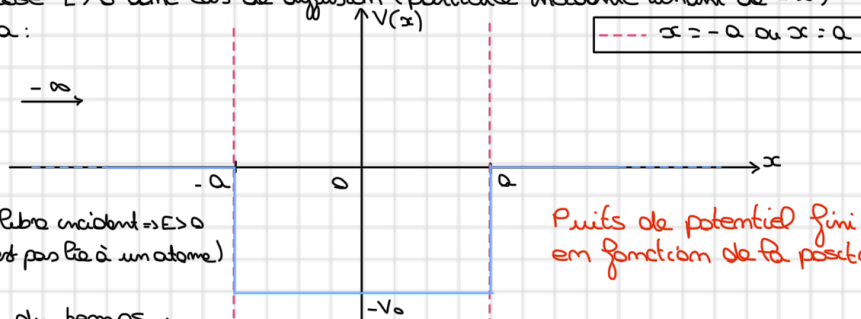


$$V(x) = \begin{cases} -V_0 & \text{si } -a \leq x \leq a \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On suppose $E > 0$ donc cas de diffusion (particule incidente venant de $-\infty$)
 Schema :



Cela donne 3 zones

- I) $x < -a$
- II) $-a < x < a$
- III) $x > a$

(électron libre incident $\Rightarrow E > 0$
 car il n'est pas lié à un atome)

Puits de potentiel fini avec $V(x)$
 en fonction de la position x

Equation de Schrödinger indépendante du temps :

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \phi}{dx^2} + V(x) \phi(x) = E \phi(x)$$

Solutions dans les 3 régions :

Région 1 : $x < -a$

$$\Rightarrow V(x) = 0$$

Donc l'équation donne :

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \phi}{dx^2} + 0 \cdot \phi(x) = E \phi(x)$$

$$\Leftrightarrow -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \phi}{dx^2} = E \phi(x)$$

C'est une EDO à coeff const homogène (pas de 2nd membre) linéaire :

$$\text{donc } -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \phi}{dx^2} - E \phi(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \phi}{dx^2} + E \phi(x) = 0$$

ED d'un "oscillateur harmonique (OH)"

$$\Leftrightarrow \frac{d^2 \phi}{dx^2} + \frac{2mE}{\hbar^2} \phi(x) = 0$$

$$\text{On pose } k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$$

$$\text{D'où : } \frac{d^2 \phi}{dx^2} + k^2 \phi(x) = 0$$

onde incidente

venant de la gauche

onde réfléchie allant vers la gauche

La solution de cette ED est : $\phi_1(x) = A_1 e^{ikx} + B_1 e^{-ikx}$, $x < -a$

(= somme d'1 onde incidente + 1 onde réfléchie)

En prenant la partie réelle : $\phi_1(x) = A_1 \cos(kx) + B_1 \sin(kx)$

Région 2 : $-a \leq x \leq a$

$$\Rightarrow V(x) = -V_0$$

$$\text{Equation différentielle : } -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \phi}{dx^2} - V_0 \phi(x) = E \phi(x)$$

$$\text{2 cas : } \begin{cases} E < -V_0 \\ E > -V_0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} E + V_0 < 0 \\ E + V_0 > 0 \end{cases}$$

On sait que $E > 0$

Et $V_0 > 0$ par convention

Donc on doit avoir $E + V_0 > 0$

Ainsi on garde uniquement le 2^{ème} cas :

$E > -V_0$:

$$\Rightarrow -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \phi}{dx^2} = (E + V_0) \phi(x)$$

$$\Leftrightarrow \frac{d^2 \phi}{dx^2} = -\frac{2m(E + V_0)}{\hbar^2} \phi(x)$$

$$\Leftrightarrow \frac{d^2 \phi}{dx^2} + \frac{2m(E + V_0)}{\hbar^2} \phi(x) = 0$$

$$\text{On pose } q = \frac{\sqrt{2m(E + V_0)}}{\hbar}$$

$$\Rightarrow \frac{d^2 \phi}{dx^2} + q^2 \phi(x) = 0$$

Solution du type : $\phi_2(x) = A_2 e^{iqx} + B_2 e^{-iqx}$
 $= A_2 \cos(qx) + B_2 \sin(qx)$

