc^2 o más.

²Para cualquier aclaración o duda acerca de las unidades de medida, se le recomienda al lector que revise el Apéndice A

Hablar de isotropía suele ser un poco más complicado de visualizar. Por ejemplo, si tomamos una esfera de a penas un par de unidades astronómicas, centrado en la Tierra, visto desde el centro la dirección preferente será hacia el Sol, suponiendo que solo están el Sol y la Tierra. Lo mismo pasará si ahora nuestro sistema mide un par de Mpc de diámetro centrado en nuestra Galaxia, es entonces la dirección preferente aquella hacia la galaxia más cercana. Es hasta que consideramos grandes escalas nuevamente donde podemos encontrar isotropía, en distancias aproximadas de 100 Mpc, que son las escalas en las que hablamos de cúmulos de galaxias. A estas grandes escalas la densidad promedio es del orden de $3 \times 10^{-27} \text{ kg m}^{-3}$, 28 ordenes de magnitud debajo que a escalas de un par de metros [29].

2.3.2. Expansión del Universo

La evidencia más notable de que el Universo se expande es que vemos que todo se aleja de nosotros. Quizás parezca difícil pensar que podemos ver que algo muy lejano de nosotros se aleja o se acerca, pues al estar apartado de nosotros algo, no logramos distinguir en qué dirección se dirige el objeto hasta que ya recorrió una distancia grande. La manera de observar si un objeto se aleja de nosotros, generalmente galaxias, es mediante el redshift, o corrimiento al rojo en su traducción del inglés, denotado como z . Esta magnitud es el mismo efecto Doppler aplicado a las ondas de luz. Las galaxias emiten y absorben luz, que se caracteriza en líneas de absorción y emisión en sus espectros, generalmente bien caracterizadas y conocidas. Debido a que las frecuencias altas se encuentran hacia el azul, si el objeto se acerca, entonces las líneas en el espectro estarán recorridas hacia el azul, de lo contrario, al alejarse una galaxia entonces su espectro presentará un desplazamiento hacia el rojo donde las frecuencias son menores. El corrimiento al rojo o redshift está definido de la siguiente manera:

$$z = \frac{\lambda_{obs} - \lambda_{emt}}{\lambda_{obs}}, \quad (2.24)$$

donde λ_{obs} es la longitud de onda que tiene la luz una vez que llegó a nosotros y λ_{emt} es la longitud a la que el objeto ha emitido su luz.

La ley de Hubble nace de las observaciones realizadas por el mismo Hubble en las que se da cuenta que la velocidad con la que se mueve el objeto es proporcional a la distancia de éste:

$$\vec{v} = H_0 \vec{r}, \quad (2.25)$$

donde H_0 es llamada la constante de Hubble.

Además, el corrimiento al rojo tiene una relación con el factor de escala dado como:

$$z + 1 = \frac{1}{a(t)}. \quad (2.26)$$

Podemos pensar que al alejarse todo de nosotros entonces nos encontramos en un punto privilegiado y el principio cosmológico deja de funcionar, pero si pudiéramos ir hacia cualquier otro lugar en el Universo veríamos exactamente lo mismo: todo se alejaría también de nosotros desde ese lugar, por lo que el principio cosmológico se cumple. Es aquí donde podemos pensar que si los objetos en el Universo se alejan de nosotros, entonces en el pasado han estado más cercanos a nosotros y así, podemos pensar que irremediablemente hubo un momento en el que todo estaba junto y después ya no, este momento es llamado el Big Bang, o la gran explosión al pasar al español, que como ya dijimos, el modelo Λ CDM concuerda con esto.

Aclaremos que al hablar de una Gran Explosión no nos referimos a una explosión como tal, sino que se usa esta palabra por ser en cierta manera similar. Hablando de una Gran Explosión no nos referimos a que el Universo estuviera guardado en algo, después explotara y saliera la materia, ¡no, ese no es el concepto!, pues el Universo era todo lo que había y no tenía a donde explotar, entonces el Big Bang se refiere a que todo el Universo estaba concentrado en algo muy pequeño, era muy denso, acto seguido; éste se expandió. Esto es la Gran Explosión. Tampoco sería correcto pensar que existe un punto en el que todo sucedió, pues como ya lo mencioné, este momento pasó en lo que era todo el Universo, así que el Big Bang sucedió aquí y allá también.

2.3.3. Radiación de Fondo Cósmico

Una observación más que concuerda con un modelo del Big Bang es la hecha de la Radiación de Fondo Cósmico o Radiación de fondo de microondas (CMB por sus siglas en inglés). Ésta fue descubierta en el año 1965 por Arno Penzias y Robert Wilson que, usando una antena de microondas en Bell Labs, encontraron un fondo isotrópico de radiación en microondas. La radiación era la de un cuerpo negro (el más perfecto que se ha encontrado en la naturaleza) que es bien descrito con una función de Planck, misma cuyo único parámetro a ajustar es la temperatura, así, la temperatura encontrada fue de:

$$T_0 = 2.725 \pm 0.001\text{K} \quad (2.27)$$

Posteriormente se estudiaron las pequeñas variaciones en esta temperatura, por lo que se realizaron otros experimentos para medir con mayor precisión como COBE, WMAP y finalmente Planck.

Pero, ¿cómo es que surge este fondo cósmico?

En un principio, después del Big Bang, el Universo era denso y caliente, la energía de todas las partículas dentro de esta sopa que era el Universo se movían a velocidades muy altas, lo que daba lugar a colisiones múltiples, y así era difícil, mejor dicho, imposible que se formaran estructuras, por más pequeñas que éstas fueran. El Universo continuó expandiéndose y enfriándose a la vez, entonces las colisiones eran menos y comenzaron a haber interacciones entre los protones y electrones, a formar pequeñas estructuras, por lo que los fotones dejaron de chocar con todo lo demás que estaba ahí y fueron libres de viajar. A este momento se le llama el desacoplamiento que es lo que vemos en el CMB.

2.3.4. Curvatura

Al crear nuestro modelo y nuestra métrica existían tres posibilidades para la curvatura espacial en el Universo, podía ser de curvatura esférica, hiperbólica o plana.

La manera de medir la curvatura del Universo es determinar el parámetro Ω . Para encontrar el valor de este parámetro y así poder usar la ecuación (2.23), se determinan los parámetros: Ω_Λ asociada con la curvatura, Ω_{bar} de la materia bariónica, Ω_{DM} densidad de energía de la materia oscura y Ω_{rel} de la materia relativista (fotones y neutrinos). Así, podemos determinar el valor total de Ω .

Otra manera de medir la curvatura del Universo es trazando triángulos en el Universo, esto es, conociendo dos puntos del fondo de radiación cósmica y nuestro lugar, entonces tenemos un triángulo. Sabemos que solo en una geometría plana la suma de los ángulos del triángulo serán de 180 grados, mientras que si es esférica sumarán más de 180 grados, por último si el espacio es hiperbólico entonces la suma de sus ángulos serán menor a 180 grados.

Los resultados arrojados por Planck y previo a él; COBE, muestran que el valor del parámetro de densidad asociado con la curvatura es

$$\Omega_k = 0.000 \pm 0.005, \quad (2.28)$$

lo cual nos dice que el Universo es bastante plano.

2.4. Ajustes de Planck

Los primeros resultados obtenidos por el experimento de Planck en el 2013 fueron publicados en el 2014[9]. Esta publicación tiene los primeros resultados basados en las mediciones de Planck del espectro de potencias de temperatura del CMB.

Los resultados obtenidos para el espectro de Planck están extremadamente bien descritos por Λ CDM de seis parámetros de espacio plano con un espectro de potencias de perturbaciones escalares adiabáticas. Como los resultados obtenidos encajan bien con este modelo, los análisis se hacen a partir de ahí y se ajustan estos seis parámetros fundamentales que ajustan los demás parámetros del modelo.

El ajuste de Planck del modelo de Λ CDM es el siguiente:

- El tamaño angular característico de las fluctuaciones en el CMB se denomina escala acústica. Está determinado por el tamaño comóvil del horizonte de sonido en el momento de la última dispersión y la distancia de diámetro angular a la que estamos observando las fluctuaciones. El valor obtenido para este parámetro fue:

$$\theta_* = (1.04148 \pm 0.00066) \times 10^{-2} = 0.596724^\circ \pm 0.00038^\circ \quad (2.29)$$

- La densidad física de bariones

$$\Omega_b h^2 = 0.02205 \pm 0.00028 \quad (2.30)$$

- La densidad física de materia oscura

$$\Omega_c h^2 = 0.1199 \pm 0.0027 \quad (2.31)$$

- En nuestro modelo base suponemos perturbaciones escalares adiabáticas en tiempos muy tempranos, con un espectro de potencia de curvatura (adimensional) parametrizado por

$$\mathcal{P}_R(k) = A_s \left(\frac{k}{k_0} \right)^{n_s - 1 + (1/2)(dn_s/d\ln k) \ln(k/k_0)}$$

donde n_s es el índice espectral escalar que se mide con los datos de Planck con una precisión del 1 %:

$$n_s = 0.9616 \pm 0.0094 \quad (2.32)$$

- Restricción de 2 % en la Constante de Hubble:

$$H_0 = (67.4 \pm 1.4) \text{km s}^{-1} \text{Mpc}^{-1} \quad (2.33)$$

- La restricción correspondiente en el parámetro de densidad de energía oscura es

$$\Omega_\Lambda = 0.686 \pm 0.020 \quad (2.34)$$

y para la densidad de materia que encontramos

$$\Omega_m h^2 = 0.1423 \pm 0.0029 \quad (2.35)$$

Como ya mencioné, estos no son todos los parámetros que el modelo Λ CDM necesita, sino que existen más, que en la siguiente tabla aparecerán.

Parameter	Planck		Planck+lensing		Planck+WP	
	Best fit	68 % limits	Best fit	68 % limits	Best fit	68 % limits
Ω_bh^2	0.022068	0.02207 ± 0.00033	0.022242	0.02217 ± 0.00033	0.022032	0.02205 ± 0.00028
Ω_ch^2	0.12029	0.1196 ± 0.0031	0.11805	0.1186 ± 0.0031	0.12038	0.1199 ± 0.0027
$100\theta_{MC}$	1.04122	1.04132 ± 0.00068	1.04150	1.04141 ± 0.00067	1.04119	1.04131 ± 0.00063
τ	0.0925	0.097 ± 0.038	0.0949	0.089 ± 0.032	0.0925	$0.089^{+0.012}_{-0.014}$
n_s	0.9624	0.9616 ± 0.0094	0.9675	0.9635 ± 0.0094	0.9619	0.9603 ± 0.0073
$\ln(10^{10} A_s)$	3.098	3.103 ± 0.072	3.098	3.085 ± 0.057	3.0980	$3.089^{+0.024}_{-0.027}$
Ω_Λ	0.6825	0.686 ± 0.020	0.6964	0.693 ± 0.019	0.6817	$0.685^{+0.018}_{-0.016}$
Ω_m	0.3175	0.314 ± 0.020	0.3036	0.307 ± 0.019	0.3183	$0.315^{+0.016}_{-0.018}$
σ_8	0.8344	0.834 ± 0.027	0.8285	0.823 ± 0.018	0.8347	0.829 ± 0.012
z_{re}	11.35	$11.4^{+4.0}_{-2.8}$	11.45	$10.8^{+3.1}_{-2.5}$	11.37	11.1 ± 1.1
H_0	67.11	67.4 ± 1.4	68.14	67.9 ± 1.5	67.04	67.3 ± 1.2
$10^9 A_s$	2.215	2.23 ± 0.16	2.215	$2.19^{+0.12}_{-0.14}$	2.215	$2.196^{+0.051}_{-0.060}$
$\Omega_m h^2$	0.14300	0.1423 ± 0.0029	0.14094	0.1414 ± 0.0029	0.14305	0.1426 ± 0.0025
$\Omega_m h^3$	0.09597	0.09590 ± 0.00059	0.09603	0.09593 ± 0.00058	0.09591	0.09589 ± 0.00057
Y_P	0.247710	0.24771 ± 0.00014	0.247785	0.24775 ± 0.00014	0.247695	0.24770 ± 0.00012
Age/Gyr	13.819	13.813 ± 0.058	13.784	13.796 ± 0.058	13.8242	13.817 ± 0.048
z_*	1090.43	1090.37 ± 0.65	1090.01	1090.16 ± 0.65	1090.48	1090.43 ± 0.54
r_*	144.58	144.75 ± 0.66	145.02	144.96 ± 0.66	144.58	144.71 ± 0.60
$100\theta_*$	1.04139	1.04148 ± 0.00066	1.04164	1.04156 ± 0.00066	1.04136	1.04147 ± 0.00062
z_{drag}	1059.32	1059.29 ± 0.65	1059.59	1059.43 ± 0.64	1059.25	1059.25 ± 0.58
r_{drag}	147.34	147.53 ± 0.64	147.74	147.70 ± 0.63	144.58	147.49 ± 0.59
k_D	0.14026	0.14007 ± 0.00064	0.13998	0.13996 ± 0.00062	0.14022	0.14009 ± 0.00063
$100\theta_D$	0.161332	0.16137 ± 0.00037	0.161196	0.16129 ± 0.00036	0.161375	0.16140 ± 0.00034
z_{eq}	3402	3386 ± 69	3352	3362 ± 69	3403	3391 ± 60
$100\theta_{eq}$	0.8128	0.816 ± 0.013	0.8224	0.821 ± 0.013	0.8125	0.815 ± 0.011
$r_{drag}/D_V(0.57)$	0.07130	0.0716 ± 0.0011	0.07207	0.0719 ± 0.0011	0.07126	0.07147 ± 0.00091

Tabla 2.1: Ajustes de Planck. Tabla extraída de la publicación de Planck de 2013. Valores de parámetros cosmológicos para el modelo base de Λ CDM de seis parámetros. Las columnas 2 y 3 dan resultados solo para los datos del espectro de potencia de temperatura de Planck. Las columnas 4 y 5 combinan los datos de temperatura de Planck con el lente de Planck, y las columnas 6 y 7 incluyen la polarización de WMAP en multipolos bajos.

Capítulo 3

Construcción de Simulaciones Cosmológicas

En el capítulo anterior ya se formularon los principios de lo que ahora se llama el Modelo Estándar de la cosmología, y aunque encaja adecuadamente con las observaciones, mejor que muchos otros modelos, y es escogido entre los demás por la pocas componentes que el modelo necesita para explicar el Universo a grande escala, no significa que el modelo ya no contenga interrogantes, además de este modelo, existen otros que aun se siguen probando.

Las simulaciones cosmológicas nos interesan porque suplen esa falta de experimentos que tiene la cosmología y juegan un papel cada vez más importante en los estudios teóricos del proceso de formación de estructura en el Universo. Esto se debe a que la simulación a menudo es la única herramienta disponible para calcular predicciones teóricas precisas en el régimen altamente no lineal de la dinámica gravitacional y la hidrodinámica. [32]

La construcción de una simulación numérica de cualquier tipo requiere de varios puntos importantes que nos aseguren que los resultados que obtenemos es lo más cercano posible a la realidad, es decir, minimizar los efectos del cálculo numérico.

Como parte de mi trabajo, me di a la tarea de construir un código

propio de simulaciones cosmológicas que en general comprende todo lo que se hablará en este capítulo, exceptuando la sección 3.3. En las secciones siguientes se mostrarán algunos resultados de la implementación de esos puntos dentro del código que he construido.

3.1. El problema de las perturbaciones

En el capítulo anterior ya hablamos de la casi homogeneidad del Universo; sin embargo, las observaciones revelan una gran cantidad de detalles en la estructura que varían a escalas de casi 100 Mpc[25]. Esta formación de estructura nos habla de las condiciones iniciales del Big Bang y sobre el proceso que ha estado ocurriendo desde entonces.

Estudiar las inhomogeneidades del Universo nos dará información importante a cerca de cómo es que la estructura que vemos fue formada. No nos interesa por ahora averiguar cómo es que estas fluctuaciones o perturbaciones a la homogeneidad fueron hechas, aunque existen varias propuestas, ninguna de ellas puede ser establecida aun, sin embargo, hoy en día podemos ver el efecto de estos procesos.

