

Stofftransport & Reaktionsgleichungen

Projekt zur Vorlesung Numerische Simulation
WS16/17

P. Buchfink¹ E. Ott¹ M. Schleicher¹

¹Institut
Universität Stuttgart

February 1, 2017

Wiederholung: Diffusions-Advektionsgleichung

Stofftransport &
Reaktionsgleichungen

P. Buchfink,
E. Ott,
M. Schleicher

RAD-Gleichungen

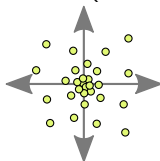
Reaktionsgleichungen

Algenwachstum
Szenarien

Gray-Scott

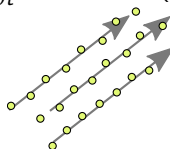
Diffusion

$$\frac{\partial s(t, \vec{x})}{\partial t} = \nabla \cdot (D \nabla s(t, \vec{x}))$$



Advektion

$$\frac{\partial s(t, \vec{x})}{\partial t} = -\nabla \cdot (\vec{v} s)$$



(*Stochastic Problems in Physics and Astronomy*, Page 41, S. Chandrasekhar, 1943, Reviews of Modern
Physics, American Physical Society)

Zeitschrittbeschränkung

Stofftransport &
Reaktionsgleichungen

P. Buchfink,
E. Ott,
M. Schleicher

RAD-Gleichungen

Reaktions-
gleichungen

Algenwachstum
Szenarien

Gray-Scott

Für Diffusion:

$$\Delta t \leq \frac{\Delta x^2 \Delta y^2}{2D(\Delta x^2 + \Delta y^2)}$$

(<http://pauli.uni-muenster.de/tp/fileadmin/lehre/NumMethoden/WS0910/ScriptPDE/Heat.pdf>, Page 12)

Für Advektion: "Vererbt" von Beschränkung für Strömungslöser

Gesamtgleichung

Stofftransport &
Reaktionsgleichungen

P. Buchfink,
E. Ott,
M. Schleicher

RAD-Gleichungen

Reaktionsgleichungen

Algenwachstum
Szenarien

Gray-Scott

$$\frac{\partial s(\vec{x}, s, t)}{\partial t} = \nabla \cdot (D \nabla s(t, \vec{x})) - \nabla \cdot (\vec{v} s) + R(\vec{x}, s, t)$$

Erweitert um allgemeinen Reaktionsterm R

Lotka-Volterra-Modell

Stofftransport &
Reaktionsgleichungen

P. Buchfink,
E. Ott,
M. Schleicher

RAD-Gleichungen

Reaktionsgleichungen

Algenwachstum
Szenarien

Gray-Scott

$R(s, t)$ nicht analytisch bestimmbar. Modelliert als System von ODEs.

$$\frac{ds_i}{dt} = \alpha_i s_i + \sum_{j=1}^n \beta_{ij} s_j$$

Zudem: $\beta_{ii} = -\frac{\alpha_i}{L}$ mit L als Wachstumsgrenze

(*Principes de biologie mathématique*, V. Volterra, Acta Biotheoretica, 1937, Volume 3, Issue 1, Pages

1–36)

Lotka-Volterra-Modell

Stofftransport &
Reaktionsgleichungen

P. Buchfink,
E. Ott,
M. Schleicher

RAD-Gleichungen

Reaktions-
gleichungen

Algenwachstum
Szenarien

Gray-Scott

- Zwei Substanzen A: Beute, B: Jäger
- Phänomene



$$\begin{aligned} R_A(s_A, s_B, t, \mathbf{x}) &= p_A s_A (I_A - s_A) & -\gamma_A s_A s_B \\ R_B(s_A, s_B, t, \mathbf{x}) &= & +\gamma_B s_B s_A & -p_B s_B \end{aligned}$$

- Parameter
 - Reproduktionsrate der Beute p_A
 - Gleichgewichtspunkt der Beute I_A
 - Fressrate der Räuber pro Beute-Lebewesen γ_A
 - Reproduktionsrate der Räuber pro Beute-Lebewesen γ_B
 - Sterberate der Räuber p_B

