Dos ejemlos de la prueba M Latex Export

Carlos Eduardo Martínez Aguilar

4 de noviembre de 2024

Índice

1. Ejercicio 3.1-5

Se define la siguiente serie de funciones analíticas

$$g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n} \cos(nz).$$

Demuestre que g es holomorfa en $\Omega = \{z \in \mathbb{C} \mid -1 < \mathrm{Im}(z) < 1\}$.
Demostración. Primero, para poder aplicar la prueba M de Weierstrass, buscamos una cota para los términos $|\cos(nz)|$. Entonces por definición de coseno

$$\begin{aligned} |\cos(nz)| &= |\frac{e^{inz} - e^{-inz}}{2}| \\ &\leq \frac{|e^{inz}| + |e^{-inz}|}{2} \\ &= \frac{e^{-n\mathrm{Im}(z)} + e^{n\mathrm{Im}(z)}}{2}. \end{aligned}$$

Donde aplicamos la desigualdad del triángulo para la desigualdad y el hecho $|e^{i(x+iy)}| = |e^{(ix-y)}| = e^{-y}$. Así para $K \subset \Omega$ compacto, sea δ la distancia de K a $\partial\Omega = \{\mathrm{Im}(z) = 1\} \cup \{\mathrm{Im}(z) = -1\}$, la cual existe pues K es compacto y $\partial\Omega$ es cerrado. Por lo tanto si $z \in K$, se tiene que $\pm\mathrm{Im}(z) < 1 - \delta$. Por lo tanto tenemos que

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} |e^{-n}\cos(nz)| &= \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n}|\cos(nz)| \\
&\leq \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n}e^{n(1-\delta)} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n\delta} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} (e^{-\delta})^n = \frac{1}{1-e^{-\delta}} < \infty.
\end{aligned}
$$

Por lo tanto por la prueba M de Weierstrass y el teorema de Weierstrass, ls serie que define a $g(z)$ converge absoluta y normalmente en Ω y $g(z)$ es holomorfa en Ω. $\square$

2. Ejercicio 3.1-8

Se define la siguiente serie de funciones analíticas

$$g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} 2i\frac{z^n}{z^{2n}+1}.$$

Demuestre que g es holomorfa en $\Omega = \mathbb{C} \setminus \partial\Delta$, donde $\partial\Delta = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| = 1\}$.
Demostración. Similar al problema anterior, buscamos una cota para los sumandos

$$\Big|\frac{z^n}{z^{2n}+1}\Big|$$

.

Entonces, sea $D \subset \Omega$ un disco cerrado y sea δ la distancia de D a $\partial\Delta$, la cual existe pues ambos son conjuntos compactos. Ahora, existen dos posibilidades; $|z| < 1$ para toda $z \in D$ o $|z| > 1$ para toda $z \in D$, si $|z| < 1$, entonces

$$|z^{2n} + 1| \geq 1 - |z|^{2n}$$

además se cumple que $|z|^k < |z|$ para todo complejo de norma menor que uno y $k \in \mathbb{N}$. Más aún para todo $z \in D$, se cumple que

$$|z| < 1+\delta \quad \Longrightarrow \quad |z|^{2n} < 1+\delta \quad \Longrightarrow \quad -|z|^{2n} > -(1+\delta).$$

Por lo tanto

$$|z^{2n}+1| > 1-(1+\delta) = \delta \quad \Longrightarrow \quad \Big|\frac{z^n}{z^{2n}+1}\Big| \leq \frac{|z^n|}{\delta}.$$

Ahora si $|z| > 1$, entonces

$$\left|\frac{z^n}{z^{2n}+1}\right| = \frac{1}{|z^n + z^{-n}|} \leq \frac{1}{|z|^n - |z|^{-n}} \leq \frac{1}{|z|^n - 1} \leq \frac{\kappa}{|z|^n} \leq \frac{\kappa}{(1-\delta)^n}.$$

Donde $\kappa \in \mathbb{R}^+$ es una cota para la sucesion funciónes en D

$$f_n(z) = \frac{|z|^n}{|z|^n - 1}.$$

Notamos que κ existe pues el máximo de las f_n existen y $f_n \to 1$ cuando $n \to \infty$. Por lo tanto, al igual que en el ejercicio anterior, se puede acotar la serie que define a $g(z)$ por una geométrica convergente, la convergencia de la serie geométrica en el caso $|z| < 1$ es más sencillo pues podemos suponer que $|z| < r < 1$,entonces el valor que acota la serie de los valores absolutos es $1/\delta(1-r)$ y el caso $|z| > 1$, se puede verificar que se obtiene

$$\frac{2\kappa}{1 - \frac{1}{(1-\delta)}}.$$

Por lo tanto por la prueba M de Weierstrass y el teorema de Weierstrass, ls serie que define a $g(z)$ converge absoluta y normalmente en Ω y $g(z)$ es holomorfa en Ω. $\square$