Al estudiar cómo la materia en el universo en expansión responde a su propia gravedad, se puede encontrar una solución lineal de cómo se comporta la materia al expandir las ecuaciones del movimiento en términos de una perturbación de densidad adimensional δ .

$$1 + \delta(\mathbf{x}, t) \equiv \rho(\mathbf{x}, t) / \langle \rho \rangle \quad (3.1)$$

donde $\langle \rho \rangle$ es la densidad promedio del Universo que es $\rho \sim 3 \times 10^{-27} \text{ kg/m}^3$ y $\rho(\mathbf{x})$ es la densidad en el punto \mathbf{x} . Esta perturbación δ se divide en diferentes perturbaciones dependiendo del tipo de materia que se esté modelando. Lamentablemente modelar estas perturbaciones como un proceso lineal, aunque sencillo y acertado en etapas tempranas del Universo, no encajan con las observaciones esperadas como resultado de una evolución lineal; la estructura que conforma el Universo como las galaxias y cúmulos de galaxias, son miles o millones de veces más densos que el promedio.

Modelar las perturbaciones como en la ecuación (3.1) consiste en tratar con un campo de densidad continuo de ecuación lineal, pero al dejar éstas de comportarse de manera lineal, nuestras ecuaciones de movimiento entonces son no-lineales. La evolución exacta de este campo de densidad entonces se realiza por lo habitual, por medio de una simulación de N-cuerpos, donde el campo de densidad continuo que estaba definido en todo el espacio, ahora es representado por la suma de un conjunto de partículas discretas ficticias. Estas partículas no representan precisamente una partícula en el sentido de que las dimensiones no son comparables con las de las partículas elementales de la física, sino que hablamos de partículas como un cúmulo muy grande lo que podrían ser partículas elementales, entonces las dimensiones de estas son de unidades cosmológicas, de manera que cada una puede bien representar un halo de materia oscura que acompaña a una galaxia (si la simulación es solo de materia oscura). De esta manera, las ecuaciones de movimiento para cada partícula las obtendremos de resolver el campo gravitacional de cada una debido a todas las demás; así encontramos las nuevas posiciones y velocidades para un pequeño paso de tiempo, y comenzamos una nueva iteración.

Siguiendo con esta parte de las perturbaciones, nos encontramos con que la ecuación (3.1) nos da la sobredensidad en un punto del espacio a un tiempo dado, pero esta relación no nos dice cómo se comporta o cambia con el tiempo, para llegar a esto, y poder pasar de nuestro campo de densidades a las partículas puntuales es necesario que hagamos algo más. Este algo más puede ser de dos maneras; podemos empezar desde el régimen Newtoniano y ahí introducir las perturbaciones a nuestras ecuaciones que gobiernan el movimiento de un fluido, o podemos hacer el proceso más riguroso y tomar una métrica perturbada, resolver las ecuaciones de campo de Einstein y posteriormente encontrar las ecuaciones de movimiento, entonces llevarlas al régimen Newtoniano. Ambas son equivalentes pues trabajamos en el régimen Newtoniano debido a que los campos gravitatorios son débiles. Así que, por facilidad en seguida haremos un pequeño bosquejo de cómo es que se llega a estas ecuaciones.

Empezaremos escribiendo las ecuaciones que gobiernan el movimiento

de un fluido:

$$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\frac{\nabla p}{\rho} - \nabla\Phi \quad (3.2)$$

$$\frac{D\rho}{Dt} = -\rho\nabla \cdot \mathbf{v} \quad (3.3)$$

$$\nabla^2\Phi = 4\pi G\rho \quad (3.4)$$

donde $D/Dt = \partial/\partial t + \mathbf{v} \cdot \nabla$. La ecuación (3.2) es la ecuación de Euler, la ecuación (3.3) es la ecuación de la energía y la ecuación (3.4) es la ecuación de Poisson. Ahora hacemos la linealización de las ecuaciones de movimiento añadiendo en primer orden las perturbaciones, es decir añadimos $\rho = \rho_0 + \delta\rho$ (lo mismo con \mathbf{v} y p , en cada una de las ecuaciones, como ejemplo en la ecuación de la energía (3.3)):

$$[\partial/\partial t + (\mathbf{v}_0 + \delta\mathbf{v}) \cdot \nabla](\rho_0 + \delta\rho) = -(\rho_0 + \delta\rho)\nabla \cdot (\mathbf{v}_0 + \delta\mathbf{v}). \quad (3.5)$$

Posteriormente eliminamos los términos demasiado pequeños, es decir, las multiplicaciones de variaciones, como $\delta\rho\delta\mathbf{v}$; definimos la fracción de perturbación de densidad:

$$\delta \equiv \frac{\delta\rho}{\rho_0}. \quad (3.6)$$

Como paso siguiente, cambiamos a coordenadas comóviles usando el siguiente cambio de variables:

$$\mathbf{x}(t) = a(t)\mathbf{r}(t) \quad (3.7)$$

$$\delta\mathbf{v}(t) = a(t)\mathbf{u}(t) \quad (3.8)$$

Después de desarrollar las ecuaciones, obtendremos:

$$\dot{\mathbf{u}} + 2\frac{\dot{a}}{a}\mathbf{u} = \frac{\nabla\delta\Phi}{a^2} - \frac{\nabla\delta p}{\rho_0} \quad (3.9)$$

$$\dot{\delta} = -\nabla \cdot \mathbf{u}, \quad (3.10)$$

Las ecuaciones (3.9) y (3.10) nos hablarán sobre el comportamiento de estas perturbaciones, donde habrá que sustituir la relación de ρ con el factor de escala dependiendo del tipo de materia (véase la sección 2.1). De esta manera podremos pasar de tener un campo de densidad a resolver esto con las partículas discretas y resolver en un código de N-cuerpos.

3.2. El problema de N-cuerpos

El problema de N-cuerpos es la técnica más usada, y natural hasta cierto punto, de calcular el campo gravitatorio, y en general de resolver muchos problemas. Las simulaciones de n-cuerpos es una forma de atacar el problema de n-cuerpos en física, usando métodos numéricos para resolver las ecuaciones de movimiento del sistema, que puede estar sometido a distintas condiciones. Comencemos mencionando el problema original en gravitación de N-cuerpos: La Ley de Gravitación Universal de Newton ($F = \frac{GMm}{r^2}$), por lo que el problema a resolver es, la interacción gravitatoria de cada cuerpo con todos los demás dado como:

$$\ddot{\mathbf{r}}_i = -G \sum_{j \neq i}^N \frac{m_j (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|^3}, \quad i = 1, 2, 3 \dots N, \quad (3.11)$$

Estas son $3N$ ecuaciones diferenciales de segundo orden en \mathbf{r} para cada partícula, y lo que se desea encontrar es, posiciones y velocidades a un tiempo dado, para ello será más sencillo separar nuestra ecuación de segundo orden en dos de primer orden,

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} \quad \Rightarrow \quad \dot{\mathbf{v}}_i = -G \sum_{j \neq i}^N \frac{m_j (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|^3} \quad (3.12)$$

ahora tenemos $6N$ ecuaciones de primer orden, $3N$ para \mathbf{r} y $3N$ para \mathbf{v} . Es evidente que resolver estas ecuaciones analíticamente, no solo podría ser un problema grande sino que podría llegar a ser imposible para un valor de N grande, pues el número de operaciones se encuentran en el orden de N^2 . Es en ese momento donde el poder de cómputo nos ayuda.

Hasta aquí sabemos cuál es el problema que se habrá de resolver, escrito en el lenguaje de las matemáticas, pero es obvio que este no es el problema más grande, si bien ya tenemos el *qué*, necesitamos el *cómo* de la solución de nuestro problema.

El primer punto evidente es el cómo resolver las ecuaciones para todas las partículas. Como ya había mencionado, el número de operaciones a realizar es del orden de N^2 , eso por cada iteración; es fácil adivinar que no nos interesa hacer una sola iteración pues evolucionamos nuestro sistema a escalas cosmológicas, en giga-años aproximadamente, entonces el número total de iteraciones, y por tanto de operaciones a realizar, es extremadamente grande. En este punto es donde usamos diferentes métodos para resolver estas ecuaciones, ya sea Partícula-Partícula (a fuerza bruta, dicho de manera coloquial), Partícula-Malla, Código Árbol u otros que en secciones delante describiremos brevemente. El segundo problema al que nos enfrentamos es que necesitamos evolucionar en el tiempo las ecuaciones de movimiento, este punto lo cubre nuestro integrador.

Estos dos puntos anteriores no son los únicos a considerar en la construcción de la simulación, tenemos más problemas y consideraciones a tomar que también discutiremos en secciones siguientes.

3.3. Cálculo de la fuerza entre los cuerpos

Anteriormente ya mencionaba dos de los problemas más grande y evidentes que enfrentamos al construir una simulación, empecemos en cómo vamos a resolver la interacción entre las partículas o cuerpos. Algunos de esos métodos más usados son los siguientes[28]:

1. Partícula-Partícula (PP).
2. Partícula-malla (PM).
3. Partícula-partícula/Partícula-malla (P3M).
4. Partícula-malla anidada (NGPM).

5. Treecode (TC).
6. El método rápido multipolar (FMM).
7. Treecode/partícula-malla (TreePM).
8. Método de campo auto-consistente (SCF).

A continuación describiré brevemente algunos de los métodos anteriores que son los más comunes.

3.3.1. Partícula-Partícula (PP)

Este método es el más simple de todos y consiste en la interacción de todos los cuerpos con todos los demás. Es decir qué la fuerza total que la partícula i siente es la suma de fuerza que siente debido a todas las demás, esto es $\mathbf{F}_i = \sum_j \mathbf{F}_{ij}$. Una vez que ya hemos encontrado \mathbf{F}_i sabemos por la segunda ley de Newton que $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$, por lo que podemos encontrar la aceleración que necesitamos para resolver las ecuaciones (3.36) y (3.37).

Para cada partícula habrá que resolver $N - 1$ veces la ecuación (3.11), esto por N cuerpos, por lo que, como ya había mencionado, el orden de número de ecuaciones a resolver por iteración es de N^2 . En resumidas cuentas el método consiste en tres pasos principales:

1. Encontrar la fuerza total para cada partícula.
2. Integrar las ecuaciones de movimiento.
3. Actualizar en el tiempo.

Repetimos estos tres pasos hasta que el sistema se haya evolucionado al tiempo deseado.

3.3.2. Partícula-Malla (PM)

El método de Partícula-Malla se basa en representar el potencial gravitatorio en una cuadrícula, utilizada para resolver la ecuación de Poisson en esta cuadrícula [14]. Los pasos principales del procedimiento son los siguientes

1. Construcción de un campo de densidad ρ en una malla adecuada.
2. Cálculo del potencial con la ecuación de Poisson.
3. Cálculo del campo de fuerza del potencial.
4. Cálculo de las fuerzas en las posiciones originales de las partículas.
5. Integrar las ecuaciones de movimiento.
6. Actualizar en el tiempo.

El primer paso es llamado asignación de masa (claro que si nuestra simulación tuviera propiedades como una carga eléctrica, entonces llamaríamos a este paso la “asignación de carga”, pero en este caso nos limitaremos a llamarlo de esta manera como se usa en la literatura), asigna $\rho(\mathbf{x})$ a la malla de las posiciones y masas de las partículas discretas. Existen diferentes métodos para llevar esto a cabo.

Una vez que ya hemos obtenido la densidad del campo, resolvemos la ecuación de Poisson,

$$\nabla^2 \Phi = 4\pi G \rho, \quad (3.13)$$

para el potencial gravitacional Φ . Podemos ahora resolver esta ecuación de dos maneras. La primera de ellas es pasando al espacio de Fourier al hacer una transformada de Fourier al multiplicar con una función de Green adecuada de la ecuación de Poisson [28]. Movernos al espacio de Fourier nos da herramientas que transforman nuestro problema de solucionar la ecuación de Poisson en multiplicaciones algebraicas de bajo costo computacional. La segunda manera de resolver la ecuación de Poisson es hacerlo en el espacio real pero como mencioné, la solución en el espacio real conlleva un costo

más alto de cómputo.

El siguiente paso es obtener el potencial Φ , ya sea al resolver en el espacio de Fourier o en el espacio real, y recordar que

$$\mathbf{a} = -\nabla\Phi, \quad (3.14)$$

entonces podemos resolver esta ecuación para así resolver la fuerza en la malla, pero esto no es lo que nos interesa aun, lo que es de nuestro interés es conocer las posiciones de los cuerpos.

El siguiente paso es pasar de tener la fuerza en la malla a la fuerza que cada partícula sentirá. No describiré aquí cómo calcular esto último pues es un proceso largo y nos interesa demasiado, pero se pueden revisar las referencia [31] para ver el desarrollo. Para finalizar, integramos las ecuaciones de movimiento de cada partícula y evolucionamos en el tiempo.

El método de PM tiene la ventaja de la velocidad, requiriendo es de $O(N) + O(N_g \log N_g)$ ¹ operaciones para evaluar las fuerzas en todas las partículas. Pero debido a que sólo un número limitado de funciones base puede ser usado, la resolución espacial es restringida normalmente[28]. Este método entonces es usado cuando no es fundamental una precisión espacial grande.

3.3.3. Partícula-partícula/Partícula-malla (P3M)

Ya se comentaba justo arriba que el problema del método de PM era la baja resolución espacial en cuerpos cercanos. Esta limitación puede eliminarse complementando las fuerzas con una suma directa sobre pares separados por menos de dos o tres espaciamientos de la malla δl , lo que da como resultado el algoritmo P3M [14]. Como el nombre lo dice, este método hace uso de los métodos de PP y PM, el primero es usado para calcular las fuerzas de corto alcance y el segundo para hacer el cálculo con las fuerzas de largo alcance. Los paso fundamentales son los siguientes [28]:

¹Al usar la notación $O(x)$, para fines prácticos nos estamos refiriendo a que “algo” es del orden de x , donde N son el número de cuerpos y N_g son los puntos de malla en este caso quiere decir que el número de operaciones es del orden de $(N \log N)$

1. Comenzar con la posición y la velocidad de las partículas.
2. Actualizar el paso de tiempo.
3. Calcular las fuerzas PM.
4. Calcular las fuerzas PP.
5. Crear ecuaciones de movimiento.
6. Integrar para obtener posiciones y velocidades.

Las operaciones a resolver son del orden de $O(N + N_g)$.

Uno de los problemas que tiene este método es que al tener regiones muy pobladas, casi todo el trabajo se hace por el método de PP, lo que hace lento nuestro programa, claro es que para este problema existen implementaciones que intentan minimizar este problema, aunque también se deja de usar por este mismo motivo y dar paso al código de árbol, aunque en algunas situaciones suele ser más rápido el uso de P3P.

3.3.4. Treecode (TC)

Este método es más usado para hacer simulaciones cosmológicas de N-cuerpos por lo eficiente y la buena resolución que nos permite tener al usarlo, además es el método que en particular usa Gadget-2.

El concepto primordial del método de árbol es que podemos expandir el campo gravitacional en multipolos[28], agrupando las partículas en grupos jerárquicos, lo que hace que las partículas que se encuentran distantes de la partícula que estamos analizando no se vean como múltiples partículas sino como un cúmulo grande de ellas que es analizando como una sola muy grande, esto es la fuerza ejercida por los grupos distantes se aproxima por sus momentos multipolares más bajos. Así el coste computacional se vuelve del orden de $O(N \log N)$.

Una de las construcciones de árbol más usada es la de Barnes-Hut[12] de 1986. Esta construcción consiste en particionar nuestro espacio en una

jerarquía de cajas, donde cada caja nueva tiene la mitad del tamaño de la longitud de la caja anterior, así que al particionar una caja obtenemos ocho cajas más pequeñas. A estas cajas se les llama nodos. El árbol debe ser construido de manera tal que cada nodo o caja contenga una sola partícula, de manera tal que dentro de la caja tengamos el momento monopolar y cuadrupolar, como vemos en la imagen 3.1.

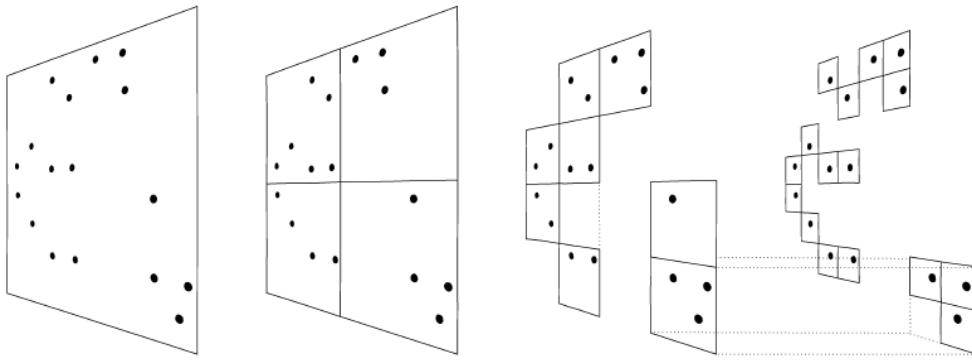


Figura 3.1: Representación bidimensional de la partición que realiza el código de árbol. Tomada del artículo de Gadget [32].

