VERSIÓN ADÉLICA

CARLOS EDUARDO MARTÍNEZ AGUILAR

Capítulo 1

Adeles

Definición 1.1 *Una valuación en un campo K es una función $|\cdot| : K \to \mathbb{R}^+$ que safisface los siguientes axiomas*

i) $|a| = 0$ *si y sólo si* $a = 0$.

ii) $|a\,b| = |a|\,|b|$ *para todo* $\{a, b\} \subset K$

iii) Existe $C \in \mathbb{R}^+$ *tal que* $|1 + a| \leq C$ *para todo* $a \in K$

Observamos que por la segunda propiedad $|1| = |1|\,|1|$, por lo tanto $|1| = 1$ además si $w \in K$ es raiz de la unidad $w^n = 1$, entonces $|w| = 1$.

La valuación trivial se define por $\chi_{K\setminus\{0\}} : K \to \mathbb{R}^+$

$$\chi_{K\setminus\{0\}}(x) = \begin{cases} 0, & \text{if } x = 0 \\ 1, & \text{en otro caso.} \end{cases} \tag{1.1}$$

excluimos la valuación trivial de nuestro estudio. Así definimos dos tipos distintos de valuaciones: decimos que una valuacion es no arquimideana si

$$|a + b| \leq \text{máx}\{|a|, |b|\}. \tag{1.2}$$

y por lo tanto diremos que una valuacíon es arquimideana en otro caso (observamos que la condición de no arquimidenidad es equivalente a que $C = 1$).

Las valuaciones definen una norma en el campo K y por lo tanto una distancia dada por $|x - y|$, así diremos que dos valuaciones son equivalentes si definen la misma topología en K, más precisamente, dos valuaciones ν_1, ν_2 son equivalentes si existen $\{c_1, c_2\} \subset \mathbb{R}^+$ tales que

$$c_1\,\nu_1 \leq \nu_2 \qquad c_2\,\nu_2 \leq \nu_1$$

a las clases de equivalecia bajo esta relación les llamaremos *lugares*.

Teorema 1.1 (Ostrowski) *En $\mathbb{Q}$ sólo existen dos tipos distintos de lugares, el lugar del valor absoluto usual en $\mathbb{Q}$, $|\cdot|$ y los lugares no arquimideamos correspondientes a las valuaciones p-ádicas $|\cdot|_p$ para p primo definidas por*

$$|u\,p^n|_p := p^{-n}, \quad \textit{donde} \quad u \in \mathbb{Q},\, u = \frac{a}{b},\, (a,p) = (b,p) = 1. \tag{1.3}$$

*A estas valuaciones también les llamamos **finitas**.*

Definición 1.2 *Un campo global es un campo K dentro de las siguientes dos categorias distintas*

- *K es una extensión finita de $\mathbb{Q}$ (también llamdo campo numérico)*
- *K es una estensión finita y separable de $\mathbb{F}(\tau)$, con $\mathbb{F}$ un campo finito y τ es tracendental sobre $\mathbb{F}$, es decir $\mathbb{F}(\tau) \cong Frac(\mathbb{F}[X])$.*

Nota.- Dada una valuación ν en un campo K, denotamos por K_ν al campo correspondiente a la completación métrica de K.

Definición 1.3 (Anillo de valuación) *Decimos que un dominio entero R es un anillo de valuación si para su campo de fracciones $F = Frac(R)$ sucede que para todo $x \in F$ sucede que $x \in R$ o $x^{-1} \in R$.*

Para K un campo y ν una valuación no arquimideana, el anillo de valuación de la completación K_ν es'ta dado por

$$\mathcal{O}_\nu := \{x \in K_\nu \mid |x| \leq 1\}. \tag{1.4}$$

En general para una valuación ν denotaremos por $\mathcal{O}_\nu$ a su anillo de valuación, en caso de las valuaciones p-ádicas escribimos $\mathcal{O}_p$.

