Теоремы о среднем. Правила Лопиталя. 04.05.20

Формулы Тейлора.

Теорема Ролля:

$f(x)$ - непрерывна на $[a;b]$
$f(x)$ - дифференцируема $(a;b)$
$f(a)=f(b)$
$\Rightarrow \exists$ хотя бы 1 точка „c": $c\in(a;b)$, $f'(c)=0$

Теорема Лагранжа:

$f(x)$ - непрерывна на $[a;b]$
$f(x)$ - дифференцируема на $(a;b)$
$\Rightarrow \exists\, c: c\in(a;b)$, $f(b)-f(a)=f'(c)\cdot(b-a)$

Теорема Коши:

$f(x), g(x)$ - непрерывна на $[a;b]$
$f(x), g(x)$ - дифференцируема на $(a;b)$
$g'(x)\neq 0\ \forall x\in(a;b)$
$\Rightarrow \exists\, c: c\in(a;b)$,
$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Правила Лопиталя

① Первое правило

1) $f(x), g(x)$ - дифференцируемы в окрестности $U(x_0)$ точки x_0, кроме, может быть, самой точки x_0 (т.е. может быть $f'(x_0)-\nexists$, $g'(x_0)-\nexists$)

2) $g'(x)\neq 0\ \forall x\in U(x_0)$, $x\neq x_0$

3) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0$

$$\Rightarrow \exists \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

$\left(\text{т.е. } \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \left[\frac{0}{0}\right] \right)$

4) $\exists \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

② Второе правило

1) $f(x), g(x)$ - дифференцируемы в окрестности $U(x_0)$ точки x_0, кроме, может быть, самой точки x_0 (т.е. может быть $\nexists f'(x_0), g'(x_0)$)

2) $g'(x) \neq 0 \ \forall x \in U(x_0), x \neq x_0$

3) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \infty \ \left(\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \left[\frac{0}{0}\right] \right)$

4) $\exists \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

$\Rightarrow \exists \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

Формула Тейлора

$f(x)$: $\exists f', f'', \dots f^{(n)}$ в окрестности точки „x_0"

тогда $\forall x \in U(x_0)$

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n) \quad \text{при } x \to x_0$$

Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано

Примечание:

$\exists f^{(n+1)}(x)$, тогда записывают $o((x - x_0)^n) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$

В формуле Тейлора $x_0 = 0$

Формула Маклорена

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}(x - 0) + \frac{f''(0)}{2!}(x - 0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}(x - 0)^n + o((x - 0)^n) =$$

$$= f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + o(x^n) \quad \text{при } x \to 0$$

Полезно знать:

1) $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$

2) $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + \frac{(-1)^n \cdot x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$

3) $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + \frac{(-1)^n \cdot x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$

4) $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1} \cdot x^n}{n} + o(x^n)$

5) $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha \cdot x + \frac{\alpha \cdot (\alpha - 1)}{2!} \cdot x^2 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-(n-1))}{n!} x^n$

$+ o(x^n)$