Diskrete Mathematik
7.3.17

Beweißmethoden

Logisches Schließen durch Syllogismen motiviert

- Kurt Gödel: „beweisen" - richtig denken
- Studie: Teilautonomie bei Tesla

Deduktiver Beweis

Wenn Hypothese H, dann Konklusion K

$\boxed{\text{Bsp.}}$ Für alle natürlichen Zahlen n: „n ist durch 9 teilbar" $\Rightarrow$ „n ist durch 3 teilbar"

„für alle" $\rightarrow \forall n \in \mathbb{N}$ $\quad n \% 9 = 0 \rightarrow n \% 3 = 0$

$9/n \xrightarrow{\text{„Definition"}} 3/n$

(deduktiver) **Beweis** $\quad$ /A $\quad 9/n \Rightarrow \exists k \quad 9k = n$ $\quad$ Mathematisches Wissen

$\Rightarrow \exists k \quad 3 \cdot \boxed{3k} = n$

$\Rightarrow \exists l \quad 3 \cdot l' = n \Rightarrow 3/n$

↳ „Es gibt ein"

Lemma $\quad n$ ist gerade oder $n+1$ ist ungerade $(\forall n \in \mathbb{N})$

Fall 1 $\quad n$ ist gerade $\Rightarrow n+1$ ist ungerade

Fall 2 $\quad n+1$ ungerade $\Rightarrow n$ gerade

Beweis /A n gerade

$\exists k \in \mathbb{N} \quad 2k = n$

$\Rightarrow \quad 2k+1 = n+1$

$\Rightarrow \quad n+1 =$ ungerade

Mengeninklusion

$A = \{n \mid n \% 9 = 0\} \subseteq B = \{n \mid n \% 3 = 0\}$ $\quad$ ↙ Teilmenge von

Wenn $n \in A$, dann $n \in B$ (unter Annahme $\forall n$)

Indirekte Beweise

„Annahme" ↳ /A $\quad$ Es gibt nur endlich viele $\mathbb{N}$ ↯ ⇒ Negation richtig

$1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots, N$ ← große Zahl

$\sum_{i=1}^{N} i \in \mathbb{N}$ ↯, $N+1$

Widerspruch weil Summe immer eine neue $\mathbb{N}$ gibt

Bsp. Alle Vögel fliegen

$\not\!A$ es existiert nicht fliegender Vogel

Sei Povo ein Pinguin $\lightning$ Widerspruchsbeweise funktionieren „nur" in der Mathematik

Widerlegung durch Gegenbeispiel

„Satz" $\forall n \quad n^2 \geq 2n$

Gegenbeispiel $\quad n = 1 \quad 1^2 = 1 \not\geq 2 = 2 \cdot 1 \; \lightning$

Bedingung $n \geq 2$

Fall $n = 2 \quad 2^2 = 4 \geq 4 = 2 \cdot 2$ ✓

Fall $n = 3 \quad 3^2 = 9 \geq 6 = 2 \cdot 3$ ✓

. . .

↳ Wir brauchen das Prinzip der vollständigen Induktion

Basisfall $\quad n = 2$ — Aussage A

$2^2 = 4 \geq 4 = 2 \cdot 2$ — $A(2)$

Induktionsschritt $\quad n^2 \geq 2 \cdot n$ ← Induktionshypothese — $\forall n \; A(n) \to A(n+1)$

$A(2),\ A(2) \to A(3),\ A(3) \to A(4), \ldots$

zu zeigen $(n+1)^2 \geq 2 \cdot (n+1)$

$(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1$ — math. Grundwissen

$\geq 1 + 2n + 1$ — $n^2 \geq 2^2 \geq 1$

$= 2n + 2 = 2(n+1)$

zu zeigen $(n+1)^2 \geq 2(n+1)$

$(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1$ — Grundwissen

$\geq 2n + 2n + 1$ — IH

$\geq 2n + 1 + 1$ — $2n \geq 1$ (unter Annahme $n \geq 2$)

$= 2n + 2 = 2(n+1)$