La Prueba U de Mann-Whitney

La prueba se usa para grupos independientes y con datos que por lo menos son ordinales. Es una prueba poderosa utilizada en lugar de la prueba *t* para grupos independientes.

Ejemplo 1
El efecto de una dieta alta en proteínas en el desarrollo intelectual[1]

Una psicóloga del desarrollo considera que una dieta alta en proteínas durante la infancia temprana es importante para el desarrollo intelectual de los niños. Donde ella vive, la dieta es baja en proteínas y ella cree que es dañina para los niños, específicamente para su adecuado desarrollo intelectual.

Ahora bien, si tiene razón, una dieta alta en proteínas debería resultar en una mayor inteligencia. Para probar su hipótesis realiza un experimento, en el cual 18 niños fueron seleccionados al azar de entre los niños de un año que viven en una ciudad aledaña. Posteriormente los 18 niños fueron repartidos aleatoriamente en dos grupos de nueve niños cada uno. El primero grupo, el grupo control, recibe la dieta usual baja en proteínas durante tres años, mientras que, al segundo grupo, el experimental, se le proporciona una dieta alta en proteínas durante el mismo periodo de tiempo. Los datos recabados se presentan en el cuadro 1 (uno de los niños del grupo experimental se mudó a otra ciudad y no fue reemplazado).

Cuadro 1. Datos de consumo de proteína y el CI en 17 niños.

Puntajes de la prueba de CI	
Grupo control I (bajo consumo de proteína)	Grupo experimental II (alto consumo de proteína)
102	110
104	115
105	117
107	122
108	125
111	130
113	135
118	140
120	

Preguntas

1. ¿Cuál es la hipótesis alternativa direccional?
2. ¿Cuál es la hipótesis nula?
3. ¿Cuál es la conclusión utilizando $\alpha = 0.05_{1\ \text{cola}}$

[1] Los ejemplos son de: Pagano, R. (2008) *Understanding Statistics in the Behavioral Sciences*. 9th. Edition. Belmont, CA: Wadsworth, CENGAGE Learning.

1. H_1 = Una dieta alta en proteínas durante la infancia incrementa el funcionamiento intelectual en relación con una dieta baja en proteínas.
2. H_0 = Una dieta alta en proteína durante la infancia no tiene efecto alguno sobre el funcionamiento intelectual (o disminuye el funcionamiento intelectual) en relación con una dieta baja en proteínas.

3.
Paso 1: calcular el estadístico
El estadístico calculado por la prueba U de Mann Whitney es U_{obt} o U'_{obt} el cual mide el *grado de separación* entre los dos conjuntos de puntajes de la muestra. En la medida en que se incrementa el efecto real de la variable independiente, la muestra se separa más (los puntajes de las dos muestras coinciden menos).

Cuando existe una separación total entre las muestras (esto es, no hay coincidencia), $U_{obt} = 0$. Para cualquier experimento, $U_{obt} + U'_{obt} = n_1 n_2$. Tanto U_{obt} como U'_{obt} miden el mismo grado de separación, por lo tanto, al analizar los datos de cualquier experimento, es necesario calcular y evaluar sólo U_{obt} o U'_{obt}.

U_{obt} y U'_{obt} se calculan de la siguiente manera:

1) Combinar los puntajes de ambos grupos, ordenarlos por rango y asignar a cada uno un puntaje de rango, con 1 como el puntaje menor:

PO	102	104	105	107	108	110	111	113	115	117	118	120	122	125	130	135	140
R	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17

(PO = puntaje obtenido y R = rango)

2) Sumar los rangos para cada grupo, es decir determinar R_1 y R_2, en donde R_1 = suma de los rangos para el grupo 1 y R_2 = suma de los rangos para el grupo 2.

Cuadro 2.

