

# Stofftransport & Reaktionsgleichungen

Projekt zur Vorlesung Numerische Simulation  
WS16/17

P. Buchfink<sup>1</sup>   E. Ott<sup>1</sup>   M. Schleicher<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Institut  
Universität Stuttgart

February 1, 2017

# Wiederholung: Diffusions-Advektionsgleichung

Stofftransport &  
Reaktionsgleichungen

P. Buchfink,  
E. Ott,  
M. Schleicher

RAD-Gleichungen

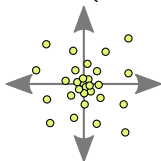
Reaktionsgleichungen

Algenwachstum  
Szenarien

Gray-Scott

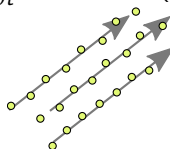
Diffusion

$$\frac{\partial s(t, \vec{x})}{\partial t} = \nabla \cdot (D \nabla s(t, \vec{x}))$$



Advektion

$$\frac{\partial s(t, \vec{x})}{\partial t} = -\nabla \cdot (\vec{v} s)$$



(*Stochastic Problems in Physics and Astronomy*, Page 41, S. Chandrasekhar, 1943, Reviews of Modern  
Physics, American Physical Society)

# Zeitschrittbeschränkung

Stofftransport &  
Reaktionsgleichungen

P. Buchfink,  
E. Ott,  
M. Schleicher

RAD-Gleichungen

Reaktionsgleichungen

Algenwachstum  
Szenarien

Gray-Scott

Für Diffusion:

$$\Delta t \leq \frac{\Delta x^2 \Delta y^2}{2D(\Delta x^2 + \Delta y^2)}$$

(<http://pauli.uni-muenster.de/tp/fileadmin/lehre/NumMethoden/WS0910/ScriptPDE/Heat.pdf>, Page 12)

Für Advektion: "Vererbt" von Beschränkung für Strömungslöser

# Gesamtgleichung

Stofftransport &  
Reaktionsgleichungen

P. Buchfink,  
E. Ott,  
M. Schleicher

RAD-Gleichungen

Reaktionsgleichungen

Algenwachstum  
Szenarien

Gray-Scott

$$\frac{\partial s(\vec{x}, s, t)}{\partial t} = \nabla \cdot (D \nabla s(t, \vec{x})) - \nabla \cdot (\vec{v} s) + R(\vec{x}, s, t)$$

Erweitert um allgemeinen Reaktionsterm R

# Lotka-Volterra-Modell

Stofftransport &  
Reaktionsgleichungen

P. Buchfink,  
E. Ott,  
M. Schleicher

RAD-Gleichungen

Reaktionsgleichungen

Algenwachstum  
Szenarien

Gray-Scott

$R(s, t)$  nicht analytisch bestimmbar. Modelliert als System von ODEs.

$$\frac{ds_i}{dt} = \alpha_i s_i + \sum_{j=1}^n \beta_{ij} s_j$$

Zudem:  $\beta_{ii} = -\frac{\alpha_i}{L}$  mit  $L$  als Wachstumsgrenze

(*Principes de biologie mathématique*, V. Volterra, Acta Biotheoretica, 1937, Volume 3, Issue 1, Pages 1–36)

# Lotka-Volterra-Modell

Stofftransport &  
Reaktionsgleichungen

P. Buchfink,  
E. Ott,  
M. Schleicher

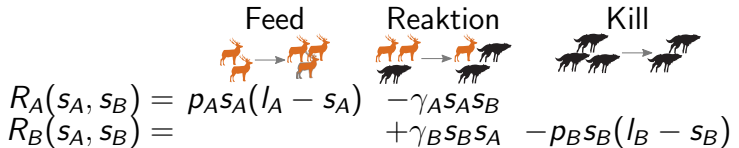
RAD-Gleichungen

Reaktionsgleichungen

Algenwachstum  
Szenarien

Gray-Scott

- Zwei Substanzen A: Beute, B: Jäger



- $p_A$  Reproduktionsrate der Beute
- $I_A$  Gleichgewichtspunkt der Beute
- $\gamma_A$  Fressrate der Räuber pro Beutelebewesen
- $\gamma_B$  Reproduktionsrate der Räuber pro Beutelebewesen
- $p_B$  Sterberate der Räuber
- $I_B$  Gleichgewichtspunkt der Räuber
- $d_A, d_B$  Diffusions-Konstanten

