Proyecto 1: Órbita de un planeta entorno a una estrella

Por: Gabriel Missael Barco

Lic. en Física
Programación Básica
Profesora: Alma Gonzáles
27 de septiembre de 2018

1. Introducción

La gravitación es una fuerza muy importante de no contacto. Es una de las mas importantes y universales de la naturaleza. La ley que describe la fuerza gravitacional entre dos cuerpos fue descubierta por Newton en 1665; ha explicado de manera convincente las fuerzas gravitacionales ejercidas sobre los objetos en la Tierra y también el movimiento de los planetas en el sistema solar (Resnick, Halliday y Krane; 2005). En el presente proyecto analizaremos las orbitas de los planetas del sistema solar usando la ley de gravitación universal, la segunda ley de newton y el método de Euler en un programa escrito con C++.

2. Marco Teórico

La segunda ley de newton dice que la fuerza es igual a la masa del objeto por su aceleración:

$$F = ma$$

Por otro lado, la ley de gravitación universal define la fuerza de atracción gravitacional en función de las masas de los objetos y la distancia que los separa:

$$\vec{F} = -G\frac{M_1 m_2}{r^3}\vec{r}$$

G es la constante gravitacional, cuyo valor experimental determinado para los fines de este proyectos será:

$$G = 4\pi^2 \frac{AU}{Año^2 Masa\ solar}$$

Donde AU corresponde a unidades astronómicas, que es la distancia media entre la tierra y el sol. Una masa solar corresponde a $1{,}989 \times 10^{30} kg$, que es la masa del sol.

Podemos igualar la segunda ley de newton con la ley de gravitación universal y descomponerla en sus proyecciones en el eje X, en el Y y en el eje Z. Esto debido a que ambas ecuaciones son consistentes dimensionalmente entre si (Newtons de fuerza) y se puede descomponer la ecuación resultante en sus partes porque la fuerza es un vector. Partimos de:

$$\vec{a}m_p = -G\frac{M_* m_p}{r^3}\vec{r}$$

Podemos dividir ambos lado de la ecuación entre m_p, y descomponerla en sus componentes en X, Y y Z:

$$\vec{a_x} = -G\frac{M_* x}{r^3}$$
$$\vec{a_y} = -G\frac{M_* y}{r^3}$$
$$\vec{a_z} = -G\frac{M_* z}{r^3}$$

Sabemos que la aceleración corresponde a la segunda derivada de la posición, y la velocidad corresponde a la primera derivada. Resolver la orbita del planeta corresponde a resolver las ecuaciones anteriores para encontrar las posiciones en X, Y y Z para cada paso tiempo.

Dejando eso de lado, ahora hablaremos del metodo de Euler. Este metodo es un procedimiento de integración numérica para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO) a partir de un valor inicial dado. El método de Euler es el más simple de los métodos numéricos para resolver un problema de valor inicial, y el más simple de los Métodos de Runge-Kutta. El método de Euler es nombrado por Leonhard Euler, quien lo trató en su libro Institutionum calculi integralis (publicado en 1768-1770).

Lo podemos usar para resolver las ecuaciones diferenciales anteriormente mencionadas para la orbita de un planeta. Para esto, los valores iniciales serán la posición (xo, yo, zo) y la velocidad (vx, vy, vz) del planeta en un momento dado, quedando para la posición:

$$x_i = x_o + h * vo_x$$
$$y_i = y_o + h * vo_y$$
$$z_i = z_o + h * vo_z$$

Y para la velocidad:

$$V_{xi} = vo_x - h * (G\frac{M_* xo}{r_o^3})$$
$$V_{yi} = vo_y - h * (G\frac{M_* yo}{r_o^3})$$
$$V_{zi} = vo_z - h * (G\frac{M_* zo}{r_o^3})$$

3. Codigo

A continuación, explicaremos el código realizado en este proyecto, el cual se titula "1P_orbitas.c". Lo primero que hace el programa es abrir un archivo en modo lectura. Este archivo es "lee.txt", que contiene la información que será necesaria para realizar las orbitas de los planetas.

