Laboratorium komputerowe oraz Ćwiczenia rachunkowe z przedmiotu „Metody obliczeniowe”
Prowadzący: L. Bieniasz
Zagadnienia do opanowania przed zajęciami, pomocnicze zadania rachunkowe do rozwiązania na ćwiczeniach rachunkowych, oraz tematy programów do realizacji na zajęciach laboratoryjnych.

Zajęcia nr 1:

Zagadnienia do opanowania:

Rodzaje błędów w obliczeniach numerycznych, reprezentacja zmiennoprzecinkowa liczb rzeczywistych, standard IEEE 754.

Zadania:

(1) Oszacuj wielkość błędu obcięcia przy wyznaczaniu przybliżonej wartości $ln(z)$ poprzez sumowanie n wyrazów rozwinięcia w szereg Taylora wokół $z_0 = 1$. Ile wyrazów należy zsumować, aby otrzymać błąd bezwzględny logarytmu nie większy niż 10^{-8}, dla $z = 2$?

(2) Rozważ prosty system reprezentacji zmiennoprzecinkowej
$rd(x) = (-1)^e\, m\, 2^{z-b}$
liczb rzeczywistych, w którym na mantysę oraz na cechę przeznaczono po dwa bity, zatem jedno słowo maszynowe zajmuje 5 bitów. Wyznacz zbiór wszystkich możliwych liczb rzeczywistych reprezentowalnych w tym systemie, przy założeniu że $b = 1$. Uwzględnij możliwość liczb znormalizowanych zakładając $m \in [1, 2)$, oraz zdenormalizowanych, i określ jakie słowa maszynowe należałoby zarezerwować na +0, –0, +INF, –INF oraz reprezentacje NaN.

Program:

Napisz program w języku „C/C++”, umożliwiający „doświadczalne” wyznaczenie liczby bitów mantysy oraz tzw. *epsylona maszynowego*, tj. najmniejszej liczby ε takiej, że $fl(\varepsilon + 1) > 1$. Wyznacz *epsylon maszynowy* dla zmiennych typu **float** i **double** i sprawdź czy da się go wyznaczyć dla zmiennych typu **long double**. Sprawdź też ile dokładnych cyfr znaczących posiada *epsylon maszynowy*.
Aby znaleźć odpowiedź na pytanie jak napisać taki program, zacznij od wyjaśnienia kwestii jaki jest związek ε z precyzją arytmetyki.

Zajęcia nr 2:

Zagadnienia do opanowania:

Własności zadań: uwarunkowanie zadań. Metody oceny błędów maszynowych. Zjawisko utraty cyfr znaczących przy odejmowaniu. Własności algorytmów: numeryczna poprawność, numeryczna stabilność.

Zadania:

(1) Zbadaj uwarunkowanie (względne) zadania obliczenia iloczynu $p = x\,y$ oraz ilorazu $d = x/y$ dwóch liczb rzeczywistych x i y, oraz oszacuj wielkość względnych błędów maszynowych wyników w przypadku numerycznych obliczeń zmiennoprzecinkowych p i d.

(2) Oceń błąd względny obliczenia $a^2 - b^2$ w arytmetyce fl, przy zastosowaniu algorytmów:
$A1(a,b) = a\,a - b\,b$
$A2(a,b) = (a - b)\,(a + b)$
zakładając, że $rd(a) = a$, $rd(b) = b$.

(3) Zbadaj uwarunkowanie (względne) zadania obliczenia wartości funkcji $y = f(x) = (1 + x)^{-1}$.

(4) Oszacuj błąd względny obliczenia wartości funkcji standardowej $f(x) = \ln(x)$ dla $x=1+10^{-15}$, $1+10^{-12}$, $1+10^{-10}$.

