Seminarul 1

Noţiuni de combinatorică

1. *Principiul fundamental de numărare:* numărul de perechi de obiecte în care primul obiect poate fi ales în m moduri şi al doilea în n moduri $(m, n \in \mathbb{N})$ este $m \cdot n$.
Exemplu: În câte moduri poate o persoană să îmbrace 2 cămăşi distincte şi 3 blugi diferiţi? R: $2 \cdot 3 = 6$.

2. *Aranjamente de n luate câte k* $(k \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}^*, n \geq k)$: alegeri de k obiecte distincte şi ordonate din n obiecte distincte date.

$$\begin{aligned} A_n^k &= \text{“numărul de aranjamente de } n \text{ obiecte luate câte } k\text{”} \\ &= n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}. \end{aligned}$$

Exemplu: Câte coduri cu 3 cifre distincte se pot forma folosind cifrele: 0, 1, 2, 3, 4? R: $A_5^3 = \frac{5!}{2!}$.

3. *Permutări de n* $(n \in \mathbb{N})$: aranjamente de n luate câte n.

$$P_n = \text{“numărul de permutări de } n \text{ obiecte”} = A_n^n = n!.$$

Observaţie: Prin convenţie, $0! = 1$.
Exemplu: În câte moduri se pot aşeza 4 persoane pe o bancă? R: $P_4 = 4!$.
Accesând `https://octave-online.net`, putem calcula:

```
>>asezari=perms([1,2,3,4])
>>size(asezari)
>>factorial(4)
```

4. *Combinări de n luate câte k* $(k \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}^*, n \geq k)$: alegeri de k obiecte distincte şi neordonate din n obiecte distincte date, i.e., alegeri de submulţimi de k elemente ale unei mulţimi de n elemente.

$$\begin{aligned} C_n^k &= \text{“numărul de combinări de } n \text{ elemente luate câte } k\text{”} \\ &= \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}. \end{aligned}$$

Exemplu: Câte echipe de handbal se pot forma dintr-un grup de 9 persoane? R: $C_9^7 = C_9^2$.

```
>>echipe=nchoosek(1:9,7)
>>size(echipe,1)
>>nchoosek(9,2)
```

5. *Numărul de funcţii* de la o mulţime A cu k elemente la o mulţime B cu n elemente este n^k $(k, n \in \mathbb{N}^*)$.
Observaţie: O funcţie poate fi identificată cu k alegeri de obiecte nu neapărat distincte (i.e., un obiect poate fi ales de mai multe ori), dar ordonate, din n obiecte distincte date. Astfel, putem spune că *funcţiile* sunt *aranjamente cu repetiţii*.
Exemplu: În câte moduri se pot împărţi o portocală, un kiwi şi o banană la 4 copii? Un copil poate primi mai multe fructe, chiar toate.
R: Funcţiile $f : \{\text{“portocală”}, \text{“kiwi”}, \text{“banană”}\} \to \{c_1, c_2, c_3, c_4\}$ se pot construi în $4^3 = 64$ moduri.

6. *Permutări cu repetiţii:* Considerăm n obiecte care pot fi împărţite în k grupuri $(n, k \in \mathbb{N}^*, k \leq n)$. Primul grup are n_1 obiecte identice, al 2-lea grup are n_2 obiecte identice, ..., al k-lea grup are n_k obiecte identice $(n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}, n_1 + \ldots + n_k = n)$. Două obiecte alese arbitrar sunt distincte dacă şi numai dacă provin din grupuri diferite. Numărul de permutări ale acestor n obiecte este

$$\frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \ldots \cdot n_k!}.$$

Exemple: 1) Într-o urnă sunt trei bile albe şi patru bile roşii. În câte moduri se pot aranja aceste bile într-un rând? R:$\frac{7!}{3!4!} = 35$.
2) Câte anagrame ale cuvântului “MISSISSIPPI” sunt posibile? R:$\frac{11!}{1!4!4!2!} = 34650$.