Declaramos las variables que necesitaremos:

- ✓ N - Será el número de planetas a analizar, de tipo entero.
- ✓ planeta[20] - es de tipo char, y nos servirá para crear el archivo de cada planeta con su nombre.
- ✓ m_est - para la masa de la estrella.
- ✓ G - es la constante gravitacional.
- ✓ xo, yo, zo - para las posiciones iniciales.
- ✓ vx, vy, yz - para las velocidades iniciales.
- ✓ T - será el número de años que se analizará la trayectoria del planeta.
- ✓ h - es el paso de tiempo entre cada calculo (por ejemplo, 0.001 años).
- ✓ ro - para la distancia del planeta a la estrella.
- ✓ m_pla - para la masa del planeta.

Lo primero que se lee del archivo de lectura (de ahora en adelante read"), es N, para determinar el numero de planetas, y por lo tanto, de orbitas a tratar. Esto dentro de un ciclo for.

Una vez dentro del ciclo, se leerán, en el siguiente orden: planeta, xo, yo, zo, vx, vy, vz, m_est, T, h, m_pla. Esto es, por ejemplo, para el planeta Mercurio:

Mercurio.txt

0.0508011 -0.4011642 -0.2195576 0.02231875 0.00485553 0.00027924

1 5 0.001 0.00000016515837

Los datos de la velocidad y posición inicial para cada planeta fueron tomados de la imagen "Planetas.png". Es importante notar que la velocidad esta dad en $AU/día$, pero estamos trabajando con $AU/año$, por las unidades de G en las ecuaciones. Simplemente multiplicamos cada velocidad por 365.242, que son los días que hay en un año.

Luego de esto, creamos el archivo donde se escribirán las posiciones y velocidades en X, Y y Z para cada tiempo. Esto usando la variable *planeta*. Esta tendrá dentro el nombre del archivo, por ejemplo, en el caso de Mercurio, $Planeta = Mercurio.txt$. Entonces usamos el comando $fopen(planeta, "w")$;

Una vez hecho esto, estamos listos para trabajar con los datos.

El calculo de cada punto (que son las velocidades y posición del planeta), se realizará dentro de un ciclo for, que va desde $i = 0$ hasta $i <= T$, avanzando con pasos de tiempo de tamaño h. Por lo que, por ejemplo si T=5, y h=0.01, generaremos 500 puntos. Dentro de este ciclo, se realiza lo siguiente:

Primero, se imprimen los valores actuales de xo, yo, zo, vx, vy y vz. Luego, se actualizan los valores de yo, xo y zo, con:

$$x_o + = h * vo_x$$
$$y_o + = h * vo_y$$
$$z_o + = h * vo_z$$

Posteriormente, la nueva distancia a la estrella, con:

$$ro = \sqrt{(xo^2 + yo^2 + zo^2)}$$

Y finalmente, los nuevos valores para las velocidades con:

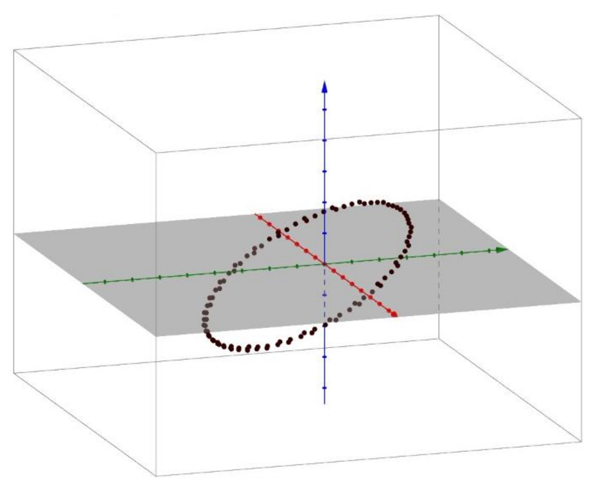
$$vx- = h\frac{(G) * (m_{est}) * (x_o)}{ro^3}$$
$$vy- = h\frac{(G) * (m_{est}) * (y_o)}{ro^3}$$
$$vz- = h\frac{(G) * (m_{est}) * (z_o)}{ro^3}$$

Este proceso se realizará, retomando el ejemplo de T=5 y h=0.01, 500 veces, y se irán actualizando los valores iniciales a cada paso (ya que no se guardan los valores anteriores en cada iteración).