Verhalten & Stabilität

Stofftransport &
Reaktionsgleichungen

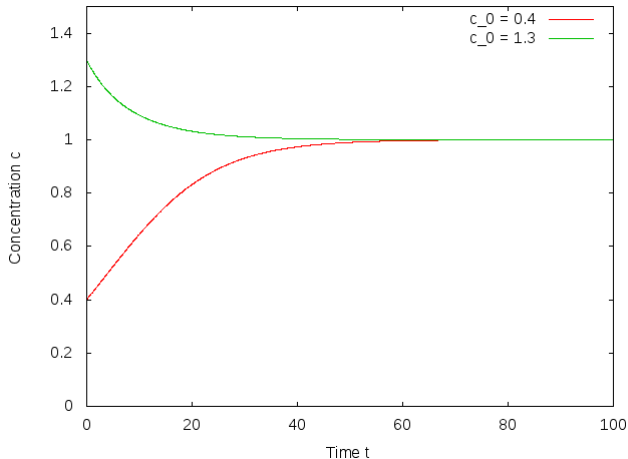
P. Buchfink,
E. Ott,
M. Schleicher

RAD-Gleichungen

Reaktions-
gleichungen

Algenwachstum
Szenarien

Gray-Scott



Verhalten & Stabilität

Stofftransport &
Reaktionsgleichungen

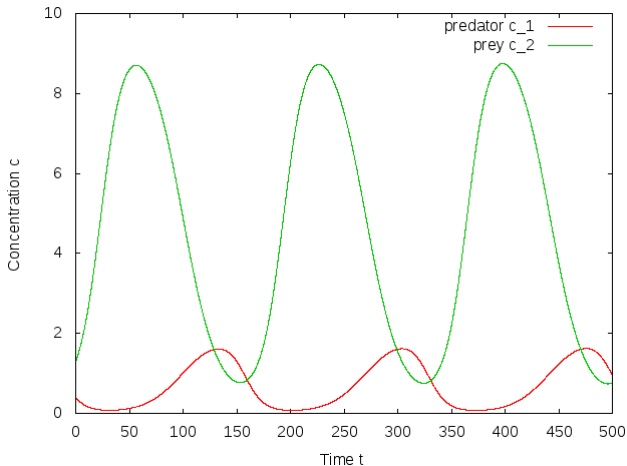
P. Buchfink,
E. Ott,
M. Schleicher

RAD-Gleichungen

Reaktionsgleichungen

Algenwachstum
Szenarien

Gray-Scott



Verhalten & Stabilität

Stofftransport &
Reaktionsgleichungen

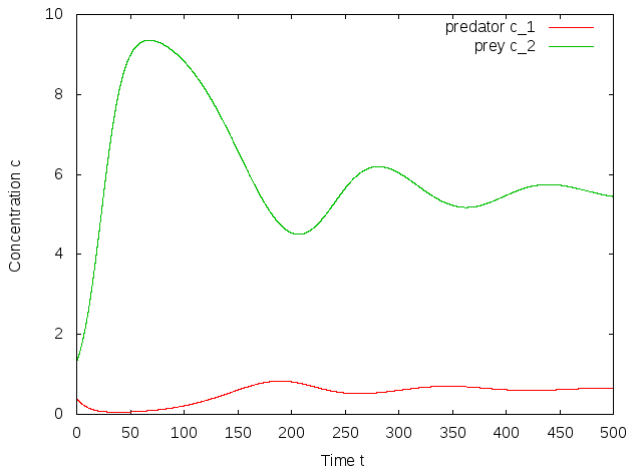
P. Buchfink,
E. Ott,
M. Schleicher

RAD-Gleichungen

Reaktionsgleichungen

Algenwachstum
Szenarien

Gray-Scott



Verhalten & Stabilität

Stofftransport &
Reaktionsgleichungen

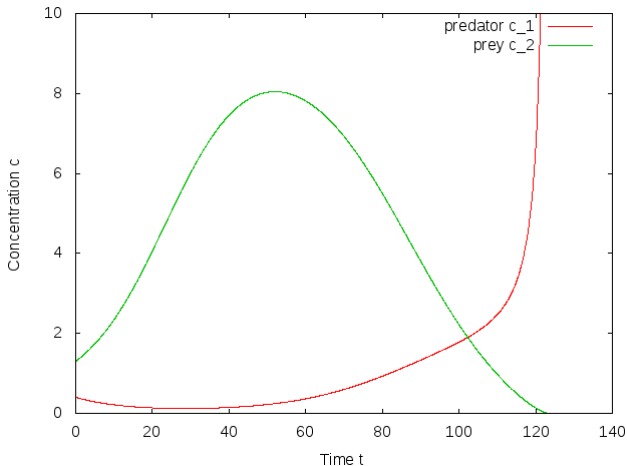
P. Buchfink,
E. Ott,
M. Schleicher

RAD-Gleichungen

Reaktions-
gleichungen

Algenwachstum
Szenarien

Gray-Scott



Verhalten & Stabilität

Stofftransport &
Reaktionsgleichungen

P. Buchfink,
E. Ott,
M. Schleicher

RAD-Gleichungen

Reaktionsgleichungen

Algenwachstum
Szenarien

Gray-Scott

- Instabilität durch Parameter und Löser überlagert
- Löser lässt sich durch symplektische Verfahren ersetzen