Grupo control I		**Grupo experimental II**	
Puntaje obtenido	*Rango*	*Puntaje obtenido*	*Rango*
102	1	110	6
104	2	115	9
105	3	117	10
107	4	122	13
108	5	125	14
111	7	130	15
113	8	135	16
118	11	140	17
120	12		
$R_1 = 53$ $n_1 = 9$		$R_2 = 100$ $n_2 = 8$	

3) Resolver las ecuaciones para U_{obt} y U'_{obt}. Estos se calculan así:

$$U_{obt} = n_1 n_2 + \frac{n_1(n_1 + 1)}{2} - R_1$$

$$U_{obt} = n_1 n_2 + \frac{n_2(n_2 + 1)}{2} - R_2$$

en donde
n_1 = número de puntajes en el grupo 1
n_2 = número de puntajes en el grupo 2
R_1 = suma de rangos para los puntajes en el grupo 1
R_2 = suma de rangos para los puntajes en el grupo 2

Al resolver las ecuaciones identificamos una de las muestras como el grupo 1 y la otra como el grupo 2. Después, sólo resolvemos las ecuaciones. Una de éstas arrojará un número menor que la otra. De manera arbitraria el menor de los dos números es asignado como U_{obt}. No importa cuál muestra es clasificada como grupo 1 y cuál como grupo 2. Si invertimos las clasificaciones obtendremos los mismos resultados en las ecuaciones, lo que cambia en la clasificación es cuál ecuación arroja el número mayor y cuál el número menor.

Dado que lo anterior depende de cuál grupo es clasificado como grupo 1 y cuál como grupo 2, las ecuaciones se expresan inicialmente en términos de U_{obt} . Al hacer el cálculo, la que arroja el número mayor es la ecuación U'_{obt} y la que arroja el número menor es la ecuación U_{obt}.

Para los datos en el ejemplo:

$$\begin{aligned} U_{obt} &= n_1 n_2 + \frac{n_1(n_1 + 1)}{2} - R_1 \\ &= 9(8) + \frac{9(10)}{2} - 53 \\ &= 72 + 45 - 53 \\ &= 64 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U_{obt} &= n_1 n_2 + \frac{n_2(n_2 + 1)}{2} - R_2 \\ &= 9(8) + \frac{8(9)}{2} - 100 \\ &= 72 + 36 - 100 \\ &= 8 \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$U_{obt} = 8$$
$$U'_{obt} = 64$$

Paso 2: evaluar U_{obt} o U'_{obt}

Se deben comparar los resultados contra las tablas que indican los valores críticos para U y U'. Para cada celda hay dos datos. El dato mayor es el valor más alto de U_{obt} para varias combinaciones de n_1 y n_2 que permitirán rechazar la H_0. La regla de decisión es la siguiente:

Si $U_{obt} \leq U_{crít}$ rechazamos H_0 y aceptamos la H_1
Si $U'_{obt} \geq U'_{crít}$ rechazamos H_0 y aceptamos la H_1

Dado que U_{obt} y U'_{obt} miden el mismo grado de separación, sólo evaluaremos U_{obt}. Cada tabla de U es para un nivel alfa diferente. En nuestro caso hay la tabla con un nivel $\alpha = 0.05$ es la apropiada. Con $n_1 = 9$ y $n_2 = 8$, tenemos $U_{crít} = 18$ y $U'_{crít} = 54$.

Nuestra U_{obt} es < 18, entonces tenemos evidencia que nos permite rechazar la H_0 y aceptar la H_1.

En consecuencia, podemos concluir que una dieta alta en proteínas durante la infancia parece incrementar el funcionamiento intelectual en relación con una dieta baja en proteínas.

Ejemplo 2

Alguien ha dicho que los hombres son mejores para el razonamiento abstracto que las mujeres. Usted está escéptico de esta afirmación, de manera que decide probar esta idea por medio de una hipótesis no direccional. Selecciona al azar a 8 hombres y 8 mujeres de la clase de primer grado en su universidad y les aplica una prueba de razonamiento abstracto. Un puntaje mayor refleja mejores capacidades para el razonamiento abstracto. De su muestra obtiene los siguientes puntajes:

Hombres	Mujeres
70	82
86	80
60	50
92	95
82	93
65	85
74	90
94	75

Preguntas:

1. ¿Cuál es la hipótesis alternativa? Suponga que una hipótesis no direccional es apropiada.
2. ¿Cuál es la hipótesis nula?
3. Con $\alpha = 0.05_{2\ \text{colas}}$, ¿cuál es su conclusión?