Finalmente se cierra el archivo de escritura, para después leer los valores del siguiente planeta, procesarlos y guardar los resultados en un nuevo archivo. Esto N veces.

Por ultimo se cierra el archivo de lectura.

Figura 1. Orbita de mercurio obtenida con la primera versión del programa



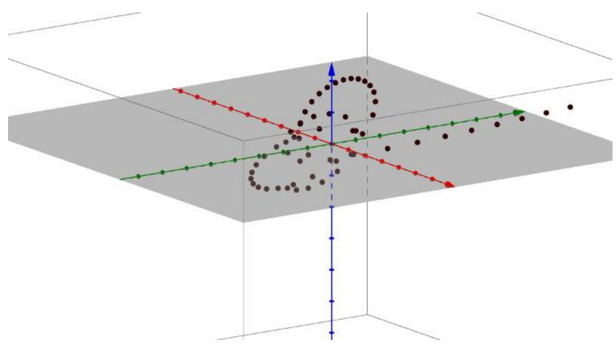
Este fue la primera aproximación del código. Graficando la orbita de mercurio con T=2 y h=0.01, se obtuvo la gráfica anterior. Podemos observar que los puntos no son continuos y están dispersos. Esto se puede mejorar haciendo el paso de tiempo mas pequeño. El problema con eso es que la cantidad de puntos incrementa considerablemente, y graficarlos resulta complicado. Una solución alternativa es, en efecto, disminuir el paso del tiempo a, por ejemplo con este caso, h=0.001 y además aumentando T a 5. Esto generaría 5000 puntos, pero en lugar de imprimirlos todos, que solo se impriman uno de cada diez puntos, esto hace que la cantidad de puntos sea 500 pero que se tenga la precisión de calcular 5000. Esto se logra con un contador y un condicional tipo if para imprimir.

Hecha esta corrección, el código funciona perfectamente y se obtienen gráficas de orbitas exactas y precisas.

4. Resultados

Tomando el ejemplo anterior, y jugando un poco con las masas solares, si la masa del sol fuera repentinamente el doble, esto pasaría con la orbita de mercurio:

Figura 2. Orbita de mercurio si la masa del sol fuera el doble



Es interesante, ya que la posición y velocidades de mercurio corresponden a un equilibrio entre la tendencia de este planeta de caer al sol o escapar. Si modificamos la masa del sol, el equilibrio se rompe, y después de orbitar dos veces, mercurio sale de orbita.

En las siguientes gráficas de las orbitas, el eje X es de color rojo, el eje Y de color verde y el eje Z de color azul.

Es importante mencionar que los valores de T y h para cada planeta son distintos, y están en función de los años que el planeta en cuestión tarda en girar una vez alrededor del sol. Para los primeros cuatro planetas, una buena aproximación fue que T=5 y h=0.001. Esto es porque las orbitas de Mercurio y Venus se realizan en menos de 1 año, la de la tierra en uno y la de Marte en casi dos años. Con estos valores se obtuvieron las siguientes orbitas para los primeros cuatro planetas:

Figura 3. Orbita de Mercurio

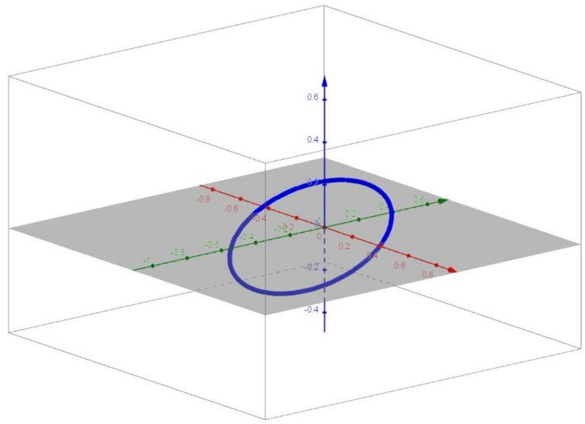


Figura 4. Orbita de Venus

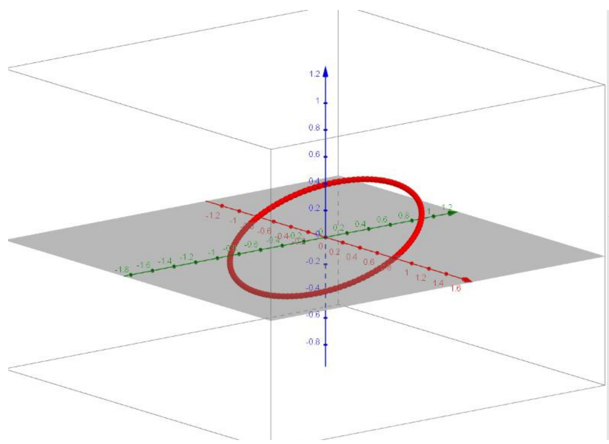


Figura 5. Orbita de la Tierra

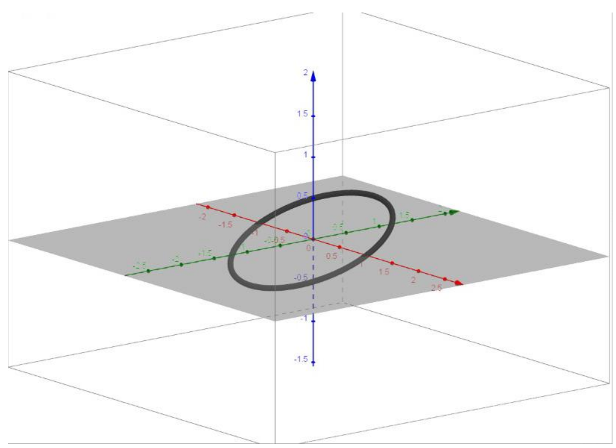
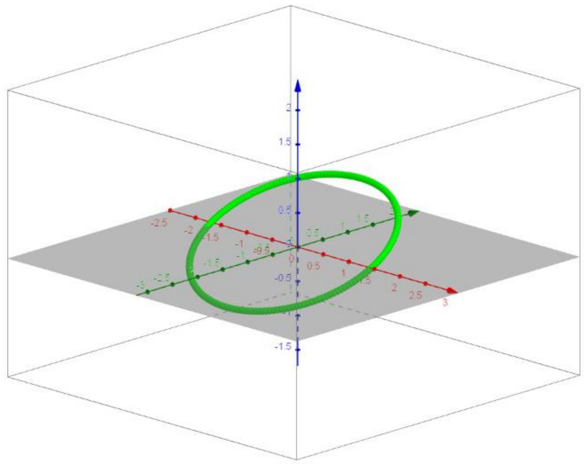
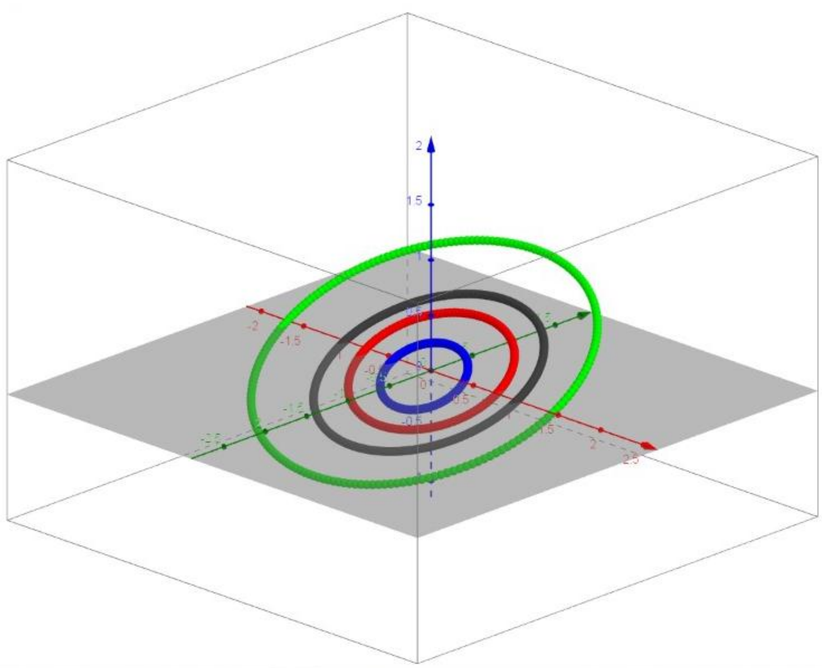


