Lösungshinweise zu den Aufgaben

Das Buch „Elementarteilchenphysik" enthält 187 Übungsaufgaben, die das Verständnis des Stoffes erleichtern sollen. Hinweise zum Lösen der Übungen finden Sie in `Solutions_of_exercises.pdf`. Einige Übungen beziehen sich auf Jupyter-Notebooks, die in diesem Ordner (`Exercises`) oder im Ordner `Notebooks` zu finden sind.

Kapitel 1

1.1 Es gilt wie immer $E = \sqrt{\boldsymbol{p}^2 + m^2}$, $T = E - m$ und $\beta = |\boldsymbol{p}|/E$. Daraus lassen sich die gesuchten Werte berechnen.

1.2 Wenn in der Definition von β aus Aufgabe 1.1 E durch $|\boldsymbol{p}|$ ausgedrückt wird, muss diese Gleichung nur nach $|\boldsymbol{p}|$ aufgelöst werden.

1.3 Zur numerischen Lösung empfiehlt es sich die Konstante $k = \hbar c = 197,33$ MeV fm zu benutzen. Wenn alle Energien in MeV und Abstände in fm eingesetzt werden, gilt $k = 197,33$. Der erste Term der Gleichung (1.17) wird dann mit $|\boldsymbol{p}| = \hbar/r$ nach Erweiterung mit c^2 zu $k^2/2E_0r^2$. E_0 ist die reduzierte Ruheenergie des p, n Systems, also $2E_0 \approx 970$ oder grob 1000. Im zweiten Term ersetzen wir g_Y^2 durch ak, worin a eine dimensionslose Konstante ist. Die resultierende Funktion $W(r)$ hat ein Minimum für einen bestimmten Wert von r. Man variert a solange, bis $W_{\text{min}} = 2.25$ erreicht wird. Das geschieht am einfachsten durch grafisches Studium der Funktion $W(r)$. Die Lösung ist akzeptabel, da das Minimum bei einem für die Kernphysik typischen Abstand liegt.

1.4 Im Einheitensystem der Teilchenphysik wird aus der Dimension der Gravitationskonstanten (Länge^3 Zeit^{-2} Masse^{-1}) die Dimension (Energie)$^{-2}$. $G/(c^5\,\hbar)$ hat diese Dimension auch im SI-System und ist im Einheitensystem der Teilchenphysik mit G identisch. Im SI-System gilt $1/\sqrt{G/(c^5\hbar)} = 1{,}221 \cdot 10^{19}$ GeV.

1.6 Benutzen Sie Formeln (1.23) und (1.24) zur Berechnung von E_γ. Für ein Atom in einem angeregten Zustand mit einem energetischen Abstand Δ zum Grundzustand gilt $\sqrt{s} = M + \Delta$. Die daraus resultierende exakte Gleichung für $|\boldsymbol{p}| = E_\gamma$ wird im letzten Schritt durch die Näherung $(M + \Delta)^{-1} = (1 - \Delta/M)/M$ ersetzt. Vergleichen Sie die Herleitung mit dem Vorgehen, dass Sie wahrscheinlich aus einer Vorlesung über Atomphysik kennen.

1.7 Sie sehen, dass die Korrektur in Prozessen der Kernphysik schon 10^{-4} betragen kann. Diese Erkenntnis ist zur Interpretation des Mößbauer-Effekts sehr wichtig

1.8 Wir vernachlässigen den Spin der Teilchen. Dann gilt für den Bahndrehimpuls $L = Er = \sqrt{2}$, wegen $J = 1$. Daraus folgt $r = \sqrt{2}/E$. Das Reaktionsvolumen ist eine Kugel mit dem Radius r, also gilt für die Energiedichte $\rho_E \approx E^4/10$.

1.9 Das virtuelle Photon hat (mit unserer Definition des Betragsquadrats eines Vierervekors) eine imaginäre Masse.

1.10 Der Energiesatz lautet $p_1 + p_2 = p_3 + p_4$. Mit $q^2 = (p_1 - p_3)^2$ und der Definition der kinetischen Energie $T = E - M$, sollten Sie das wichtige Resultat $q^2 = -2M_2T_4$ schnell beweisen können.

1.11 Das ist nur eine Anwendung von (1.23) und (1.24) .

1.12 Es gilt

$$s = 2(M^2 + E_1E_2 + |\boldsymbol{p}_1||\boldsymbol{p}_2|) \ .$$

Aus $E_1 = M_p + E_F = 968$ MeV und $E_2 = M_p + 200 = 1138$ MeV folgt $\sqrt{s} = 2066$ MeV.

1.13 Die Hauptzerfallskanäle sind $\pi^+ \to \mu^+\,\nu_\mu$ und $\pi^+ \to e^+\,\nu_e$. Es sind aber auch Zerfälle mit einer zusätzlichen Abstrahlung von Photonen bzw. $e^+\,e^-$-Paaren erlaubt.

1.14 Mit Hilfe von (1.23) folgt $|\boldsymbol{p}| = 0{,}23$ GeV.

1.15 Wegen $|\boldsymbol{p}_\rho| = E_\gamma$ gilt $E_\rho = \sqrt{E_\gamma^2 + m_\rho^2}$ und daher $\Delta E \approx m_\rho^2/2E_\gamma$. Numerisch finden wir damit $\Delta t \approx 2.5\,10^{-24}$ s.

1.16 Wir setzen als Basisreaktion die Streuung $\nu_e\, p \to e^-\, n$ an. Der Wirkungsquerschnitt beträgt nach der Gleichung

$$\sigma_{\bar{\nu}p} = 1{,}2^{+0{,}7}_{-0{,}4} \cdot 10^{-43}\,\mathrm{cm}^2$$

im Abschnitt 1.2.2 etwa $10^{-43}\,\mathrm{cm}^2$. Mit n_{Fe} aus

$$n_0 = \frac{\rho N_{\mathrm{A}}}{M_{\mathrm{r}}} \frac{\mathrm{kmol}}{\mathrm{kg}}$$

im Abschnitt 1.3.1 folgt $n_p = Z\, n_{\mathrm{Fe}}$ und daher $\lambda = 4{,}5 \cdot 10^{16}\,\mathrm{m}$.

1.17 Mit $\rho\lambda = \rho / n_0 \sigma = M_r / N_A \sigma\ \mathrm{kg/kmol}$ folgt mit der Gleichung

$$n_0 = \frac{\rho N_{\mathrm{A}}}{M_{\mathrm{r}}} \frac{\mathrm{kmol}}{\mathrm{kg}}$$

im Abschnitt 1.3.1 eine Gleichung, die man nach σ auflöst. Der numerische Wert ist für $M_r \approx 27$ durch etwa 640 mb gegeben.