SUPUESTOS SUBYACENTES A LA PRUEBA U DE MANN-WHITNEY

La prueba requiere que los datos sean cuando menos de escala ordinal. No depende de que los puntajes de la población exhiban ninguna forma en particular (es decir, la forma de la distribución normal), como la prueba *t* para grupos independientes. Por lo tanto, la prueba se puede utilizar en lugar de la prueba *t* cuando existe una seria violación a los supuestos de normalidad o cuando los datos no son de escala de intervalo o de razón. La prueba U de Mann-Whitney es una prueba poderosa. Sin embargo, ya que sólo usa la propiedad ordinal de los datos, no lo es tanto como la prueba t para grupos independientes, la cual utiliza la propiedad de intervalo de los puntajes.

table C.1 Critical values of U and U' for a one-tailed test at $\alpha = 0.005$ or a two-tailed test at $\alpha = 0.01$

*To be significant for any given n_1 and n_2: U_{obt} must be equal to or **less than** the value shown in the table. U'_{obt} must be equal to or **greater than** the value shown in the table.*

n_2 \ n_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—		—	—	—	—	—	—	—
2	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—		—	—	—	—	—	0 38	0 40
3	—	—	—	—	—	—	—	—	0 27	0 30	0 33	1 35	1 35	1 41	2 43	2 46	2 49	2 52	3 54	3 57
4	—	—	—	—	—	0 24	0 28	1 31	1 35	2 38	2 42	3 45	3 49	4 52	5 55	5 59	6 62	6 66	7 69	8 72
5	—	—	—	—	0 25	1 29	1 34	2 38	3 42	4 46	5 50	6 54	7 58	7 63	8 67	9 71	10 75	11 79	12 83	13 87
6	—	—	—	0 24	1 29	2 34	3 39	4 44	5 49	6 54	7 59	9 63	10 68	11 73	12 78	13 83	15 87	16 92	17 97	18 102
7	—	—	—	0 28	1 34	3 39	4 45	6 50	7 56	9 61	10 67	12 72	13 78	15 83	16 89	18 94	19 100	21 105	22 111	24 116
8	—	—	—	1 31	2 38	4 44	6 50	7 57	9 63	11 69	13 75	15 81	17 87	18 94	20 100	22 106	24 112	26 118	28 124	30 130
9	—	—	0 27	1 35	3 42	5 49	7 56	9 63	11 70	13 77	16 73	18 90	20 97	22 104	24 111	27 117	29 124	31 131	33 138	36 144
10	—	—	0 30	2 38	4 46	6 54	9 61	11 69	13 77	16 84	18 92	21 99	24 106	26 114	29 121	31 129	34 136	37 143	39 151	42 158
11	—	— —	0 33	2 42	5 50	7 59	10 67	13 75	16 83	18 92	21 100	24 108	27 116	30 124	33 132	36 140	39 148	42 156	45 164	48 172
12	—	—	1 35	3 45	6 54	9 63	12 72	15 81	18 90	21 99	24 108	27 117	31 125	34 134	37 143	41 151	44 160	47 169	51 177	54 186
13	—	—	1 38	3 49	7 58	10 68	13 78	17 87	20 97	24 106	27 116	31 125	34 125	38 144	42 153	45 163	49 172	53 181	56 191	60 200
14	—	—	1 41	4 52	7 63	11 73	15 83	18 94	22 104	26 114	30 124	34 134	38 144	42 154	46 164	50 174	54 184	58 194	63 203	67 213
15	—	—	2 43	5 55	8 67	12 78	16 89	20 100	24 111	29 121	33 132	37 143	42 153	46 164	51 174	55 185	60 195	64 206	69 216	73 227
16	—	—	2 46	5 59	9 71	13 83	18 94	22 106	27 117	31 129	36 140	41 151	45 163	50 174	55 185	60 196	65 207	70 218	74 230	79 241
17	—	—	2 49	6 62	10 75	15 87	19 100	24 112	29 124	34 148	39 148	44 160	49 172	54 184	60 195	65 207	70 219	75 231	81 242	86 254
18	—	—	2 52	6 66	11 79	16 92	21 105	26 118	31 131	37 143	42 156	47 169	53 181	58 194	64 206	70 218	75 231	81 243	87 255	92 268
19	—	0 38	3 54	7 69	12 83	17 97	22 111	28 124	33 138	39 151	45 164	51 177	56 191	63 203	69 216	74 230	81 242	87 255	93 268	99 281
20	—	0 40	3 57	8 72	13 87	18 102	24 116	30 130	36 144	42 158	48 172	54 186	60 200	67 213	73 227	79 241	86 254	92 268	99 281	105 295