A continuación, el cálculo de la fuerza avanza caminando por el árbol y sumando las contribuciones de fuerza de los nodos de los árboles. En el método estándar del código de Barnes-Hut, la expansión multipolar es usada si cumple la siguiente condición

$$r > \frac{l}{\theta}, \quad (3.15)$$

donde r es la distancia entre la partícula a la que le estamos calculando la fuerza ejercida sobre ella y el centro de masas de la celda, l es el tamaño del nodo y θ el parámetro de precisión. Si un nodo cumple con este criterio (3.15) entonces la caminata sobre esta rama termina, si por el contrario no cumple con esto, entonces se “abre” la caminata sigue a través de todos sus sub-nodos. Si el parámetro de precisión es menor, entonces tendremos una mejor precisión en el cálculo de las fuerzas, sin embargo, esto tiene mayor coste computacional y el código de árbol deja de ser bueno como método

de optimización, nuestro código de árbol llega a convertirse en algo más parecido a un código PP.

3.4. Integrador

Ahora tratemos el tema de la evolución temporal a detalle. La elección del integrador dependerá de varios aspectos que se consideran dependiendo del tipo de simulación que se realice y los límites o exigencias que tengamos con los resultados que queremos obtener. Existen diferentes tipos de integradores, solo hablaremos de tres de los más usados; Método de Euler, Método de Runge Kutta y el Método de Leapfrog, siendo el primero y el último los únicos que se usaron en el código que construimos.

3.4.1. Método de Euler

Este método es el más sencillo y famoso para resolver ecuaciones diferenciales de la forma $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$. Resolver la ecuación diferencial será de la siguiente manera

$$y(t + h) = y(t) + f(x(t), y(t))h \quad (3.16)$$

donde h es el paso de tiempo que estamos dando para calcular la función y . Podemos ver que la función $f(x, y)$ se toma constante mientras pasamos del punto $(x(t), y(t))$ al punto $(x(t + h), y(t + h))$.

El método de Euler, o también llamado de Euler-Cauchy o de punto pendiente, consiste en usar la ecuación diferencial para estimar la pendiente de la función, como derivada de $x(t + h)$. Teniendo la pendiente de la curva, que es la primera derivada, tenemos una mejor aproximación de la forma que tendrá y , es notorio que una primera aproximación no nos da tanta información como quisieramos[16]. Existen otros métodos que hacen aproximación de orden mayor, claro que esto conlleva un gasto de cómputo mayor.

Para nuestro caso, tenemos una ecuación diferencial de segundo grado que resolvemos como dos ecuaciones diferenciales de primer grado, como se muestra en seguida

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} \quad (3.17)$$

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \quad (3.18)$$

pero por la ley de Gravitación universal y la segunda ley de Newton

$$\mathbf{a} = -\frac{m_j (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|^3} \quad (3.19)$$

Solucionando \mathbf{v} como se hace en (3.16), tenemos que

$$\mathbf{v}(t + h) = \mathbf{v}(t) + \mathbf{a}(t)h \quad (3.20)$$

Una vez resuelta la ecuación diferencial para la velocidad, podemos obtener la solución para la posición \mathbf{r} de la misma manera que para la \mathbf{v} pero esta vez con la velocidad a ese instante $\mathbf{v}(t + h)$. Esto es,

$$\mathbf{r}(t + h) = \mathbf{r}(t) + \mathbf{v}(t + h)h \quad (3.21)$$

El error debido a este método va como

$$E_t = \frac{f'(x(t), y(t))}{2!} h^2 + \dots + O(h^{n+1}) \quad (3.22)$$

si h es lo suficientemente pequeña, nos quedaremos tan solo con el primer factor.

De esta manera tenemos resuelta nuestra ecuación de segundo grado para una sola partícula con respecto a otra. El caso que nos interesa involucra requiere de un número de partículas mucho más grande, así que la fuerza total que sienta una partícula será la suma de la fuerza que siente debido a cada una de las otras, una vez hecho esto, podemos utilizar el método anterior y resolver, en seguida se resolverá para todas las demás partículas.

Aunque sencillo, el método de Euler es malo cuando el número iteraciones es grande, puesto que el error será acumulativo y al final de nuestra simulación tendremos una enorme pérdida de información reflejada en la

energía no conservada del sistema analizado en la simulación. A este mismo método se le pueden añadir derivadas superiores, es decir, incluimos términos de orden superior en la expansión de la serie de Taylor para nuestra solución. Si incluyéramos el siguiente término, el de segundo orden en la ecuación (3.16), tendríamos

$$y(t+h) = y_i + f(x(t), y(t))h + \frac{f'(x(t), y(t))}{2!}h^2 \quad (3.23)$$

Hay dos cosas que son fáciles de observar, primero, el error de este método estará ahora en un orden superior al que teníamos en (3.22), y lo segundo es que, al tener un término más de orden superior, el tiempo de cómputo aumenta. Como alternativa a este método se usa el método de Runge Kutta.

3.4.2. Método de Runge Kutta

Como podemos ver en la referencia [16], los métodos de Runge Kutta logran la exactitud del procedimiento de la serie de Taylor sin necesitar el cálculo de derivadas de orden superior. Existen diferentes variables del método pero la forma más general es la siguiente:

$$y_{i+1} = y_i + \phi(x_i, y_i, h)h \quad (3.24)$$

donde $\phi(x_i, y_i, h)$ es la función incremento que se interpreta como la pendiente representativa en el intervalo. Esta función de intervalo la representamos como

$$\phi = a_1 k_1 + a_2 k_2 + \cdots + a_n k_n \quad (3.25)$$

y a su vez a y k son constantes representadas como

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x_i, y_i) \\ k_2 &= f(x_i + p_1 h, y_i + q_{1,1} k_1 h) \\ k_3 &= f(x_i + p_2 h, y_i + q_{2,1} k_1 h + q_{2,2} k_2 h) \\ &\vdots \\ &\vdots \\ k_n &= f(x_i + p_{n-1} h, y_i + q_{n-1,1} k_1 h + q_{n-1,2} k_2 h + \cdots + q_{n-1,n-1} k_{n-1} h) \end{aligned} \quad (3.26)$$

donde las p y las q son constantes. Tendremos el método de diferentes órdenes dependiendo de n , si $n = 1$ regresamos al método de Euler, por ejemplo. Además, como los términos con h^3 y mayores se eliminan durante la deducción, el error de truncamiento local² es $O(h^3)$ y el global³ es $O(h^2)$.

Con todo y que disminuyen el error de una iteración a otra, es fácil ver que el costo computacional es elevado a comparación de Euler y al final tendremos el mismo problema con el error acumulativo que teníamos con el método de Euler. Podríamos hacer el paso de tiempo h más pequeño, de manera tal que el error sea cada vez menor, pero esto conlleva un costo computacional grande.

No se intenta decir que estos dos métodos anteriores no funcionen o que sean malos, eso dependerá del problema que tengamos que resolver. El método de Euler y el de Runge Kutta funcionan bien cuando el número de iteraciones no es muy grande y el error acumulativo entonces es despreciable, éste no es nuestro caso pues en cosmología será necesario hacer muchas iteraciones para así poder evolucionar el universo simulado que estamos creando. Es por eso que nos interesa un integrador que tenga un equilibrio entre la precisión con las posiciones de una iteración a otra y preserve la energía debidamente.

3.4.3. Método de Leapfrog

Ahora, explicaremos el método de Leapfrog y el método de Verlet que son algebráicamente equivalentes. Estos métodos tienen como ventaja sobre otros que conserva mejor la energía y en promedio tienen una buena aproximación entre la relación tiempo-espacio.

La derivación de la fórmula del método de Verlet es consecuencia inmediata de una expansión de Taylor de la variable $\mathbf{r}(t)$:

$$\mathbf{r}(t + h) = \mathbf{r}(t) + h\dot{\mathbf{r}}(t) + (h^2/2)\ddot{\mathbf{r}}(t) + O(h^3) \quad (3.27)$$

²Es aquel que resultan al usar una aproximación en lugar de un procedimiento matemático exacto en un solo paso.

³El error global es la discrepancia total debida a los pasos anteriores y presentes.

aquí $\dot{\mathbf{r}}(t)$ es la velocidad \mathbf{v} y $\ddot{\mathbf{r}}(t)$ la aceleración \mathbf{a} , esta última función del tiempo t , aunque depende de las coordenadas, no lo expresamos así pues es una función conocida de las coordenadas a tiempo t . Si restamos la expansión que corresponde a $\mathbf{r}(t-h)$ a (3.27), obtenemos

$$\mathbf{r}(t+h) = 2\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}(t-h) + h^2\mathbf{a}(t) + O(h^4) \quad (3.28)$$

Primero observemos que el error de truncamiento va como $O(h^4)$ porque los términos de $O(h^3)$ se han cancelado. La velocidad está dada con la siguiente expresión:

$$\mathbf{v}(t) = [\mathbf{r}(t+h) - \mathbf{r}(t-h)]/2h + O(h^2) \quad (3.29)$$

El método de Leapfrog es también simple de derivar. Reescribimos la expansión de Taylor:

$$\mathbf{r}(t+h) = \mathbf{r}(t) + h[\dot{\mathbf{r}}(t) + (h/2)\ddot{\mathbf{r}}(t)] + O(h^3), \quad (3.30)$$

pero

$$\dot{\mathbf{r}}(t) + (h/2)\ddot{\mathbf{r}}(t) = \dot{\mathbf{r}}(t+h/2) = \mathbf{v}(t+h/2), \quad (3.31)$$

si ahora encontramos $\mathbf{v}(t-h/2)$ y así restamos esta cantidad en la ecuación anterior, encontraremos

$$\mathbf{v}(t+h/2) = \mathbf{v}(t-h/2) + h\mathbf{a}(t) \quad (3.32)$$

y la ecuación (3.30) se convierte en:

$$\mathbf{r}(t+h) = \mathbf{r}(t) + h\mathbf{v}(t+h/2). \quad (3.33)$$

El hecho de que la velocidad y la posición esté calculada a diferente tiempo no nos trae ningún problema puesto que podemos calcular la velocidad al paso de tiempo completo y ésta viene como:

$$\mathbf{v}(t+h) = \mathbf{v}(t+h/2) + \mathbf{a}(t)\frac{h}{2} \quad (3.34)$$

La ventaja que tiene el método de Leapfrog sobre Euler y por lo que es usado, es debido a que es reversible en el tiempo y conservaba bien la energía del sistema dinámico.

Así como en todos los demás métodos tiene versiones, así el método de Leapfrog, en particular nos interesa la versión que usa el código de simulaciones de N-cuerpos Gadget [30]. Esta versión usa las siguientes ecuaciones:

$$\mathbf{r}(t + h/2) = \mathbf{r}(t) + \mathbf{v}(t) \frac{h}{2}. \quad (3.35)$$

Entonces las partículas avanzan conforme a

$$\mathbf{v}(t + h) = \mathbf{v}(t) + \mathbf{a}(t + h/2)h, \quad (3.36)$$

$$\mathbf{r}(t + h) = \mathbf{r}(t) + \frac{1}{2}[\mathbf{v}(t) + \mathbf{v}(t + h)]h. \quad (3.37)$$

La imagen 3.2 muestra una pequeña corrida del código desarrollado por mí donde implementamos este sistema de N-cuerpos con el método de Euler y el de Leapfrog, la gráfica representa solo la variación de la energía a través de las iteraciones. En ella es fácil ver que la energía se comporta mucho mejor cuando usamos el método de Leapfrog. En esta gráfica no vemos la comparación con el método de Runge Kutta pues de antemano ya sabíamos que el costo computacional que este método requiere sería nada provechoso para el objetivo que teníamos; construir un código de N-cuerpos.

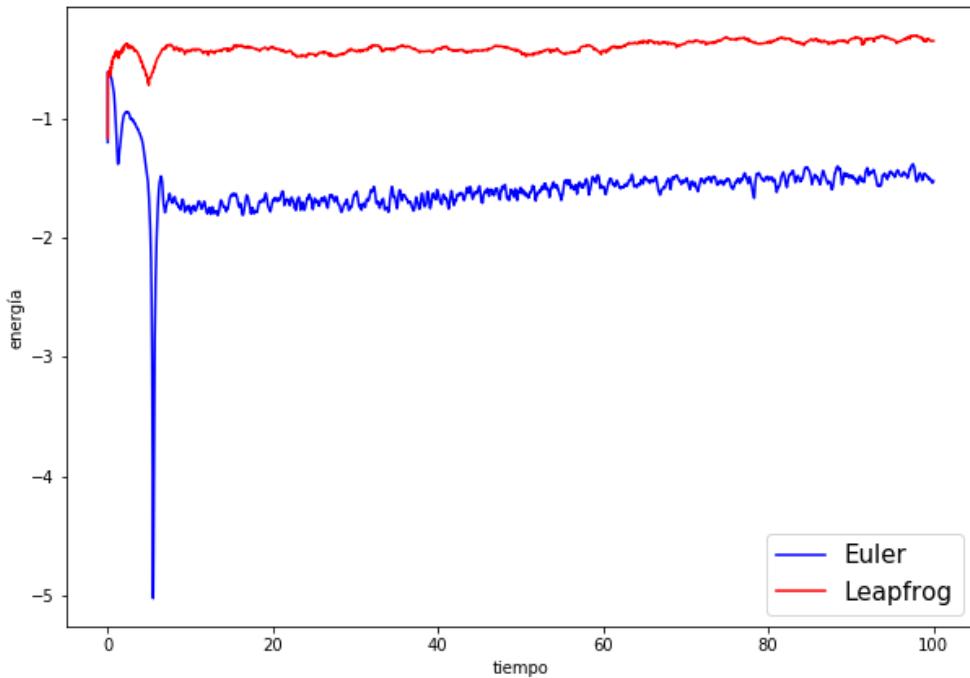


Figura 3.2: Comparación de la energía en el método de Euler y en el método de Leapfrog. La energía y el tiempo se encuentran en unidades específicas del código, ambos códigos tienen el mismo sistema de unidades para así poder ser comparables. No es importante cuáles son estas unidades, el objetivo de la imagen es comparar cómo los métodos conservan la energía. El pico que vemos ahí es debido colapso que sufrieron las partículas de nuestro sistema, pero ese punto tampoco es de suma importancia en estos momentos.

3.5. Condiciones de frontera periódicas

Dentro de las simulaciones cosmológicas, podemos tener sistemas finito y otros infinitos, esto se verá reflejado en las condiciones de frontera que establezcamos. Es un punto muy sencillo de explicar puesto que las condiciones de frontera periódicas tan solo consisten en eliminar las fronteras físicas y establece entonces un espacio infinito donde interactúan las partículas. Usar fronteras periódicas es equivalente a considerar un espacio

infinito lleno de arreglos de copias idénticas de la región usada en la simulación [26]. Este tipo de condiciones de frontera entonces establecerá que si una partícula sale de la región de la simulación por un lado, inmediatamente entrará por el lado opuesto.

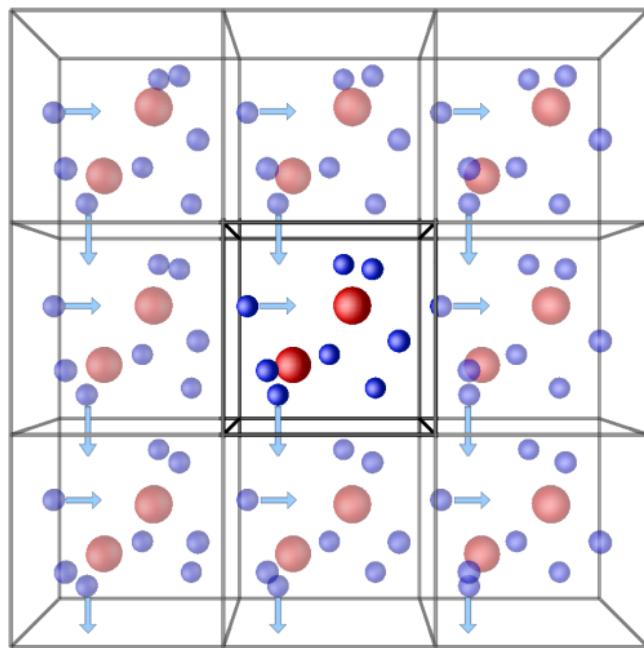


Figura 3.3: Representación de las condiciones de frontera periódicas tomado de <http://isaacs.sourceforge.net/phys/pbc.html>.

