8.05.20

Плоскость в пространстве.

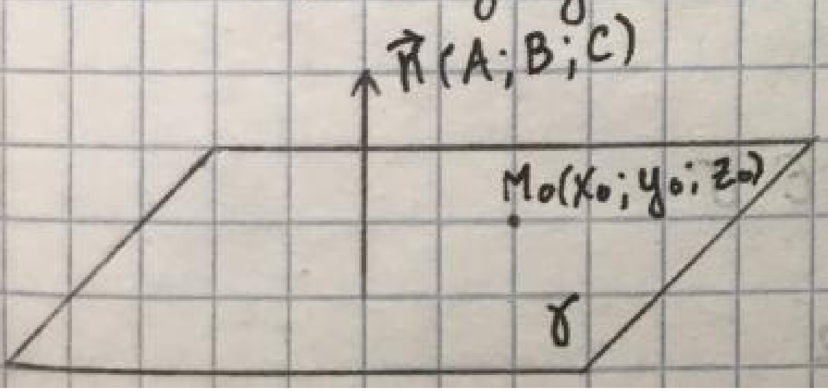
Различные виды уравнения плоскости.

Любая плоскость в пространстве O_{xyz} определяется линейным алгебраическим уравнением первой степени с 3 неизвестными.

Плоскость $\Leftrightarrow$ Уравнение

① Уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$ перпендикулярно вектору $\vec{n}(A; B; C)$

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$$

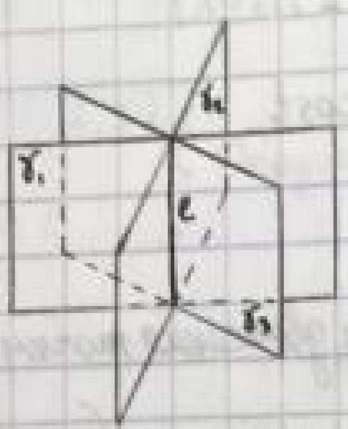


$M_0 \in \gamma$

$\vec{n} \perp \gamma$

Уравнение $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$ называется уравнением пучка плоскостей (связки)

Пучок плоскостей:



$\gamma_1 \cap \gamma_2 \cap \gamma_3 = l$

l - ось пучка плоскостей

$\gamma_1: A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$

$\gamma_2: A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$

$\gamma_1 \cap \gamma_2 = l$

$l: \begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}$

Уравнение пучка плоскостей:

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1+\lambda(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0 \qquad \lambda \text{ - число}$$

② Общее уравнение плоскости

$$Ax+By+Cz+D=0 \qquad (A^2+B^2+C^2\neq 0)$$

∀ нулевой вектор, ⊥ данной плоскости, называется нормальным вектором этой плоскости

$\left.\begin{matrix} \vec{S}\neq\vec{0} \\ \vec{S}\perp\gamma \end{matrix}\right| \Rightarrow \vec{S}$ - нормальный вектор плоскости γ

$\left.\begin{matrix} \vec{n}=(A;B;C) \\ \vec{n}\perp\gamma \end{matrix}\right| \Rightarrow \vec{n}$ - нормальный вектор плоскости $Ax+By+Cz+D=0$

Частные случаи:

1) $Ax+By+Cz=0 \quad (D=0) \Rightarrow O(0;0;0)\in\gamma$

2) $Ax+By+D=0 \quad (C=0) \Rightarrow \gamma \parallel Oz$

$Ax + Cz + D = 0 \quad (B=0) \Rightarrow \gamma \parallel O_y$

$By + Cz + D = 0 \quad (A=0) \Rightarrow \gamma \parallel O_x$

3) $Ax + By = 0 \quad (C=D=0) \Rightarrow O_z \in \gamma$

$Ax + Cz = 0 \quad (B=D=0) \Rightarrow O_y \in \gamma$

$By + Cz = 0 \quad (A=D=0) \Rightarrow O_x \in \gamma$

4) $Ax + D = 0 \quad (B=C=0) \Rightarrow \gamma \parallel O_{yz}$

$By + D = 0 \quad (A=C=0) \Rightarrow \gamma \parallel O_{xz}$

$Cz + D = 0 \quad (A=B=0) \Rightarrow \gamma \parallel O_{xy}$

5) $Ax = 0 \quad (B=C=D=0) \Rightarrow x=0 \Rightarrow \gamma = O_{yz}$

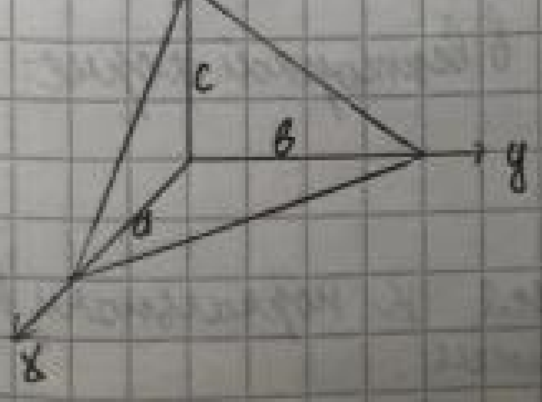
$By = 0 \quad (A=C=D=0) \Rightarrow y=0 \Rightarrow \gamma = O_{xz}$

$Cz = 0 \quad (A=B=D=0) \Rightarrow z=0 \Rightarrow \gamma = O_{xy}$

③ Уравнение плоскости в отрезках

$\frac{x}{a} + \frac{y}{в} + \frac{z}{c} = 1$, где

$\left.\begin{array}{l} a \text{ - абсцисса} \\ в \text{ - ордината} \\ c \text{ - аппликата} \end{array}\right\}$ точек пересечения плоскостью γ оси $\left\{\begin{array}{l} O_x \\ O_y \\ O_z \end{array}\right.$



④ Уравнение плоскости, проходящей через три данные точки $M_1(x_1;y_1;z_1)$, $M_2(x_2;y_2;z_2)$, $M_3(x_3;y_3;z_3)$:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0$$

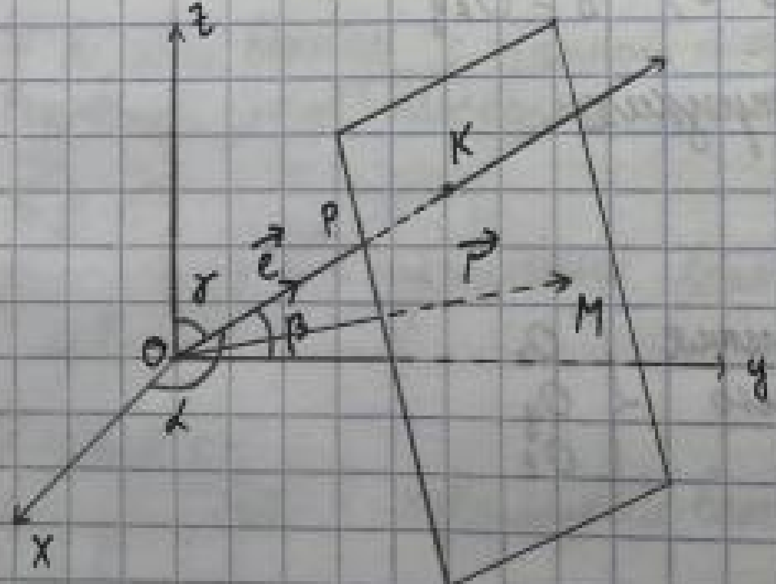
Уравнение ↑ в векторной форме:

$(\vec{r}-\vec{r}_1)(\vec{r}_2-\vec{r}_1)(\vec{r}_3-\vec{r}_1)=0$, где $\vec{r}, \vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3$ – радиус-векторы точек M, M_1, M_2, M_3

⑤ Нормальное уравнение плоскости:

$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0$, где p – длина перпендикуляра OK, опущенного из начала координат на плоскость;

α, β, γ – углы, образованные единичным вектором $\vec{e}$, имеющим направление OK, с осями Ox, Oy и Oz
$(\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1)$



Нормальное уравнение плоскости в векторной форме:

$$\vec{r}\cdot\vec{e} - p = 0$$

Общее уравнение плоскости приводится к нормальному виду путём умножения на нормирующий множитель.

$$\lambda = \frac{1}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

Знак перед дробью – противоположный знаку свободного члена D в общем уравнении плоскости.