Dashes in the body of the table indicate that no decision is possible at the stated level of significance.

table C.2 Critical values of *U* and *U'* for a one-tailed test at $\alpha = 0.01$ or a two-tailed test at $\alpha = 0.02$

To be significant for any given n_1 and n_2: U_{obt} must be equal to or ***less than*** *the value shown in the table. U'_{obt} must be equal to or* ***greater than*** *the value shown in the table.*

n_2 \ n_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
2	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0 26	0 28	0 30	0 32	0 34	0 36	1 37	1 39
3	—	—	—	—	—	—	0 21	0 24	1 26	1 29	1 32	2 34	2 37	2 40	3 42	3 45	4 47	4 50	4 52	5 55
4	—	—	—	—	0 20	1 23	1 27	2 30	3 33	3 37	4 40	5 43	5 47	6 50	7 53	7 57	8 60	9 63	9 67	10 70
5	—	—	—	0 20	1 24	2 28	3 32	4 36	5 40	6 44	7 48	8 52	9 56	10 60	11 64	12 68	13 72	14 76	15 80	16 84
6	—	—	—	1 23	2 28	3 33	4 38	6 42	7 47	8 52	9 57	11 61	12 66	13 71	15 75	16 80	18 84	19 89	20 94	22 93
7	—	—	0 21	1 27	3 32	4 38	6 43	7 49	9 54	11 59	12 65	14 70	16 75	17 81	19 86	21 91	23 96	24 102	26 107	28 112
8	—	—	0 24	2 30	4 36	6 42	7 49	9 55	11 61	13 67	15 73	17 79	20 84	22 90	24 96	26 102	28 108	30 114	32 120	34 126
9	—	—	1 26	3 33	5 40	7 47	9 54	11 61	14 67	16 74	18 81	21 87	23 94	26 100	28 107	31 113	33 120	36 126	38 133	40 140
10	—	—	1 29	3 37	6 44	8 52	11 59	13 67	16 74	19 81	22 88	24 96	27 103	30 110	33 117	36 124	38 132	41 139	44 146	47 153
11	—	—	1 32	4 40	7 48	9 57	12 65	15 73	18 81	22 88	25 96	28 104	31 112	34 120	37 128	41 135	44 143	47 151	50 159	53 167
12	—	—	2 34	5 43	8 52	11 61	14 70	17 79	21 87	24 96	28 104	31 113	35 121	38 130	42 138	46 146	49 155	53 163	56 172	60 180
13	—	0 26	2 37	5 47	9 56	12 66	16 75	20 84	23 94	27 103	31 112	35 121	39 130	43 139	47 148	51 157	55 166	59 175	63 184	67 193
14	—	0 28	2 40	6 50	10 60	13 71	17 81	22 90	26 100	30 110	34 120	38 130	43 139	47 149	51 159	56 168	60 178	65 187	69 197	73 207
15	—	0 30	3 42	7 53	11 64	15 75	19 86	24 96	28 107	33 117	37 128	42 138	47 148	51 159	56 169	61 179	66 189	70 200	75 210	80 220
16	—	0 32	3 45	7 57	12 68	16 80	21 91	26 102	31 113	36 124	41 135	46 146	51 157	56 168	61 179	66 190	71 201	76 212	82 222	87 233
17	—	0 34	4 47	8 60	13 72	18 84	23 96	28 108	33 120	38 132	44 143	49 155	55 166	60 178	66 189	71 201	72 212	82 224	88 234	93 247
18	—	0 36	4 50	9 63	14 76	19 89	24 102	30 114	36 126	41 139	47 151	53 163	59 175	65 187	70 200	76 212	82 224	88 236	94 248	100 260
19	—	1 37	4 53	9 67	15 80	20 94	26 107	32 120	38 133	44 146	50 159	56 172	63 184	69 197	75 210	82 222	88 235	94 248	101 260	107 273
20	—	1 39	5 55	10 70	16 84	22 98	28 112	34 126	40 140	47 153	53 167	60 180	67 193	73 207	80 220	87 233	93 247	100 260	107 273	114 286