En seguida se muestra el algoritmo (Algoritmo 1) de la implementación de las condiciones de frontera periódicas.

Algoritmo 1 Algoritmo para la implementación de condiciones de frontera periódicas

Entrada: Real r que es la posición de la partícula y L la longitud de la caja centrada en 0

Salida: Real r' que es la posición actualizada según las condiciones de frontera periódicas

- 1: **si** r es mayor igual que $-L/2$ y menor igual que $L/2$ **entonces**
 - 2: **devolver** r
 - 3: **si no, si** r es menor que $-L/2$ **entonces**
 - 4: **devolver** $r + L$
 - 5: **si no, si** r es mayor que $L/2$ **entonces**
 - 6: **devolver** $r - L$
 - 7: **fin si**
-

3.6. Parámetro de amortiguamiento

Anteriormente ya hablamos de resolver la ecuación de la gravitación universal de Newton (3.11) como la interacción gravitacional que existirá entre las partículas o cuerpos, esta fuerza viene derivada de un potencial de tipo $\phi \propto \frac{1}{r}$. Este tipo de potenciales donde $\phi \propto \frac{1}{r}$ son usados en la física con frecuencia, por ejemplo, cuando hablamos del campo electromagnético u otros usados en Mecánica estadística como el potencial de Lennard-Jones $\left(V(r) = \epsilon r_{min} \left[\left(\frac{1}{r}\right)^{12} - \left(\frac{2}{r}\right)^6 \right]\right)$, donde claramente existe un punto de indeterminación, este es cuando $r = 0$. Físicamente podemos interpretar lo anterior como el momento en el que dos partículas están demasiado cerca, es obvio que al hacer un análisis numérico perdemos información sobre la posición exacta, así que aun cuando las partículas no se encuentren en el mismo lugar ($r = 0$), la cantidad r puede aproximarse a cero cuando las partículas estén demasiado cerca.

El uso del parámetro de amortiguamiento o de suavizado, que tiene que ver con la divergencia de la fuerza cuando dos partículas del modelo se encuentran muy cercanas [28], nos da una versión suavizada de la fuerza que originalmente usábamos. La versión más comúnmente usada es la fuerza asociada al potencial de Plummer, cuyo potencial es:

$$\Phi = -\frac{GM}{\sqrt[2]{r^2 + \epsilon^2}}, \quad (3.38)$$

donde G es la constante de gravitación, M la masa que produce el potencial, r la distancia al punto que produce el potencial y ϵ es el parámetro de suavizado. De este potencial tendremos una versión modificada de la ecuación (3.11):

$$\ddot{\mathbf{r}}_i = -G \sum_{j \neq i}^N \frac{m_j (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)}{(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|^2 + \epsilon^2)^{3/2}}, \quad i = 1, 2, 3 \dots N. \quad (3.39)$$

Es claro que este parámetro no puede tomar cualquier valor arbitrario sino que este número debe ser uno pequeño para que no altere fuertemente los resultados, es obvio que tampoco será uno sumamente pequeño porque volvemos al problema inicial por el cual introducimos este parámetro.

Además de este parámetro, habrá que escoger otros dos que son importantes para la simulación, el número de partículas N y el tamaño del paso del tiempo h . Aunque no existe una respuesta única para el valor de los tres parámetros, esto dependerá del problema que se tenga, la resolución y el tiempo de cómputo que se desee ocupar. Podremos encontrar documentación que nos oriente sobre el verdadero valor que necesitamos usar, aunque en varios códigos, por ejemplo, el paso de tiempo y el parámetro de amortiguamiento es adaptativo, es decir, éste cambia dependiendo de la situación de las partículas, esto nos quita cierta de responsabilidad al no tener que elegir un solo valor para estos parámetros, es claro que esto significa más tiempo de cómputo y un poco más de complicaciones en el algoritmo.

3.7. Coordenadas comóviles y contenido de materia

Hasta aquí solo hemos trabajado tratando de resolver la ecuación de la gravitación universal de la manera más simple conocida, pero en las si-

mulaciones cosmológicas no es tan sencillo de resolver. Como ya hablamos en el capítulo anterior, para resolver la dinámica del Universo habrá que considerar la expansión del mismo, el contenido de materia y demás, cosas que vienen involucradas en la métrica, por lo que no podemos solamente resolver La Ley de Gravitación Universal de Newton ($F = \frac{GMm}{r^2}$). Entonces, ¿cómo podemos conectar lo que aprendimos de cosmología en el capítulo anterior y lo que hasta ahora venimos desarrollando para las simulaciones cosmológicas? La respuesta simple y corta es debido a las fluctuaciones que dijimos que dejan de ser lineales y ahora tenemos que resolver como un sistema de n -cuerpos con ecuaciones no lineales, pero aun así, nos hace falta introducir en las ecuaciones la información que obtuvimos en el capítulo anterior.

Las ecuaciones de Friedmann (ecuaciones (2.17) y (2.18)) que ya encontramos y dedujimos de una métrica dada (ver apéndice B) nos ayudan precisamente a encontrar este factor de escala que contiene la información del cómo se comporta esta “manta” que es el Universo a grandes escalas, pero en estas ecuaciones que ya encontramos no nos habla de cómo interacciona la materia entre ella en esta manta o cómo está distribuida. Entonces, necesitamos resolver una nueva métrica que involucre lo que necesitamos resolver, es decir, que nos diga cómo se comporta nuestro potencial gravitacional.

De antemano sabemos que en el límite clásico la Relatividad General es equivalente con la Ley de Gravitación Universal de Newton. El límite clásico se refiere a cuando las presiones son bajas, las velocidades a las que viaja son también bajas, es decir $v \ll c$, además el campo gravitacional no es muy intenso puesto que en el límite clásico se considera que el espacio no tiene curvatura y como ya sabemos, la curvatura del espacio tiene una íntima relación con el campo gravitacional. Al decir que el campo gravitacional es débil se refiere a que sea mucho más pequeño que el cuadrado de la velocidad de la luz $\phi_{grav} \ll c^2$. Cabe mencionar que las simulaciones que hacemos aquí cumplen con estas condiciones así que podemos tratarlas en el régimen clásico, sin embargo, no es tan sencillo como ahora solo usar la ecuación que veníamos resolviendo, pues aun necesitamos la información que nos proporciona este factor de escala a .

Al proponer ahora una nueva métrica con fluctuaciones donde contamos con la información de la materia, en seguida llevando las ecuaciones obtenidas al límite clásico y resolviendo las ecuaciones de Campo de Einstein, tendremos una nueva ecuación de movimiento que relacionará nuestro campo gravitacional con nuestras demás variables de movimiento (velocidad y posición):

$$\dot{\mathbf{u}} = -2\frac{\dot{a}}{a}\mathbf{u} - \frac{1}{a^2}\nabla\Phi, \quad (3.40)$$

la ecuación anterior se encuentra en coordenadas comóviles tanto la posición ($\mathbf{r} = a\mathbf{x}$) como la velocidad ($\mathbf{v} = a\mathbf{u}$) es por eso que encontramos el factor de escala a . Φ es el potencial gravitatorio de Newton. La ecuación (3.40) entonces se escribe como

$$\ddot{\mathbf{x}}_i = -2\frac{\dot{a}}{a}\dot{\mathbf{x}}_i - \frac{1}{a^3}G\sum_{j \neq i}^N \frac{m_j(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j)}{|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|^3}, \quad i = 1, 2, 3 \dots N. \quad (3.41)$$

donde $\ddot{\mathbf{x}} = \dot{\mathbf{u}}$ y $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{u}$. Es claro que esta no es la misma ecuación que teníamos en (3.11), por tanto, ahora las ecuaciones de movimiento han cambiado. Dado que el factor de escala tiene relación con el corrimiento al rojo (ecuación 2.26) y a su vez estas dos cantidades tienen relación con el tiempo, entonces podremos usar ahora una nueva variable de tiempo que será más sencillo trabajar con ella, puesto que en cosmología es mucho más común hablar del redshift o del factor de escala que de un tiempo tal como lo usamos en los sistemas de referencia comunes. Así que, para tratar con esta ecuación (3.41) usamos ahora una nueva variable de velocidad definida como:

$$\mathbf{w} \equiv a^{1/2}\dot{\mathbf{x}}, \quad (3.42)$$

y usando el factor de escala como variable de tiempo las ecuaciones de movimiento se convierten en

$$\frac{d\mathbf{w}}{da} = -\frac{3}{2}\frac{\mathbf{w}}{a} - \frac{1}{a^2 S(a)}G\sum_{j \neq i}^N \frac{m_j(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j)}{|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|^3}, \quad (3.43)$$

$$\frac{d\mathbf{x}}{da} = \frac{\mathbf{w}}{S(a)}, \quad (3.44)$$

donde $S(a) = a^{3/2}H(a)$ que a su vez, en el capítulo anterior ya encontramos a $H(a)$, entonces

$$S(a) = H_0\sqrt{\Omega_0 + a(1 - \Omega_0 - \Omega_\Lambda) + a^3\Omega_\Lambda}. \quad (3.45)$$

Resolveremos ahora las ecuaciones (3.43) y (3.44), de la segunda, al integrar encontraremos directamente la posición comóvil y de la primera al sustituir (3.42) encontraremos la velocidad comóvil. El método de integración será el mismo que usamos anteriormente, el método de Leapfrog. Es claro que a las ecuaciones anteriores habrá que añadirles el parámetro de amortiguamiento en el potencial de Newton.

3.8. Condiciones iniciales

Las condiciones iniciales serán lo que diferenciarán cada problema que tengamos. Los códigos de simulaciones de N-cuerpos como base piden las velocidades de cada partícula y sus posiciones, dependiendo del código y el tipo de simulación, éste te podrá pedir información adicional. Las simulaciones más simples de materia oscura tan solo necesitarán estos arreglos de velocidades y posiciones en las coordenadas adecuadas.

Generar estos arreglos de posiciones y coordenadas normalmente se lleva a cabo a través de un Espectro de Potencias que es introducido dentro de otro código para solo obtener las partículas que necesitamos en un espacio de coordenadas y de velocidades. Particularmente, para el desarrollo de las simulaciones que veremos en el capítulo siguiente se usó el código 2LPTic. Este código está basado en la teoría de la perturbación lagrangiana de segundo orden (2LPT).

Anteriormente ya hablamos sobre las perturbaciones de la inestabilidad gravitatoria en un universo en expansión. La teoría de la perturbación lagrangiana es preferida debido a que la principal ventaja de utilizar condiciones iniciales de 2LPT es que permiten que las simulaciones comiencen más tarde[20], cosa que nos deja más campo para explorar. En seguida haré

un bosquejo de lo que es la teoría de la perturbación lagrangiana según se lleva a cabo en la referencia [20], o si se desea ver un desarrollo un poco más rígido el lector se puede dirigir a ver la referencia [15].

En la teoría de la perturbación Lagrangiana, relacionamos las posiciones comóviles \mathbf{x} y las coordenadas iniciales \mathbf{q} a través de un campo de desplazamiento, $\Phi(\mathbf{q})$:

$$\mathbf{x} = \mathbf{q} + \Phi \quad (3.46)$$

Este campo vectorial Φ se puede escribir en función de otros campos escalares $\phi^{(1)}$ y $\phi^{(2)}$, como

$$\mathbf{x} = \mathbf{q} + D_1 \nabla_q \phi^{(1)} + D_2 \nabla_q \phi^{(2)} \quad (3.47)$$

donde D_1 es el factor de crecimiento lineal y D_2 es el factor de crecimiento de segundo orden, que estos a su vez deberán estar relacionados entre ellos. Además, las derivadas ∇_q se refiere a las derivadas con respecto a las coordenadas lagrangianas q . De manera similar encontraremos una relación con las velocidades en función de estos potenciales que representan nuestras perturbaciones. Los potenciales $\phi^{(1)}$ y $\phi^{(2)}$ se obtienen de resolver la ecuación de Poisson:

$$\nabla_q^2 \phi^{(1)}(\mathbf{q}) = \delta^{(1)}(\mathbf{q}), \quad (3.48)$$

donde $\delta^{(1)}(\mathbf{q})$ es la sobredensidad lineal y

$$\nabla_q^2 \phi^{(2)}(\mathbf{q}) = \delta^{(2)}(\mathbf{q}). \quad (3.49)$$

Nos referiremos al término $\delta^{(2)}(\mathbf{q})$, como la “sobredensidad de segundo orden”, que a su vez tiene cierta relación con $\delta^{(1)}(\mathbf{q})$.

La técnica más común utilizada en la creación de condiciones iniciales cosmológicas, hasta la fecha, es la aproximación de Zel'dovich[35]. Las condiciones iniciales de Zel'dovich equivale a una perturbación Lagrangiana de primer orden, solo se desechan los términos que contengan $\phi^{(2)}$ en la ecuación (3.47).

Capítulo 4

Simulaciones

En la sección anterior ya hemos hablado sobre la construcción de una simulación cosmológica, hemos tocado los puntos más fundamentales para la construcción del código pero eso no es todo. Después de la construcción del código, podemos obtener resultados que analizaremos para construir o ajustar nuestro modelo. En esta sección mostraremos los resultados obtenidos de las simulaciones que se realizaron el código de Gadget-2 [30], elegido por preferencia personal. Este código no es el único de simulaciones de n-cuerpos que existe, también existen otros que son populares como Enzo[5], ChaNGa[3] o RAMSES [7].

Gadget-2 es un código de simulaciones cosmológicas que es ampliamente usado dentro de la comunidad científica, que es capaz de seguir un fluido sin colisiones con el método de N-cuerpo, y un gas ideal mediante hidrodinámica de partículas suavizadas (SPH por sus siglas en inglés). Se encuentra paralelizado. El cálculo de las fuerzas gravitacionales se lleva a cabo en la forma de un algoritmo TreePM¹, donde solo las fuerzas de corto alcance se calculan con el método árbol mientras que las fuerzas de largo alcance se determinan con técnicas de Fourier.

¹Árbol + Partícula-Malla

4.1. Esquema general de las simulaciones

Las simulaciones que para este trabajo se llevaron a cabo fueron cuatro, con diferentes parámetros y una de ellas con un modelo diferente a Λ CDM, cada una de ellas fue construida con condiciones iniciales distintas, estas condiciones fueron generadas con el código 2LPTic con el mismo espectro de potencias de la densidad de fluctuaciones usado para la simulación de Carmen de la serie de simulaciones llamadas *Las Damas (Large Suite of Dark Matter Simulations)* [6]. Este espectro de potencias fue obtenido por el equipo de *Las Damas* con el código CMBfast (Seljak & Zaldarriaga 1996)[4].

Los parámetros que se usaron para cada una de las simulaciones se encuentran en la Tabla 4.1. ²

Como ya mencioné anteriormente, tres de las cuatro simulaciones fueron hechas con el código de Gadget-2, que es un código que está basado en el modelo Λ CDM, cuyo desarrollo ya expliqué en el capítulo 2, pero una de las simulaciones se llevó a cabo con un código diferente, llamado Axion-Gadget [2][36], que es una modificación del código de Gadget-2 en la que implementa el modelo de materia oscura como un campo escalar (SFCM: Scalar Field Dark Matter) o como también se conoce (cuyo nombre usa el creador del código) Fuzzy Dark Matter (FDM) que no voy a describir pero puede verse más a cerca de este modelo en las referencias [10],[22],[23],[24].

Las cuatro simulaciones que se corrieron fueron:

1. DM: Simulación de Materia Oscura con el modelo de Λ CDM en una caja de $500Mpc$ y 512^3 partículas. Iniciada a $z = 49$.
2. DMG: Simulación de Materia Oscura y Gas con el modelo de Λ CDM en una caja de $500Mpc$, con 512^3 partículas de Materia Oscura y 512^3 partículas de Gas. Iniciada a $z = 49$.
3. SF: Simulación de Materia Oscura y Gas con un modelo de Campo Escalar en una caja de $500Mpc$, con 128^3 partículas. Iniciada a $z = 49$.

