Лабораторная работа 1.

Прямые методы минимизации функций одной переменной.

В данной работе рассматриваются методы решения поставленной задачи, не использующие вычисления производных (прямые методы минимизации).
Постановка задачи: Требуется найти безусловный минимум функции одной переменной $f(x)$, т.е. такую точку $x^* \in U$, что $f\left(x^*\right) = \min\limits_{x \in U} f\left(x\right)$. Значение точки минимума требуется вычислить приближенно с заданной точностью ε.
Предполагается, что для функции $f(x)$ известно, что точка минимума $x^* \in U_0$, $U_0 = [a;b]$, причем на заданном интервале функция является унимодальной.

Метод перебора.

Стратегия поиска: Метод относится к пассивным стратегиям.
В соответствии с заданной точностью исходная область $U_0 = [a;b]$ разбивается на n равных интервалов $[x_0;x_1],[x_1;x_2], \ \dots \ ,[x_{n-1};x_n]$, где $x_0 = a$, $x_N = b$. Производится вычисление значений функции в точках x_i, $i = 0,1,...,n$. Путем сравнения величин $f(x_i)$, $i = 0,1,...,n$ находится точка x_m, в которой значение функции наименьшее. Искомая точка минимума x^* заключена в интервале $[x_{m-1};x_{m+1}]$.
Алгоритм:
1. Задать начальный интервал неопределенности $U_0 = [a;b]$ и точность ε.
2. Задать количество интервалов разбиения $n \ge \dfrac{b-a}{\varepsilon}$.
3. Вычислить точки $x_i = a + i \cdot \dfrac{b-a}{n}, \quad i = 0,1,...,n.$
4. Вычислить значения функции $f(x)$ в точках x_i, $i = 0,1,...,n.$
5. Среди точек x_i, $i = 0,1,...,n$ найти такую, в которой функция принимает наименьшее значение: $f(x_m) = \min\limits_{0 \le i \le n} f(x_i)$.
6. Положить $x^* \approx x_m$, $f^* \approx f(x_m)$. Поиск завершен.

Метод поразрядного поиска.

Стратегия поиска: Метод является усовершенствованным вариантом метода перебора (прямой метод последовательного поиска).
В этом методе перебор точек интервала неопределенности U_0 происходит сначала с шагом $\Delta = x_{i+1} - x_i > \varepsilon, \quad i = 0,1,...$ (при этом точка x_0 совпадает с концом отрезка a) до тех пор, пока не выполнится условие $f(x_i) \le f(x_{i+1})$, или пока очередная из точек x_i не совпадет с концом отрезка b. После этого шаг уменьшается в несколько раз (обычно в четыре раза), и производится перебор точек в противоположном направлении (с новым шагом) до тех пор, пока значения $f(x)$ не перестанут уменьшаться, или очередная точка не совпадет с концом отрезка a. Процедура уменьшения шага и смены направления перебора на противоположное повторяется

несколько раз. Поиск прекращается, если текущий шаг дискретизации при последнем проходе алгоритма не превосходит заданной точности ε.
Следует отметить, что в данном методе интервал неопределенности может быть полубесконечным или бесконечным.

Алгоритм:

1. Задать начальный интервал неопределенности $U_0 = [a;b]$, точность ε и начальный шаг дискретизации $\Delta > \varepsilon$.
2. Положить $i = 1$, $x_0 = a$. Вычислить значение функции $f(x_0)$.
3. Определить точку $x_i = x_{i-1} + \Delta$ и значение функции $f(x_i)$.
4. Если $f(x_i) \le f(x_{i-1})$ и $x_i \ne a$, $x_i \ne b$, то положить $i = i+1$ и вернуться к шагу 3, иначе перейти к шагу 5.
5. Если $|\Delta| < \varepsilon$, то прейти к шагу 7, иначе перейти к шагу 6.
6. Задать новый шаг дискретизации $\Delta = -\Delta/4$, положить $i = i+1$ и перейти к шагу 3.
7. Положить $x^* \approx x_i$, $f^* \approx f(x_i)$. Поиск завершен.

Метод дихотомии.

Стратегия поиска: Метод относится к последовательным стратегиям и является одним из вариантов метода исключения отрезков.
Алгоритм опирается на анализ значений функции в двух точках. Для их нахождения текущий интервал неопределенности делится пополам и в обе стороны от середины откладывается по $\delta/2$, где $\delta < 2\varepsilon$ – малое положительное число. По результатам сравнения значений функции в этих точках из дальнейшего рассмотрения исключается часть текущего интервала неопределенности. Условия окончания итераций для всех вариантов метода исключения отрезков стандартные: поиск заканчивается, когда половина длины текущего интервала неопределенности оказывается меньше установленной величины точности ε.