Program:

Zaimplementuj w języku „C/C++" algorytm obliczający przybliżone wartości funkcji
$f(x) = x^3/\{6[\sinh(x) - x]\}$ dla $x \in [10^{-10}, 10^3]$, korzystając z funkcji standardowej sinh(). W oparciu o zbiór dokładnych wartości tej funkcji, udostępniony przez prowadzącego zajęcia, zbadaj jak zmieniają się błędy względne przybliżenia funkcji w tym algorytmie, w zależności od x. W tym celu wykonaj rysunek przedstawiający zależność logarytmu dziesiętnego z bezwzględnej wartości błędu względnego od logarytmu dziesiętnego z x. Z wykresu odczytaj zakres zmiennej x, w którym błąd względny pozostaje na poziomie błędu reprezentacji, oraz zakresy zmiennej x, w których błąd względny jest większy. Wyjaśnij przyczyny obserwowanych zmian błędów. Na tej podstawie zaproponuj alternatywny sposób obliczania wartości funkcji $f(x)$ w sytuacjach gdy obserwowany błąd jest duży. Dokonaj stosownej modyfikacji programu, tak aby uzyskać błąd względny na poziomie błędu reprezentacji (czyli tzw. dokładność maszynową) dla dowolnego $x \in [10^{-10}, 10^3]$. Jaki typ zmiennych należy zastosować i dlaczego?
Do wykonania rysunku w tym ćwiczeniu (a także w niektórych dalszych ćwiczeniach) najlepiej użyć programu GNUPLOT (dostępnego za darmo z Internetu).

Zajęcia nr 3:

Zagadnienia do opanowania:

Metody rozwiązywania nieliniowych równań algebraicznych: Picarda, bisekcji, regula falsi, Newtona, siecznych. Zbieżność metod iteracyjnych.

Zadania:

(1) Oceń zbieżność metody iteracyjnej Picarda w zastosowaniu do równań nieliniowych:
a) $\tanh(x) + 2(x - 1) = 0$
b) $\sinh(x) + x/4 - 1 = 0$

(2) Pokaż, że tzw. algorytm Herona, służący do obliczania pierwiastka kwadratowego z liczby rzeczywistej a w oparciu o wzory:
$\sqrt{a} = \lim_{n\to\infty} x_n$ gdzie $x_n = (x_{n-1} + a/ x_{n-1})/2$
może być interpretowany jako algorytm Newtona zastosowany do pewnego równania nieliniowego.

Program:

Napisz program w języku „C/C++”, realizujący metody:
(a) Picarda
(b) bisekcji
(c) Newtona
(d) siecznych
rozwiązywania pojedynczych algebraicznych równań nieliniowych. Zastosuj program do przykładów z zadania 1. Zastosuj trzy niezależne kryteria zakończenia iteracji. Zadbaj o to, aby wyprowadzać na konsolę wyniki pośrednie obliczeń dla każdej iteracji, tak aby możliwe było obserwowanie zbieżności kolejnych przybliżeń pierwiastków i porównanie liczby iteracji niezbędnych do uzyskania rozwiązania o zadanej dokładności przez każdą z metod. W szczególności oblicz jak zmienia się estymator błędu rozwiązania oraz residuum równania w trakcie iteracji.

Zajęcia nr 4:

Zagadnienia do opanowania:

Rozwiązywanie układów nieliniowych równań algebraicznych. Uogólniona metoda Newtona.

Zadania:

(1) Napisz równania uogólnionej metody Newtona, w zastosowaniu do układu równań nieliniowych:
$x^2 + y^2 + z^2 = 4$
$x^2 + y^2/2 = 1$
$xy = 1/2$.

Program:

Napisz program w języku „C/C++", realizujący uogólnioną metodę Newtona rozwiązywania układu trzech algebraicznych równań nieliniowych, i zastosuj ten program do przykładu z zadania 1. Przyjmij takie przybliżenie początkowe, aby uzyskać zbieżność metody. Zastosuj trzy niezależne kryteria zakończenia iteracji. Zadbaj o to, aby wyprowadzać na konsolę wyniki pośrednie obliczeń dla każdej iteracji, tak aby możliwe było obserwowanie zbieżności kolejnych przybliżeń pierwiastków. W szczególności oblicz jak zmienia się estymator błędu rozwiązania oraz residuum układu w trakcie iteracji.

Zajęcia nr 5:

Zagadnienia do opanowania:

Obliczanie norm wektorów i macierzy. Wskaźnik uwarunkowania macierzy. Eliminacja Gaussa. Dekompozycja LU macierzy pełnej. Metody bezpośrednie rozwiązywania układów liniowych równań algebraicznych z macierzą pełną.