1.18 Das Volumen eines Kerns ist $\sim r^3$ und $\sim M_r$. Die Oberfläche ist also $\sim M_r^{2/3}$ Mit den Formeln der letzten Aufgabe folgt daraus $\rho\lambda \sim M_r^{1/3}$.

1.19 In (1.48) setzen wir $\dot{N}_{\mathrm{in}} = n_1 f_p$ und $n_0 = n_2 / (A\, \Delta z)$ ein.

1.20 Das Integral des Bhabha-Querschnitts ist $\sigma \approx 1{,}9 \cdot 10^{-30}\,\mathrm{cm}^2$. Also gilt $L = 2{,}6 \cdot 10^{30}\,\mathrm{cm}^{-2}\mathrm{s}^{-1}$. Der integrierte Wirkungsquerschnitt der Paarerzeugung ist demgegenüber völlig vernachlässigbar, $\sigma \approx 5 \cdot 10^{-38}\,\mathrm{cm}^2$.

1.21 Es gilt

$$x_f = \boldsymbol{M}_{11} x_0 + \boldsymbol{M}_{12} x_0' \quad ,$$

wobei die Matrixelemente aus dem Produkt eines fokussierenden Quadrupols (1.59) und einer freien Wegstrecke mit der Matrix

$$\boldsymbol{M}_{\mathrm{O}} = \begin{pmatrix} 1 & l \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

in Abschnitt 1.4.3 berechnet werden. Damit folgt

$$\boldsymbol{M}_{11} = \cos\Omega - l\sqrt{k} \quad ,$$

also $l = 1{,}47\,\mathrm{m}$.

1.22 Multiplizieren Sie die Matrizen mit Hilfe von SymPy. Dann variieren Sie die Feldstärke und suchen durch Probieren einen Wert, bei dem x nd y am gleichen Wert von z verschwinden. Am besten geht das grafisch, aber das ist schon ein relativ ehrgeiziges Projekt.

1.23 Der Lösungsweg ist schon ausführlich in der Aufgabenstellung beschrieben.

1.24 Der Lösungsweg ist im Python-Beispiel 1.2 gegeben.

1.25 Die Lösung folgt dem Python-Beispiel 1.2, allerdings wird nun die Routine `scatter` verwendet. Die Eigenschaften dieser Routine findet man mit einer Web-Suche.

1.26 Ändern Sie die Werte im Python-Beispiel 1.1 und wiederholen Sie die Aufgaben 1.24 und 1.25.

1.27 Die Lösung folgt aus einer einfachen Modifizierung des Python-Beispiels 1.3. Ein Lösungsweg wird im Notebook `A1.27-28-29-Kugel.ipynb` vorgestellt.

1.28 Folgend Sie Python-Beispiels 1.3 und fügen Sie für die dritte Dimension ein weiteres Feld `Za` hinzu. Wegen der 3. Dimension muss das Ergebnis nun mit dem Faktor $2^3 = 8$ skaliert werden. Überprüfen Sie ihr

Resultat mit der analytischen Formel für das Volumen einer Kugel. Ein Lösungsweg wird im Notebook `A1.27-28-29-Kugel.ipynb` vorgestellt.

1.29 Folgen Sie dem Lösungsweg in Aufgabe 1.28 und erweitern Sie die Anzahl der Felder auf 5. Analog muss nun mit 2^5 skaliert werden, um das Gesamtvolumen zu erhalten. Vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit dem analytischen Resultat (siehe z.B. `wikipedia.de/Kugel`). Ein Lösungsweg wird im Notebook `A1.27-28-29-Kugel.ipynb` vorgestellt.

1.30 Versuchen Sie, ein Programm an Hand der Erläuterungen im Text zu schreiben. Vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit dem Lösungsvorschlag im Notebook `A1.30-31-random-expon.ipynb`.

1.31 Versuchen Sie, ein Programm an Hand der Erläuterungen im Text zu schreiben. Vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit dem Lösungsvorschlag im Notebook `A1.30-31-random-expon.ipynb`.

1.32 Das Programmpaket `scipy.stats` stellt für jede Verteilung Routinen für die Berechnung der `pdf, cdf, ppf, usw.` und für die Erzeugung von Zufallszahlen zu Verfügung. Probieren Sie es aus!

1.33 Der Lösungsweg wird im Buch in Detail angegeben.

1.34 Bilden Sie eine Summenfunktion $s(n) = \sum_i^n h(i)/N$ über alle Bins des Histogramms, wobei N die Gesamtzahl der Einträge ist. Wenn man nun eine Zufallszahl Y im Bereich (0,1) erzeugt, lässt sich mit $Y = s(n)$ der zugehörige Bin n identifizieren. Die Gewünschte Zufallszahl X ist dann der x-Wert zum Bin n.

1.35 Als Einhüllende verwendet man ein Rechteck der Höhe $\sqrt{2}$ im Bereich $0 \leq x \leq 1$.

1.36 Nun kann man mehrere Rechtecke als Einhüllende verwenden. Zunächst erzeugt man eine Zufallszahl und bestimmt aus den relativen Verhältnissen der Rechtecke für welches Rechteck eine Zufallszahl berechnet werden soll. Danach folgt man dem Verfahren wirei in Aufg. 1.35 angeben.

1.37 Der Lösungsweg ist in der Aufgabenstellung beschrieben.

1.38 Man erzeugt gleichmäßig verteilte Zufallszahlen in $\cos\theta$ und in ϕ.

Kapitel 2

2.1 Spielen Sie mit der Routine `dalitz.py`

2.3 Ausgehend von (2.20) ist die Lösung trivial.

2.4 Am einfachste ist das, wenn Sie `dalitz.py` um einige Zeilen zur Berechnung von m_{ik}^2 ergänzen.

2.6 Mit $a_i' = R_{ik}a_k$ und $b_i' = R_{il}b_l$ folgt $a_i'b_i' = R_{ik}R_{il}a_kb_l = a_kb_k$. Im letzten Schritt wurde die Orthogonalitätsrelation (2.33) benutzt.

2.7 Das ist nichts anderes als die Umwandlung von kartesischen in Polarkoordinaten.

2.9 Zur Berechnung von (2.50) muss $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\sigma_2\theta}$ berechnet werden. Dazu wird (2.58) mit dem Ergebnis

$$d^{1/2} = \begin{pmatrix} \cos(\theta/2) & -\sin(\theta/2) \\ \sin(\theta/2) & \cos(\theta/2) \end{pmatrix}$$

benutzt.

2.10 Es gilt $\hat{j}_+ = \hat{j}_{(1),+} + \hat{j}_{(2),+}$. Dieser Operator wird auf die rechte Seite von (2.63) angewendet. Die Indizes (1) und (2) beziehen sich auf den jeweils ersten bzw. zweiten Faktor eines Produkts von Zuständen.

