Производная функции, таблица производных.

Основные правила дифференцирования.

Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0. Предел отношения приращения Δy функции в этой точке (если он существует) к приращению Δx аргумента, когда $\Delta x \to 0$ называется производной функции $f'(x)$ в точке x_0.

Обозначения: $f'(x_0)$, $y'(x_0)$, $\frac{df(x_0)}{d(x)}$, $f'\big|_{x=x_0}$

Вычисление производной есть дифференцирование.

Основные правила дифференцирования.

Применение: функция $u = \varphi(n)$ имеет производную в точке x_0, а функция $y = f(u)$ в точке $x_0 = \varphi(n_0) \Rightarrow$ функция $y = f(\varphi(x))$ имеет производную в точке x_0.

$$y'(x_0) = y'(u_0) \cdot n'(x_0)$$

Производная $f'(x)$ от функции $f(x)$ есть производная первого порядка, а производная от функции $f'(x)$ будет производная второго порядка от $f(x)$

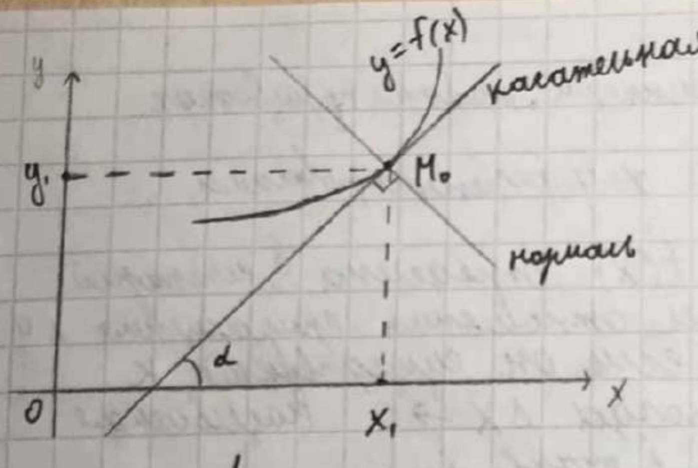
Производная n-го порядка обозначается: $f^{(n)}(x)$

Геометрический смысл производной.

Пусть функция $y = f(x)$ имеет производную в точке $x_0 \Rightarrow$ существует касательная к графику этой функции в точке $M_0(x_0; y_0)$, уравнение которой имеет вид:

$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$, при этом $f'(x_0) = tg\,\alpha$, где α - угол наклона касательной к оси O_x

Прямая проходящая через точку касания перпендикулярно касательной, называется нормалью к кривой и имеет уравнение:



$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)} \cdot (x - x_0)$$

Если $f'(x_0) = 0$, то нормаль $x = x_0$

Имеется $y = f_1(x) \cap y = f_2(x) = M_0(x_0; y_0)$, обе функции имеют производную в точке x_0, тогда углом между этими кривыми называется угол между касательными к ним, проведенными в точке M_0, угол φ;

$$tg\ \varphi = \frac{f_2'(x_0) - f_1'(x_0)}{1 + f_1'(x_0) \cdot f_2'(x_0)}$$

Логарифмическая производная

$$(\ln y)' = \frac{y'}{y} \qquad (u^v)' = u^v \cdot v' \cdot \ln u + u^{v-1} \cdot u' \cdot v$$

Производная неявной функции

Если $y = y(x)$ обладает производной в точке x и задана неявно уравнением $F(x, y) = 0$, то $y'(x)$ можно найти продифференц. выраж.

Производная функций, заданных параметрич.

Пусть $y = f(x)$ определена ф-ями $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$

если функции имеют производную в точке t_0, причем $x'(t_0) \neq 0$, а функция $y = f(x)$ имеет производную в точке $x_0 = x(t_0)$, то производная находится по формуле:

$$y'(x_0) = \frac{y'_t(t_0)}{x'_t(t_0)} \qquad y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}$$

вторая производная: $$y''_{xx} = \frac{y''_t \cdot x'_t - x''_t - y'_t}{(x'_t)^3}$$