²Las especificaciones del software con el que se corrieron las simulaciones no las añadiré, pues no es punto de discusión aquí.

4. DM2: Simulación de Materia Oscura con el modelo de Λ CDM en una caja de $1000Mpc$ y 512^3 partículas. Iniciada a $z = 49$.

Parámetro	DM	DMG	SF	DM2
Modelo	Λ CDM	Λ CDM	SFDM	Λ CDM
Contenido de materia	DM^3	DM + Gas	DM	DM
N	512^3	$512^3 + 512^3$	128^3	512^3
Unidades de longitud	Mpc/h	kpc/h	kpc/h	Mpc/h
Unidades de masa	$10^{10} M_\odot/h$	$10^{10} M_\odot/h$	$10^{10} M_\odot/h$	$10^{10} M_\odot/h$
Unidades de velocidad	km/s	km/s	km/s	km/s
Tamaño de caja	500	500000	500000	10000
$z_{inicial}$	49	49	49	49
z_{min}	0	0	0	0
Ω_0	0.25	0.25	0.25	0.25
Ω_Λ	0.75	0.75	0.75	0.75
Ω_{bar}	0.04	0.04	0.04	0.04
H_0	0.7	0.7	0.7	0.7
Integración Comóvil	Sí	Sí	Sí	Sí
Fronteras periódicas	Sí	Sí	Sí	Sí
Parámetro de suavizado comóvil(DM)	0.6	600	600	0.6
Tipo de criterio de apertura de celda(arbol)	Barnes & Hut	Barnes & Hut	Barnes & Hut	Barnes & Hut
Criterio de precisión	0.5	0.5	0.5	0.5
Tamaño máximo de paso tiempo	0.03	0.03	0.025	0.03
Tamaño mínimo de paso de tiempo	0	0	0	0

Sigue en la página siguiente.

³DM se refiere a Materia Oscura, por sus siglas en inglés.

Parámetro	DM	DMG	SF	DM2
Precisión del criterio de paso de tiempo	0.025	0.025	0.025	0.025
Frecuencia de actualización de dominio de árbol	0.1	0.1	0.1	0.1
Limitador de paso de tiempo adicional para el paso PM	0.2	0.2	0.3	0.2
Parámetro de suavizado comóvil(gas)	/	600	/	/
Temperatura inicial (gas)	/	1000	/	/
Temperatura mínima (gas)	/	50	/	/
Vecinos de suavizado de SPH	/	33	/	/
Variación de vecinos de suavizado	/	2	/	/
Parámetro de viscosidad artificial	/	0.8	/	/
Parámetro Courant	/	0.15	/	/
Longitud de suavizado SPH mínima	/	0.25	/	/
Masa FDM	/	/	2.5	/
Factor de Normalización FDM	/	/	0.00775466	/
Kernel FDM	/	/	1.41421	/

Tabla 4.1: Parámetros usados en cada simulación.

La tabla 4.1 pareciera tediosamente larga, pero el objetivo de señalar cada parámetro usado, es la facilidad de que aquel lector que se encuentre interesado en reproducir las simulaciones que aquí se muestran. Algunos parámetros que aquí se enumeran no han sido descritos ni serán descritos

en ningún lugar de este texto pues describirlos nos tomaría mucho más tiempo y no es nuestro objetivo describir cada uno de esos que el código Gadget usa, sin embargo, si el lector es una persona bastante curiosa y se encuentra interesado en conocer en profundidad el funcionamiento del código, puede dirigirse a las referencias [30] o [32]. Además, las últimas tres filas son parámetros que se usan para el código Axion-Gadget, si entonces se desea conocer el objetivo de estos, se puede consultar las referencias [36] y [2].

4.2. Análisis de las simulaciones

Como ya he mencionado varias veces, una vez construida nuestro código de simulaciones, o habiendo usado uno de los múltiples códigos de N-cuerpos que existen, podemos empezar el análisis de nuestros resultados.

Aquí nos importa encontrar patrones que se esperaría pudiéramos encontrar en la formación de estructura, haciendo un análisis estadístico de los datos. En cierta manera, queremos ver como esas fluctuaciones de las que hablábamos en el capítulo anterior se pueden ver a lo largo de la evolución del universo que estamos simulando, que al final de cuentas será una representación de nuestro Universo.

El campo δ que son estas fluctuaciones en nuestra distribución de densidad, representa unas variaciones de un universo homogéneo e isotrópico a grandes escalas. Esto sugiere que las propiedades estadísticas del campo δ también deberían ser homogéneas, a pesar de que es un campo que describe las inhomogeneidades.

4.2.1. Función de correlación y Espectro de Potencias

Algunas de las medidas estadísticas de las fluctuaciones en la distribución de densidad es la función de correlación y el Espectro de Potencias que en seguida describiremos.

La función de correlación es una medida del agrupamiento de las galaxias [13], que da el exceso de probabilidad de encontrar un vecino a una distancia r de una galaxia dada, en comparación con la esperada para una distribución aleatoria. Esta cantidad se define como

$$\xi(\mathbf{r}) \equiv <\delta(\mathbf{x})\delta(\mathbf{x} + \mathbf{r})> \quad (4.1)$$

Existen muchas maneras de calcular este exceso de probabilidad, es decir, hay varios estimadores para calcularlo a fuerza bruta (midiendo las distancias de cada partícula respecto a todas las demás). La función de correlación más usada y común es la función de correlación de dos puntos y a su vez el estimador que más recurrentemente se usa, por ser el que ajusta mejor a la predicciones, es el de Landy & Szalay(1993):

$$\xi_{LS}(r) = \frac{DD - 2DR + RR}{RR} \quad (4.2)$$

con la muestra de datos, $dd(r)$ que se puede normalizar por el número total de pares como

$$DD(r) = \frac{dd(r)}{n_d(n_d - 1)/2}, \quad (4.3)$$

con la muestra aleatoria, que nos deja $rr(r)$ normalizado como

$$RR(r) = \frac{rr(r)}{n_r(n_r - 1)/2}, \quad (4.4)$$

y finalmente entre ambas muestras (correlación cruzada) nos deja un $dr(r)$ normalizado como

$$DR(r) = \frac{dr(r)}{n_r n_d}. \quad (4.5)$$

donde además n_d es el número de objetos en la muestra de datos y n_r el número de objetos de una muestra aleatoria.

Para obtener los resultados de la función de correlación que tenemos aquí, fue usado el código CUTE[11] en su versión CUTE BOX, cuyo código utiliza un estimador diferente al que se ejemplifica arriba 4.2, este nuevo estimador dado como:

$$1 + \xi = \frac{N_p^d(r)dr}{N_p^r(r)dr} \quad (4.6)$$

donde $N_p^d(r)dr$ es el número de pares separados por $r \pm dr/2$ en los datos y $N_p^r(r)dr$ es el número de pares que se esperarían en una distribución aleatoria. Si el sistema no tiene fronteras, esto es, las fronteras son periódicas, como las de una simulación es fácil estimar el número de pares aleatorios como:

$$N_p^r(r)dr = \frac{N^2}{V}v(r) \quad (4.7)$$

donde N es el número total de objetos, V es “volumen” de la caja de nuestra simulación ($V = l$ longitud de la caja³ $v(r) \simeq 4\pi r^2 dr$ es el volumen de un cascarón esférico de radio r y grosor dr). Así:

$$1 + \xi(r) = \frac{V}{N^2 v(r)} N_p^d(r)dr \quad (4.8)$$

además es fácil estimar la cantidad de pares separados por $r \pm dr/2$ como:

$$N_p^d(r)dr = \sum_{i=1}^N \sum_{j \neq i} \Theta(r - dr/2 < |\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j| < r + dr/2), \quad (4.9)$$

donde Θ toma el valor de 1 si se cumple el argumento y 0 si no es así.

Una vez mostrado aquí como es que CUTE realiza el cálculo; seguimos con la ecuación (4.1). Podemos expresar δ como una expansión de Fourier y a una de las dos δ expresarla por su complejo conjugado, obteniendo

$$\xi = \left\langle \sum_{\mathbf{k}} \sum_{\mathbf{k}'} \delta_{\mathbf{k}} \delta_{\mathbf{k}'}^* e^{i(\mathbf{k}' - \mathbf{k}) \cdot \mathbf{x}} e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \right\rangle. \quad (4.10)$$

Esta ecuación (4.10) también la podemos escribir en forma de integral como:

$$\xi(\mathbf{r}) = \frac{V}{(2\pi)^3} \int |\delta_{\mathbf{k}}|^2 e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} d^3 k. \quad (4.11)$$

La función de correlación es la transformada de Fourier del Espectro de Potencias, que tiene directamente relación con nuestro campo de perturbaciones dado como:

$$P(k) \equiv <|\delta_k|^2(k)>. \quad (4.12)$$

En un universo isotrópico, el espectro de la densidad de perturbaciones no puede tener una dirección preferente, así tenemos un espectro de potencias isotrópico, esto es: $<|\delta_{\mathbf{k}}|^2(\mathbf{k})> = <|\delta_k|^2(k)>$. Realizando un poco de álgebra con las propiedades que esto nos da, en tres dimensiones, este queda como:

$$\xi(\mathbf{r}) = \frac{V}{(2\pi)^3} \int P(k) \frac{\sin kr}{kr} 4\pi k^2 dk. \quad (4.13)$$

El espectro de potencia es la cantidad predicha directamente por las teorías para la formación de una estructura a gran escala. Las fluctuaciones pequeñas iniciales en la densidad se amplifican por la gravedad. Además, el espectro de potencia primordial usualmente se asume que tiene una dependencia de la ley de potencias a escala; $P(k) \propto k^n$.

La velocidad a la que las fluctuaciones crecen en diferentes escalas está determinada por varias interacción como la gravedad. Estos efectos conducen a una modificación de la forma del espectro de potencia primordial que se expresa en términos de una función de transferencia $T(k, z)$:

$$P(k, z) = A(z) k^n T(k, z) \quad (4.14)$$

donde el factor de normalización $A(z)$ es determinado observacionalmente.

4.2.2. Resultados

Antes de mostrar los resultados de los análisis hechos a los datos obtenidos de las simulaciones, me gustaría dar una imagen de lo que pasa en el espacio de posiciones dentro de una simulación. En las figuras 4.1 - 4.5 observamos la proyección bidimensional de las posiciones de las partículas de cada simulación. Las gráficas se encuentran acomodadas de corrimientos altos a corrimientos bajos. Podemos observar de esta serie de imágenes

que conforme la simulación avanza comenzamos a ver esta agrupación y formación de estructura. Es notorio que la formación de estructura en la simulación 4.4 es menos evidente debido a que encontramos menos partículas en el mismo espacio que las otras simulaciones.

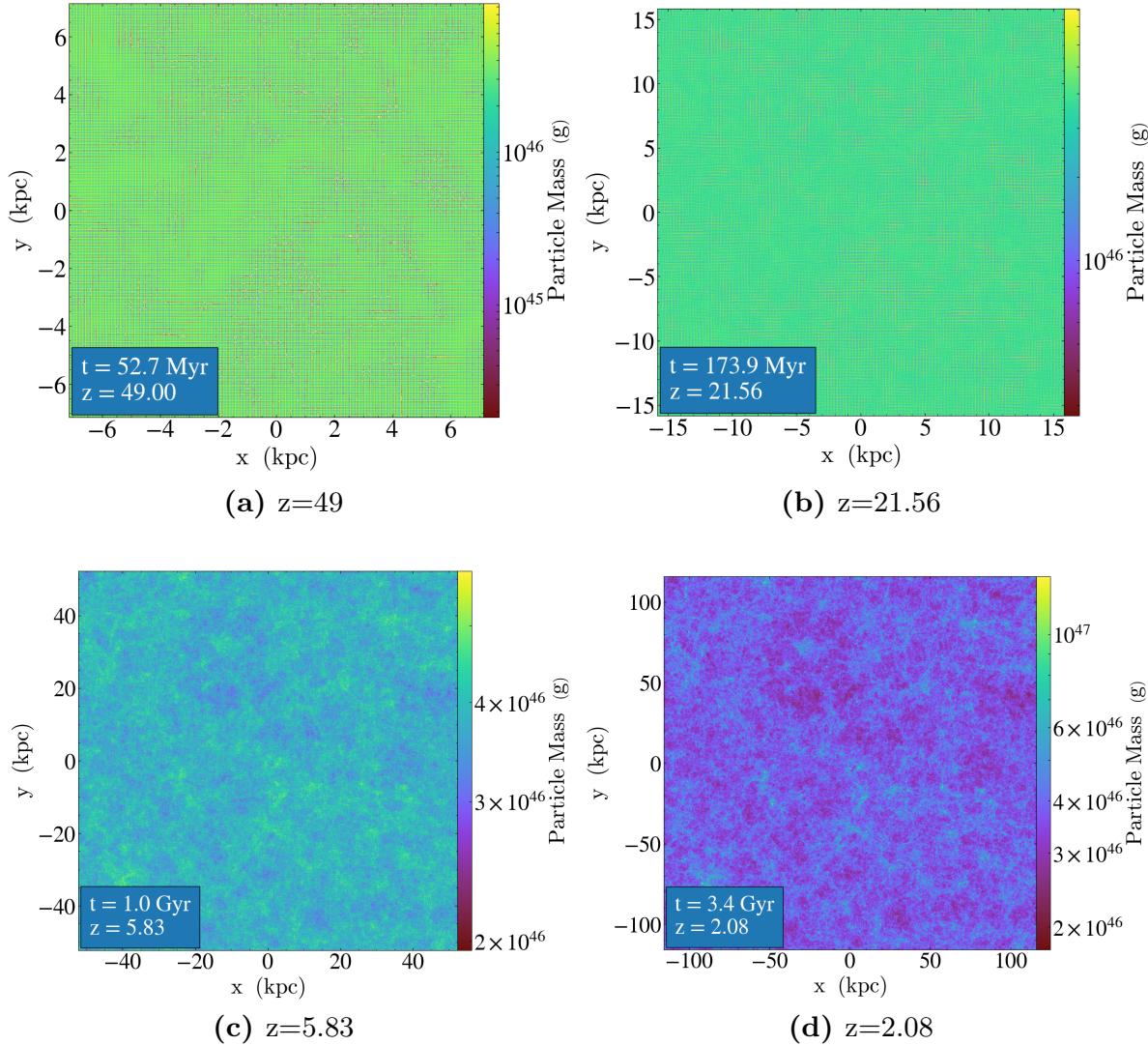


Figura 4.1: Posición de las partículas en la simulación DM. En las imágenes de arriba se muestran las posiciones de las partículas a diferentes corrimientos al rojo de la simulación DM. Los colores dibujan qué tan masivo es la región.