Région 3: $x > a$
 $\Rightarrow V(x) = 0$

$$\begin{aligned} \text{ED: } -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\phi}{dx^2} &= E\phi(x) \Rightarrow -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\phi}{dx^2} - E\phi(x) = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\phi}{dx^2} + E\phi(x) = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{d^2\phi}{dx^2} + \frac{2mE}{\hbar^2} \phi(x) = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{d^2\phi}{dx^2} + k^2 \phi(x) = 0 \text{ avec } k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} \end{aligned}$$

Solution générale : $\phi_3(x) = A_3 e^{ikx} + B_3 e^{-ikx}$

On n'a pas d'onde incidente venant de $+\infty$ donc $B_3 e^{-ikx} = 0$
 $\Rightarrow \phi_3(x) = A_3 e^{ikx}$

$$\text{d'où } \phi(x) = \begin{cases} \phi_1(x) = A_1 e^{ikx} + B_1 e^{-ikx} & x < -a \\ \phi_2(x) = A_2 \cos(qx) + B_2 \sin(qx) & |x| < a \\ \phi_3(x) = A_3 e^{ikx} & x > a \end{cases}$$

Conditions de continuité :

En $x = -a$, on doit avoir $\phi_1(-a) = \phi_2(-a)$
 et $\phi_1'(-a) = \phi_2'(-a)$

En $x = a$, on doit avoir : $\phi_2(a) = \phi_3(a)$
 et $\phi_2'(a) = \phi_3'(a)$

$$\begin{aligned} \phi_1(-a) = \phi_2(-a) &\Leftrightarrow A_1 e^{-ika} + B_1 e^{ika} = A_2 e^{-iqa} + B_2 e^{iqa} \\ \phi_1'(-a) = \phi_2'(-a) &\Leftrightarrow ikA_1 e^{-ika} - ikB_1 e^{ika} = iqA_2 e^{-iqa} - iqB_2 e^{iqa} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \phi_2(a) = \phi_3(a) &\Leftrightarrow A_2 e^{iqa} + B_2 e^{-iqa} = A_3 e^{ika} \\ \phi_2'(a) = \phi_3'(a) &\Leftrightarrow iqA_2 e^{iqa} - iqB_2 e^{-iqa} = ikA_3 e^{ika} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A_1 e^{-ika} + B_1 e^{ika} = A_2 e^{-iqa} + B_2 e^{iqa} & (1) \\ ikA_1 e^{-ika} - ikB_1 e^{ika} = iqA_2 e^{-iqa} - iqB_2 e^{iqa} & (2) \\ A_2 e^{iqa} + B_2 e^{-iqa} = A_3 e^{ika} & (3) \\ iqA_2 e^{iqa} - iqB_2 e^{-iqa} = ikA_3 e^{ika} & (4) \end{cases}$$

On a $R = \left| \frac{B_1}{A_1} \right|^2$: proba que la particule soit réfléchi par la barrière

Et $T = \left| \frac{A_3}{A_1} \right|^2$: proba que la particule soit transmise

$$\text{Et } R + T = 1$$

Pour simplifier les calculs on pose $A_1 = 1$

$$\text{Donc } R = \left| \frac{B_1}{A_1} \right|^2 = |B_1|^2$$

$$\text{Et } T = |A_3|^2$$

Le système devient :

$$\Rightarrow \begin{cases} e^{-ika} + B_1 e^{ika} = A_2 e^{-iqa} + B_2 e^{iqa} & (1) \\ ik(e^{-ika} - B_1 e^{ika}) = iq(A_2 e^{-iqa} - B_2 e^{iqa}) & (2) \\ A_2 e^{iqa} + B_2 e^{-iqa} = A_3 e^{ika} & (3) \\ iq(A_2 e^{iqa} - B_2 e^{-iqa}) = ikA_3 e^{ika} & (4) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} e^{-ika} + B_1 e^{ika} = A_2 e^{-iqa} + B_2 e^{iqa} & (1) \\ ik(e^{-ika} - B_1 e^{ika}) = iq(A_2 e^{-iqa} - B_2 e^{iqa}) & (2) \\ A_2 e^{iqa} + B_2 e^{-iqa} = A_3 e^{ika} & (3) \\ iq(A_2 e^{iqa} - B_2 e^{-iqa}) = ikA_3 e^{ika} & (4) \end{cases}$$

