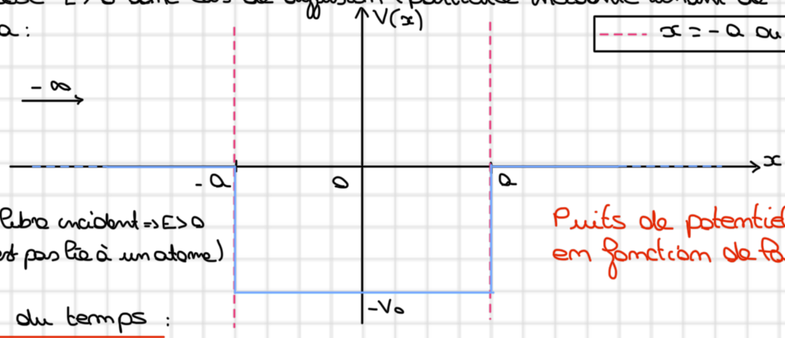
$$V(x) = \begin{cases} -V_0 & \text{si } |x| < a \quad (-a \leq x \leq a) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On suppose $E > 0$ donc cas de diffusion (particule incidente venant de $-\infty$)

Schema :

$- - - -$ $x = -a$ ou $x = a$



(electron libre incident $\Rightarrow E > 0$ car il n'est pas lié à un atome)

Puits de potentiel fini avec $V(x)$ en fonction de la position x

Cela donne 3 zones

I) $x < -a$
II) $-a < x < a$
III) $x > a$

Equation de Schrodinger independante du temps :

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \times \frac{d^2\phi}{dx^2} + V(x)\phi(x) = E\phi(x)$$

Solutions dans les 3 regions :

Region 1 : $x < -a$
$\Rightarrow V(x) = 0$
Donc l'equation donne :

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\phi}{dx^2} + 0.\phi(x) = E\phi(x)$$

$$\Leftrightarrow -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\phi}{dx^2} = E\phi(x)$$

C'est une EDO2 à coeff csts homogene (pas de 2^{nd} membre) lineaire :

donc $-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\phi}{dx^2} - E\phi(x) = 0$

$\Leftrightarrow \boxed{\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\phi}{dx^2} + E\phi(x) = 0}$ ED d'un "oscillateur harmonique (OH)"

$$\Leftrightarrow \frac{d^2\phi}{dx^2} + \frac{2mE}{\hbar}\phi(x) = 0$$

On pose $k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$

D'ou : $\frac{d^2\phi}{dx^2} + k^2\phi(x) = 0$

La solution de cette ED est : $\phi_1(x) = \underbrace{A_1 e^{ikx}}_{\text{onde incidente venant de la gauche}} + \underbrace{B_1 e^{-ikx}}_{\text{onde reflechie allant vers la gauche}}$, $x < -a$
(= somme d'1 onde incidente + 1 onde reflechie)
En prenant la partie reelle : $\phi_1(x) = A_1\cos(kx) + B_1\sin(kx)$

Region 2 : $-a \leq x \leq a$
$\Rightarrow V(x) = -V_0$
Equation differentielle : $\boxed{-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\phi}{dx^2} - V_0\phi(x) = E\phi(x)}$

2 cas : $\begin{cases} E < -V_0 \\ E > -V_0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} E + V_0 < 0 \\ E + V_0 > 0 \end{cases}$

Or on sait que $E > 0$
Et $V_0 > 0$ par convention
Donc on doit avoir $E + V_0 > 0$
Ainsi on garde uniquement le 2^{eme} cas :
$E > -V_0$:

$$\Rightarrow -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\phi}{dx^2} = (E + V_0)\phi(x)$$

$$\Leftrightarrow \frac{d^2\phi}{dx^2} = -\frac{2m(E+V_0)}{\hbar^2}\phi(x)$$

$$\Leftrightarrow \frac{d^2\phi}{dx^2} + \frac{2m(E+V_0)}{\hbar^2}\phi(x) = 0$$

On pose $q = \frac{\sqrt{2m(E+V_0)}}{\hbar}$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d^2\phi}{dx^2} + q^2\phi(x) = 0}$$

Solution du type : $\phi_2(x) = A_2 e^{iqx} + B_2 e^{-iqx}$
$= A_2\cos(qx) + B_2\sin(qx)$

Region 3 : $x > a$
$\Rightarrow V(x) = 0$

ED : $-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\phi}{dx^2} = E\phi(x) \Rightarrow -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\phi}{dx^2} - E\phi(x) = 0$