Zadania:

(1) Oblicz normę pierwszą, normę drugą, i normę maksimum wektora

$$x = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \\ 4 \\ -5 \end{bmatrix} \quad \text{oraz macierzy} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}.$$

(2) Oblicz wskaźnik uwarunkowania dla macierzy $A = \begin{bmatrix} 10 & 1 \\ 1 & 20 \end{bmatrix}$ oraz $B = \begin{bmatrix} 1 & 1+\varepsilon \\ 1-\varepsilon & 1 \end{bmatrix}$,

posługując się normą maksimum. Przyjmij $0 < \varepsilon << 1$. Która macierz zapewnia lepsze uwarunkowanie rozwiązania układu równań ($Ax = b$ lub $Bx = b$)?

(3) Dana jest macierz

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 4 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ oraz wektor $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$. Zademonstruj kolejne etapy dekompozycji LU macierzy A, stosując eliminację Gaussa z częściowym wyborem elementu podstawowego, a następnie, korzystając z uzyskanego rozkładu, rozwiąż układ równań $Ax=b$. Podaj końcową zawartość macierzy L i U.

Program:

Dana jest macierz

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 10 & 8 & 7 & 6 & 5 \\ -1 & 2 & -3 & 4 & -5 \\ 6 & 5 & -4 & 3 & -2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix} \text{oraz wektor } b = \begin{bmatrix} 37 \\ 99 \\ -9 \\ 12 \\ 53 \end{bmatrix}.$$

Napisz program w języku „C/C++”, realizujący dekompozycję LU macierzy A, przy zastosowaniu eliminacji Gaussa z częściowym wyborem elementu podstawowego, a następnie rozwiązujący układ równań $Ax = b$.

Uwaga: należy zaimplementować wariant dekompozycji omawiany na wykładzie.

Program należy zrealizować w postaci dwóch odrębnych procedur: jednej, która operuje wyłącznie na macierzy A, i drugiej, która operuje wyłącznie na wektorze b, korzystając z wyników działania procedury pierwszej.

Dodatkowe ćwiczenie, dla chętnych; prawidłowe rozwiązanie będzie premiowane dodatkową oceną 5.0.

Dany jest układ równań z macierzą

$$A = \begin{bmatrix} 1+e & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+e & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+e & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+e \end{bmatrix}$$ oraz wektorem $$b = \begin{bmatrix} 6+e \\ 6+2e \\ 6+2e \\ 6+e \end{bmatrix}$$. Znajdź najpierw rozwiązanie analityczne, a następnie numeryczne, przyjmując coraz mniejsze wartości $e = 10^{-5}, 10^{-6}, 10^{-7}$, itd. Porównaj rozwiązania numeryczne z analitycznym, i wyjaśnij ewentualne obserwowane zmiany błędu rozwiązań numerycznych.

Zajęcia nr 6:

Zagadnienia do opanowania:

Metody bezpośrednie rozwiązywania układów liniowych równań algebraicznych z macierzami rzadkimi. Algorytm Thomasa. Metody rozwiązywania nad-określonych układów liniowych równań algebraicznych.

Zadania:

(1) Znajdź pseudorozwiązanie nad-określonego układu równań:

$$\left.\begin{aligned} x+2y&=1\\ 3x+4y&=2\\ 5x+6y&=3 \end{aligned}\right\}$$

posługując się metodą najmniejszych kwadratów, poprzez bezpośrednie rozwiązanie układu równań normalnych.

Program:

Napisz program w języku „C/C++", realizujący algorytm Thomasa dla macierzy trój-diagonalnej o dowolnych rozmiarach $N \times N$, a następnie zastosuj ten program do rozwiązania układu równań $Ax = b$, w którym

$$A = \begin{bmatrix} 100 & -1 & & & \\ 2 & 200 & -3 & & \\ & 4 & 300 & 5 & \\ & & -6 & 200 & -7 \\ & & & -8 & 100 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 199 \\ 195 \\ 929 \\ 954 \\ 360 \end{bmatrix}$$

Program należy zrealizować w postaci dwóch odrębnych procedur: jednej, która operuje wyłącznie na macierzy A, i drugiej, która operuje wyłącznie na wektorze b, korzystając z wyników działania procedury pierwszej.
Uwaga: ponieważ macierz trój-diagonalna jest macierzą rzadką, więc w programie **NIE NALEŻY** używać tablic kwadratowych do reprezentacji macierzy A.