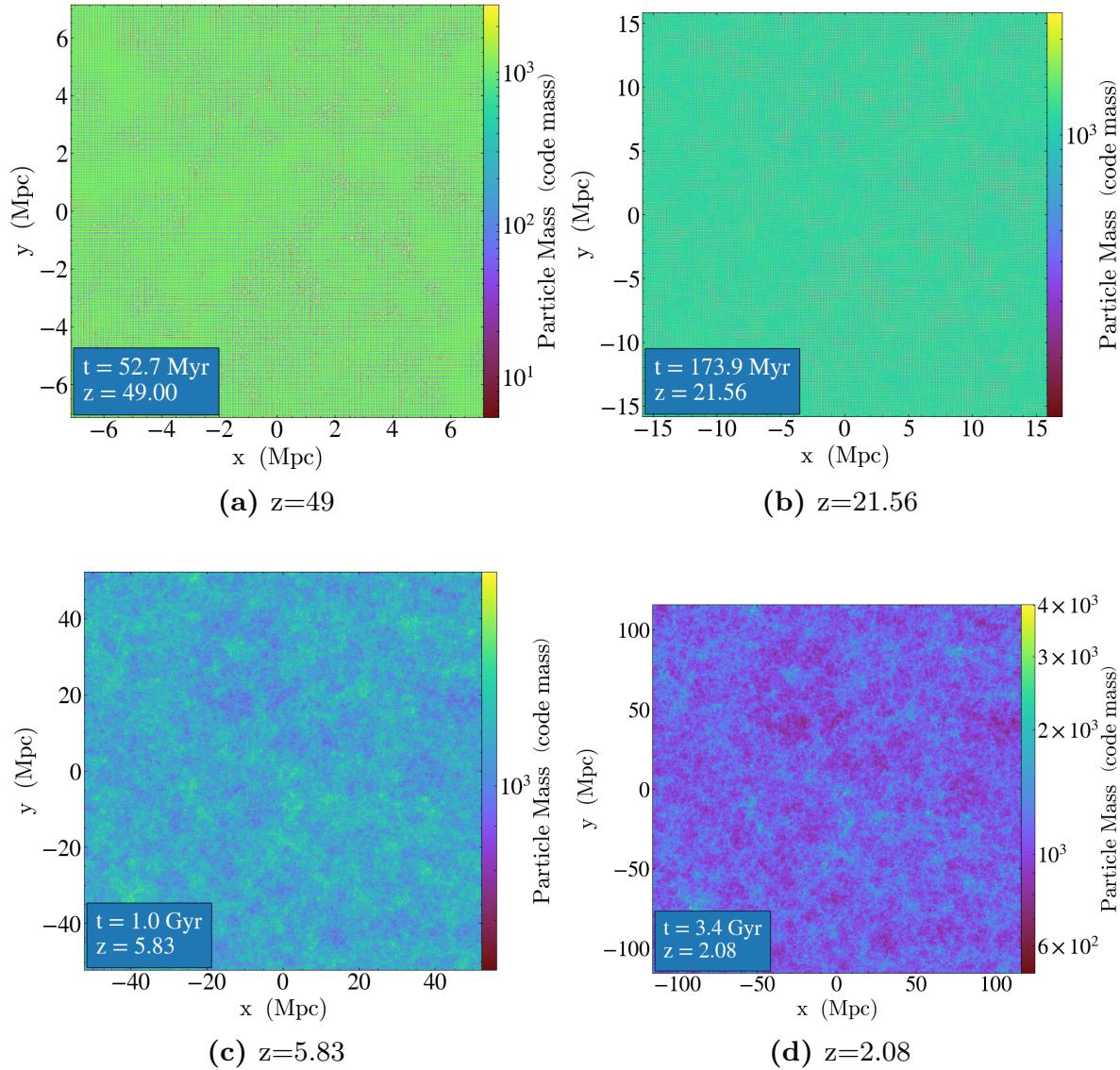


Figura 4.2: Posición de las partículas de materia oscura en la simulación DMG. En las imágenes de arriba se muestran las posiciones de las partículas de materia oscura a diferentes corrimientos al rojo de la simulación DMG. La diferencia de colores en la gráfica representa la diferencia de masas que están acumuladas en la región del espacio.

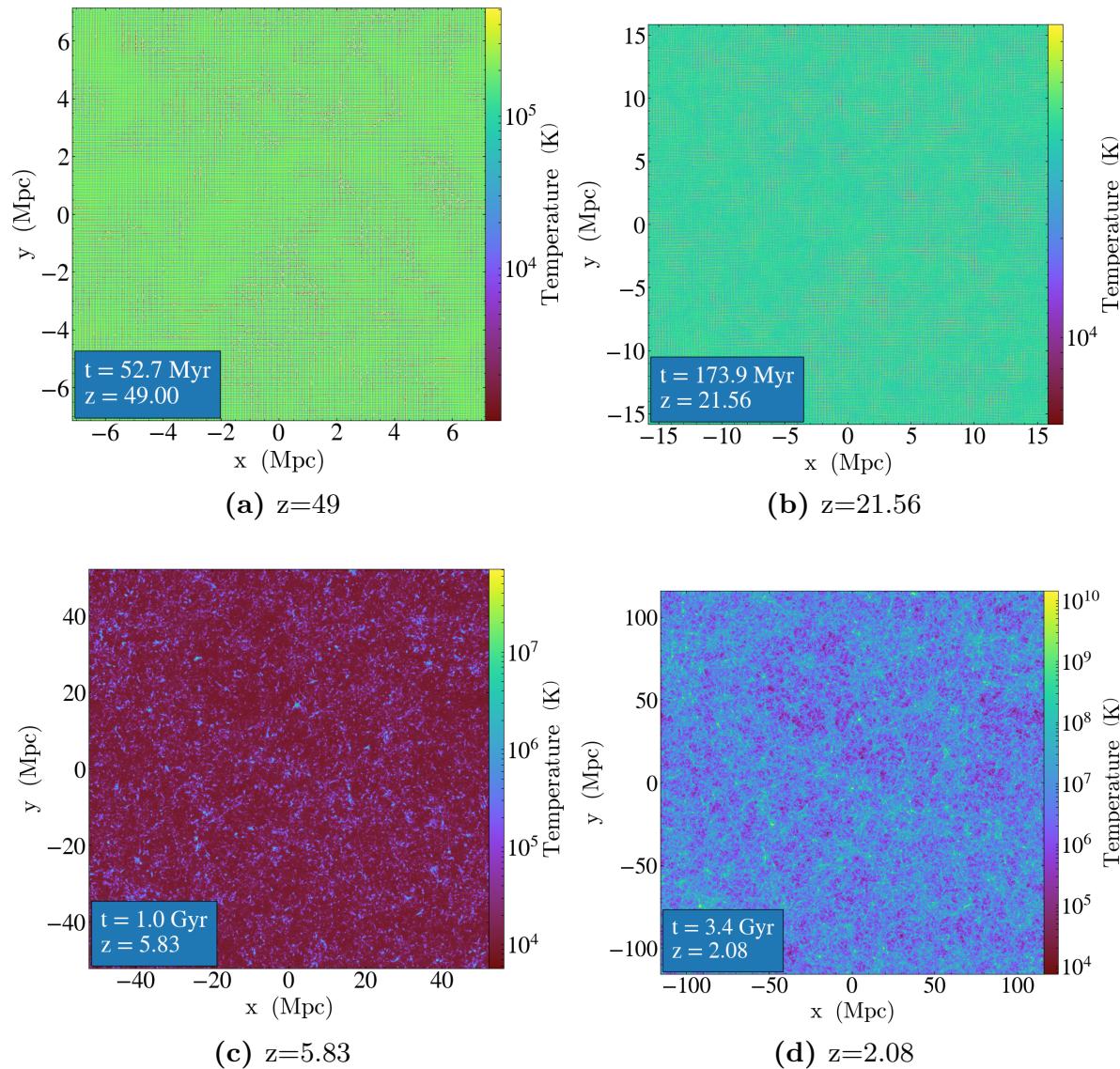


Figura 4.3: Posición de las partículas de gas en la simulación DMG. En las imágenes de arriba se muestran las posiciones de las partículas de gas a diferentes corrimientos al rojo de la simulación DMG. La escala de colores es una medida de la temperatura en cada región del espacio.

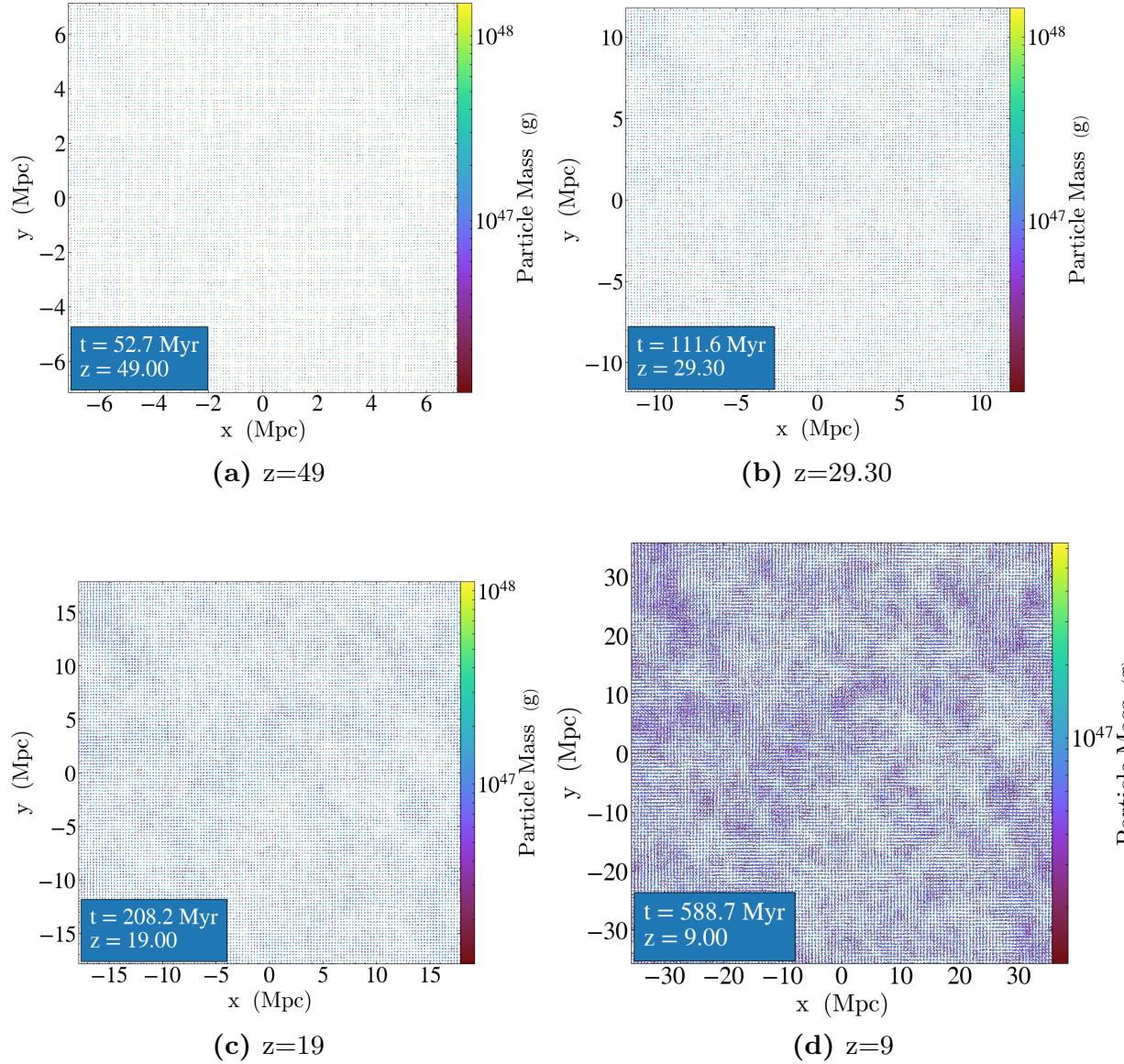


Figura 4.4: Posición de las partículas en la simulación SF. En las imágenes de arriba se muestran las posiciones de las partículas a diferentes corrimientos al rojo de la simulación SF. En la parte derecha de cada gráfica podemos ver una barra que indica la cantidad de masa que se encuentra en cada región.

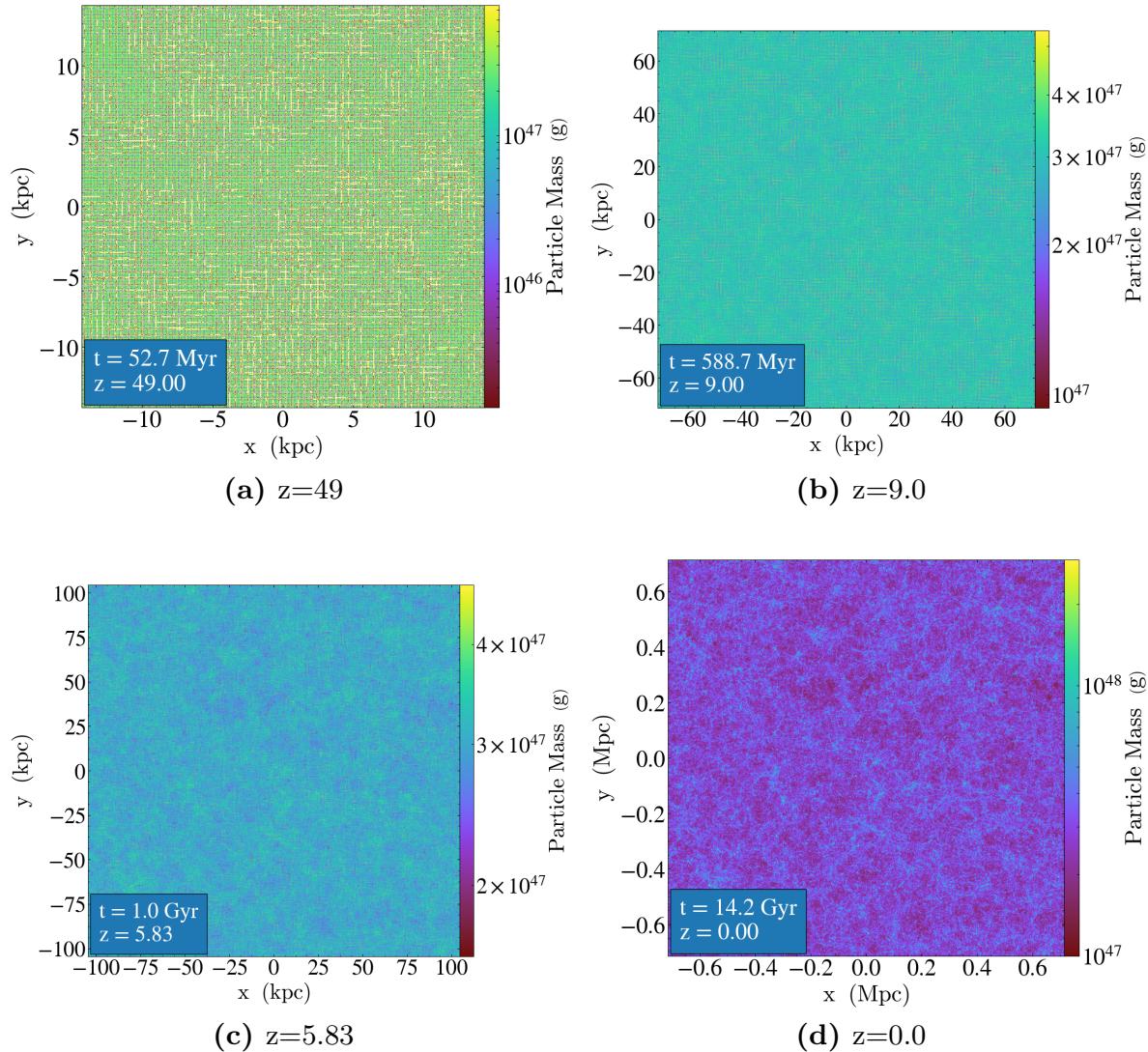


Figura 4.5: Posición de las partículas en la simulación DM2. En las imágenes de arriba se muestran las posiciones de las partículas a diferentes corrimientos al rojo de la simulación DM. Los colores dibujan qué tan masivo es la región.

También nos interesa conocer cómo es que el espectro de potencias cambia al paso del tiempo en la simulación y si es que las inhomogeneidades mantienen ciertas estructura al paso del tiempo. En seguida se muestra una gráfica con el espectro de potencias de diferentes simulaciones a diferentes redshifts comparados con el espectro de potencias inicial.

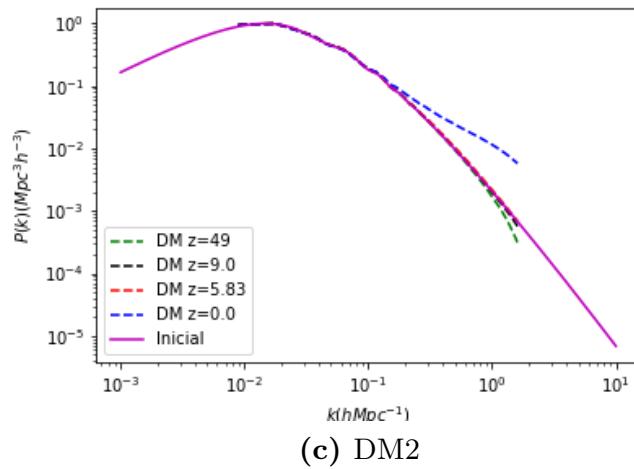
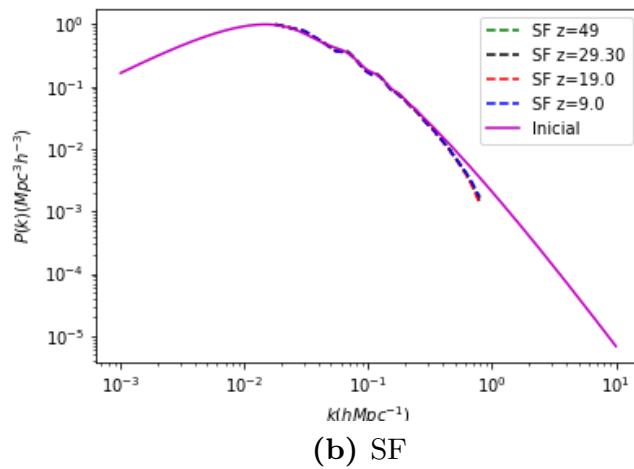
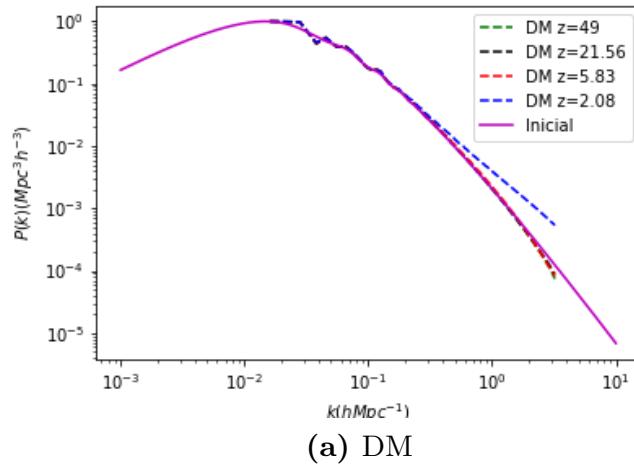


Figura 4.6: Espectro de potencias en la simulación de las simulaciones. Las gráficas se encuentran en escala logarítmica en ambos ejes y normalizadas a 1.