Figura 6. Orbita de Marte



Para tener una idea mas cercana al tamaño de las orbitas respecto a las otras, se anexa la gráfica de las orbitas de los planetas internos del sistema solar:

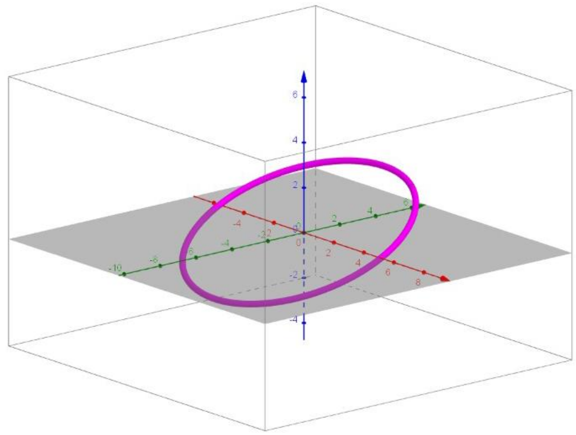
Figura 7. Orbitas de Mercurio, Venus, Tierra y Marte



Para cada uno de los planetas siguientes, el valor de T y de h cambia bastante, ya que sus respectivas orbitas tardan mas o menos años en llevarse a cabo.

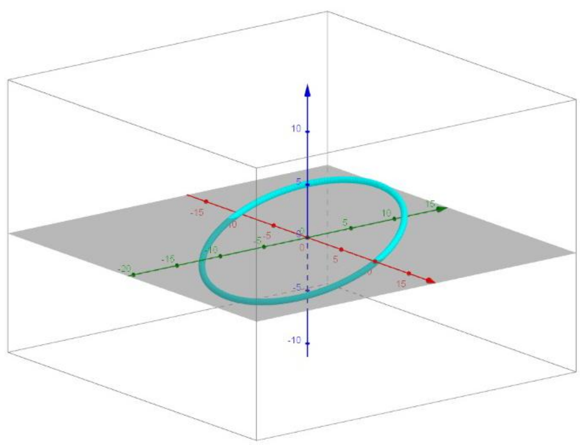
Para Júpiter, que da una vuelta al sol cada 12 años, se tomo T=48 y h=0.005, generándose así 960 puntos, 240 por cada vuelta.

Figura 8. Orbita de júpiter



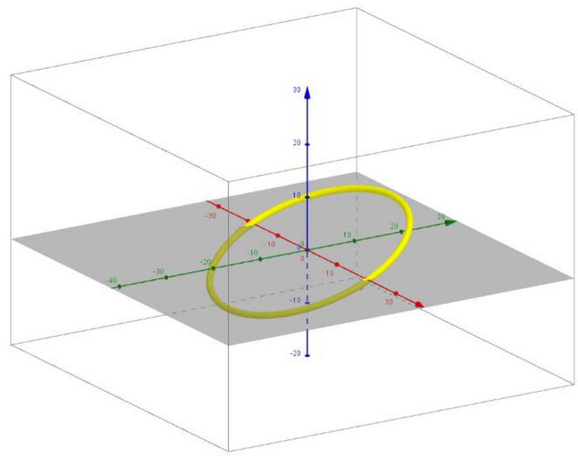
El siguiente planeta, saturno, con un periodo de 29 años por vuelta al sol, se tomaron T=116 y h=0.025.