(4 équations avec 4 inconnues)

$$\text{On } a \quad A_3 e^{i\theta a} = A_2 e^{i\theta a} + B_2 e^{-i\theta a} \quad (3)$$

$$\Rightarrow B_2 e^{-i\theta a} = A_3 e^{i\theta a} - A_2 e^{i\theta a}$$

$$\Rightarrow B_2 = e^{i\theta a} (A_3 e^{i\theta a} - A_2 e^{i\theta a})$$

On compare dans (4):

$$\Rightarrow i\theta A_3 e^{i\theta a} = i\theta (A_2 e^{i\theta a} - e^{i\theta a} (A_3 e^{i\theta a} - A_2 e^{i\theta a}) e^{-i\theta a})$$

$$= i\theta (A_2 e^{i\theta a} - A_3 e^{i\theta a} + A_2 e^{i\theta a})$$

$$= i\theta (2A_2 e^{i\theta a} - A_3 e^{i\theta a})$$

$$\Rightarrow i\theta A_3 e^{i\theta a} = 2i\theta A_2 e^{i\theta a} - A_3 i\theta e^{i\theta a}$$

$$\Rightarrow 2i\theta A_2 e^{i\theta a} = A_3 e^{i\theta a} (i\theta + i\theta)$$

$$\Rightarrow A_3 = \frac{2i\theta}{i\theta + i\theta} A_2 e^{i\theta a - i\theta a}$$

$$\text{Et } B_2 = e^{i\theta a} \left(\frac{2i\theta}{i\theta + i\theta} A_2 e^{i\theta a - i\theta a} \right) e^{i\theta a} - A_2 e^{i\theta a}$$

$$= \frac{2i\theta}{i\theta + i\theta} A_2 e^{2i\theta a} - A_2 e^{2i\theta a}$$

$$= A_2 e^{2i\theta a} \left(\frac{2i\theta}{i\theta + i\theta} - 1 \right)$$

Pour B_1 : On a:

$$\begin{cases} e^{-i\theta a} + B_1 e^{i\theta a} = A_2 e^{-i\theta a} + B_2 e^{i\theta a} \quad (1) \\ i\theta (e^{-i\theta a} - B_1 e^{i\theta a}) = i\theta (A_2 e^{-i\theta a} - B_2 e^{i\theta a}) \quad (2) \end{cases} \text{ avec } B_2 = A_2 e^{2i\theta a} \left(\frac{2i\theta}{i\theta + i\theta} - 1 \right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} e^{-i\theta a} + B_1 e^{i\theta a} = A_2 e^{-i\theta a} + A_2 e^{2i\theta a} \left(\frac{2i\theta}{i\theta + i\theta} - 1 \right) e^{i\theta a} \quad (1) \\ i\theta (e^{-i\theta a} - B_1 e^{i\theta a}) = i\theta (A_2 e^{-i\theta a} - A_2 e^{2i\theta a} \left(\frac{2i\theta}{i\theta + i\theta} - 1 \right) e^{i\theta a}) \quad (2) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} e^{-i\theta a} + B_1 e^{i\theta a} = A_2 e^{-i\theta a} + A_2 \left(\frac{2i\theta}{i\theta + i\theta} - 1 \right) e^{3i\theta a} \quad (3) \\ i\theta (e^{-i\theta a} - B_1 e^{i\theta a}) = i\theta (A_2 e^{-i\theta a} - A_2 \left(\frac{2i\theta}{i\theta + i\theta} - 1 \right) e^{3i\theta a}) \quad (4) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} e^{-i\theta a} + B_1 e^{i\theta a} = A_2 (e^{-i\theta a} + e^{3i\theta a} \left(\frac{2i\theta}{i\theta + i\theta} - 1 \right)) \\ i\theta (e^{-i\theta a} - B_1 e^{i\theta a}) = A_2 i\theta (e^{-i\theta a} - e^{3i\theta a} \left(\frac{2i\theta}{i\theta + i\theta} - 1 \right)) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} B_1 e^{i\theta a} = A_2 (e^{-i\theta a} + e^{3i\theta a} \left(\frac{2i\theta}{i\theta + i\theta} - 1 \right)) - e^{-i\theta a} \\ i\theta (e^{-i\theta a} - B_1 e^{i\theta a}) = A_2 i\theta (e^{-i\theta a} - e^{3i\theta a} \left(\frac{2i\theta}{i\theta + i\theta} - 1 \right)) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} B_1 = e^{-i\theta a} (A_2 (e^{-i\theta a} + e^{3i\theta a} \left(\frac{2i\theta}{i\theta + i\theta} - 1 \right)) - e^{-i\theta a}) \\ i\theta (e^{-i\theta a} - (A_2 (e^{-i\theta a} + e^{3i\theta a} \left(\frac{2i\theta}{i\theta + i\theta} - 1 \right)) - e^{-i\theta a})) = A_2 i\theta (e^{-i\theta a} - e^{3i\theta a} \left(\frac{2i\theta}{i\theta + i\theta} - 1 \right)) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} B_1 = e^{-i\theta a} (A_2 (e^{-i\theta a} + e^{3i\theta a} \left(\frac{2i\theta}{i\theta + i\theta} - 1 \right)) - e^{-i\theta a}) \\ i\theta (2e^{-i\theta a} - A_2 (e^{-i\theta a} + e^{3i\theta a} \left(\frac{2i\theta}{i\theta + i\theta} - 1 \right))) = A_2 i\theta (e^{-i\theta a} - e^{3i\theta a} \left(\frac{2i\theta}{i\theta + i\theta} - 1 \right)) \end{cases}$$