En estas gráficas 4.6 podemos observar esas pequeñas oscilaciones que son las de BAO.

Como ya se mencionó en la sección 4.2.1, la función de correlación y el espectro de potencias tienen una relación estrecha (ecuación (4.13)), entonces podemos pasar de un función de correlación a un espectro de potencias, y viceversa. De esta manera, nosotros para comenzar nuestras simulaciones teníamos primeramente un espectro de potencias que nos ayudó para generar nuestras condiciones iniciales, para la cual, haciendo la transformada de Fourier podremos encontrar la función de correlación teórica para ese espectro de potencias. Es claro que este proceso es numérico. Esperamos entonces que al realizar este proceso obtengamos lo que obtendríamos lo mismo que si calculáramos la función de correlación con algún estimador.

En la figura 4.7 podemos ver el resultado del cálculo de la función de correlación teórica dado el espectro de potencias mencionado en la sección 4.1, y los resultados de la función de correlación calculada de los datos obtenidos en las simulaciones.

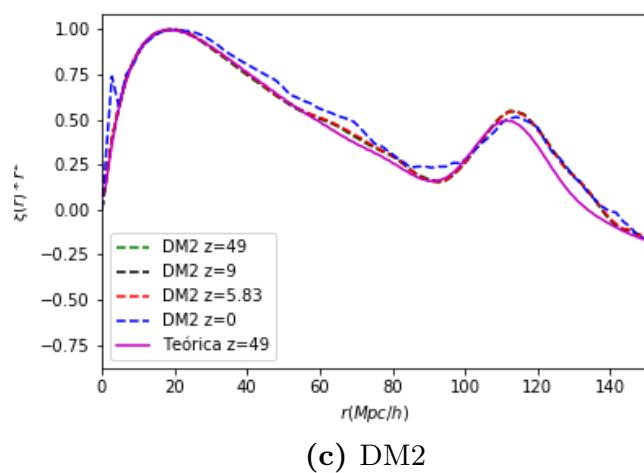
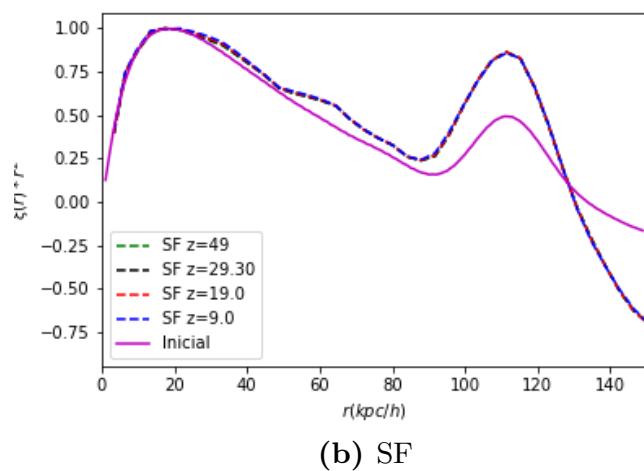
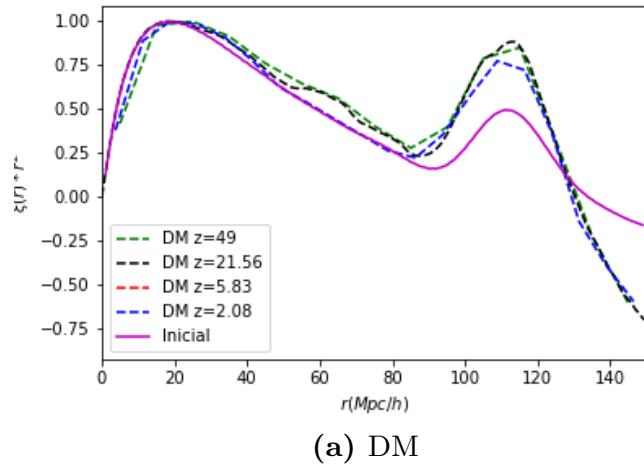


Figura 4.7: Función de correlación en la simulación de las simulaciones. La función se encuentra normalizada para hacer más sencillo la comparación de las curvas.

Antes de seguir explicaré el concepto es de BAO (Baryon acoustic oscillations que en español es Oscilaciones acústicas de bariones) para entender bien la figura 4.7.

Ya hablábamos en la sección 2.3.3 sobre ese momento en que el Universo era una sopa caliente donde nada escapaba de ahí, ese momento antes del desacoplamiento, antes de esa fotografía del CMB que podemos ver hoy en día. Es en este momento, cuando tenemos un plasma muy caliente, que existen una sobredensidad en ciertas regiones que causan la materia quiera agruparse por su gravedad, pero como ya dije, al estar todo muy cerca; las interacciones entre los fotones y la materia genera calor que a su vez genera una presión hacia el exterior, es entonces una lucha entre la presión hacia el exterior y la atracción de la gravedad. Esta lucha entre la presión y la gravedad crea oscilaciones análogas a las ondas de sonido creadas en el aire por diferencias de presión. Al hablar de materia nos referimos a materia oscura y bariones, por lo que las interacciones suceden entre materia oscura, bariones y fotones.

En una zona con sobredensidad la presión da como resultado una onda de sonido esférica de bariones y fotones que se mueven con una velocidad ligeramente superior a la mitad de la velocidad de la luz hacia afuera, quedando en el centro la materia oscura debido a que solo interactúa gravitacionalmente y se considera el origen de esta sobredensidad. Como ya dije, los fotones y bariones se desplazaron del centro hacia las orillas (de cada sobredensidad), al ocurrir el desacoplamiento, los fotones dejan de interactuar y comienzan a viajar lo que libera la presión y deja atrás un cascarón de materia bariónica a un radio preferente, conocido como el horizonte de sonido. Una vez que la presión es liberada, entonces la fuerza gravitacional hace su trabajo, lo que crea arreglos de materia oscura y materia bariónica, donde la materia oscura se encuentra en el centro y alrededor en un cascarón de radio preferente se encuentra la materia bariónica.

Este evento deja huella pues las galaxias se agrupan con un patrón similar, por lo que se espera ver que las galaxias se encuentren separadas por este horizonte de sonido. Es difícil que al observar el cielo se pueda encontrar este patrón pues el trazo de materia que vemos es la superposición

de muchas de estas sobredensidades o anisotropías, lo que complica que a simple vista podamos encontrar este horizonte de sonido; sin embargo, haciendo uso del análisis estadístico podemos encontrar este patrón. Con la función de correlación podemos encontrar precisamente esta relación.

Podemos observar que el segundo pico de las curvas en la gráfica 4.7, precisamente llamado el pico de BAO, este se encuentra a $r \sim 110 Mpc/h$, pico ya bien caracterizado de los múltiples de surveys de galaxias.

Es importante hacer notar que en nuestro de espectro inicial obtenemos estos picos bien definidos que posteriormente, a través de la evolución no-lineal, se siguen observando en la distribución de nuestras partículas, que como ya dije anteriormente, estas partículas como tal no son una partícula de materia oscura, sino un gran cúmulo de ellas, que bien pueden representar los halos de materia oscura que acompañan a las galaxias. Entonces vemos que precisamente a través del tiempo las galaxias y demás estructura en el Universo se sigue agrupando con este particular patrón aunque la anchura de estos picos cambia debido precisamente a que el proceso dejó de ser lineal.

Si bien, es evidente que el pico de BAO se encuentra más alto que el teórico en las gráfica 4.7a y 4.7b, esto es debido al tamaño de la caja con la que trabajamos, debido a que en esos casos las cajas de las simulaciones eran de $500 Mpc/h$ entonces la estadística que teníamos era pobre y se concentraba gran cantidad de partículas en ese pico de BAO por lo que era más alto, cosa contraria a cuando hacemos el análisis en la simulación DM2 (Figura 4.7c) donde el tamaño de la caja es del doble, entonces vemos la amplitud de los picos como en el espectro inicial.

Capítulo 5

Conclusiones

A lo largo del texto hemos conocido un poco más acerca de lo que es una simulación cosmológica, desde su motivación, pasando por su construcción, su optimización hasta llegar a los resultados y el análisis de ellos. En estos momentos, después de haber leído todos los capítulos anteriores, el lector ya puede darse cuenta de que las simulaciones son una herramienta importante de análisis dentro del campo de la cosmología.

La construcción de un código es el conjunto de mucho cómputo, física y métodos numéricos, además del análisis de los resultados que a su vez es una suma de estadística, más cómputo y física. Es importante conocer cada parte que componen a nuestro código y el significado de cada parámetro para que así se pueda sacar el mayor provecho de ésta.

Con base en los resultados que hemos obtenido con los análisis simples que se hicieron a lo que nos arrojaron las simulaciones, hemos podido darnos cuenta que simulaciones cosmológicas son una herramienta bastante útil y confiable, esto debido a que al hacer la comparación de las observaciones y nuestros propios resultados podemos ver que dentro de un rango considerable nuestros resultados empatan con las observaciones. De esta manera, hemos podido ver que sí existe una relación bastante importante entre esas fluctuaciones iniciales de la densidad y la estructura que se ve formada al día de hoy.

Si bien, los resultados de las simulaciones que aquí mostramos, son del tipo de análisis típicos de las simulaciones, existen otro tipo de cosas que se pueden hacer con los resultados de una simulación, cosas un poco más interesantes y menos comunes, por decirlo así. Parte del objetivo del texto es mostrar la importancia de las simulaciones debido a la capacidad que tiene de darnos información sobre el Universo por medio del análisis estadístico de ellas.

Así que, las simulaciones cosmológicas representan para la cosmología de hoy en día una forma de obtener información acerca del nuestro Universo y de nuestros modelos de él. Podemos fiarnos de los resultados de las simulaciones pues podemos darnos cuenta de que éstos resultados se encuentran en una buena posición con respecto a las observaciones con las que podemos comparar la información.

Aunque dentro de este trabajo se tocan temas pilares para las simulaciones (desde la construcción hasta su análisis), quedan fuera algunos otros temas menos comunes pero que harían más rica y provechosa la información que extraemos de ellas. Queda entonces este texto como una introducción al mundo de las simulaciones cosmológicas intentando hacer que el lector se encuentre más familiarizado con las componentes de estas, dejando en claro que esta herramienta es tan grande que los resultados que de ahí podemos obtener son muchos más grandes que los que aquí se mostraron.

Sin duda alguna, el provecho que se le sacó a la información que teníamos de las simulaciones no es el que más se deseara al iniciar, pues quedan en mente varias preguntas más sobre el análisis de la estructura, de manera más cuantitativa y no tan cualitativa como lo vimos aquí. Claro esta que este tipo de proyectos tiene mucho más que darnos y podemos sacarle más provecho, por lo que considero que debido a que aquí no hemos podido llegar más lejos, con un poco más de profundidad en el tema de formación de estructura, se puede extender el uso de códigos como este para hacer cosas más interesantes.

Apéndice A

Unidades de Medida en cosmología

En la cosmología será poco conveniente tratar con las unidades convencionales que en el día a día se tratan, por lo que será necesario una explicación previa para estar de acuerdo con las unidades que usaremos.

Para medir distancias se utiliza el parsec (pc) que equivale a la distancia a la cual 1 AU (unidad astronómica, que es la distancia entre la Tierra y el Sol) subtiende un ángulo de 1 arcosegundo. En el SI, $1\text{pc} = 3.1 \times 10^{16}\text{m}$. La medida estándar para medir masas es la masa solar (M_\odot), que en unidades del sistema métrico, una masa solar es $1M_\odot = 2.0 \times 10^{30}\text{kg}$. Como el sol es la estrella que más conocemos sobre ella, también la usamos como medida estándar de luminosidad, siendo así $1L_\odot = 3.8 \times 10^{26}\text{watts}$.

Medir el tiempo en segundos resulta complicado, por lo que también se usa otra unidad, aunque más conocida popularmente; el año (que es el tiempo en el que la Tierra da una vuelta alrededor del Sol), aunque sigue siendo una unidad pequeña, se usarás los giga-años que es igual a $10^9\text{años} = 3.2 \times 10^{16}\text{s}$. En cambio, cuando se hable del Universo temprano se estará refiriendo a cosas pequeñas que necesitan ser medidas con unidades pequeñas, unidades que son usadas por los físicos de partículas. Las energías se miden en electrón volts, $1\text{eV} = 1.6 \times 10^{-19}\text{J}$.

Apéndice B

Deducción de las Ecuaciones de Friedmann

Para obtener las ecuaciones de Friedmann, la métrica de Robertson-Walker será vertida en las ecuaciones de campo de Einstein:

$$R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}R + \Lambda g_{\alpha\beta} = 8\pi G T_{\alpha\beta}. \quad (\text{B.1})$$

$R_{\alpha\beta}$ es el tensor de Ricci y R el escalar de Ricci, ambos funciones de $g_{\alpha\beta}(x)$, donde x se refiere a todas las coordenadas tanto espaciales como temporal. $T_{\alpha\beta}$ es el tensor de energía-momento donde estará contenida la información sobre la materia del Universo.

Resolvamos primero a parte izquierda de la ecuación (B.1).