7. *Combinări cu repetiţii de n luate câte k* ($n \in \mathbb{N}^*, k \in \mathbb{N}$): alegeri de k obiecte, nu neapărat distincte (i.e., un obiect poate fi ales de mai multe ori), neordonate, din n obiecte distincte date (i.e., aranjamente cu repetiţii în care neglijăm ordinea). Numărul lor este

$$C_{n+k-1}^{k} = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}.$$

Exemplu: 1) În câte moduri se pot împărţi 5 bile identice la 3 copii (C1, C2, C3)? (Un copil poate primi o bilă/mai multe bile/niciuna.) R: Exemple de distribuire a bilelor copiilor (“o” reprezintă o *bilă*):

C1	C2	C3
oo		ooo
o	o	ooo
ooo	oo	
		ooooo

Identificăm configuraţiile mai sus cu şiruri de 5 biţi, unde 0 reprezină o bilă, 1 reprezintă separatorul dintre două grupuri de bile (unele grupuri pot fi vide) pe care le au doi copii succesivi:

0011000
0101000
0001001
1100000

Astfel, reformulăm întrebarea: în câte moduri se pot distribui 5 cifre egale cu 0 şi 2 cifre egale cu 1 pe 7 poziţii? R: $C_7^5 = C_7^2 = \frac{7!}{5!2!} = 21$.

2) O cofetărie are 7 sortimente de îngheţată. În câte moduri poate un client să îşi aleagă sortimentele pentru 3 cornete? (Fiecare cornet are câte un glob de îngheţată.) R: $\frac{9!}{3!6!} = 84$.

8. *Definiţia clasică a probabilităţii:* într-un experiment în care cazurile posibile, finite la număr, au aceleaşi şanse de a se realiza, probabilitatea unui eveniment E este

$$P(E) = \frac{\text{numărul cazurilor favorabile lui } E}{\text{numărul cazurilor posibile}}.$$

Probleme

1. În câte moduri se pot aşeza pe un raft 5 culegeri de matematică, 3 culegeri de informatică şi 4 romane, ştiind că fiecare carte are un autor diferit, astfel încât:

a) cărţile de acelaşi tip să fie alăturate?

b) doar romanele să fie neapărat alăturate?

c) doar culegerile de matematică, respectiv de informatică, să fie neapărat alăturate?

R: a) $5!3!4!3!$ b) $4!(5+3+1)!$ c) $5!3!(1+1+4)!$

2. Se aruncă două zaruri. Determinaţi probabilităţile următoarelor evenimente:

a) A:"se obţine o dublă".

b) B:"suma numerelor este un număr par."

c) C:"suma numerelor este cel mult egală cu 10."

R: a) $P(A)=\frac{1}{6}$; b) $P(B)=\frac{3^2+3^2}{36}$; c) $P(C)=1-\frac{3}{36}$.

3. În câte moduri se pot aşeza în linie caracterele următoare: A, A, A, B, B, 0, 0, 0, 1? Dar în cerc?

R: Avem permutări cu repetiţii: $\frac{9!}{3!2!3!1!}$. Orice aşezare în cerc poate fi identificată cu 9 permutări circulare distincte ale unei aşezări în linie (sunt distincte pentru că 1 se află după fiecare permutare circulară pe o altă poziţie). Deci numărul aşezărilor în linie este de 9 ori mai mare decât numărul aşezărilor în cerc $\Longrightarrow$ numărul aşezărilor în cerc este $\frac{1}{9}\cdot\frac{9!}{3!2!3!1!}$.

4. X participă la un spectacol alături de un grup de prieteni format din m fete şi n băieţi ($m,n\in\mathbb{N}^*$, $m\geq 2$). X şi prietenii săi au primit bilete pe un singur rând, pe care îl vor ocupa în întregime. Biletele lor au fost distribuite aleator. Care este probabilitatea ca X să aibă două vecine?