Definición 1.4 (Anillo de adeles) *Sea K un campo global, definimos el anillo de adeles de K como el subanillo de $\prod_\nu K_\nu$ definido por el producto topológico restringido*

$$\mathbb{A}_K := \prod_{\nu \textit{ valuación}} (K_\nu, \mathcal{O}_\nu) \subset \prod_\nu K_\nu \tag{1.5}$$

definido como el conjunto de (a_ν) tales que $a_\nu \in \mathcal{O}_\nu$ salvo un número finito de lugares. La estructura de anillo se define entrada a entrada

$$(x\,y)_\nu := x_\nu\, y_\nu \qquad (x+y)_\nu := x_\nu + y_\nu$$

a un elemento invertible de $\mathbb{A}_K$ le llamaremos idele.

Observamos que existe un encaje de K en $\mathbb{A}_K$ por medio de $\varphi : K \to \mathbb{A}_K$ $\varphi(x) = (x, x, x, \cdots)$

1.0.1. Espacios adélicos y variedades algebraicas

Sea V una variedad algebraica definida sobre un campo K y sea L una extensión de K, denotamos por V_L a los puntos de L que son racionales sobre K, es decir los ceros de polinomios con coeficientes en K con coordenadas en L. Sabemos que V admite una cubierta finita de abiertos de Zariski, es decir que V se puede cubrir con un número finito de variedades afines definidas sobre K, así

$$V = \bigcup_i \varphi_i(V_i),$$

donde V_i es una variedad afín $V_i = Spec\, K[x_1, \cdots, x_n]/I$ y φ_i es un isomorfimo entre V_i y un abierto de V. Así tenemos que

$$V_L = \bigcup_i \varphi_i(V_{i,L}),$$

en particular para ν una valuacion en K y K_ν con la ν topología, tenemos que

$$V_{K_\nu} = \bigcup_i \varphi_i(V_{i,K_\nu})$$

es localmente compacto.Por lo tanto definimos

$$[V, \varphi_i, V_i]_{\mathcal{O}_\nu} = \bigcup_i \varphi_i(V_{i,\mathcal{O}_\nu}), \tag{1.6}$$

donde $V_{i,\mathcal{O}_\nu}$ es el subconjunto compacto de V_{K_ν} con coordenadas en $\mathcal{O}_\nu$ y así $[V, \varphi_i, V_i]_{\mathcal{O}_\nu}$ es un subconjunto compacto de V_{K_ν}, con esto definimos el espacio adélico asociado a V como el producto topológico restringido

$$V_{\mathbb{A}_K} := \prod_{\nu \text{ valuación}} (V_{K_\nu}, [V, \varphi_i, V_i]_{\mathcal{O}_\nu}) \subset \prod_\nu V_{K_\nu}. \tag{1.7}$$

Cuando V es **completo**, se puede demostrar que $V_{\mathbb{A}_K}$ y V_{K_ν} son compactos y por lo tanto $[V, \varphi_i, V_i]_{\mathcal{O}_\nu} = V_{\mathcal{O}_\nu}$

Teorema 1.2 *Sean $V = \bigcup_i \varphi_i(V_i)$ y $W = \bigcup_j \psi_j(W_j)$ variedades algebraicas definidas sobre K y sea $F : V \to W$ un morfismo de variedades algebraicas definido sobre K, entonces existe un conjunto finito de valuaciones tal que F mapea $[V, \varphi_i, V_i]_{\mathcal{O}_\nu}$ en $[W, \psi_j, W_j]_{\mathcal{O}_\nu}$.*