Алгоритм:

1. Задать начальный интервал неопределенности U_0 и точность ε. Выбрать $\delta < 2\varepsilon$.
2. Вычислить точки $x_1 = \dfrac{b+a-\delta}{2}$, $x_2 = \dfrac{b+a+\delta}{2}$ и значения функции $f(x_1)$, $f(x_2)$.
3. Если $f(x_1) \le f(x_2)$., то положить $b = x_2$. В противном случае, т.е. если $f(x_1) > f(x_2)$, положить $a = x_1$.
4. Вычислить полудлину нового интервала неопределенности $U = \dfrac{b-a}{2}$. Если $U > \varepsilon$, то перейти к следующей итерации, вернувшись к шагу 2. Иначе перейти к шагу 5.
5. Положить $x^* \approx \bar{x} = \dfrac{a+b}{2}$, $f^* \approx f(\bar{x})$. Поиск завершен.

Метод золотого сечения.

Стратегия поиска: Метод относится к последовательным стратегиям и является одним из вариантов метода исключения отрезков.

Алгоритм опирается на анализ значений функции в двух точках, являющихся точками золотого сечения текущего интервала неопределенности. Исключение отрезка в данном случае выполняется так же, как и в методе дихотомии. При этом с учетом свойств золотого сечения на каждой итерации, кроме первой, требуется вычислить только одно новое значение функции.

Алгоритм:

1. Задать начальный интервал неопределенности U_0 и точность ε.
2. Вычислить значение $\tau = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ и точки $x_2 = a + \tau(b-a),\ x_1 = a + b - x_2$.

   Вычислить значения функций $f(x_1),\ f(x_2)$.
3. Если $f(x_1) \le f(x_2)$, то положить $b = x_2,\ x_2 = x_1,\ f(x_2) = f(x_1),\ x_1 = a + b - x_1$ и вычислить $f(x_1)$,
   в противном случае положить $a = x_1,\ x_1 = x_2,\ f(x_1) = f(x_2),\ x_2 = a + b - x_2$ и вычислить $f(x_2)$.
4. Вычислить полудлину нового интервала неопределенности $U = \dfrac{b-a}{2}$.

   Если $U > \varepsilon$, то перейти к следующей итерации, вернувшись к шагу 3. Иначе перейти к шагу 5.
5. Положить $x^* \approx \bar{x} = \dfrac{a+b}{2},\ \ f^* \approx f(\bar{x})$. Поиск завершен.

Метод парабол.

Стратегия поиска: метод парабол относится к последовательным стратегиям и является одним из вариантов полиномиальной интерполяции, позволяющей учесть информацию, содержащуюся в относительных изменениях значений $f(x)$ в пробных точках.

Алгоритм опирается на анализ значений функции в трех точках текущего интервала неопределенности. По этим точкам строится интерполяционный многочлен (парабола) и ищется его минимум. При этом на каждой итерации, кроме первой, требуется вычислить только одно новое значение функции.

Алгоритм:

1. Задать начальный интервал неопределенности U_0 и точность ε.
2. Выбрать точки $x_1, x_2, x_3 \in U_0$, удовлетворяющие условиям $x_1 < x_2 < x_3$, $f(x_1) \ge f(x_2) \le f(x_3)$, причем пусть одно из неравенств – строгое.
3. Найти минимум квадратного трехчлена по формуле $\bar{x} = \dfrac{1}{2}(x_1 + x_2 - \dfrac{a_1}{a_2})$, где $a_1 = \dfrac{f_2 - f_1}{x_2 - x_1}$, $a_2 = \dfrac{1}{x_3 - x_2}(\dfrac{f_3 - f_1}{x_3 - x_1} - \dfrac{f_2 - f_1}{x_2 - x_1})$ - коэффициенты квадратичной функции $q(x) = a_0 + a_1(x - x_1) + a_2(x - x_1)(x - x_2)$. На первой итерации перейти к шагу 5, на остальных – к шагу 4.
4. Если модуль разности $\bar{x}$ на данной и предыдущей итерациях $|\Delta| \le \varepsilon$, то поиск завершить, полагая $x^* \approx \bar{x},\ f^* \approx f(\bar{x})$, иначе перейти к шагу 5.
5. Вычислить значение $f(\bar{x})$. Перейти к шагу 6.

6. Выбрать новую тройку чисел x_1, x_2, x_3. Присвоить обозначениям $f(x_1)$, $f(x_2)$ и $f(x_3)$ соответствующие значения $f(x)$, найденные ранее. Перейти к шагу 3.

Задания

1. Написать в среде MATLAB функции, реализующие пять приведенных выше методов.
2. Выбрать для выполнения лабораторной работы тестовую функцию, номер которой соответствует номеру Вашего компьютера. Например, для компьютера №3 это будет функция 3), для компьютера №13 – функция 4): 13-9=4; для компьютера №23 это будет функция 5): 23-9×2=5.