2.13 Zur Berechnung der Zerfallswinkelverteilung eines ρ-Mesons mit „Spin auf" muss $J=1, J_3=1, \lambda=\lambda_1=\lambda_2=0$ in (2.85) eingesetzt werden. Sie ist also durch

$$\frac{\mathrm{d}\Gamma}{\mathrm{d}\Omega} \sim \frac{1}{2}\sin^2\theta |t_{00}|^2$$

gegeben. Der Rest der Aufgabe wird ebenso bearbeitet.

2.14 Die Formel (2.101) verkürzt sich auf ein Glied mit $J=1$. Legen Sie eine entsprechende Tabelle an.

2.15 Es bleiben nur die Amplituden $f_{\frac{1}{2}\,\frac{-1}{2},\frac{1}{2}\,\frac{-1}{2}}$ und $f_{\frac{1}{2}\,\frac{-1}{2},\frac{-1}{2}\,\frac{1}{2}}$ (und ihre Partner mit gespiegelter Helizität) übrig. Die zugehörigen Funktionen d^1 sind proportional zu $(1+\cos\theta)$ und $(1-\cos\theta)$. Die Winkelverteilung des Wirkungsquerschnitts ist also proportional zu $(1+\cos^2\theta)$.

2.16 Mit der Eulerschen Formel $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\delta_l} = \cos\delta_l + \mathrm{i}\sin\delta_l$ ist das ganz einfach.

2.17 Mit dem Ansatz, dass die Resonanz über eine Partialwelle mit $l = J$ erzeugt wird, vergleicht man (2.97) mit Formel

$$\sigma_{\mathrm{tot}} = \frac{\pi}{|\boldsymbol{p}|^2}\sum_l (2l+1)(2-2\eta_l+4\eta_l\sin^2\delta_l) \quad .$$

im Abschnitt 2.4.4 unter Benutzung von $\Gamma_i = \Gamma_{\mathrm{el}}$.

2.18 Betrachten wir (2.101). Wegen $\sigma = \int |f|^2 \mathrm{d}\Omega$ gilt mit $|t|_{\max} = 1$ für jede beitragende Helizitätsamplitude.

$$\sigma_{\max} = \frac{12\pi}{\boldsymbol{p}^2} \quad .$$

Hierbei wurde noch die Orthogonalitätsrelation

$$\int d^J_{M_1M_2} d^{J'}_{M_1'M_2'} \mathrm{d}\cos\theta = \frac{2}{2J+1}\delta_{JJ'}\delta_{M_1M_1'}\delta_{M_2M_2'}$$

im Abschnitt 2.2.3 benutzt. Wenn die Amplitude reell ist, wird die Grenze auf die Hälfte reduziert (Aufgabe 2.16).

2.21 Man zerlegt die Partialwellenamplitude

$$t_l = \frac{\Gamma/2}{(M_{\mathrm{R}}-\sqrt{s})-\mathrm{i}\Gamma/2}$$

im Abschnitt 2.4.4 in Realteil x und Imaginärteil y und trägt dann y gegen x in einem parametrischen Plot als Funktionen von $\sqrt{s}$ auf. Welche Kurvenform finden Sie? Mehr darüber im kurzen SymPy-notebook `Argand.ipynb`.

2.23 Das Z-Boson kann auch die Helizität $\lambda = 0$ haben.

2.24 Ist der Phasenfaktor der gleiche wie in (2.126) ?

2.25 Aus (2.101) folgt

$$\begin{aligned} & f_{-\lambda_3-\lambda_4,-\lambda_1-\lambda_2}(\theta,\phi) \\ & = \frac{1}{|\boldsymbol{p}|}\sum_J (2J+1) t^J_{-\lambda_3-\lambda_4,-\lambda_1-\lambda_2}(\sqrt{s}) d^J_{-\lambda-\mu}(\theta)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\lambda-\mu)\phi} \quad . \end{aligned}$$

Mit der Transformationsgleichung

$$P\,|J;J_3,\lambda_1\lambda_2\rangle = \eta_1\eta_2(-1)^{J-j_{(1)}-j_{(2)}}\,|J;J_3,-\lambda_1-\lambda_2\rangle \quad ,$$

im Abschnitt 2.5.1 gilt dann wegen der Paritätserhaltung

$$t^J_{-\lambda_3-\lambda_4,-\lambda_1-\lambda_2} = \eta_g t^J_{\lambda_3\lambda_4,\lambda_1\lambda_2}$$

mit

$$\eta_g = \eta_1\eta_2\eta_3\eta_4(-1)^{2J-j_{(1)}-j_{(2)}-j_{(3)}-j_{(4)}} \ .$$

Da $m = J - j_{(1)} - j_{(2)}$ immer ganzzahlig ist, benutzen wir $(-1)^m = (-1)^{-m}$ zur Herleitung von

$$\eta_g = \eta_1\eta_2\eta_3\eta_4(-1)^{j_{(1)}+j_{(2)}-j_{(3)}-j_{(4)}} \ .$$

Mit Hilfe von (2.51) und der darauf folgenden Formel wird der Beweis von (2.127) vervollständigt.

2.26 Die Summe der Abstände zu den drei Seiten ist für jeden Punkt innerhalb eines gleichseitigen Dreiecks gleich der Höhe des Dreiecks. Dies entspricht dem Energiesatz $T_1 + T_2 + T_3 = Q$. Wir legen ein rechtwinkliges Koordinatensystem in den Schnittpunkt der drei Winkelhalbierenden. Dann gilt $y = T_1 - Q/3$ und $x = (T_2 - T_3)/\sqrt{3}$ und daher

$$x^2 + y^2 = \frac{Q^2}{9} + T_1^2 + \frac{1}{3}(T_2^2 + T_3^2 - 2T_2T_3 - 2T_1Q) \ .$$

In der Klammer ersetzen wir Q durch $T_1 + T_2 + T_3$ und erhalten

$$x^2 + y^2 = \frac{Q^2}{9} + \frac{1}{3}\left[(T_1 + T_2 + T_3)^2 - 4T_1T_2\right] \ .$$

Der Ausdruck in der eckigen Klammer verschwindet aber auf der Begrenzungslinie, wie man aus (2.19) für $\cos\theta_2 = 1$ sofort abliest. Damit gilt also $x^2 + y^2 = Q^2/9$, das ist ein Kreis mit dem Radius $Q/3$.

2.27 Mit den üblichen Verfahren der linearen Algebra wird

$$R = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & \gamma \\ 1 & -\gamma \end{pmatrix}$$

mit $\gamma = \sqrt{B/C}$ ermittelt.

2.28 Es empfiehlt sich die Wahrscheinlichkeit P_{K^0} zum Beispiel als Funktion von (t/τ_S) anzuschreiben und dabei die Exponentialfunktionen anzupassen, also u.a. $\exp(-\Gamma_L t) \rightarrow \exp(-\tau_S/\tau_L(t/\tau_S))$.

