

Proyecto 2: Temperatura en una placa, estado estacionario

Prof. Alma González

October 22, 2018

La temperatura en cada punto de una placa muy delgada, que está aislada por los extremos excepto en los bordes de la superficie. Las condiciones de que sea una placa delgada, y que esté aislada, hacen que sea una buena aproximación el considerar que la transferencia de calor solo ocurre en el plano xy, sobre la superficie de la placa. Bajo esta suposición, la temperatura en cada punto de la placa, a un intervalo de tiempo dado, está determinada por la ecuación de Laplace (ver capítulo 29 del libro de Métodos numericos, Chapra, sexta edición):

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \quad (1)$$

Está es esencialmente una ecuación de conservación, expresada en terminos de la temperatura de la placa, T. Uno de los métodos de solución de esta ecuación se basa en representar cada pequeño elemento de area de la placa como un punto de coordenadas i,j., de tal forma que las derivadas de T en cada punto pueden ser aproximadas por la temperatura de los vecinos cercanos. Esto resultaria en un sistema de ecuaciones de N*N a resolver para encontrar la temperatura en cada uno de los N puntos de la placa que estemos usando. Resolver estas ecuaciones por un método matricial, no es apropiado, por lo que se usa otro método numérico, basado en un proceso iterativo. Uno de los métodos mas usados es el de Gauss-Seidel, que para esta ecuación se reduce a que la temperatura en cada punto de la placa está dada por

$$T_{i,j} = \frac{T_{i+1,j} + T_{i-1,j} + T_{i,j+1} + T_{i,j-1}}{4} \quad (2)$$

donde i, j representan posiciones en los ejes x, y de la placa, respectivamente. Ver figura 29.3 del Chapra.

Este proyecto consiste en escribir un programa en C que nos permita encontrar la temperatura en cada punto de la placa, dado que los bordes se encuentran a una temperatura fija. A continuación se enlistan los pasos a seguir para este proyecto y los elementos que debe contener el programa.

- El programa debe poder leer de un archivo, o bien de la linea de comandos, los parametros de la placa con los cuales se va realizar el calculo: Estos incluyen la temperatura de los bordes, que en general son diferentes en cada extremo, y el numero de puntos a usar en la aproximación. Por simplicidad tomaremos una placa cuadrada, por lo que debemos tener un numero total, $N=n*n$, que corresponda al cuadrado del numero de puntos en una dirección (n). (1 punto) TIP: Cada punto de la tabla está representado en el programa por un elemento de un arreglo de $n*n$ dimensiones. Debemos indicar también una tolerancia, ϵ en el cambio de temperaturas, de los puntos internos, que nos indique que ya encontramos la solución, esto es nuestro calculo se detendra cuando

$$\max(\text{Abs} \left(\frac{T_{i,j}^{\text{nuevo}} - T_{i,j}^{\text{old}}}{T_{i,j}^{\text{viejo}}} \right)) < \text{epsilon} \quad (3)$$

- Por simplicidad inicializaremos la temperatura en todos los puntos de la placa en cero, excepto los puntos que se encuentran en el borde y que deben tener la temperatura que el usuario indique. Por tanto debe haber

una función que asigne dichos valores a cada punto de la placa. (1/2 punto extra: inicializar los valores iniciales en valores dados en un archivo). (1 punto)

- Usar la ecuación 2 para calcular el valor de la temperatura en cada punto de la placa hasta que la condición 3 se satisfaga. Es muy recomendable definir un número máximo de iteraciones de tal forma que el programa siempre se detenga, aun cuando no se haya encontrado la solución con la precisión deseada. (2 puntos)
- Se deben guardar los valores de la temperatura de la placa, en archivos diferentes en cada iteración, para posteriormente visualizar el proceso. Se recomienda guardar en un formato de n filas por n columnas, de tal modo que se tenga una matriz donde cada elemento representa la temperatura en un punto de la placa. (2 puntos)
- El código, debe estar debidamente comentado, incluir un diagrama de flujo o esquema de como está organizado el programa. El código debe incluir el uso de funciones, así como de organizar el programa en diferentes archivos. (2 puntos)
- El programa debe compilar sin errores, y funcionar correctamente (1 punto)
- Para reportar los resultados se deben incluir gráficas de la temperatura en la placa para las diferentes iteraciones. Se debe discutir como cambia el número de iteraciones necesarias como función del parámetro epsilon, así como del número de puntos que se pongan en la placa. (1 punto)
- Las gráficas de los resultados pueden hacerse en cualquier programa que consideren conveniente.