$\Leftrightarrow \frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\phi}{dx^2} + E\phi(x) = 0$

$\Leftrightarrow \frac{d^2\phi}{dx^2} + \frac{2mE}{\hbar^2}\phi(x) = 0$

$\Leftrightarrow \frac{d^2\phi}{dx^2} + k^2\phi(x) = 0$ avec $k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$

Solution generale : $\phi_3(x) = A_3 e^{ikx} + B_3 e^{-ikx}$

On il n'y a pas d'onde incidente venant de $+\infty$ donc $B_3 e^{-ikx} = 0$
$\Rightarrow \phi_3(x) = A_3 e^{ikx}$

d'ou $\phi(x) = \begin{cases} \phi_1(x) = A_1 e^{ikx} + B_1 e^{-ikx} & x < -a \\ \phi_2(x) = A_2\cos(qx) + B_2\sin(qx) & |x| < a \\ \phi_3(x) = A_3 e^{ikx} & x > a \end{cases}$

Condition de continuité :

En $x = -a$, on doit avoir $\phi_1(-a) = \phi_2(-a)$
et $\phi_1'(-a) = \phi_2'(-a)$

En $x = a$, on doit avoir : $\phi_2(a) = \phi_3(a)$
et $\phi_2'(a) = \phi_3'(a)$

$\phi_1(-a) = \phi_2(-a) \Leftrightarrow A_1 e^{-ika} + B_1 e^{ika} = A_2 e^{-iqa} + B_2 e^{iqa}$
$\phi_1'(-a) = \phi_2'(-a) \Leftrightarrow ikA_1 e^{-ika} - B_1 ik e^{ika} = iqA_2 e^{-iqa} - iqB_2 e^{iqa}$

$\phi_2(a) = \phi_3(a) \Leftrightarrow A_2 e^{iqa} + B_2 e^{-iqa} = A_3 e^{ika}$
$\phi_2'(a) = \phi_3'(a) \Leftrightarrow iqA_2 e^{iqa} - iqB_2 e^{-iqa} = ikA_3 e^{ika}$

$\Rightarrow \begin{cases} A_1 e^{-ika} + B_1 e^{ika} = A_2 e^{-iqa} + B_2 e^{iqa} & (1) \\ ikA_1 e^{-ika} - B_1 ik e^{ika} = iqA_2 e^{-iqa} - iqB_2 e^{iqa} & (2) \\ A_2 e^{iqa} + B_2 e^{-iqa} = A_3 e^{ika} & (3) \\ iqA_2 e^{iqa} - iqB_2 e^{-iqa} = ikA_3 e^{ika} & (4 \end{cases}$

On a $R = \left|\frac{B_1}{A_1}\right|^2$: proba que la particule soit reflechie par la marche
Et $T = \left|\frac{A_3}{A_1}\right|^2$: proba que la particule soit transmis
Et $R + T = 1$

Il reste a coder un algorithme pour trouver les etats-stationnaire
= * calcul des rapport $\frac{B_1}{A_1}$ et $\frac{A_3}{A_1}$

* deduire R et T
* tracer T(E) pour visualiser l'effet Ramsauer-Townsend

On pose $\vec{X} = \begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \\ A_2 \\ B_2 \\ A_3 \end{pmatrix}$

Notre systeme devient : $\Rightarrow \begin{cases} A_1 e^{-ika} + B_1 e^{ika} - A_2\cos(qa) + B_2\sin(qa) = 0 \\ -ikA_1 e^{-ika} + ikB_1 e^{ika} + qA_2\sin(qa) + qB_2\cos(qa) = 0 \\ -A_2\cos(qa) - B_2\sin(qa) + A_3 e^{ika} = 0 \\ qA_2\sin(qa) - qB_2\cos(qa) - ikA_3 e^{ika} = 0 \end{cases}$

On pose $M(E) = \begin{pmatrix} e^{-ika} & e^{ika} & -\cos(qa) & \sin(qa) & 0 \\ -ike^{-ika} & ike^{ika} & q\sin(qa) & q\cos(qa) & 0 \\ 0 & 0 & -\cos(qa) & -\sin(qa) & e^{ika} \\ 0 & 0 & q\sin(qa) & -q\cos(qa) & -ike^{ika} \end{pmatrix}$

tel que $M(E).\vec{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow M(E).\begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \\ A_2 \\ B_2 \\ A_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$