2.30 Hier wird nur noch einmal die Umrechnung vom Ruhesystem ins Laborsystem abgefragt.

2.31 Mit $p \sim 1 + \epsilon$ usw. geht das sehr schnell.

2.32 Hier argumentieren wir absichtlich ausführlich und Schritt für Schritt:
Die allgemeinste Matrix mit 4 komplexen Zahlen lautet

$$U = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \qquad \text{(B.1)}$$

Wir finden 4 Unitaritätsbedingungen:

$$\begin{aligned} aa^* + bb^* &= 1 \qquad (1) \\ cc^* + dd^* &= 1 \qquad (2) \\ ca * + db^* &= 0 \qquad (3) \\ ac * + bd^* &= 0 \qquad (4) \end{aligned}$$

Bedingung (4) wird durch $c^* = -\lambda b, \quad d^* = \lambda a$ erfüllt, worin λ eine beliebige reelle Zahl ist. Damit ist auch (3) erfüllt, während (2)

$$\lambda^2(aa^* + bb^*) = 1$$

auf Grund von (1) zur Bedingung $\lambda = \pm 1$ führt. Damit haben wir

$$U = \begin{pmatrix} a & b \\ -\lambda b^* & \lambda a^* \end{pmatrix} \tag{B.2}$$

bewiesen. Jetzt wird noch die Bedingung der Unimodularität $\det U = 1$ ausgewertet, $\det U = \lambda(aa^* + bb^*)$. Wegen (1) gilt $\det U = \lambda$ und damit $\lambda = 1$.

2.33 Der Beweis ist schon im ausführlichen Kommentar zu (2.32) enthalten.

2.34 Mit Hilfe der Tabelle 2.3 leiten wir u. a.

$$\begin{aligned}
\left|\pi^+ p\right\rangle &= \left|\tfrac{3}{2};\tfrac{3}{2}\right\rangle \\
\left|\pi^0 p\right\rangle &= \sqrt{\tfrac{2}{3}}\left|\tfrac{3}{2};\tfrac{1}{2}\right\rangle - \sqrt{\tfrac{1}{3}}\left|\tfrac{1}{2};\tfrac{1}{2}\right\rangle \\
\left|\pi^0 n\right\rangle &= \sqrt{\tfrac{2}{3}}\left|\tfrac{3}{2};\tfrac{-1}{2}\right\rangle + \sqrt{\tfrac{1}{3}}\left|\tfrac{1}{2};\tfrac{-1}{2}\right\rangle \\
\left|\pi^- p\right\rangle &= \sqrt{\tfrac{1}{3}}\left|\tfrac{3}{2};\tfrac{-1}{2}\right\rangle - \sqrt{\tfrac{2}{3}}\left|\tfrac{1}{2};\tfrac{-1}{2}\right\rangle
\end{aligned}$$

ab. Da nur die Amplitude $T_{3/2}$ beitragen soll, gilt

$$\begin{aligned}
\left\langle\pi^+ p\right| T \left|\pi^+ p\right\rangle &= a \\
\left\langle\pi^- p\right| T \left|\pi^- p\right\rangle &= \frac{a}{3} \\
\left\langle\pi^0 n\right| T \left|\pi^- p\right\rangle &= \frac{\sqrt{2}a}{3} \\
\left\langle\pi^0 n\right| T \left|\pi^0 n\right\rangle &= \frac{2a}{3}
\end{aligned}$$

und deshalb z. B. $\sigma(\pi^+ p)/\sigma(\pi^- p) = 3$ (Abb. 2.14).

2.35 Natürlich ist J_3 durch

$$J_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

gegeben. Wegen $J_+|1;-1\rangle = \sqrt{2}|1;0\rangle$ und $J_+|1;0\rangle = \sqrt{2}|1;1\rangle$ gilt

$$J_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad .$$

Ganz analog wird

$$J_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

abgeleitet. Mit $J_\pm = J_x \pm \mathrm{i} J_y$ folgt

$$J_x = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und

$$J_y = \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} .$$

2.36 Wir ergänzen (2.190) durch

$$\begin{aligned} \langle \pi^+ \pi^- | \, T \, | K_1 \rangle &= \sqrt{\frac{1}{3}} (T_2 - T_2^*) + \sqrt{\frac{2}{3}} (T_0 - T_0^*) \\ \left\langle \pi^0 \pi^0 \right| T \, | K_1 \rangle &= \sqrt{\frac{2}{3}} (T_2 - T_2^*) - \sqrt{\frac{1}{3}} (T_0 - T_0^*) \ . \end{aligned}$$

Die im Text angegebenen Festlegungen über T_2 und T_0 führen dann unmittelbar zu (2.191).

Kapitel 3

3.2 Der erste Teil der Aufgabe kann durch explizites Berechnen der Summe oder durch Anwenden der Vertauschungsrelation (3.8) gelöst werden. Der zweite Teil am besten mit Hilfe der Vertauschungsrelation.

3.5 Wegen $\gamma_5^2 = 1$ gilt $(1+\gamma_5)(1-\gamma_5) = 0$ und $(1+\gamma_5)(1+\gamma_5) = 2(1+\gamma_5)$ usw.

3.6 Immer wieder hilft das SymPy-notebook `Dirac.ipynb`!

3.8 Benutzen Sie die Vertauschungsrelation (3.8) und die Tatsache, dass Matrizen unter der Spur vertauschbar sind.

3.9 Anstelle von (3.47) muss das viel einfachere Integral

$$\mathrm{Sp} \int \frac{\mathrm{d}^4 k}{(2\pi)^4} \gamma_\mu \frac{\not{k} + m}{k^2 - m^2}$$

ausgewertet werden. Mit Hilfe der Ergebnisse der letzten Aufgabe bleibt nur ein Integral mit einem ungeraden Integranden in den Komponenten von k übrig, welches daher in den Grenzen von $-\infty$ bis $+\infty$ verschwindet.