Demostración. Para demostrar esto es suficiente considerar el caso cuando V es afín ya que podemos continuar el argumento a una cubierta de variedades afines. Para cada j sea $F_j = \psi_j^{-1} \circ F : V \to W_j$, ahora F es representable por funciones racionales $R_{j\,k}$ en coordenadas de V, donde $1 \leq k \leq dim(W_j)$. Sea $\mathfrak{a}_j \subset K[X]$ el ideal consistente de todos los polinomios $A(x)$ tales que

$$A(x)\, R_{j\,k}(x) = Q_k(x) \in K[x],$$

para todo k con x punto genérico de V sobre K, entonces es claro que F_j está definido en $x_1 \in V$ si y sólo si no es un cero de $\mathfrak{a}_j$. Como F está bien definido en todo V, entonces por lo menos un F_j está definido en un x_1 cualquiera, lo que significa que que no existe un cero común de $\sum_j \mathfrak{a}_j$, es decir

$$(1) = \sum_j \mathfrak{a}_j.$$

Por lo tanto podemos escribir $1 = \sum_j A_j$ con

$$A_j(x) R_{j\,k}(x) = Q_{j\,k}(x) \in K[x].$$

Sea S el conjunto de todas las ν tal que algún coeficiente de $\{A_j, Q_{j\,k}\}$ no sea ν entero. Para cualquier $x_1 \in V_{\mathcal{O}_\nu}$, fuera de S, entonces $A_j(x_1)$ es una ν-unidad para algún $j = j_1$ y asi $R_{j_1\,k}(x_1) = Q_{j_1\,k}(x_1)/A_{j_1}(x_1)$ está en $\mathcal{O}_\nu$ para toda k.■

Corolario 1.3 *Si $F : V \to W$ es un isomorfismo, entonces*

$$F([V, \varphi_i, V_i]_{\mathcal{O}_\nu}) = [W, \psi, W_j]_{\mathcal{O}_\nu}$$

para casi toda ν.

Con esto notamos que la definición de $[V, \varphi_i, V_i]_{\mathcal{O}_\nu}$ es casi intrínseca y que si aplicamos el resultado con la identidad en V obtenemos que la definición de $V_{\mathbb{A}_K}$ es independiente de la la cubierta afín (coordenadas). Además de lo anterior, obtenemos que para cada morfismo $F : V \to W$ determina una función continua $F_{\mathbb{A}_K} : V_{\mathbb{A}_K} \to W_{\mathbb{A}_K}$.

De lo anterior es posible definir un functor

$$\mathcal{A} : \mathcal{V}ar_K \to \mathbb{A}_K\, Spc \tag{1.8}$$

Entre la categoría de variedades algebraicas sobre K y la categoría de espacios adélicos. Es claro que si $F : V \to W$ y $G : W \to X$, entonces $\mathcal{A}(F) := F_{\mathbb{A}_K}$ es functorial, es decir $(G \circ F)_{\mathbb{A}_K} = G_{\mathbb{A}_K} \circ F_{\mathbb{A}_K}$. Si V es una subvariedad de W, entonces el mapeo inclusión $\iota : V \to W$, entonces se puede demostrar que al aplicarle el fuctor $\mathcal{A}(\iota) = \iota_{\mathbb{A}_K}$ es un encaje cerrado. Además sucede que $(V \times W)_{\mathbb{A}_K} \cong V_{\mathbb{A}_K} \times W_{\mathbb{A}_K}$, por lo tanto el functor $\mathcal{A}$ tiene varias propiedades interesante para su estudio, por ejemplo existe la siguiente condición que asegura la suprayectividad de $F_{\mathbb{A}_K} : V_{\mathbb{A}_K} \to W_{\mathbb{A}_K}$

Teorema 1.4 *Sea $F : V \to W$ un morfismo de variedades algebraicas definidas sobre K. Si sucede que para cada $p \in W$ existe $\phi_p : W \to V$ morfismo racional sobre K tal que $F \circ \phi_p = id_W$ (i.e ϕ_p es una sección local de F), entonces $F_{\mathbb{A}_K} : V_{\mathbb{A}_K} \to W_{\mathbb{A}_K}$ es suprayectiva.*

