Seminarul 2

1. Un cub de sticlă este vopsit pe fiecare faţă, apoi este împărţit în 1000 de cubuleţe de aceleaşi dimensiuni. Un cubuleţ este ales aleator. Calculaţi probabilităţile următoarelor evenimente:

a) A: "cubuleţul are exact 3 feţe vopsite". R: $\frac{8}{1000}$.

b) B: "cubuleţul are exact 2 feţe vopsite". R: $\frac{12\cdot 8}{1000}$.

c) C: "cubuleţul are exact o faţă vopsită". R: $\frac{6\cdot 8^2}{1000}$.

d) D: "cubuleţul nu are nicio faţă vopsită". R: $\frac{8^3}{1000}$.

2. Un agent de vânzări trimite 10 emailuri distincte cu reclame alegând aleator pentru fiecare email un destinatar dintr-o listă de 20 de persoane. Care este probabilitatea ca prima persoană din listă să primească 5 emailuri?

R: $\frac{C_{10}^5 19^5}{20^{10}}$.

3. Presupunem în continuare că data naşterii unei persoane alese aleator este în oricare dintre lunile anului cu aceleaşi şanse (i.e., probabilitatea ca o persoană aleasă aleator să aibă data naşterii într-o anumită lună este $\frac{1}{12}$). Care este probabilitatea ca

a) într-un grup de 5 persoane să fie cel puţin 2 persoane care îşi serbează zilele de naştere în aceeaşi lună? R: $1 - \frac{A_{12}^5}{12^5} \approx 62\%$.

b) într-un grup de 5 persoane zilele de naştere sunt serbate toate în cel mult două luni? R: $\frac{C_{12}^1 + C_{12}^2(2^5-2)}{12^5}$, unde C_{12}^1 e numarul de cazuri când toate persoanele sunt născute în aceeaşi lună, C_{12}^2 este numărul de alegeri ale lunilor pentru situaţia când toate persoanele sunt născute în exact 2 luni, iar 2^5-2 este numărul de funcţii surjective de la persoane la cele 2 luni.

4. La un concurs de şah participă 5 băieţi şi 5 fete. Se formează aleator 5 perechi de jucători. Care este probabilitatea ca fiecare băiat să joace împotriva unei fete?

R: Ordinea perechilor nu este relevantă, ci doar componenţa lor, atât în numărul cazurilor posibile, cât şi favorabile. Probabilitatea cerută este $\frac{n_f}{n_p}$, unde numărul cazurilor favorabile este $n_f = \frac{5^2\cdot 4^2\cdot\ldots\cdot 1^2}{5!}$, iar numărul cazurilor posibile este $n_p = \frac{C_{10}^2\cdot C_8^2\cdot\ldots\cdot C_2^2}{5!}$.

5. 5 bile numerotate consecutiv de la 1 la 5 sunt aşezate orizontal în mod aleator. Determinaţi:

a) probabilitatea ca prima şi ultima bilă să aibă numere pare;
b) probabilitatea ca primele două bile să aibă numere impare;
c) probabilitatea ca bilele cu numere pare să fie alăturate;
d) probabilitatea ca cel puţin două bile alăturate să aibă aceeaşi paritate.

R: a) $\frac{2!\cdot 3!}{5!} = \frac{1}{10}$. b) $\frac{A_3^2\cdot 3!}{5!} = \frac{3}{10}$. c) $\frac{2\cdot 4\cdot 3!}{5!} = \frac{2}{5}$. d) $1 - \frac{2!\cdot 3!}{5!} = \frac{9}{10}$.

6. 9 persoane se îmbarcă aleatoriu într-un tren cu 3 vagoane. Calculaţi probabilitatea ca:

a) în primul vagon să fie exact 3 persoane?
b) în fiecare vagon să fie 3 persoane?
c) într-un vagon să fie 1 persoană, iar în celelalte două vagoane să fie câte 4 persoane?
d) în fiecare vagon să fie cel puţin o persoană?

R: a) $\frac{C_9^3\cdot 2^6}{3^9}$; b) $\frac{C_9^3\cdot C_6^3}{3^9}$; c) $\frac{3\cdot 9\cdot C_8^4}{3^9}$; d) $\frac{3^9-(3\cdot 2^9-3)}{3^9}$.

7. Un alfabet are 21 consoane şi 5 vocale (se vor considera doar minuscule). În câte moduri se pot alege 6 litere astfel încât să fie alese 4 consoane distincte şi 2 vocale distincte, dacă: a) nu se ia în considerare ordinea lor; b) se ia în considerare ordinea lor?

Exemple în alfabetul englez: a) {i,o,t,g,m,h}, {a,e,t,b,l}; b) (i,o,t,g,m,h), (h,g,i,m,o,t), (t,a,b,l,e).

R: a) $C_{21}^4 \cdot C_5^2$; b) $A_{21}^4 \cdot A_5^2 \cdot C_6^4$.

8. La o petrecere sunt 8 femei şi 8 bărbaţi. Ana şi Vlad sunt în acest grup de prieteni. Cele 16 persoane se aşează aleator pe 16 fotolii într-un rând.
a) Care este probabilitatea ca doi bărbaţi şi două femei să nu stea alături?
b) Care este probabilitatea ca doi bărbaţi şi două femei să nu stea alături şi Ana şi Vlad să stea alături?
R: a) $f_{i_1}b_{i_1}f_{i_2}b_{i_2}f_{i_3}b_{i_3}...f_{i_8}b_{i_8}$, respectiv $b_{i_1}f_{i_1}b_{i_2}f_{i_2}b_{i_3}f_{i_3}...b_{i_8}f_{i_8}$; probabilitatea cerută este: $\frac{2\cdot 8!8!}{16!}$;
b)
▶ Ana stă în dreapta lui Vlad; pe primul fotoliu din rând stă o femeie: $f_{i_1}b_{i_1}f_{i_2}b_{i_2}f_{i_3}b_{i_3}\boxed{\text{AV}}...f_{i_8}b_{i_8}$
▶ Ana stă în dreapta lui Vlad; pe primul fotoliu din rând stă un bărbat: $b_{i_1}f_{i_1}b_{i_2}f_{i_2}b_{i_3}\boxed{\text{AV}}f_{i_3}...b_{i_8}f_{i_8}$
▶ Ana stă în stânga lui Vlad; pe primul fotoliu din rând stă un bărbat: $b_{i_1}f_{i_1}b_{i_2}f_{i_2}b_{i_3}f_{i_3}\boxed{\text{VA}}...b_{i_8}f_{i_8}$
▶ Ana stă în stânga lui Vlad; pe primul fotoliu din rând stă o femeie: $f_{i_1}b_{i_1}f_{i_2}b_{i_2}f_{i_3}\boxed{\text{VA}}b_{i_3}...f_{i_8}b_{i_8}$
probabilitatea cerută este: $\frac{2\cdot(8+7)\cdot 7!7!}{16!}$.

9. Determinați în câte moduri se pot împărți următoarele fructe la 3 copii:
a) o banană, o portocală, o pară, un măr și un kiwi;
b) cinci banane;
c) cinci banane și trei portocale;
d) cinci banane, trei portocale și patru pere.
a) 3^5; b) C_7^2; c) $C_7^2 \cdot C_5^2$; d) $C_7^2 \cdot C_5^2 \cdot C_6^2$.