§2 Дифференциал

§2.1 Понятие дифференциала.

Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0. Тогда если существует такое A, что приращение Δy этой функции в точке x_0, соответственно приращению Δx аргумента, представлено в виде: $\Delta y = A \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x$, где $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \alpha(\Delta x) = 0$, то функция $f(x)$ называется дифференцируемой в точке x_0.

$A \cdot \Delta x$ – дифференциал функции в точке x_0 и обозначается dy, $d f(x_0)$

Функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0 тогда и только тогда, когда в этой точке существует конечная производная $f'(x_0)$, при этом $A = f'(x_0) \Rightarrow df(x_0) = f'(x_0)dx$ если $f(x)$ существует на интервале $(a; b) \Rightarrow dy = f'(x)dx$, $x \in (a, b)$

Из преведеного ранее $f'(x) = \frac{dy}{dn}$, т.е. производная функции $y = f(x)$ в точке x равна отношению дифференциала этой функции, в данной точке к дифференциалу независимой переменной.

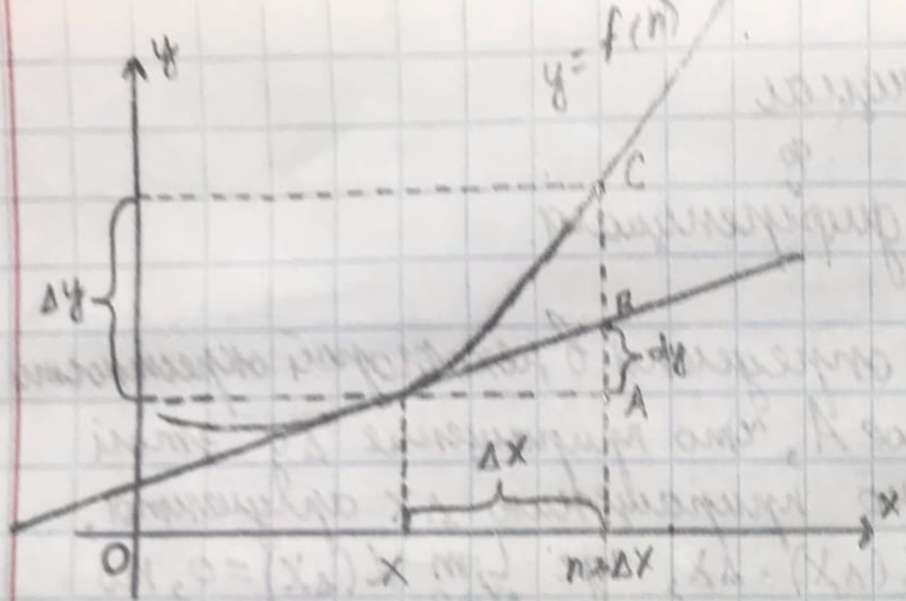
Если приращение Δx аргумента x близко к нулю (т.е. достаточно мало), то приращение Δy функции приближенно равно ее дифференциалу, т.е. $\Delta y \approx dy$, откуда $f(x_0 + \Delta n) \approx$ $\approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta n$ эта формула удобна для приближенного вычисления значения функции $f(x)$ в точке $x_0 + \Delta x$ по известному значению этой функции и её производной в точке x_0

Геометрический смысл и свойства дифференциала.

Геометрически приращение Δy функции $f(x)$ в точке n – есть приращение ординаты точки на кривой ($\Delta y = AC$), а дифференциал dy функции в этой точке – приращение ординаты соответствующей точки на касательной ($dy = AB$)

Тогда $u(n)$ и $v(n)$ – некоторые функции, дифференцируемые в точке n.

Тогда:



1) $dC = 0$, где C – константа
2) $d(\alpha u) = \alpha \cdot du$, где α – константа
3) $d(u \pm v) = ud + dv$
4) $d(u \cdot v) = udv + vdu$
5) $d(u : v) = \dfrac{vdu - udv}{v^2}$, где $v(x) \neq 0$
6) Инвариантность формы дифференциала.

Если $y = f(u(x))$ – сложная функция, то $df(x) = f'(u)du$ или $dy = y'_x dx$, т.е. форма дифференциала не меняется (инвариантна) независимо от того, рассматривается y как функция независимой переменной x или зависимой переменной u

Дифференциалы высших порядков.

$dy = f'(x)dx$ – дифференциал первого порядка.
$d^2y = d^2f(x) = f''(x)dx$ – второго порядка
$d^ny = d(d^{n-1}y)$ – n-го порядка