3.10 (3.55) genügt der Differentialgleichung

$$q^2 \frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}q^2} = \frac{\alpha^2}{3\pi} \ .$$

3.11 Noch einfacher ist es, wenn Sie direkt das SymPy-notebook `eemumu.ipynb` studieren.
3.12 Auch hier gibt es ein notebook (`eeee.ipynb`)
3.13 Man muss nur q^2 als Quadrat der Differenz der Impulse des Protons auswerten.
3.14 Im Schwerpunktssystem gilt $t = 2|\boldsymbol{p}^*|^2(1 - \cos\theta)$ und daher $t_{\max} = 4|\boldsymbol{p}^*|^2$. Diese Invariante wird wie üblich mit Hilfe von (1.24) berechnet. Nach einigen Umformungen bekommt man

$$S_{12}^2 = s_0^2 - 4m^2M^2 = s_0^2\left(1 - \frac{4m^2M^2}{s_0^2}\right)$$

Diese Formel kann mit SymPy verifiziert werden. Im Laborsystem gilt für die Streuung an ruhenden Elektronen $s_0 = 2E_\mu m$ und daher $S_{12}^2 = s_0^2\beta_\mu^2$. Der Rest der Berechnung folgt aus den Angaben zum Thema „a) Energieverlust geladener Teilchen" im Abschnitt 3.2.4.
3.16 Wir wählen ein Atommodell mit einem elastisch gebundenen Elektron der Eigenfrequenz ω_0, was unter dem Einfluss einer elektromagnetischen Welle der Frequenz ω und der Amplitude E_0 zu schwingen beginnt. Die abgestrahlte Leistung ist im SI-System durch

$$\bar{P} = \frac{1}{12\pi\epsilon_0 c^3}\omega^4 p_0^2$$

bestimmt, worin das elektrische Dipolmoment p_0 bei Vernachlässigung der Dämpfung durch

$$p_0 = \frac{e^2E_0}{m(\omega^2 - \omega_0^2)}$$

gegeben ist. Der Wirkungsquerschnitt ist durch $\sigma = \bar{P}/I$ definiert. Nach Einsetzen der Intensität $I = c\,\epsilon_0\,E_0^2/2$ folgt im Einheitensystem der Teilchenphysik

$$\sigma = \frac{8\pi\alpha^2}{3m^2}\frac{\omega^4}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2} \quad .$$

Diese Formel enthält die beiden Grenzfälle der Thomson-Streuung ($\omega_0 \approx 0$) und der Rayleigh-Streuung ($\omega_0 \gg \omega$).
3.17 Die Lebensdauer berechnet sich aus der freien Weglänge zu $\tau = 1/(c\,\sigma\,n_\gamma)$. Für σ setzen wir den Thomson-Querschnitt ein. Für die spektrale Verteilung der Anzahldichte der Photonen gilt

$$\frac{\mathrm{d}n_\gamma}{\mathrm{d}\omega} = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\omega}\frac{1}{\hbar\omega} \quad ,$$

worin der erste Faktor auf der rechten Seite die spektrale Energiedichte der Planckschen Formel ist. Nach Integration erhalten wir n_γ mit dem numerischen Ergebnis $n_\gamma = 20{,}2\,T^3\,\mathrm{cm}^{-3}\mathrm{K}^{-3}$. Dies ergibt eine Lebensdauer von 25,5 h.
3.18 Mit $\lambda = 630$ nm ($\omega = 2$ eV) ergibt die Auswertung der auf der Seite zuvor angegebenen Formel für ω' den Wert 75,5 GeV.
3.19 Da die Masse des Elektrons nicht vernachlässigt werden darf, muss man (3.95) auswerten. Dies ergibt

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} \sim \frac{1 + \beta^2\cos^2\theta}{1 - \beta^2\cos^2\theta} + 2K + 2K^2 \quad ,$$

worin β die Geschwindigkeit des Elektrons ist und K aus

$$K = \frac{m^2}{E\omega(1-\beta^2\cos^2\theta)}$$

berechnet wird. E und ω bezeichnen die Energien von Elektron und Photon. Für $\beta \longrightarrow 0$ wird die Winkelverteilung also isotrop.

3.20 Man ersetzt die Beträge $|\boldsymbol{p}|$ durch die Energien E und entwickelt die Wurzeln für große E. Bei Vernachlässigung aller Terme $\sim M^4$ folgt das gewünschte Ergebnis rasch.

Kapitel 4

4.1 Eine Routine zur Berechnung der $SU3$-Strukturkonstanten ist auch in `heppackv0.py` enthalten. Vergleichen Sie ihr Ergebnis!

4.2 Wir gehen von Gleichung

$$T'^{\alpha_1\ldots\alpha_r}_{\beta_1\ldots\beta_s} = U^{\alpha_1}{}_{\gamma_1}\ldots U^{\alpha_r}{}_{\gamma_r}(U^{-1})^{\delta_1}{}_{\beta_1}\ldots(U^{-1})^{\delta_s}{}_{\beta_s}T^{\gamma_1\ldots\gamma_r}_{\delta_1\ldots\delta_s}$$

im Abschnitt 4.1.2 aus. Für kleine Θ gilt mit $\theta = \Theta/2$

$$U = \begin{pmatrix} 1 & -\mathrm{i}\theta & 0 \\ -\mathrm{i}\theta & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und $U^{-1} = U^*$ daher

$$T'^1_1 = T^1_1 + \mathrm{i}\theta T^2_1 - \mathrm{i}\theta(T^2_1 + \mathrm{i}\theta T^2_2) \ .$$

Entsprechende Ausdrücke ergeben sich für T'^2_2 und T'^3_3. Bei Vernachlässigung quadratischer Terme in θ folgt dann $T'^i_i = T^i_i$.

4.3 Mit $q^1 = p$ und $q^2 = n$ sieht man sofort, dass (4.13) die Zustände (2.180) und (2.181) erzeugt. Ebenso erzeugt (4.6) bis auf eine Phase die Zustände (2.185) und (2.186).

4.5 Als Alternative zu den Verfahren im Text des Buches benutzen wir eine Methode, die aus der Atomphysik bekannt ist. Der Farbfaktor $c_\mathrm{F} = \langle \boldsymbol{F}_1\boldsymbol{F}_2\rangle$ ist durch die Wechselwirkung der $\boldsymbol{F}$-Spins definiert. Mit $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2$ lässt sich c_F durch die Betragsquadrate $\boldsymbol{F}^2, \boldsymbol{F}_1^2, \boldsymbol{F}_2^2$ von Oktett, Triplett und Antitriplett ausdrücken, deren Eigenwerte in Gleichung

$$f^2 = \frac{1}{3}(p^2 + q^2 + pq) + p + q$$

im Abschnitt 4.1.2 definiert sind. Damit ergibt sich $c_\mathrm{F} = 1/6$ im Oktett und wie gehabt $c_\mathrm{F} = -4/3$ im Singlett.

4.6 Im notebook `Farbfaktoren.ipynb` sind Routinen für komplizierte Farbfaktoren enthalten. Ergänzen Sie das notebook durch ein kleines Programm für Farbfaktoren bei festliegenden Farben der Quarks.

4.7 Im notebook `Farbfaktoren.ipynb` und in `heppackv0.py` sind die λ-Matrizen definiert. Sie können dort Beispiele ausprobieren oder eine Routine schreiben, die alle Möglichkeiten überprüft.