- Parameterwahl nicht trivial, aber auch nicht willkürlich

Inspiration

Stofftransport &
Reaktionsgleichungen

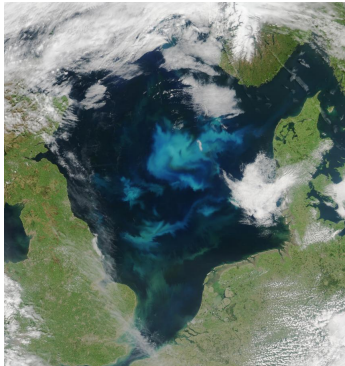
P. Buchfink,
E. Ott,
M. Schleicher

RAD-Gleichungen

Reaktions-
gleichungen

Algenwachstum
Szenarien

Gray-Scott



Quelle: <http://www.spiegel.de/wissenschaft/natur/bild-1042982-869697.html>

Idee des Gray-Scott Modells

Stofftransport &
Reaktionsgleichungen

P. Buchfink,
E. Ott,
M. Schleicher

RAD-Gleichungen

Reaktionsgleichungen

Algenwachstum
Szenarien

Gray-Scott

- Zwei Substanzen A: Futter, B: Räuber
- Phänomene

Feed



Reaktion



Kill



$$R_A(s_A, s_B, t, \mathbf{x}) = f(1 - s_A)$$

$$R_B(s_A, s_B, t, \mathbf{x}) =$$

$$-s_A s_B^2$$
$$+s_A s_B^2$$

$$-(k + f)s_B$$

- Parameter

- Kill-Rate k
- Feed-Rate f
- Diffusions-Konstanten d_A, d_B

Gray-Scott Modell ohne Advektion

Stofftransport &
Reaktionsgleichungen

P. Buchfink,
E. Ott,
M. Schleicher

RAD-Gleichungen

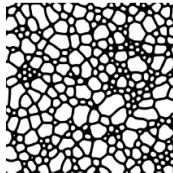
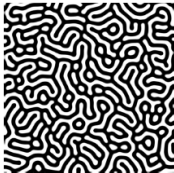
Reaktions-
gleichungen

Algenwachstum
Szenarien

Gray-Scott

■ Muster bekannt von

- Blättern
- Tierfellen (Rehe, Giraffen, Schmetterlinge, ...)
- Miktose



Quelle: <http://www.karlsims.com/rd.html>