Zajęcia nr 7:

Zagadnienia do opanowania:

Metody iteracyjne rozwiązywania układów liniowych równań algebraicznych. Metody Richardsona, Jacobiego, Gaussa-Seidela, SOR. Kryteria zbieżności metod iteracyjnych.

Zadania:

(1) Dany jest układ równań liniowych $Ax = b$, gdzie $A = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 4 & 10 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 49 \\ 30 \end{bmatrix}$. Oceń zbieżność metody iteracyjnej Jacobiego (w normie maksimum) dla tego układu, posługując się twierdzeniem Banacha o kontrakcji.

(2) Dany jest układ liniowych równań algebraicznych $Ax = b$, gdzie $A = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$. Zbadaj i oceń, czy metoda iteracyjna Richardsona jest zbieżna dla tych danych. Następnie, mając dane przybliżenie początkowe $x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ rozwiązania układu, wyznacz kolejne przybliżenie x_1 za pomocą tej metody.

(3) Dany jest układ liniowych równań algebraicznych $Ax = b$, gdzie $A = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$. Zbadaj i oceń, czy metoda iteracyjna Gaussa-Seidela jest zbieżna dla tych danych. Następnie, mając dane przybliżenie początkowe $x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ rozwiązania układu, wyznacz kolejne przybliżenie x_1 za pomocą tej metody.

(4) Dany jest układ liniowych równań algebraicznych $Ax = b$, gdzie $A = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$. Zbadaj i oceń, czy metoda iteracyjna SOR (z parametrem $\omega=1/2$) jest zbieżna dla tych danych. Następnie, mając dane przybliżenie początkowe $x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ rozwiązania układu, wyznacz kolejne przybliżenie x_1 za pomocą tej metody.

Program:

Napisz program w języku „C/C++", rozwiązujący układ czterech równań liniowych metodami iteracyjnymi: (a) Jacobiego, (b) Gaussa-Seidela, (c) SOR z parametrem $\omega = 1/2$, a następnie zastosuj ten program do rozwiązania układu równań liniowych $Ax = b$, gdzie

$$A = \begin{bmatrix} 50 & 5 & 4 & 3 & 2 \\ 1 & 40 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 30 & -5 & -4 \\ -3 & -2 & -1 & 20 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 30 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 140 \\ 67 \\ 62 \\ 89 \\ 153 \end{bmatrix}.$$

Przyjmij przybliżenie początkowe $x_0 = \begin{bmatrix} 6 \\ 6 \\ 6 \\ 6 \\ 6 \end{bmatrix}$.

Zastosuj trzy niezależne kryteria zakończenia iteracji. Zadbaj o to, aby wyprowadzać na konsolę wyniki pośrednie obliczeń dla każdej iteracji, tak aby możliwe było obserwowanie zbieżności kolejnych przybliżeń pierwiastków i porównanie liczby iteracji niezbędnych do uzyskania (za pomocą różnych metod) rozwiązania o zadanej dokładności bezwzględnej. W szczególności oblicz jak zmienia się estymator błędu rozwiązania oraz residuum układu w trakcie kolejnych iteracji.

Zajęcia nr 8:

Zagadnienia do opanowania:

Podstawy przybliżeń różnicowych dla pochodnych funkcji. Wyznaczanie błędów obcięcia przybliżeń.

Zadania:

(1) Udowodnij, że jednostronne przybliżenia trzypunktowe na pierwszą pochodną w początkowym i końcowym węźle sieci jednorodnej $x_0, \ldots, x_n$ o kroku h, dane wzorami:

$$\left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x=x_0} \approx \frac{-\frac{3}{2} f(x_0) + 2 f(x_1) - \frac{1}{2} f(x_2)}{h}, \qquad \left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x=x_n} \approx \frac{\frac{3}{2} f(x_n) - 2 f(x_{n-1}) + \frac{1}{2} f(x_{n-2})}{h},$$ mają

dokładność drugiego rzędu.