# Verhalten & Stabilität

Stofftransport &  
Reaktionsgleichungen

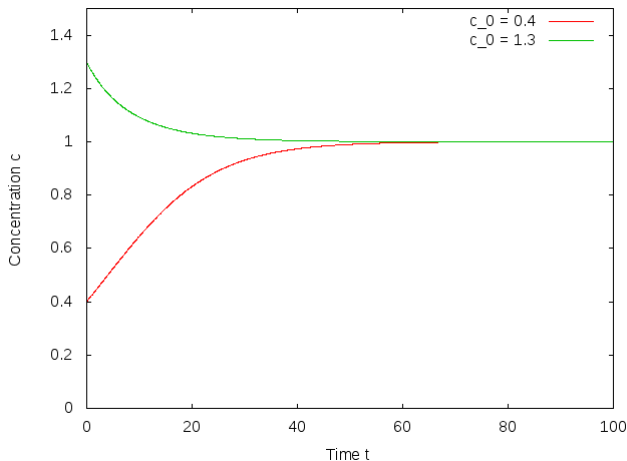
P. Buchfink,  
E. Ott,  
M. Schleicher

RAD-Gleichungen

Reaktions-  
gleichungen

Algenwachstum  
Szenarien

Gray-Scott



# Verhalten & Stabilität

Stofftransport &  
Reaktionsgleichungen

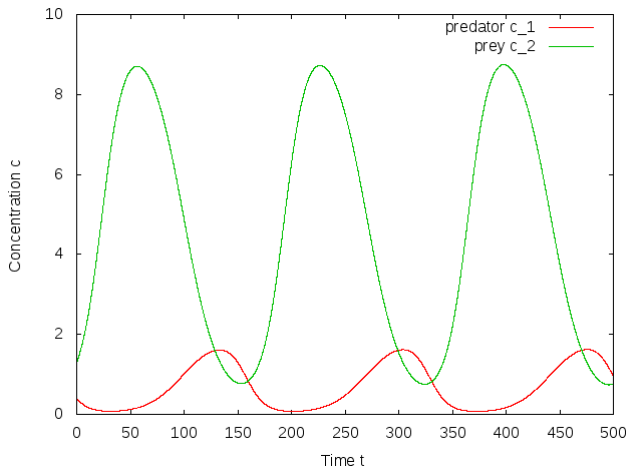
P. Buchfink,  
E. Ott,  
M. Schleicher

RAD-Gleichungen

Reaktionsgleichungen

Algenwachstum  
Szenarien

Gray-Scott





# Verhalten & Stabilität

Stofftransport &  
Reaktionsgleichungen

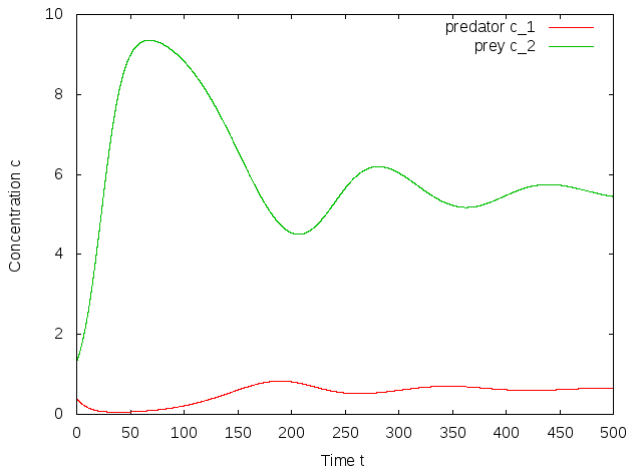
P. Buchfink,  
E. Ott,  
M. Schleicher

RAD-Gleichungen

Reaktionsgleichungen

Algenwachstum  
Szenarien

Gray-Scott



# Verhalten & Stabilität

Stofftransport &  
Reaktionsgleichungen

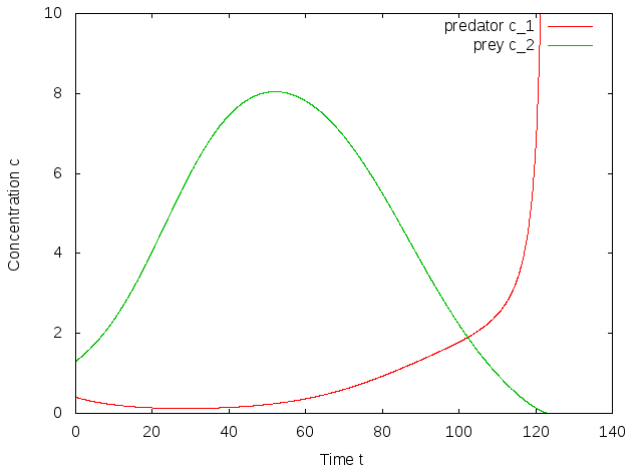
P. Buchfink,  
E. Ott,  
M. Schleicher

RAD-Gleichungen

Reaktions-  
gleichungen

Algenwachstum  
Szenarien

Gray-Scott



# Verhalten & Stabilität

Stofftransport &  
Reaktionsgleichungen

P. Buchfink,  
E. Ott,  
M. Schleicher

RAD-Gleichungen

Reaktionsgleichungen

Algenwachstum  
Szenarien

Gray-Scott

- Instabilität durch Parameter und Löser überlagert
- Löser lässt sich durch symplektische Verfahren ersetzen
- Parameterwahl nicht trivial, aber auch nicht willkürlich