4.9 Eigentlich wird schon im Text erläutert, dass nur $T^{3g}_{fi}(g_-g_- \to q_-\bar{q}_+)$, $T^{3g}_{fi}(g_-g_- \to q_+\bar{q}_-)$, $T^{3g}_{fi}(g_+g_+ \to q_-\bar{q}_+)$, $T^{3g}_{fi}(g_+g_+ \to q_+\bar{q}_-)$ übrig bleiben.

4.10 f^{abc} wird in `heppackv0.py` mit der Funktion `fsu3(a,b,c)` berechnet.

4.12 Das Ergebnis ist in `heppackv0.py` zu finden.

4.14 Vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit Tabelle 9.1 in (Barger und Phillips 1991). Erst nach der Berechnung des großen Querschnitts der Reaktion $gg \to gg$ stimmten die Experimente zur Produktion von zwei jets mit der Theorie überein.

4.16 Aus der Wellenfunktion des *flavor*-Singuletts folgt

$$\langle \eta_1 | M | \eta_1 \rangle = \frac{1}{3}(2m_u + 2m_d + 2m_s) \ .$$

Im additiven Quarkmodell ist diese Masse identisch mit $(2M_K + M_\pi)/3$.

4.17 a_0 und $f_0(500)$ sollten etwa die gleiche Masse habe, eventuell vielleicht 100 bis 200 MeV schwerer als ρ, ω wegen des Bahndrehimpulses $L = 1$. Das $f_0(980)$ müsste schwerer sein, da es nur aus s-Quarks bestehen sollte. Alle diese Voraussagen sind nicht erfüllt.

4.18 Aus der fünften Zeile der Tabelle 4.4 lesen wir – unter Ersetzung der Farben durch die Quarksorten –

$$|\Lambda\rangle = \frac{1}{2}(|usd\rangle - |uds\rangle + |dsu\rangle - |dus\rangle)$$

ab.

4.19 Die Wellenfunktion des Σ^+ erhalten wir aus (4.45), indem wir das d-Quark durch ein s-Quark ersetzen. Damit folgt

$$\mu_{\Sigma^+} = \frac{e}{2m_u}\left(\frac{8}{9} + \frac{1}{9}\frac{m_u}{m_s}\right) \ .$$

Das vorhergesagte magnetische Moment ist also etwas kleiner (2,7 μ_K) als das magnetische Moment des Protons (2,79 μ_K). Gemessen wurden 2,5 μ_K.

4.20 Das ist eine Aufgabe zum Probieren. $m_{u,d} = 360$ MeV, $m_s = 510$ MeV, $b' = 3{,}8 \cdot 10^7$ MeV^2 und $b = 2 \cdot 10^7$ MeV^2 gibt gute Resultate für das Baryonen-Oktett und -Dekuplett sowie die ρ, ω- und Φ-Mesonen, aber schlechte Werte für die K- und K^*-Mesonen.

4.21 Wir müssen offenbar $T_{fi} = f_{\rho\gamma} e \varepsilon_{\rho,\mu} j^\mu / M_\rho^2$ für die möglichen Helizitäten des ρ-Mesons und der Elektron-Positron Paare berechnen. Wir beschränken uns auf masselose Elektronen und Positronen. Für (e^-_-, e^+_+) entnehmen wir j^μ aus (3.58) mit $E = M_\rho/2$. Die Polarisationsvektoren $\varepsilon_{\rho,\pm}$ sind durch (2.115) mit $\theta, \phi = 0$ festgelegt, während $\varepsilon_{\rho,0}$ durch (3.97) gegeben ist, also $[0, 0, 0, 1]$ für ein ruhendes ρ-Meson. Damit lässt sich $|T_{fi}|^2$ berechnen und es sollte Sie nicht überraschen, dass die Winkelverteilung isotrop ist. Um auch (e^-_+, e^+_-) zu berücksichtigen wird das Ergebnis mit 2 multipliziert. Danach geht alles seinen gewohnten Gang.

4.22 Im Text des Kapitels (4.4) sind einige Besispiele berechnet. Beachten Sie die relativen Vorzeichen der $q\bar{q}$ Paare in der π^0-Wellenfunktion.

4.23 Für das ϕ-Meson erhalten wir $|R_S(0)| = 0{,}24\,\mathrm{GeV}^{3/2}$. Die Auswertung von J/ψ und Υ zeigt dass $|R_S(0)|^2/M_V^2$ sich nur um wenige Prozent ändert.

4.24 Zunächst stellt man die (4.79) entsprechenden Formeln für die η- und η'-Mesonen unter Berücksichtigung eines Mischungswinkels auf. Als Zerfallskonstante wird immer f_π eingesetzt. Um vom Mischungswinkel unabhängig zu werden, wird dann

$$\frac{\Gamma^{\eta'}_{\gamma\gamma}}{m^3_{\eta'}} = \frac{3\Gamma^{\pi^0}_{\gamma\gamma}}{m^3_{\pi^0}} - \frac{\Gamma^{\eta}_{\gamma\gamma}}{m^3_{\eta}}$$

bewiesen. So kann z. B. $\Gamma^{\eta'}_{\gamma\gamma}$ berechnet werden. Die Auswertung zeigt, dass die Vorhersage ($\Gamma^{\eta'}_{\gamma\gamma}$ = 5,7 keV) nur zu ca. 30 % erfüllt wird .

4.25 Die Integration über (2.106) ergibt keinen Unterschied in den Formeln für die Zerfallsbreite.

4.26 Aus (4.75) entnehmen wir $|Q_b| = 1/3$. Aus (4.82) bestimmen wir mit $\alpha_s = 0{,}196$ eine hadronische Zerfallsbreite von 57 keV!

4.27 Im Oszillatorpotential gilt im Grundzustand $E = 3\,\omega/2$. Aus dem Spektrum haben wir für das Charmonium $\omega = 315$ MeV abgelesen. Da die potentielle und kinetische Energie im Mittel gleich groß sind, gilt $3\,\omega/2 = 2(m_c\gamma - m_c)$, wobei in der Klammer rechts der Ausdruck für die relativistische kinetische Energie steht. Mit $\beta^2 = 1 - 1/\gamma^2$ bekommen wir $\beta^2 = 0{,}25$. Die gleiche Rechnung gibt im Fall des Bottomoniums $\beta^2 = 0{,}12$.

4.28 Die Auswertung der Formel mit typischen Konstituentenmassen des u- und des b-Quarks ergibt $M_{\eta_b} \approx M_\Upsilon - 3$ MeV.

Kapitel 5

5.1 Nochmals Beweis mit anschaulicher Argumentation: Als Beispiel nehmen wir blaue u-Quarks. Es gibt die Prozesse $u_B \to u_G g_{B\bar{G}}$, $u_B \to u_R g_{B\bar{R}}$ und $u_B \to u_B g_{B\bar{B}}$. Die Amplituden der ersten beiden haben das Gewicht 1 wegen der Wellenfunktionen (4.9), während die dritte Reaktion über die Wellenfunktion (4.12) einen Wichtungsfaktor $2/\sqrt{6}$ erhält. Diese Faktoren müssen quadriert und addiert werden. Nach Multiplikation mit dem üblichen Faktor 1/2 erhält man $c_F = 4/3$.