Demostración. Para cada $p \in W$ sea ϕ_p la función mencionada en la declaración del teorema y $D(\phi_p)$ el abierto de W donde esta definida. Así tenemos una cubierta abierta de W dada por $\{D(\phi_p)\}_{p \in W}$, los cuales por la racionalidad de ϕ_p son isomorfos a variedades afines. Así podemos escribir W como una unión finita (Noeterianidad) $W = \bigcup_j \psi_j(W_j)$ con W_j variedad afin tal que en cada $\psi_j(W_j)$ hay una sección global ψ_j. Así definimos $G_j = \phi_j \circ \psi_j : W_j \to V$ el cual es un morfismo que cumple $F \circ G_j = \psi_j$, así por el teorema 1.2 existe un subconjunto finito S de valuaciones tal que

$$G_j(W_{j,\mathcal{O}_\nu}) \subset [V, \varphi_i, V_i]_{\mathcal{O}_\nu} \ \ \forall\, j$$

siempre y cuando ν esté fuera de S. Sea $p = (p_\nu) \in W_{\mathbb{A}_K}$ con $p_\nu \in \psi_{j(\nu)}(W_{j(\nu)})$, por definición de $W_{\mathbb{A}_K}$ exite un conjunto finito $S \subset T$ tal que $p_\nu \in \psi_{j(\nu)}(W_{j(\nu)})$ para ν fuera de T, así definimos $q = q_\nu = \psi_{j(\nu)}(p_\nu)$, así si ν no está en T, entonces

$$q_\nu \in \psi_{j(\nu)}(W_{\nu\, \mathcal{O}_\nu}) \subset [V, \varphi_i, V_i]_{\mathcal{O}_\nu},$$

así q_ν está bien definido y $F(q_\nu) = p_\nu$, es decir $F_{\mathbb{A}_K}(q) = p$ ■

Observación 1 *Este teorema es inmediatamente aplicable al caso de acciones de grupos algebraicos. Sea $X = H/G$ donde G es un grupo algebraico y H es una variedad algebraica (ambas sobre K), entonces el teorema 1.4 implica que en muchos casos al aplicar el functor $\mathcal{A}$ a $\pi : H \to X$, obtendemos una función suprayectiva $\pi_{\mathbb{A}_K} : H_{\mathbb{A}_K} \to H_{\mathbb{A}_K}/G_{\mathbb{A}_K}$.*

Capítulo 2

Restricciones de Weil

Sea L/K una extensión separable de grado d sobre K y sean $\mathbb{A}_K$, $\mathbb{A}_L$ sus respectivos anillos de adeles. Toda valuación ω en L determina una valuación ν en K por medio de restricción, esto lo denotamos por ω/ν. Como la extensión de K es de grado d, hay a lo más d valuaciones ω tal que ω/ν. Además podemos identificar K_ν como la cerradura de K en L_ω, para valuaciones discretas sucede que $\mathcal{O}_\nu = K_\nu \cap \mathcal{O}_\omega$, también es claro que el mapeo $(a_\nu) \mapsto (a_\omega)$ con ω/ν es una inyección $\mathbb{A}_K \hookrightarrow \mathbb{A}_L$.

Supongmos ahora que L/K es normal con grupo de Galois $Gal(L/K) = \Gamma$, entonces la acción de Γ en L es continua en la ν-topología, como L es denso en

$$\prod_{i=1}^{m} L_{\omega_i} \text{ donde } \omega_i/\nu,$$

podemos extender continuamente la acción a este producto y por lo tanto podemos extender la acción continuamente a todo $\mathbb{A}_L$. Notamos que $\mathbb{A}_K$ son los puntos invariantes de $\mathbb{A}_L$ bajo la acción de Γ. Además si una variedad algebraica V está definida sobre K, también está definida sobre L y por lo tanto $V_{\mathbb{A}_K}$ se encaja canonicamente en $V_{\mathbb{A}_L}$. Si L es normal sobre K, el grupo de Galois Γ actúa de forma natural en $V_{\mathbb{A}_L}$ y claramente $V_{\mathbb{A}_K}$ es el conjunto de puntos invarintes bajo la acción de Γ.