Dashes in the body of the table indicate that no decision is possible at the stated level of significance.

table C.3 Critical values of U and U' for a one-tailed test at $\alpha = 0.025$ or a two-tailed test at $\alpha = 0.05$

To be significant for any given n_1 and n_2: U_{obt} must be equal to or ***less than*** *the value shown in the table. U'_{obt} must be equal to or* ***greater than*** *the value shown in the table.*

n_2 \ n_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
2	—	—	—	—	—	—	—	0 16	0 18	0 20	0 22	1 23	1 25	1 27	1 29	1 31	2 32	2 34	2 36	2 38
3	—	—	—	—	0 15	1 17	1 20	2 22	2 25	3 27	3 30	4 32	4 35	5 37	5 40	6 42	6 45	7 47	7 50	8 52
4	—	—	—	0 16	1 19	2 22	3 25	4 28	4 32	5 35	6 38	7 41	8 44	9 47	10 50	11 53	11 57	12 60	13 63	13 67
5	—	—	0 15	1 19	2 23	3 27	5 30	6 34	7 38	8 42	9 46	11 49	12 53	13 57	14 61	15 65	17 68	18 72	19 76	20 80
6	—	—	1 17	2 22	3 27	5 31	6 36	8 40	10 44	11 49	13 53	14 58	16 62	17 67	19 71	21 75	22 80	24 84	25 89	27 93
7	—	—	1 20	3 25	5 30	6 36	8 41	10 46	12 51	14 56	16 61	18 66	20 71	22 76	24 81	26 86	28 91	30 96	32 101	34 106
8	—	0 16	2 22	4 28	6 34	8 40	10 46	13 51	15 57	17 63	19 69	22 74	24 78	26 86	29 91	31 97	34 102	36 108	38 111	41 119
9	—	0 18	2 25	4 32	7 38	10 44	12 51	15 57	17 64	20 70	23 76	26 82	28 89	31 95	34 101	37 107	39 114	42 120	45 126	48 132
10	—	0 20	3 27	5 35	8 42	11 49	14 56	17 63	20 70	23 77	26 84	29 91	33 97	36 104	39 111	42 118	45 125	48 132	52 138	55 145
11	—	0 22	3 30	6 38	9 46	13 53	16 61	19 69	23 76	26 84	30 91	33 99	37 106	40 114	44 121	47 129	51 136	55 143	58 151	62 158
12	—	1 23	4 32	7 41	11 49	14 58	18 58	22 74	26 82	29 91	33 99	37 107	41 115	45 123	49 131	53 139	57 147	61 155	65 163	69 171
13	—	1 25	4 35	8 44	12 53	16 62	20 71	24 80	28 89	33 97	37 106	41 115	45 124	50 132	54 141	59 149	63 158	67 167	72 175	76 184
14	—	1 27	5 37	9 47	13 51	17 67	22 76	26 86	31 95	36 104	40 114	45 123	50 132	55 141	59 151	64 160	67 171	74 178	78 188	83 197
15	—	1 29	5 40	10 50	14 61	19 71	24 81	29 91	34 101	39 111	44 121	49 131	54 141	59 151	64 161	70 170	75 180	80 190	85 200	90 210
16	—	1 31	6 42	11 53	15 65	21 75	26 86	31 97	37 107	42 118	47 129	53 139	59 149	64 160	70 170	75 181	81 191	86 202	92 212	98 222
17	—	2 32	6 45	11 57	17 68	22 80	28 91	34 102	39 114	45 125	51 136	57 147	63 158	67 171	75 180	81 191	87 202	93 213	99 224	105 235
18	—	2 34	7 47	12 60	18 72	24 84	30 96	36 108	42 120	48 132	55 143	61 155	67 167	74 168	80 190	86 202	93 213	99 225	106 236	112 248
19	—	2 36	7 50	13 63	19 76	25 89	32 101	38 114	45 126	52 138	58 151	65 163	72 175	78 188	85 200	92 212	99 224	106 236	113 248	119 261
20	—	2 38	8 52	13 67	20 80	27 93	34 106	41 119	48 132	55 145	62 158	69 171	76 184	83 197	90 210	98 222	105 235	112 248	119 261	127 273

Dashes in the body of the table indicate that no decision is possible at the stated level of significance.