Empezaremos construyendo los símbolos de Christoffel a partir de la métrica

$$\Gamma_{\beta\theta}^{\alpha} = \frac{1}{2}g^{\gamma\alpha}(\partial_{\beta}g_{\theta\gamma} + \partial_{\theta}g_{\beta\gamma} - \partial_{\gamma}g_{\beta\theta}) \quad (\text{B.2})$$

Los únicos símbolos de Christoffel no nulos son

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{rr}^t &= \frac{a\dot{a}}{1 - kr^2} \\
 \Gamma_{\theta\theta}^t &= a\dot{a}r^2 \\
 \Gamma_{\phi\phi}^t &= a\dot{a}r^2 \sin^2 \theta \\
 \Gamma_{tr}^r &= \Gamma_{rt}^r = \Gamma_{\theta t}^\theta = \Gamma_{t\theta}^\theta = \Gamma_{t\phi}^\phi = \Gamma_{\phi t}^\phi = \frac{\dot{a}}{a} \\
 \Gamma_{rr}^r &= \frac{rk}{1 - kr^2} \\
 \Gamma_{r\phi}^\phi &= \Gamma_{\phi r}^\phi = \Gamma_{\theta r}^\theta = \Gamma_{r\theta}^\theta = \frac{1}{r} \\
 \Gamma_{\theta\phi}^\phi &= \Gamma_{\phi\theta}^\phi = \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \\
 \Gamma_{\theta\theta}^r &= -r(1 - kr^2) \\
 \Gamma_{\phi\phi}^r &= -r \sin^2 \theta(1 - kr^2) \\
 \Gamma_{\phi\phi}^\theta &= -\sin \theta \cos \theta.
 \end{aligned}$$

Con los símbolos de Christoffel podremos construir el tensor de Riemann

$$R^\alpha{}_{\beta\gamma\theta} = \partial_\gamma \Gamma^\alpha_{\beta\theta} - \partial_\theta \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} + \Gamma^\alpha_{\eta\gamma} \Gamma^\eta_{\beta\theta} - \Gamma^\alpha_{\eta\theta} \Gamma^\eta_{\beta\gamma} \quad (\text{B.3})$$

Las únicas componentes que son diferentes de cero son 16, de las 256 componentes que tiene el tensor de Riemann, éstas son:

$$\begin{aligned}
 R^r{}_{ttr} &= -R^r{}_{trt} = R^\phi{}_{tt\phi} = -R^\phi{}_{t\phi t} = R^\theta{}_{tt\theta} = -R^\theta{}_{t\theta t} = \frac{\ddot{a}}{a} \\
 R^t{}_{rtr} &= -R^t{}_{rrt} = \frac{\ddot{a}a}{1 - kr^2} \\
 R^t{}_{\phi t\phi} &= -R^t{}_{\phi\phi t} = \ddot{a}ar^2 \sin^2 \theta \\
 R^t{}_{\theta t\theta} &= -R^t{}_{\theta\theta t} = \ddot{a}ar^2 \\
 R^r{}_{\theta r\theta} &= -R^r{}_{\theta\theta r} = R^\phi{}_{\theta\phi\theta} = -R^\phi{}_{\theta\theta\phi} = r^2(\dot{a}^2 + k) \\
 R^\theta{}_{r\theta r} &= -R^\theta{}_{r\theta\theta} = R^\phi{}_{r\phi r} = -R^\phi{}_{r\theta\phi} = \frac{\dot{a}^2 + k}{1 - kr^2} \\
 R^r{}_{\phi r\phi} &= -R^r{}_{\phi\phi r} = R^\theta{}_{\phi\theta\phi} = -R^\theta{}_{\phi\phi\theta} = r^2 \sin^2 \theta(\dot{a}^2 + k)
 \end{aligned}$$

Una vez que ya tenemos las componentes del tensor de Riemann podemos encontrar el tensor de Ricci que será utilizado en las ecuaciones de campo de Einstein, este tensor esta dado por

$$R_{\beta\theta} = \partial_\gamma \Gamma_{\beta\theta}^\gamma - \partial_\theta \Gamma_{\beta\gamma}^\gamma + \Gamma_{\eta\gamma}^\gamma \Gamma_{\beta\theta}^\eta - \Gamma_{\eta\theta}^\gamma \Gamma_{\beta\gamma}^\eta \quad (\text{B.4})$$

Las únicas componentes del tensor de Ricci que son no nulas son

$$\begin{aligned} R_{tt} &= -3 \frac{\dot{a}}{a} \\ R_{rr} &= \frac{\ddot{a}a + 2\dot{a}^2 + 2k}{1 - kr^2} \\ R_{\theta\theta} &= (2\dot{a}^2 + a\ddot{a} + 2k)r^2 \\ R_{\phi\phi} &= (a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k)r^2 \sin^2 \theta \end{aligned}$$

Así, podemos encontrar el escalar de Ricci que será

$$R \equiv g^{\beta\theta} R_{\beta\theta} = \frac{6}{a^2} (\ddot{a}a + \dot{a}^2 + k). \quad (\text{B.5})$$

Hasta aquí hemos establecido la parte geométrica del Universo, para encontrar nuestras ecuaciones de movimiento nos hace falta la información de la materia que estará contenida en el tensor de energía-momento.

Debido al mismo principio cosmológico el tensor de energía momento que describirá satisfactoriamente el contenido de materia en el Universo será el de un fluído ideal, que es

$$T_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{bmatrix}$$

en coordenadas cartesianas (t, x, y, z) , al transformarlo a las coordenadas esféricas que estamos usando tenemos que

$$T_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{pa^2(t)}{1-kr^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & pa^2(t)r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & pa^2(t)r^2 \sin^2 \theta \end{bmatrix} \quad (B.6)$$

Sustituyendo lo anterior en las ecuaciones de Campo de Einstein (B.1) obtenemos las siguientes cuatro ecuaciones:

$$\frac{-3\ddot{a}}{a} + \frac{1}{2} \frac{6(\ddot{a}a + \dot{a}^2 + k)}{a^2} - \Lambda = 8\pi G\rho \quad (B.7)$$

$$\frac{\ddot{a}a + 2\dot{a}^2 + 2k}{1-kr^2} - \frac{1}{2} \frac{a^2}{1-kr^2} \frac{6(\ddot{a}a + \dot{a}^2 + k)}{a^2} + \frac{a^2}{1-kr^2} \Lambda = \frac{8\pi Ga^2}{1-kr^2} p \quad (B.8)$$

$$(\ddot{a}a + 2\dot{a}^2 + 2k) r^2 - \frac{1}{2} a^2 r^2 \frac{6(\ddot{a}a + \dot{a}^2 + k)}{a^2} + a^2 r^2 \Lambda = 8\pi G p a^2 r^2 \quad (B.9)$$

$$(\ddot{a}a + 2\dot{a}^2 + 2k) r^2 \sin^2 \theta - \frac{1}{2} a^2 \frac{6(\ddot{a}a + \dot{a}^2 + k)}{a^2} r^2 \sin^2 \theta + a^2 r^2 \sin^2 \theta \Lambda = 8\pi G p a^2 r^2 \sin^2 \theta \quad (B.10)$$

Las ecuaciones (B.8), (B.9) y (B.10) nos dan la misma relación por lo que solo tendremos dos ecuaciones, de (B.7) obtendremos directamente la primera de las ecuaciones de Friedmann mientras que la segunda es una mezcla de todas las ecuaciones. Las ecuaciones de Friedmann son:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G \rho}{3} - \frac{k}{a^2} + \frac{\Lambda}{3} \quad (B.11)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3} (\rho + 3 p) + \frac{\Lambda}{3} \quad (B.12)$$

Bibliografía

- [1] 2LPTic code. <http://cosmo.nyu.edu/roman/2LPT/>. Acceso: 12-enero-2018.
- [2] Axion-Gadget code. <https://github.com/liambx/Axion-Gadget>. Acceso: 12-enero-2018.
- [3] Changa simulations code. <http://faculty.washington.edu/trq/hpcc/tools/changa.html>. Acceso: 17-enero-2018.
- [4] CMBfast code. https://lambda.gsfc.nasa.gov/toolbox/tb_cmbfast_ov.cfm. Acceso: 12-enero-2018.
- [5] Enzo simulations code. <https://enzo.readthedocs.io/en/latest/>. Acceso: 17-enero-2018.
- [6] Las Damas (Large Suite of Dark Matter Simulations). <http://lss.phy.vanderbilt.edu/lasdamas/>. Acceso: 12-enero-2018.
- [7] The ramses code. http://irfu.cea.fr/Phocea/Vie_des_labos/Ast/ast_ssstechnique.php?id_ast=904. Acceso: 17-enero-2018.
- [8] S.J. Aarseth. *Gravitational N-Body Simulations: Tools and Algorithms*. Cambridge Monographs on Mathematical Physics. Cambridge University Press, 2003.
- [9] P. A. R. Ade et al. Planck 2013 results. XVI. Cosmological parameters. *Astron. Astrophys.*, 571:A16, 2014.
- [10] Miguel Alcubierre, F. Siddhartha Guzman, Tonatiuh Matos, Dario Nunez, L. Arturo Urena-Lopez, and Petra Wiederhold. Scalar field dark

- matter and galaxy formation. In *Dark matter in astro- and particle physics. Proceedings, 4th Heidelberg International Conference, DARK 2002, Cape Town, South Africa, February 4-9, 2002*, pages 356–364, 2002.
- [11] D. Alonso. CUTE solutions for two-point correlation functions from large cosmological datasets. *ArXiv e-prints*, October 2012.
 - [12] J. Barnes and P. Hut. A hierarchical $O(N \log N)$ force-calculation algorithm. *Nature*, 324:446–449, December 1986.
 - [13] C. Baugh. *Correlation Function and Power Spectra in Cosmology*, page 2136. November 2000.
 - [14] Edmund Bertschinger. Simulations of structure formation in the universe. *Annual Review of Astronomy and Astrophysics*, 36:599–654, September 1998.
 - [15] F. R. Bouchet. Introductory overview of Eulerian and Lagrangian perturbation theories. In *Dark matter in the universe. Proceedings, 132nd course of the International School of Physics *Enrico Fermi**, Varenna, Italy, July 25–August 4, 1995, pages 565–599, 1995.
 - [16] S.C. Chapra and R.P. Canale. *Métodos numéricos para ingenieros*. McGraw-Hill, 2007.
 - [17] M. Crocce, S. Pueblas, and R. Scoccimarro. Transients from Initial Conditions in Cosmological Simulations. *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, 373:369–381, 2006.
 - [18] M. Vargas-Magaña et al. An optimized correlation function estimator for galaxy surveys. *Astronomy & Astrophysics*, 554:A131, jun 2013.
 - [19] P. J. E. Peebles. *Principles of Physical Cosmology*. Princeton Theories in Physics. Princeton University Press, 1993.
 - [20] Adrian Jenkins. Second-order lagrangian perturbation theory initial conditions for resimulations. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 403(4):1859–1872, 2010.

- [21] Andrew R. Liddle. *An introduction to modern cosmology*. Wiley, 2nd ed edition, 2003.
- [22] Tonatiuh Matos, Francisco Siddhartha Guzman, and L. Arturo Urena-Lopez. Scalar field as dark matter in the universe. *Class. Quant. Grav.*, 17:1707–1712, 2000.
- [23] Tonatiuh Matos, Francisco Siddhartha Guzman, L. Arturo Urena-Lopez, and Dario Nunez. Scalar field dark matter. In *Exact solutions and scalar fields in gravity: Recent developments. Proceedings, Meeting, Mexico City, Mexico, October 1-6, 2000*, pages 165–184, 2001.
- [24] Tonatiuh Matos and L. Arturo Urena-Lopez. On the nature of dark matter. *Int. J. Mod. Phys.*, D13:2287–2292, 2004.
- [25] J. A. Peacock. *Cosmological Physics*. Cambridge University Press, 1999.
- [26] D.C. Rapaport. *The Art of Molecular Dynamics Simulation*. Cambridge University Press, 1998.
- [27] Wolfgang Rindler. *Relativity. Special, General, and Cosmological*. Oxford University Press, 2nd ed edition, 2006.
- [28] Mario A. Rodríguez-Meza. *Métodos numéricos en astrofísica*. Inovación editorial lagares, 2011.
- [29] Barbara Ryden. *Introduction to cosmology*. Addison Wesley, 2003.
- [30] Volker Springel. The cosmological simulation code gadget-2. *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, 364:1105–1134, 2005.
- [31] Volker Springel. High performance computing and numerical modelling. 2014.
- [32] Volker Springel, Naoki Yoshida, and Simon D. M. White. GADGET: A Code for collisionless and gasdynamical cosmological simulations. *New Astron.*, 6:79, 2001.

- [33] Steven Weinberg. *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity*. Wiley, New York, NY, 1972.
- [34] Steven Weinberg. *Cosmology*. Oxford, 2008.
- [35] Martin White. The Zel'dovich approximation. *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, 439(4):3630–3640, 2014.
- [36] Jiajun Zhang, Yue-Lin Sming Tsai, Kingman Cheung, and Ming-Chung Chu. Ultra-Light Axion Dark Matter and its impacts on dark halo structure in N -body simulation. 2016.



Universidad
de Guanajuato

CAMPUS LEÓN
DIVISIÓN DE CIENCIAS E INGENIERÍAS
DEPARTAMENTO DE FÍSICA

León, Gto., Febrero 8 2018

Dr. David Delepine

DIRECTOR

División de Ciencias e Ingeniería,
Universidad de Guanajuato

PRESENTE

Estimados Dr. Delepine:

Por este medio me permito informarle que he revisado la tesis "Simulaciones Cosmológicas de N-Cuerpos" que presenta la alumna Alejandra Gutiérrez Aguirre, inscrita en el programa de la Licenciatura en Física de la División de Ciencias e Ingenierías, Campus León, de la Universidad de Guanajuato.

Considero que el trabajo está listo para ser defendido de manera oral en su examen de grado.

Cualquier pregunta al respecto, no dude en hacermelo saber.

A handwritten signature in blue ink.

Reciba un cordial saludo

Dra. Alma González

Cátedra CONACYT

Departamento de Física, Universidad de Guanajuato,

Campus León

Loma del Bosque # 103, Col. Loma del Campestre. León, Guanajuato, México. C. P. 37150
Tel: +52 (477) 7885100 Exts. 8420 y 8421, Fax. Ext. 8410.



Universidad
de Guanajuato

CAMPUS LEÓN
DIVISIÓN DE CIENCIAS E INGENIERÍAS
DEPARTAMENTO DE FÍSICA

Asunto: Revisión de trabajo de titulación
León, Gto., Febrero de 2018

DR. DAVID Y. G. DELEPINE
DIRECTOR DE LA DIVISIÓN DE CIENCIAS E INGENIERÍAS
PRESENTE

Por este medio hago constar que he revisado el trabajo **Simulaciones cosmológicas de N-cuerpos**, que presenta la estudiante **Alejandra Gutiérrez Aguirre**, del programa de Licenciatura en Física de la DCI.

En mi opinión, la tesis se encuentra bien escrita y presenta un desarrollo adecuado de las bases teóricas del tema central, se encuentran en la misma resultados numéricos originales e interesantes, para el estudio de la formación de estructura cosmológica mediante el método de N-cuerpos. Cabe destacar que para el trabajo la estudiante Gutiérrez hizo uso de códigos propios como de códigos disponibles libremente y que son utilizados para el trabajo científico de frontera. Finalmente, los comentarios hechos al trabajo han sido tomados en cuenta para la versión final del texto.

Por todo lo anterior, estoy de acuerdo en que el trabajo se presente para su defensa ante el comité sinodal designado en alguna fecha posterior que se considere pertinente.

Agradeciendo su amable atención, aprovecho la ocasión para enviarle un cordial saludo.

ATENTAMENTE
"LA VERDAD OS HARÁ LIBRES"

L. A. L.
DR. LUIS ARTURO UREÑA LÓPEZ
PROFESOR TITULAR C

Loma del Bosque # 103, Col. Loma del Campesino. León, Guanajuato, México. C. P. 37150
Tel: +52 (477) 7885100 Exts. 8420 y 8421, Fax. Ext. 8410.

UNIVERSIDAD DE
GUANAJUATO



León Guanajuato a 8 de febrero del 2018.

Dr. David Delepine
DIRECTOR
División de Ciencias e Ingenierías, Campus León
Universidad de Guanajuato
PRESENTE

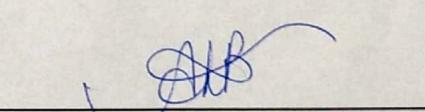
Estimados Dr. Delepine:

Por este medio me permito informarle que he leído la tesis "Simulaciones Cosmológicas de N cuerpos" escrita por la alumna Alejandra Gutiérrez Aguirre, inscrita en el programa de la Licenciatura en Física de la División de Ciencias e Ingenierías, Campus León, de la Universidad de Guanajuato. Así mismo, le he dado a la alumna mis sugerencias para mejorar la presentación de su trabajo, mismas que ella ha considerado en la versión final de su tesis.

Por lo anterior, considero que el trabajo está listo para ser defendido de manera oral en su examen de grado.

Sin más por el momento, quedo a sus órdenes para cualquier aclaración respecto al contenido de esta carta.

ATENTAMENTE



Dra. Ana Laura Benavides Obregón

División de Ciencias e Ingenierías
Loma del Bosque # 103, Col. Loma del Campesino. León, Guanajuato, México. C. P. 37150
Tel: +52 (477) 7885100 Ext. 8411 www.dci.ugto.mx



Asunto: Revisión de Tesis
León, Guanajuato, Febrero de 2018

Dr. David Y. G. Delepine
Director
División de Ciencias e Ingenierías, Campus León
Universidad de Guanajuato
PRESENTE

Estimado Dr. Delepine:

Por medio de la presente le informo que he revisado la tesis "Simulaciones Cosmológicas de N-Cuerpos" escrita por la estudiante de la licenciatura en Física de la DCI, Alejandra Gutierrez Aguirre. En mi opinión la tesis esta lista para ser presentada y estoy de acuerdo que se proceda al examen recepcional, una vez que se cumplan los procedimientos administrativos correspondientes.

Sin más por el momento, le envío saludos cordiales.

ATENTAMENTE
"LA VERDAD OS HARÁ LIBRES"

A handwritten signature in blue ink, appearing to read "Argelia Bernal Bautista".

DRA. ARGELIA BERNAL BAUTISTA