R: $\frac{(m+n-1)A_m^2(m+n-2)!}{(m+n+1)!}$, unde $m+n-1$ este numărul de alegeri ale locului pentru X (nu poate ocupa locurile din capetele rândului), A_m^2 este numărul de alegeri ale vecinelor lui X (se ţine cont de ordinea alegerii pentru partea stângă, resp. partea dreaptă, lui X), $(m+n-2)!$ este numărul de alegeri ale locurilor pentru celelalte persoane.

5. 7 căluşari, $c_1,c_2,\ldots,c_7$, se aşează în cerc, într-o ordine aleatoare. Care este probabilitatea ca c_1 şi c_7 să fie vecini?

R: $\frac{2!5!}{\frac{7!}{7}}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$.

6. a) Câte soluţii $(x_1,\ldots,x_k)\in\mathbb{N}^*\times\cdots\times\mathbb{N}^*$ are ecuaţia $x_1+\ldots+x_k=n$ ($k,n\in\mathbb{N}^*$, $n\geq k$)?

R: C_{n-1}^{k-1}.

Considerăm un şir cu n beţe şi $n-1$ spaţii între ele: $|\ |\ |\ \cdots\ |\ |$. Dacă pe $k-1$ spaţii se pun $k-1$ simboluri + şi se şterg spaţiile libere, atunci cele n beţe vor fi împărţite în k grupuri de aceste simboluri. Fie x_i=numărul de beţe din al i-lea grup, $i=\overline{1,k}$. Cum nu există două simboluri + consecutive, avem $x_i\in\mathbb{N}^*$, $i=\overline{1,k}$. Avem $x_1+\ldots+x_k=n$. Există C_{n-1}^{k-1} moduri în care se pot pune $k-1$ simboluri + pe $n-1$ spaţii.

Exemplu: $n=6,k=3$, $|\ |\ |\ |\ |\ |$, $+\ +$. În reprezentarea $||+|||+|$ avem 3 grupe de beţe, separate prin 2 simboluri +, deci $x_1=2,x_2=3,x_3=1$, în sistemul de numeraţie zecimal: $x_1+x_2+x_3=6$ sau în sistemul de numeraţie unar: $||+|||+|=6$. Există C_5^2 soluţii $(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*$ ale ecuaţiei $x_1+x_2+x_3=6$.

b) Câte soluţii $(x_1,\ldots,x_k)\in\mathbb{N}\times\cdots\times\mathbb{N}$ are ecuaţia $x_1+\ldots+x_k=n$ ($k,n\in\mathbb{N}^*$)?

R: C_{n+k-1}^{k-1}.

Fiecare soluţie $(x_1,\ldots,x_k)\in\mathbb{N}\times\cdots\times\mathbb{N}$ a ecuaţiei $x_1+\ldots+x_k=n$ corespunde în mod unic unei soluţii $(y_1,\ldots,y_k)\in\mathbb{N}^*\times\cdots\times\mathbb{N}^*$ a ecuaţiei $y_1+\ldots+y_k=n+k$ şi vice versa, alegând $y_i=x_i+1$, pentru $i\in\{1,\ldots,k\}$. Cf. a), există C_{n+k-1}^{k-1} soluţii.

7. Câte coduri binare sunt formate din 10 cifre şi nu au două cifre alăturate egale cu 1?

R: $1+C_{10}^1+C_9^2+\ldots+C_6^5$.

Dacă în codul binar sunt k biţi egali cu 1, atunci codul are $10-k$ biţi egali cu 0. Punem în linie biţii nuli şi spaţiile pe care putem să punem biţii egali cu 1: _0_0_..._0_. Avem $11-k$ spaţii libere pe care vrem să punem k biţi egali cu 1, rezultă C_{11-k}^k coduri posibile. k poate să ia valorile $0,1,\ldots,5$, deoarece pentru $k>5$ numărul de spaţii libere este mai mic decât numărul de biţi egali cu 1.