1) $f(x) = x^3 - 3\sin x \to \min, \quad x \in [0;1].$
2) $f(x) = x^4 + x^2 + x + 1 \to \min, \quad x \in [-1;0].$
3) $f(x) = e^x + \dfrac{1}{x} \to \min, \quad x \in [0{,}5;1{,}5].$
4) $f(x) = x^2 - 2x + e^{-x} \to \min, \quad x \in [-1;1{,}5].$
5) $f(x) = x\sin x + 2\cos x \to \min, \quad x \in [-6;-4].$
6) $f(x) = x + \dfrac{1}{x^2} \to \min, \quad x \in [1;2].$
7) $f(x) = 10x\ln x - \dfrac{x^2}{2} \to \min, \quad x \in [0{,}1;1].$
8) $f(x) = e^x - \dfrac{1}{3}x^3 + 2x \to \min, \quad x \in [-2{,}5;-1].$
9) $f(x) = x^2 - 2x - 2\cos x \to \min, \quad x \in [-0{,}5;1].$

3. Для выбранной функции и для каждого рассмотренного выше метода изучить зависимость скорости работы (числа вычислений функции N) от заданного значения точности ε. Провести сравнение методов друг с другом. Объяснить полученные результаты.
4. Используя встроенную в MATLAB функцию fminsearch, вычислить координату минимума выбранной функции.
5. Определить, сколько вычислений функции потребуется каждому методу для того, чтобы отличие его решения от координаты минимума, полученного в пункте 4, была меньше $\varepsilon = 10^{-4}$.
6. Найти минимум функции $f(x) = e^x - 1 - x - \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^3}{6}$ с точностью $\varepsilon = 10^{-4}$ на отрезке [-5:5] методами золотого сечения и парабол. Объяснить полученные результаты.
7. Результаты работы необходимо сохранить для использования в следующей лабораторной работе.
8. Сдать лабораторную работу преподавателю, ответив предварительно на все следующие контрольные вопросы.

Контрольные вопросы к лабораторной работе 1.

1) Пусть $f(x)$ - дифференцируемая унимодальная на отрезке $[a;b]$ функция, причем $|f'(x)| \le M$. Оценить точность $\Delta(N)$ определения минимального значения f^* методом перебора в результате N вычислений $f(x)$.

2) Может ли оценка $\varepsilon(N) = \dfrac{b-a}{N-1}$ для точности определения x^* методом перебора нарушаться для функций, не являющихся унимодальными? Ответ пояснить рисунком.

3) Какие прямые методы называются методами пассивного поиска? Последовательного поиска?

4) Повысится ли эффективность метода поразрядного поиска, если шаг поиска Δ последовательно уменьшать не в четыре, а в какое-либо другое число раз?

5) В чем состоит идея метода исключения отрезков?

6) Может ли применение методов исключения отрезков привести к неверному определению x^*, если функция $f(x)$ не унимодальна? Ответ пояснить рисунком.

7) Зависит ли точность определения x^*, которую гарантируют методы дихотомии и золотого сечения в результате N вычислений функции $f(x)$, от конкретной функции $f(x)$?

8) Требуется найти точку минимума унимодальной функции на отрезке длины 1 с точностью $\varepsilon = 0{,}02$. Имеется возможность измерить не более 10 значений $f(x)$. Какой из прямых методов минимизации можно использовать для этого?

9) Доказать, что погрешность определения точки минимума x^* функции $f(x)$ методом перебора не превосходит величины $\varepsilon_n = (b-a)/n$.

10) Доказать, что в методе дихотомии число итераций, необходимое для определения точки минимума с точностью ε, определяется формулой $n \ge \log_2 \dfrac{b-a-\delta}{2\varepsilon-\delta}$.

11) Доказать, что число итераций, необходимое для достижения заданной точности ε на отрезке $[a;b]$ в методе золотого сечения определяется формулой $n \ge \ln\left(\dfrac{2\varepsilon}{b-a}\right) / \ln\tau \approx 2{,}1 \cdot \ln\left(\dfrac{b-a}{2\varepsilon}\right)$.

12) Сравнить необходимые количества вычисленных значений N_∂ и N_n функции $f(x)$ при поиске ее точки минимума на отрезке длины 1 с точностью 10^{-5} методом деления отрезка пополам и методом перебора.

13) Зависит ли точность определения x^*, которую получается методом парабол в результате N вычислений функции $f(x)$, от конкретной функции $f(x)$?

14) Указать класс функций, для точного определения точек минимума которых достаточно одной итерации метода парабол.

15) В окрестности точки минимума x^* график функции $f_1(x)$ близок к симметричному относительно вертикальной оси, проходящей через точку x^*, а график функции $f_2(x)$ заметно асимметричен. Для какой из этих функций следует ожидать более высокой скорости сходимости метода парабол?