(2) Udowodnij, że pięciopunktowe przybliżenia różnicowe na pierwszą i drugą pochodną w wewnętrznym węźle sieci jednorodnej $x_0, \ldots, x_n$ o kroku h, dane wzorami:

$$\left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x=x_i} \approx \frac{\frac{1}{12} f(x_{i-2}) - \frac{2}{3} f(x_{i-1}) + 0\, f(x_i) + \frac{2}{3} f(x_{i+1}) - \frac{1}{12} f(x_{i+2})}{h}$$

$$\left.\frac{d^2 f(x)}{dx^2}\right|_{x=x_i} \approx \frac{-\frac{1}{12} f(x_{i-2}) + \frac{4}{3} f(x_{i-1}) - \frac{5}{2} f(x_i) + \frac{4}{3} f(x_{i+1}) - \frac{1}{12} f(x_{i+2})}{h^2}$$

mają dokładność czwartego rzędu.

Program:

Napisz program w języku „C/C++", obliczający przybliżone wartości pierwszych pochodnych funkcji $f(x) = cos(x)$ w punktach końcowych i środkowym przedziału $[0, \pi/2]$ zmiennej x. Zastosuj wszystkie omawiane na wykładzie i na ćwiczeniach przybliżenia różnicowe dwupunktowe i trzypunktowe (jednostronne bądź centralne, w zależności od położenia punktu w przedziale) na sieci jednorodnej o kroku h. Wykonaj (na jednym rysunku) wykresy przedstawiające zależności błędów **bezwzględnych** przybliżeń różnicowych od kroku sieci, posługując się skalą logarytmiczną (tzn. wykresy zależności $\log_{10}|\text{błędu}|$ od $\log_{10} h$). Na podstawie wykresów wyznacz doświadczalnie rzędy dokładności przybliżeń różnicowych. Sprawdź, czy tak wyznaczone rzędy dokładności pokrywają się z rzędami teoretycznymi i wyjaśnij ewentualne rozbieżności. Ponadto zidentyfikuj wartości kroku sieci poniżej których pojawia się wpływ błędów maszynowych. Obliczenia powtórz dla dwóch typów zmiennych rzeczywistych (**double** i **long double**) i porównaj wyniki.
*Uwaga: najwygodniej jest zastosować wzorzec funkcji (**function template**) z typem zmiennych jako parametrem wzorca.*

Zajęcia nr 9:

Zagadnienia do opanowania:

Metody różnicowe rozwiązywania zagadnień z warunkami brzegowymi dla równań różniczkowych zwyczajnych 2-go rzędu.

Zadania:

(1) Dane jest równanie różniczkowe zwyczajne drugiego rzędu: $x^2 u''(x) + (2 - x^2)\, u'(x) - x\, u(x) + 4 = 0$, określone na przedziale $x \in [0,2]$, oraz warunki brzegowe $u(0) = 1$, $u(2) = 3$. Mając daną jednorodną siatkę węzłów: $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, wyznacz przybliżone rozwiązanie równania w punkcie $x = 1$, przy zastosowaniu centralnych przybliżeń różnicowych na pochodne.

(2) Dane jest częściowo nieliniowe równanie różniczkowe zwyczajne drugiego rzędu, o postaci: $\frac{d^2U(x)}{dx^2} - F(x, U(x)) = 0$. Udowodnij, że konwencjonalny schemat różnicowy:

$$\frac{u_{i-1} - 2\,u_i + u_{i+1}}{h^2} - F(x_i, u_i) = 0$$

aproksymuje to równanie z dokładnością drugiego rzędu na sieci jednorodnej o kroku h, natomiast schemat różnicowy B. Numerowa:

$$\frac{u_{i-1} - 2\,u_i + u_{i+1}}{h^2} - \left[\frac{1}{12}F(x_{i-1}, u_{i-1}) + \frac{10}{12}F(x_i, u_i) + \frac{1}{12}F(x_{i+1}, u_{i+1})\right] = 0$$

aproksymuje to równanie z dokładnością czwartego rzędu, mimo że korzysta z tej samej liczby (trzech) węzłów sieci. (Wyjaśnienie: „Numerow" to nazwisko rosyjskiego astronoma).