# Inspiration

Stofftransport &  
Reaktionsgleichungen

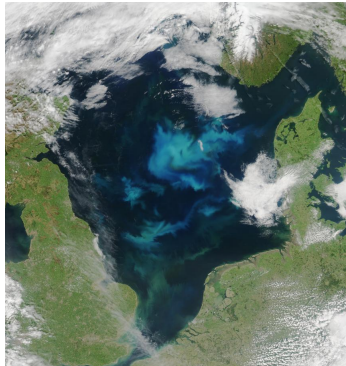
P. Buchfink,  
E. Ott,  
M. Schleicher

RAD-Gleichungen

Reaktions-  
gleichungen

Algenwachstum  
Szenarien

Gray-Scott



Quelle: <http://www.spiegel.de/wissenschaft/natur/bild-1042982-869697.html>

# Idee des Gray-Scott Modells

Stofftransport &  
Reaktionsgleichungen

P. Buchfink,  
E. Ott,  
M. Schleicher

RAD-Gleichungen

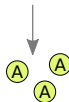
Reaktionsgleichungen

Algenwachstum  
Szenarien

Gray-Scott

- Zwei Substanzen A: Futter, B: Räuber

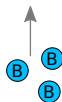
Feed



Reaktion



Kill



$$R_A(s_A, s_B) = f(1 - s_A)$$

$$-s_A s_B^2$$

$$R_B(s_A, s_B) =$$

$$+s_A s_B^2$$

$$-(k + f)s_B$$

- Kill-Rate  $k$
- Feed-Rate  $f$
- Diffusions-Konstanten  $d_A, d_B$

# Gray-Scott Modell ohne Advektion

Stofftransport &  
Reaktionsgleichungen

P. Buchfink,  
E. Ott,  
M. Schleicher

RAD-Gleichungen

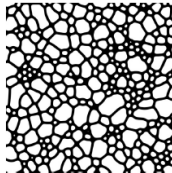
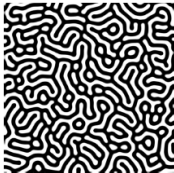
Reaktions-  
gleichungen

Algenwachstum  
Szenarien

Gray-Scott

## ■ Muster bekannt von

- Blättern
- Tierfellen (Rehe, Giraffen, Schmetterlinge, ...)
- Miktose



Quelle: <http://www.karlsims.com/rd.html>