$$\Rightarrow A_2 i\theta (e^{-i\theta a} - e^{3i\theta a} \left(\frac{2i\theta}{i\theta + i\theta} - 1 \right)) + A_2 i\theta (e^{-i\theta a} + e^{3i\theta a} \left(\frac{2i\theta}{i\theta + i\theta} - 1 \right)) = 2i\theta e^{-i\theta a}$$

$$\Rightarrow A_2 (i\theta (e^{-i\theta a} - e^{3i\theta a} \left(\frac{2i\theta}{i\theta + i\theta} - 1 \right)) + i\theta (e^{-i\theta a} + e^{3i\theta a} \left(\frac{2i\theta}{i\theta + i\theta} - 1 \right))) = 2i\theta e^{-i\theta a}$$

$$\Rightarrow A_2 = \frac{2i\theta e^{-i\theta a}}{i\theta (e^{-i\theta a} - e^{3i\theta a} \left(\frac{2i\theta}{i\theta + i\theta} - 1 \right)) + i\theta (e^{-i\theta a} + e^{3i\theta a} \left(\frac{2i\theta}{i\theta + i\theta} - 1 \right))}$$

$$\text{donc } B_2 = \frac{2i\theta e^{-i\theta a}}{i\theta (e^{-i\theta a} - e^{3i\theta a} \left(\frac{2i\theta}{i\theta + i\theta} - 1 \right)) + i\theta (e^{-i\theta a} + e^{3i\theta a} \left(\frac{2i\theta}{i\theta + i\theta} - 1 \right))} e^{2i\theta a} \left(\frac{2i\theta}{i\theta + i\theta} - 1 \right)$$

$$A_3 = \frac{2i\theta}{i\theta + i\theta} A_2 e^{i\theta a - i\theta a} = \frac{2i\theta}{i\theta + i\theta} \left(\frac{2i\theta e^{-i\theta a}}{i\theta (e^{-i\theta a} - e^{3i\theta a} \left(\frac{2i\theta}{i\theta + i\theta} - 1 \right)) + i\theta (e^{-i\theta a} + e^{3i\theta a} \left(\frac{2i\theta}{i\theta + i\theta} - 1 \right))} \right) e^{i\theta a - i\theta a}$$

$$\text{Et } B_1 = e^{-iRa} \left(\frac{2iR e^{-iRa}}{iq \left(e^{-iqa} - e^{3iqa} \left(\frac{2iq}{iR + iq} - 1 \right) \right) + iR \left(e^{-iqa} + e^{3iqa} \left(\frac{2iq}{iR + iq} - 1 \right) \right)} (e^{-iqa} + e^{3iqa} \left(\frac{2iq}{iR + iq} - 1 \right)) - e^{-iRa} \right)$$