Program:

Napisz program w języku „C/C++", rozwiązujący równanie różniczkowe zwyczajne drugiego rzędu: $U''(x) + 2\,U'(x) - 4\,U(x) + x^3/2 = 0$, określone na przedziale $0 \le x \le 1$,
z warunkami brzegowymi $U(0) = 2$, $U(1) = -2$. Zastosuj typ **double** oraz trzypunktową dyskretyzację konwencjonalną oraz metodę strzałów, na sieci jednorodnej. Do rozwiązania układu liniowych równań algebraicznych zastosuj algorytm Thomasa (patrz zajęcia nr 6). Wykonaj rysunek przedstawiający porównanie uzyskanych wyników numerycznych z rozwiązaniem analitycznym

$U(x)$ = -((9 – 95 exp((-1 - sqrt(5))(-1 + x)) + 55 exp((-1 + sqrt(5))x) +
95 exp(1 + sqrt(5) + (-1 + sqrt(5))x) - 55 exp(2 sqrt(5) - (1 + sqrt(5))x) +
2x (6 + x(3 + 2x)) - exp(2 sqrt(5)) (9 + 2x (6 + x (3 + 2x))))(-1 + coth(sqrt(5))))/ 64.

Pokaż, że rząd dokładności rozwiązań numerycznych jest zgodny z przewidywaniami teoretycznymi. W tym celu wykonaj (na jednym rysunku) wykresy przedstawiające zależności maksymalnego błędu bezwzględnego rozwiązań od kroku sieci h, posługując się skalą logarytmiczną (tzn. wykresy zależności $\log_{10}$|błędu| od $\log_{10} h$). Na podstawie wykresów wyznacz doświadczalnie rzędy dokładności rozwiązań uzyskanych za pomocą obu metod, i porównaj je z rzędami teoretycznymi. Ponadto zidentyfikuj wartości kroku sieci poniżej których pojawia się wpływ błędów maszynowych.

Zajęcia nr 10:

Zagadnienia do opanowania:

Metody różnicowe rozwiązywania zagadnień z warunkiem początkowym dla równań różniczkowych zwyczajnych pierwszego rzędu. Metody bezpośrednie i pośrednie a kwestia stabilności numerycznej. Metody: bezpośrednia Eulera, pośrednia Eulera, trapezów.

Zadania:

(1) Dane jest równanie różniczkowe zwyczajne pierwszego rzędu:
$y'(t) + ((100\,t + 10)/(t + 1))\,(y(t) - 1) = 0$, określone dla zmiennej $t \geq 0$,
z warunkiem początkowym $y(0) = 2$. Określ typ tego równania (rozpadu, wzrostu, oscylacyjne) i zbadaj jakie warunki muszą być spełnione, aby metody:
(a) bezpośrednia Eulera
(b) pośrednia Eulera
(c) metoda trapezów
dawały stabilne bądź niestabilne numerycznie rozwiązanie tego równania.

(2) Przeprowadź analogiczną analizę, jak w zadaniu 1, dla następujących równań różniczkowych zwyczajnych określonych dla $t \geq 0$:
$y'(t) + 2\,t + 3\,y(t) = 0$, $y'(t) + 2\,t - 3\,y(t) = 0$,
$y'(t) - 3\,(1 + t)\,y(t) = 0$, $y'(t) + (1 + t^2)\,y(t) = 0$.

Program:

Napisz program w języku „C/C++”, rozwiązujący równanie różniczkowe z zadania 1, za pomocą metod:

(a) bezpośredniej Eulera
(b) pośredniej Eulera
(c) metody trapezów.

Dla metod (b) i (c) wykonaj oddzielne rysunki przedstawiające po dwa wykresy: wykres przykładowego rozwiązania numerycznego oraz (dla porównania) wykres rozwiązania analitycznego: $y(t) = 1 + (1 + t)^{90} \exp(-100t)$. Oba wykresy winny przedstawiać zależność y od zmiennej niezależnej t. Rozwiązania analityczne zaznacz linią ciągłą, a numeryczne punktami. W przypadku metody (a) wykonaj trzy takie rysunki: jeden uzyskany w warunkach numerycznej stabilności metody (dla dowolnego t), drugi w warunkach numerycznej niestabilności (też dla dowolnego t), a trzeci w pozostałym przypadku. Wyjaśnij różnice pomiędzy uzyskanymi wykresami.