table C.4 Critical values of U and U' for a one-tailed test at $\alpha = 0.05$ or a two-tailed test at $\alpha = 0.10$

To be significant for any given n_1 and n_2: U_{obt} must be equal to or ***less than*** *the value shown in the table. U'_{obt} must be equal to or* ***greater than*** *the value shown in the table.*

n_2 \ n_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	— —	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0 19	0 20
2	—	—	—	—	0 10	0 12	0 14	1 15	1 17	1 19	1 21	2 22	2 24	2 26	3 27	3 29	3 31	4 32	4 34	4 36
3	—	—	0 9	0 12	1 14	2 16	2 19	3 21	3 24	4 26	5 28	5 31	6 33	7 35	7 38	8 40	9 42	9 45	10 47	11 49
4	—	—	0 12	1 15	2 18	3 21	4 24	5 27	6 30	7 36	8 36	9 39	10 42	11 45	12 48	14 50	15 53	16 56	17 59	18 62
5	—	0 10	1 14	2 18	4 21	5 25	6 29	8 32	9 36	11 39	12 43	13 47	15 50	16 54	18 57	19 61	20 65	22 68	23 72	25 75
6	—	0 12	2 16	3 21	5 25	7 29	8 34	10 38	12 42	14 46	16 50	17 55	19 59	21 63	23 67	25 76	26 71	28 80	30 84	32 88
7	—	0 14	2 19	4 24	6 29	8 34	11 38	13 43	15 48	17 53	19 58	21 63	24 67	26 72	28 77	30 82	33 86	35 91	37 96	39 101
8	—	1 15	3 21	5 27	8 32	10 38	13 43	15 49	18 54	20 60	23 65	26 70	28 76	31 81	33 87	36 97	39 97	41 103	44 108	47 113
9	—	1 17	3 24	6 30	9 36	12 42	15 48	18 54	21 60	24 66	27 72	30 78	33 84	36 90	39 96	42 102	45 108	48 114	51 120	54 126
10	—	1 19	4 26	7 33	11 39	14 46	17 53	20 60	24 66	27 73	31 79	34 86	37 93	41 99	44 106	48 112	51 119	55 125	58 132	62 138
11	—	1 21	5 28	8 36	12 43	16 50	19 58	23 65	27 72	31 79	34 87	38 94	42 101	46 108	50 115	54 122	57 130	61 137	65 144	69 151
12	—	2 22	5 31	9 39	13 47	17 35	21 63	26 70	30 78	34 94	38 94	42 102	47 109	51 117	55 125	60 132	64 140	68 148	72 156	77 163
13	—	2 24	6 33	10 42	15 50	19 59	24 67	28 76	33 84	37 93	42 101	47 109	51 118	56 126	61 134	65 143	70 151	75 159	80 167	84 176
14	—	2 26	7 35	11 45	16 54	21 63	26 72	31 81	36 90	41 99	46 108	51 117	56 126	61 135	66 144	71 153	77 161	82 170	87 179	92 188
15	—	3 27	7 38	12 48	18 57	23 67	28 77	33 87	39 96	44 106	50 115	55 125	61 134	66 144	72 153	77 163	83 172	88 182	94 191	100 200
16	—	3 29	8 40	14 50	19 61	25 71	30 82	36 92	42 102	48 112	54 122	60 132	65 143	71 153	77 163	83 173	89 183	95 193	101 203	107 213
17	—	3 31	9 42	15 53	20 65	26 76	33 97	39 97	45 108	51 119	57 130	64 140	70 151	77 161	83 172	89 183	96 193	102 204	109 214	115 225
18	—	4 32	9 45	16 56	22 68	28 80	35 91	41 103	48 114	55 123	61 137	68 148	75 159	82 170	88 182	95 193	102 204	109 215	116 226	123 237
19	0 19	4 34	10 47	17 59	23 72	30 84	37 96	44 108	51 120	58 132	65 144	72 156	80 167	87 179	94 191	101 203	109 214	116 226	123 238	130 250
20	0 20	4 36	11 49	18 62	25 75	32 88	39 101	47 113	54 126	62 138	69 151	77 163	84 176	92 188	100 200	107 213	115 225	123 237	130 250	138 262

Dashes in the body of the table indicate that no decision is possible at the stated level of significance.