5.2 Die Energien werden gemäß $E_1 > E_2 > E_3$ angeordnet. Dann gilt

$$\sum |\boldsymbol{p}_i \boldsymbol{n}| = |E_1 \cos\theta_1| + |E_2 \cos\theta_2| + |E_3 \cos\theta_3| \quad .$$

Die rechte Seite ist aber $\geq |E_1 \cos\theta_1| + |E_2 \cos\theta_2 + E_3 \cos\theta_3|$ und wegen der Impulserhaltung $\geq 2\,|E_1 \cos\theta_1|$. Im Maximum ($\cos\theta_1 = 1$) gilt das Gleichheitszeichen. Damit ist der Beweis vollständig.

5.3 Beim isotropen Zerfall eines System in Teilchen gleicher Masse sind alle Impulse gleich groß. Damit wird T proportional zu $\int |\cos\theta| \mathrm{d}\cos\theta$. Dieses Integral hat den Wert 1/2.

5.4 Man schreibt alle in (5.12) erlaubten Anteile auf und benutzt dann die Bedingungen der darauf folgenden Gleichung.

5.5 Die Experimente wurden alle an ruhenden Protonen durchgeführt. Es gilt $q^2 = -2\,E\,E'(1-\cos\theta)$ also

$$EE' = \frac{-q^2}{1-\cos\theta} = a$$

und

$$E - E' = \frac{-q^2}{2M} = b \quad .$$

Die Auflösung nach E' lautet

$$E' = -\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} + a} \quad .$$

Damit erhalten wir $E = 1{,}022$ GeV, $E' = 0{,}489$ GeV für $\theta = 90°$ und $E = 11{,}732$ GeV, $E' = 11{,}199$ GeV für $\theta = 5°$.

5.6 Es sollte ein ziemlich kleiner Anteil herauskommen.

5.7 Wie die Formel abgeleitet wird, ist im Text genau beschrieben.

5.9 Wir legen die z-Achse des Koordinatensystems in die Richtung des einlaufenden Protons. Mit $x = -q^2/(2\,q\cdot P)$ und $y = q \cdot P/(e \cdot P)$ folgt

$$x = \frac{2EE'(1+\cos\theta)}{4E_pE - 2E_pE'(1-\cos\theta)}$$

und

$$y = 1 - \frac{E'}{E}\frac{1-\cos\theta}{2} \quad .$$

5.11 Es handelt sich hier um eine typische Anwendung der Jacobi-Determinante. Wir bleiben im HERA-System. Mit den Ergebnissen der letzten Aufgabe gilt

$$\begin{aligned}
\frac{\partial q^2}{\partial\cos\theta} &= -2EE' \\
\frac{\partial q^2}{\partial E'} &= -2E(1+\cos\theta) \\
\frac{\partial y}{\partial\cos\theta} &= +\frac{E'}{2E} \\
\frac{\partial y}{\partial E'} &= -\frac{1}{2E}(1-\cos\theta) \quad .
\end{aligned}$$

Damit gilt

$$\frac{\mathrm{d}q^2\mathrm{d}y}{\mathrm{d}E'\mathrm{d}\Omega} = \frac{E'}{\pi}$$

und mit $q^2 = -x\,y\,s$

$$\frac{\mathrm{d}q^2\mathrm{d}x}{\mathrm{d}E'\mathrm{d}\Omega} = \frac{E'x}{\pi y} \quad .$$

Der Beweis für ruhende Protonen ist noch einfacher.

5.12 Die nötigen Schritte sind im Text beschrieben.

5.13 Ausgehend von (5.36) finden Sie leicht, dass die Punkte am äußersten rechten Rand der Kurven der Abb. 5.24 liegen.

5.15 Beachten Sie die Symmetriebedingungen der Fragmentationsfunktionen auf Seite 347.

5.16 Die Auswertung von (5.67) mit Werten für $\Gamma_{\gamma\gamma}$ aus den Tabellen der PDG ergibt einen Wirkungsquerschnitt von 2365, 1568 und 2360 pb für die Produktion von π^0-, η- und η'-Mesonen. Darin kommt zum Ausdruck, dass $\Gamma_{\gamma\gamma}$ für diese Mesonen ungefähr proportional zu M^3 ist.

5.17 Der log-Term muss > 1 sein.

Kapitel 6

6.1 Die Streuamplitude (6.9) wird in der Konvention der Kernphysik zu

$$f = \frac{1}{\sqrt{2}\pi} G_\mathrm{F}\sqrt{s} \quad .$$

Da keine Winkelabhängigkeit vorliegt, entspricht dies dem Term mit $J=0$ in (2.101)

$$f = \frac{2}{\sqrt{s}} t^0_{\frac{-1}{2}\frac{-1}{2},\frac{-1}{2}\frac{-1}{2}} \; .$$

Die Amplitude ist reell, der Realteil von t_0 kann maximal den Wert $1/2$ erreichen. Das ergibt $s_{\max} = \sqrt{2}\pi/G_{\mathrm{F}}$.

6.5 Mit $\boldsymbol{p} \longrightarrow 0$ wird aus (3.19)

$$u_r = \sqrt{2m}\begin{pmatrix} \chi_r \\ 0 \end{pmatrix} \; ,$$

und analog für $u_{r'}$. Damit gilt $j^0_{\mathrm{V}} = 2m\chi^\dagger_{r'}\chi_r$, $j^i_{\mathrm{V}}=0$ bzw. $j^0_{\mathrm{A}}=0$, $j^i_{\mathrm{A}} = 2m\chi^\dagger_{r'}\sigma^i\chi_r$,

6.7 Damit ist man offenbar ziemlich nahe am richtigen Ergebnis!

6.8 Abzählen der beitragenden Familien von Quarks und Leptonen, wobei nicht vergessen werden darf, dass die Quarks als Farb-Tripletts auftreten.

6.9 Es sind nach dem Muster des Zerfalls $\mu \longrightarrow \nu_\mu e\bar{\nu}_e$ außer dem Zerfall in $\nu_\tau e\bar{\nu}_e$ nur die Zerfälle in $\nu_\tau \mu\bar{\nu}_\mu$ und $\nu_\tau d\bar{u}$ möglich.

6.10 Gehen Sie analog zum Beweis für die Quarkdichten $q(x)$ vor.

6.11 Dann tragen wohl s und $\bar{c}$ nicht bei.

6.12 Neben der Ergänzung der Abb 6.16 durch Diagramme mit c und s-Quarks muss noch der Zusammenhang des Abschn. 5.3.3 zwischen den Quarkdichten im Proton und Neutron beachtet werden.