Pokaż, że rząd dokładności uzyskanych stabilnych rozwiązań numerycznych jest zgodny z przewidywaniami teoretycznymi. W tym celu wykonaj (na jednym rysunku) wykresy przedstawiające zależności maksymalnych błędów bezwzględnych rozwiązań uzyskanych trzema metodami, od kroku sieci czasowej δt, posługując się skalą logarytmiczną (tzn. wykresy zależności $\log_{10}|$błędu$|$ od $\log_{10} \delta t$). Na podstawie wykresów wyznacz doświadczalnie rzędy dokładności rozwiązań uzyskanych za pomocą różnych metod i porównaj je z rzędami teoretycznymi. O ile to możliwe, zidentyfikuj też wartości kroku sieci poniżej których pojawia się wpływ błędów maszynowych.

Zajęcia nr 11

Zagadnienia do opanowania:

Metody rozwiązywania zagadnień z warunkiem początkowym i brzegowym dla równań różniczkowych cząstkowych w przestrzeni jednowymiarowej.

Zadania:

(1) Dane jest równanie różniczkowe cząstkowe dyfuzji: $\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = D\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}$ ze współczynnikiem dyfuzji $D = 1$.
Równanie określone jest dla $x \in [-1,1]$ i towarzyszą mu: warunek początkowy $u(x,0) = x^3$, oraz warunki brzegowe $u(-1,t) = -1 - t$, $u(1,t) = 1 + t$.
Przyjmij jednorodną siatkę węzłów przestrzennych: $x_0 = -1$, $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, oraz krok czasowy $\delta t = 1$. Przy tych założeniach wyznacz przybliżone wartości rozwiązania pow. problemu w węzłach przestrzennych, dla $t = 1$, stosując metody:
(a) klasyczną bezpośrednią,
(b) Laasonen, oraz
(c) Cranka-Nicolson.
W każdym przypadku podaj i uzasadnij czy tak uzyskane rozwiązania są numerycznie stabilne.

(2) Zaproponuj uogólnienia pośrednich metod różnicowych: a) Laasonen, b) Cranka-Nicolson, dla jednowymiarowego równania dyfuzji we współrzędnych Kartezjańskich, zależnego od czasu, na liniowe równanie cząstkowe typu reakcji-dyfuzji: $\frac{\partial U(x,t)}{\partial t} = D\frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial x^2} - r\,U(x,t)$
(gdzie r jest stałą szybkości reakcji), przy założeniu jednorodnych sieci czasowo-przestrzennych. Wyprowadź stosowne układy algebraicznych równań liniowych, przy założeniu warunków brzegowych Dirichleta: $U(0,t) = \alpha(t)$, $U(L,t) = \beta(t)$.

Program:

W ramach zajęć konsultacja ćwiczeń zaliczeniowych związanych z rozwiązywaniem równań różniczkowych cząstkowych

Zajęcia nr 12:

Zagadnienia do opanowania:

Interpolacja wielomianowa Lagrange'a funkcji jednej zmiennej. Bazy: potęgowa, Lagrange'a i Newtona wielomianów interpolacyjnych. Algorytm Hornera. Algorytm Neville'a. Zjawisko Rungego w interpolacji wielomianowej Lagrange'a funkcji jednej zmiennej. Interpolacja wielomianowa Hermite'a funkcji jednej zmiennej.

Zadania:

(1) Wyznacz wielomian interpolacyjny Lagrange'a przechodzący przez punkty: $(x_i, f(x_i)) = (4, 2)$, $(-6, -8)$, $(-5, 4)$, $(1, 10)$, stosując (a) bazę Lagrange'a, (b) bazę Newtona.

(2) Stosując algorytm Neville'a, oblicz wartość wielomianu interpolacyjnego Lagrange'a przechodzącego przez punkty:
$(x_i, f(x_i)) = (-1, -1)$, $(2, 2)$, $(-3, 3)$, dla wartości zmiennej niezależnej $x = 1$.

