

Programación básica

Proyecto 1: Órbita de un planeta entorno a una estrella.

Prof. Alma González

September 24, 2018

1. La dinámica de un planeta moviéndose alrededor de una estrella puede obtenerse a partir de resolver la ecuación :

$$\vec{F} = m_p \vec{a}_p. \quad (1)$$

La fuerza que siente el planeta es la fuerza de atracción gravitacional debido a la presencia de la estrella, dada por:

$$\vec{F} = -\frac{GM_* m_p}{r^3} \vec{r}, \quad (2)$$

donde $G = 4\pi^2 yr^{-2} AU M_\odot^{-1}$ es la constante de Gravitación Universal, en unidades de Masas Solares, unidad astronomica y años. Combinando las ecuaciones 1 y 2 se obtiene la ecuación de movimiento:

$$m_p \ddot{\vec{r}} = -\frac{GM_* m_p \vec{r}}{r^3}. \quad (3)$$

Nota que \vec{r} es el vector distancia entre la estrella y el planeta y r es su magnitud. Dado que la ecuación 3 es vectorial, podemos separarla en componentes (usaremos coordenadas cartesianas centradas en la estrella) :

$$\ddot{x} = -\frac{GM_* x}{r^3}, \quad (4)$$

$$\ddot{y} = -\frac{GM_* y}{r^3}, \quad (5)$$

$$\ddot{z} = -\frac{GM_* z}{r^3}, \quad (6)$$

y $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Las ecuaciones diferenciales anteriores, de segundo orden, pueden reescribirse de la forma :

$$\dot{v}_x = -\frac{GM_* x}{r^3} \quad (7)$$

$$\dot{x} = v_x \quad (8)$$

$$\dot{v}_y = -\frac{GM_* y}{r^3} \quad (9)$$

$$\dot{y} = v_y \quad (10)$$

$$\dot{v}_z = -\frac{GM_* z}{r^3} \quad (11)$$

$$\dot{z} = v_z \quad (12)$$

Entonces, resolver la órbita del planeta significa resolver las ecuaciones anteriores, para encontrar $x(t), y(t), z(t)$; en el proceso también se calcula

$v_x(t), v_y(t), v_z(t)$. Es decir se calculan las posiciones y las velocidades del planeta a cada paso de tiempo.

El método más sencillo de implementar es el de Euler. Consiste en establecer un conjunto de posiciones (x_0, y_0, z_0) y velocidades iniciales $(v_{x_0}, v_{y_0}, v_{z_0})$ a un tiempo inicial t_0 , y actualizarlas a un tiempo posterior t_i para obtener las nuevas posiciones y velocidades en el tiempo i -ésimo, siguiendo la siguiente regla :

$$x_i = x_0 + v_{x_0} * h \quad (13)$$

$$y_i = y_0 + v_{y_0} * h \quad (14)$$

$$z_i = z_0 + v_{z_0} * h \quad (15)$$

$$v_{x,i} = v_{x,0} - h * \frac{GM_* x_0}{r_{t_0}^3} \quad (16)$$

$$v_{y,i} = v_{y,0} - h * \frac{GM_* y_0}{r_{t_0}^3} \quad (17)$$

$$v_{z,i} = v_{z,0} - h * \frac{GM_* z_0}{r_{t_0}^3} \quad (18)$$

$$(19)$$

donde h es el paso de tiempo $h = t_i - t_0$. A cada paso de tiempo se rempazan las posiciones y velocidades iniciales por las nuevas, para poder dar un nuevo paso de tiempo.

Esto es: las coordenadas y las velocidades , al tiempo t_i dependen de las velocidades y las posiciones al tiempo t_0 . Consideraremos un paso de tiempo constante y daremos un valor suficientemente pequeño para que la evolución de la órbita sea precisa (h 0.001 cuando la velocidad está dada en AU/yr). Nota que h es un parámetro con el que se deberán hacer pruebas, hasta obtener un buen resultado.

Proyecto:

Se usará la información anterior para calcular la órbita de los planetas de nuestro sistema solar entorno al sol. Por ejemplo: en unidades usuales en astronomía, la masa del sol es $M_{sol}=1M_{\odot}$, mientras que la masa de los planeta es una fracción de ésta, por ejemplo la masa de la tierra es $M_T = 3 \times 10^{-6} M_{\odot}$. La distancia de la tierra al sol es de $d = 1AU$.

Para completar este proyecto se requiere :

- (a) Hacer el algoritmo o diagrama de flujo del programa a realizar, i.e., explicar la secuencia de pasos a seguir en el programa. **(1 Punto)**.
- (b) El programa debe **(5 puntos)**:
 - Leer a partir de un archivo los parámetros (masa de los planetas, masa de la estrella, el tiempo total de la evolución (recomendado que sean multiplos de años), y el tamaño del incremento temporal (h , se da en las mismas unidades que el tiempo total, y suele ser una fracción pequeña del mismo.)). Del mismo archivo también se deben leer 6 columnas con las posiciones y velocidades iniciales

del planeta (ver tabla)(x, y, z, v_x, v_y, v_z). (OJO: En este proyecto solo estamos resolviendo la órbita de 1 planeta a la vez, no de todos de forma auto-consistente)

- Se debe hacer la evolución temporal del método de Euler, para el número de pasos de tiempo definidos por las variables tiempo total de evolución y tamaño del incremento temporal. Todas las variables deben ser definidas adecuadamente al tipo de cantidad que representan.
 - Verificar que todas las variables se hayan definido adecuadamente al tipo de variables que son, i.e., definir aquellas que son enteros como enteros, etc...
- (c) Guardar en un archivo las nuevas posiciones y velocidades de cada planeta a cada paso de la evolución. **(1 Punto)**.
- (d) Gráficar la órbita obtenida (xV_{sy} , xV_{sz} , yV_{sz}), pueden usar el graficador de su preferencia **(1 Punto)**.
- (e) Se evaluará la presentación de los resultados. Que el programa esté debidamente comentado, compile y se ejecute correctamente **(1 Punto)**.
- (f) El programa debe hacerse funcionar primero para un solo planeta, y posteriormente generalizar para hacer todos los planetas a la vez. En este caso, se puede guardar la trayectoria de cada planeta en un archivo independiente para cada uno. **(1 Punto)**

Extra (1 punto): En la gráfica de la órbita, sobre los puntos poner una línea que corresponda a la solución analítica.