6.13 Beachten Sie die Verknüpfung der Strukturfunktionen mit dem Wirkungsquerschnitt der Photon-Hadron-Streuung in Abschn. 5.3.2

6.15 Es wird jeweils nur die führende Ordnung in λ mitgenommen, also $V_{ud}=1-\lambda^2/2$, $V_{us}=\lambda$, $V_{ub}=A\,\lambda^3(\rho-\mathrm{i}\eta)$. Die letzte Gleichung wird mit Hilfe der Identitäten $\cos\delta_{13} = \rho/\sqrt{\eta^2+\rho^2}$ und $\sin\delta_{13} = \eta/\sqrt{\eta^2+\rho^2}$ abgeleitet. Die weiteren Matrixelemente werden dann in analoger Weise bestimmt.

6.16 Man schreibt die Produkte der Matrixelemente für die Kombinationen $j,k = (u,u)$, (u,c), (c,u), (c,c) auf und setzt die Werte der Cabbibo-Matrix ein. Bei gleichen Massen ist $f(m_j, m_k)$ nur ein gemeinsamer Faktor.

6.17 Wie die letzte Aufgabe, nur etwas komplizierter.

6.18 Zeichnen Sie eine Strecke CB der Länge 1, die das Produkt $|V_{cb}V_{cd}|$ repräsentiert. Dann wird ein Kreis um C mit dem Radius 0,38 (entsprechend $|V_{ub}V_{ud}|$ und ein Kreis um B mit dem Radius 0,93 (entsprechend $|V_{tb}V_{td}|$) geschlagen. Im Schnittpunkt liegt die Dreiecksspitze A.

6.19 Schreiben Sie die Unitaritätsbedingung (6.47) für $k=2$, $j=1$ auf. Dann werden Sie merken, dass das zugehörige Dreieck sehr flach ist und praktisch zu einer Linie wird.

6.20 c ist die dem Punkt C gegenüber liegende Seite haben wir in der Schule gelernt. Sie müssen also nur noch $c = |c|\exp\mathrm{i}(\pi-\beta)$ durch die Darstellung komplexer Zahlen in einer Ebene begründen.

6.21 Im Text ist das Messergebnis für $\sin(2\beta)$ mit einem Fehler von 1σ angegeben. Berechnen Sie daraus den Fehler für CL=99% und bestimmen den erlaubten Wertebereich von β.

6.22 Zum Beweis muss

$$T_{fi} = \frac{g^2}{2}\bar{u}_{\mathrm{R}}(k)\;\not{\epsilon}^*_0(p')\frac{\not{q}}{q^2}\;\not{\epsilon}^*_0(k')u_{\mathrm{L}}(p)$$

ausgewertet werden. Das kann per hand oder durch Erweiterung eines NOTEBOOKS wie COMPTON(HE).IPYNB geschehen.

6.25 Auch hier muss nur die Tabelle benutzt werden, wobei die (farbigen) Quarks dreifach gezählt werden.

6.26 Für masselose Fermionen sind die nötigen Amplituden in Tabelle 6.3 enthalten. Mit mehr Ehrgeiz können Sie auch eines unserer NOTEBOOKS z.B. EEMUMU.IPYNB ergänzen.

6.27 Hinweise zur Lösung sind im Text reichlich vorhanden.
6.29 Auch hier gilt, dass man nur die Zwischenschritte der im Text behandelten Umrechnung noch selbst durchführen muss.

Kapitel 7

7.1 Lösungshinweise sind in der Aufgabenstellung gegeben.

Kapitel 8

8.1 Mit der Definition der Jacobi-Determinate in Abschnitt 2.4 ist dies eine einfache mathematische Rechnung. Alternativ kann man die Rechnung auch mit SymPy durchführen.
8.2 Diese Aufgabe ist umfangreicher als andere. Der Lösungsweg ist in der Aufgabenstellung erläutert. Versuchen Sie es bevor Sie den Lösungsvorschlag in `A8.2-Drell-Yan.ipynb` zu rate ziehen.
8.3 Vergleichen Sie ihr Ergebnis mit dem Notebook `A8.3-Drell-Yan-numerisch.ipynb`
8.4 Vergleichen Sie ihr Ergebnis mit dem Notebook `A8.4-gluon-gluon.ipynb`
8.5 Integrieren Sie den elastischen Querschnitt der letzten Formel über t um die Behauptung zu verifizieren.
8.6 Man quadriert (2.26) und benutzt (2.13) an der Stelle $t = 0$.
8.7 Mit einem totalen Wirkungsquerschnitt von 110 mb wird das Verhältnis $\sigma_{\text{el}}/\sigma_t$ selbst für $\rho = 1$ kleiner als $1,4 \cdot 10^{-4}$.
8.8 Für diese Berechnung kann man die Normalverteilung integrieren oder z.B. die `cdf`-Funtion der Routine `scipy.stats.norm` verwenden.

Kapitel 9

9.1 Das Ergebnis erhält man direkt durch Verwendung der PMNS-Matrix.
9.2 Die Lösung ergibt sich durch eine direkte Anwendung der Gleichung 9.9 im Text, wobei alle Neutrinomassen m_i durch die niedrigste Masse m_0 und den Massenunterschieden ausgedrückt werden.
9.3 Der Lösungsweg ist in der Aufgabenstellung angegeben.
9.4 Zuerst sollte man die Eigenwerte der Matrix

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$$

berechnen. Im nächsten Schritt kann man dann a, b, c durch die Matrixelement in (9.29) ersetzen, wobei man mit (9.22) alle Massen durch m_1 und m_2 ausdrückt. Dies ist eine etwas mühsame Rechnung, bei der SymPy helfen kann. Vergleichen Sie ihr Ergebnis mit dem Notebook `A9.4-Neutrino-Osc-Mat.ipynb`.
9.5 Es gilt $N_\nu = 2S/Q$, wobei S die Solarkonstante und $Q = 26,731$ MeV die Wärmetönung ist, die im Text nach (9.36) definiert wurde. Dies ergibt einen Fluß von $6,54 \cdot 10^{14} m^{-2} s^{-1}$.

Kapitel 10

10.1 In Abb. 10.8 werden die Photonen durch W-Bosonen ersetzt. Die waagerechte Linie in der Schleife ist dann z.B ein ν_μ und die schrägen Linien gehören zu einem Myon, das an das Z koppelt.
10.2 Entsprechend dem Z-Zerfall gibt es den Zerfall in ein Sfermion-Fermion-Paar $\tilde{Z} \to \tilde{f}\bar{f}$, bzw. $\tilde{Z} \to \bar{\tilde{f}} f$ mit dem anschließenden Zerfall des Sfermions in das LSP $\tilde{f} \to f\tilde{\gamma}$.