(3) Posługując się bazą Newtona, wyznacz wielomian interpolacyjny Hermite'a $p(x)$, spełniający warunki:
$p(0) = 0$, $p'(0) = 1$, $p''(0) = 2$
$p(1) = 3$, $p'(1) = 4$,

Program:

(1) Napisz program w języku „C/C++", demonstrujący zjawisko Rungego w interpolacji wielomianowej Lagrange'a, na przykładzie interpolacji funkcji $f(x) = 1/(1 + x^3)$, określonej na przedziale $[-1, 1]$. Zastosuj bazę Lagrange'a do konstrukcji wielomianów interpolacyjnych. Porównaj wyniki interpolacji na węzłach równoodległych z wynikami interpolacji na węzłach Czebyszewa. Wykonaj wykres interpolowanej funkcji oraz uzyskanych wielomianów interpolacyjnych.

Zajęcia nr 13:

Zagadnienia do opanowania:

Interpolacja funkcjami sklejanymi. Interpolacja biliniowa funkcji dwóch zmiennych.
Numeryczne obliczanie całek oznaczonych. Kwadratury.

Zadania:

(1) Określ wartości współczynników *a*, *b*, *c*, i *d* tak, aby otrzymać naturalną funkcję sklejaną stopnia trzeciego z węzłami 0, 1 i 2:

$$S(x) = \begin{cases} 3 + x - 9x^3 & x \in [0, 1] \\ a + b(x-1) + c(x-1)^2 + d(x-1)^3 & x \in [1, 2] \end{cases}$$

(2) Dane są węzły i wartości funkcji dwóch zmiennych:
$(x_i, y_j, f(x_i, y_j)) = (0, 0, 1), (2, 0, 2), (0, 4, 3), (2, 4, 4)$.
Stosując interpolację biliniową, wyznacz przybliżoną wartość funkcji $f(x, y)$ w punkcie $(x, y) = (1, 1)$.

(3) Funkcja $f(x)$ przyjmuje wartości: $-1, 3, 7, 8, 6$, odpowiednio dla $x = 0, 1, 2, 4$ i 6. Oblicz przybliżoną wartość całki $\int_0^6 f(x)\, dx$, posługując się złożonymi kwadraturami:

(a) prostokątów (wariant z węzłem interpolacji po lewej stronie przedziału)
(b) prostokątów (wariant z węzłem interpolacji po prawej stronie przedziału)
(c) prostokątów (wariant z węzłem interpolacji w środku przedziału)
(d) trapezów
(e) parabol

W przypadkach (c) i (e) zastosuj wzory kwadratur prostych do dwóch pod-przedziałów [0,2] i [2,6], a w pozostałych przypadkach do czterech pod-przedziałów.

(4) Przedział [0,8] podzielono na 8 równoodległych pod-przedziałów. W węzłach otrzymanej w ten sposób siatki funkcja $f(x)$ przyjmuje odpowiednio wartości: $-5, -3, 1, 2, 1, -1, 2, 5$ i 4. Stosując metodę Romberga, oblicz możliwie najdokładniej przybliżoną wartość całki $\int_0^8 f(x)\, dx$.

(5) Oblicz przybliżoną wartość całki $\int_{-1}^{1} (x^4 + 1)\, dx$ za pomocą kwadratury Gaussa z dwoma punktami węzłowymi. Porównaj wyznaczoną wartość z wartością dokładną.

Program:

Napisz program w języku „C/C++”, obliczający numerycznie wartości funkcji:

$$erf(x) = \frac{2}{\pi^{1/2}} \int_0^x \exp(-y^2)\, dy,$$ dla $x = 1.0, 2.0, 3.0$.

Zastosuj złożone kwadratury:
(a) prostokątów (wariant z węzłem interpolacji po lewej stronie przedziału)
(b) prostokątów (wariant z węzłem interpolacji po prawej stronie przedziału)
(c) prostokątów (wariant z węzłem interpolacji w środku przedziału)
(d) trapezów
(e) parabol

na sieci o stałym kroku h. Oblicz błąd względny wyniku dla $x = 3.0$ w funkcji kroku h i pokaż, że rzędy dokładności zastosowanych kwadratur są zgodne z przewidywaniami teoretycznymi. W tym celu wykonaj (na jednym rysunku) wykresy zależności $\log_{10}$|błędu| od $\log_{10} h$. Na podstawie wykresów wyznacz doświadczalnie rzędy dokładności kwadratur. Do obliczenia ścisłych wartości funkcji $erf(x)$ (z dokładnością zbliżoną do maszynowej) zastosuj pakiet CALERF udostępniony przez prowadzącego zajęcia.