Figura 9. Orbita de Saturno



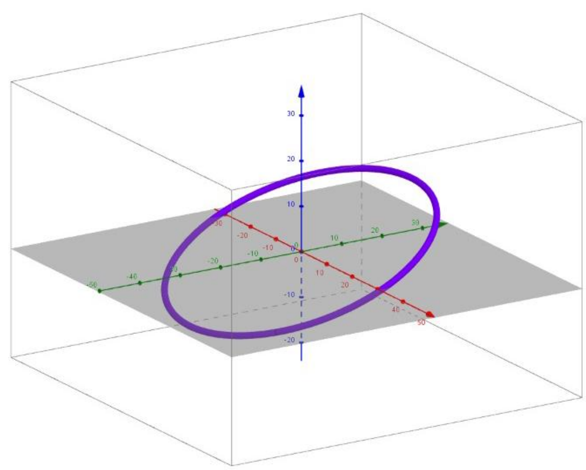
Después sigue Urano, que tarda 84 años en dar una vuelta al sol. Se tomo T=336 y H=0.05, generándose así 672 puntos, 168 por cada orbita.

Figura 10. Orbita de Urano



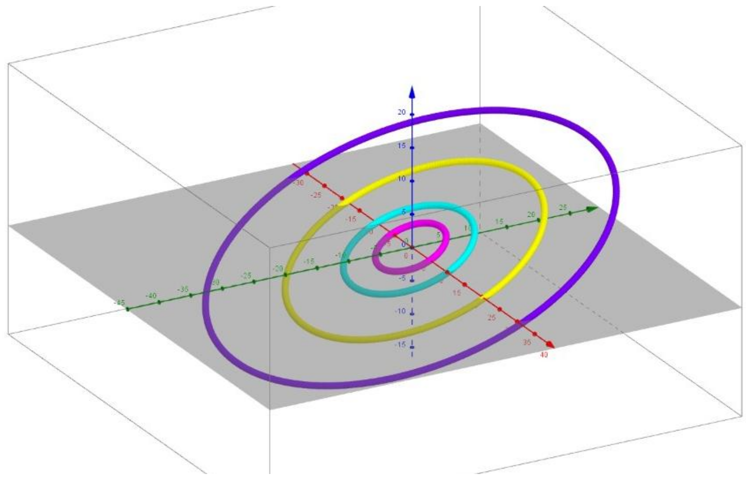
Por ultimo, tenemos a Neptuno, con una periodo de orbita de 165 años, por lo que se tomó T=660 y h=0.1.

Figura 11. Orbita de Neptuno



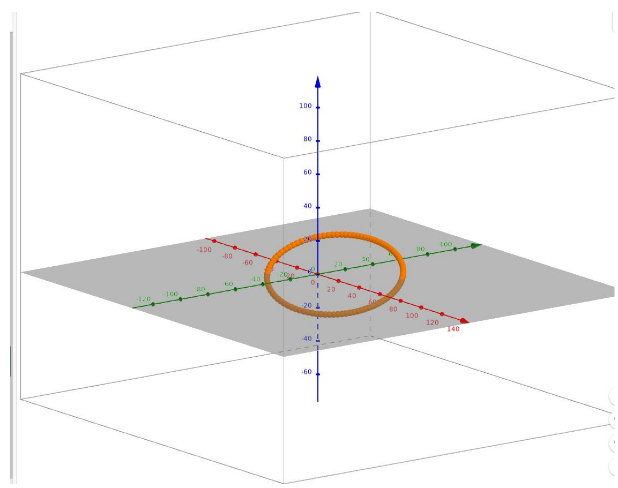
Para tener una idea del tamaño de las orbitas de estos últimos 4 planetas, tenemos la siguiente gráfica:

Figura 12. Orbitas de Júpiter, Saturno, Urano y Neptuno



Por ultimo incluimos la orbita del planeta enano Plutón, que tarda 248 años en dar una sola vuelta al sol. Se tomo T=992 y h=0.25.

Figura 13. Orbita de Pluton



Las imágenes de las gráficas se encuentran en la carpeta ”Graficas_orbitas”, y también se encuentran en el repositorio los archivos ”.txt”de cada planeta, cada uno tiene una lista con (T/h)/10 filas, con la velocidad y posición en X, Y y Z del planeta en cada paso de tiempo.