Ahora nuestro propósito para definir la reducción de escalares, es encontrar una variedad W sobre K tal que para dada una variedad V sobre L tengamos que $V_{\mathbb{A}_L} \cong W_{\mathbb{A}_K}$ de forma canónica, para hacer esto usaremos una contrucción de tipo algebraico-geométrica.

Sean V y W variedades definidas sobre L y K respectivamente (L/K no necesariamente normal). Sea $\varphi : W \to V$ un mapeo sobre L y sea $\Sigma := \{\sigma_1, \cdots, \sigma_d\}$, el conjunto de encajes de L en $\overline{K}$ (cerradura algebraica), con esto podemos definir $\varphi^{\sigma_i} : W \to V^{\sigma_i}$ para toda $i \in \{1, \cdots, d\}$, donde V^{σ_i} es la imagen de V bajo σ_i, vista como subconjunto de V_L, así podemos definir

$$(\varphi^{\sigma_1}, \cdots, \varphi^{\sigma_d}) : W \to V^{\sigma_1} \times \cdots \times V^{\sigma_d} \quad w \mapsto (\varphi^{\sigma_i}(w))_{i \in \{1, \cdots, d\}}.$$

Si este mapeo es un encaje llamamos al par (W, φ) como *la variedad obtenida de V por restricción de L a K* y lo denoratemos por $(W, \varphi) = Res_{L/K}(V)$ o $W = Res_{L/K}(V)$.

Demostramos que este espacio es **único** debido a que la restricción tiene la siguiente propiedad universal:

Sea X una variedad algebraica sobre K y sea $f : X \to V$ un morfimos definido sobre L, entonces existe un único $\psi : X \to Res_{L/K}(V)$ definido sobre K tal que $f = \varphi \circ \phi$, de hecho

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\psi"] & V \\ Res_{L/K}(V) \arrow[ur, "\varphi"] & \end{tikzcd} \qquad \phi = (\varphi^{\sigma_1}, \cdots, \varphi^{\sigma_{d-1}})^{-1} \circ (f^{\sigma_1}, \cdots, f^{\sigma_d}), \tag{2.1}$$

por lo tanto ϕ esta definida sobre K y es única. La **existencia** se sigue del siguiente teorema

Teorema 2.1 *Sean V y $Res_{L/K}(V) = (W, \varphi)$ como antes, sea también V' definido sobre L. Si V' es una subvaridad algebraica o un abierto de Zariski de V, entonces existe $Res_{L/K}(V') = (W', \varphi')$. Además si V_1 y V_2 tienen restricciones (W_1, φ_1) y (W_2, φ) respectivamente, entonces*

$$(W_1 \times W_2, \, \varphi_1 \times \varphi_2) = Res_{L/K}(V_1 \times V_2)$$

Si V tiene estructuras adicionales como la de grupo, entonces el morfimo φ y $Res(V)_{L/K}$ preservan dicha estructura. Por ejemplo sea $V = G_m := L^*$ el grupo multiplicativo de unidades de L uno dimensional, entonces $W = Res(V)_{L/K}$ es un grupo de dimensión $d = [L : K]$ definido sobre K. La multiplicación esta definida sobre K como la multiplicación en $L*$ vista como una tranformación K-lineal.

Capítulo 3

Superficies modulares de Hilbert y espacios adélicos

Sea K, una extensión finita de $\mathbb{Q}$, denotamos por S_f al conjunto de lugares finitos de K, respectivamente S_∞ será el cunjunto de lugares infinitos de K, denotamos $\mathbb{A}_K$ al anillo de adeles de K y por $\mathbb{A}_K^*$ al grupo de ideles de K. El grupo de ideles contiene al grupo de unidades K^*, definimos el *idele class group* de K como

$$\mathcal{C}l(\mathbb{A}_K) := \mathbb{A}_K^*/K^*. \tag{3.1}$$

Resulta que podemos recuperar el *class group* clásico de elemento absolutamente positivos

$$\mathcal{C}l(\mathbb{A}_K)\Big(\prod_{p\in S_f}\mathcal{O}_p\Big)\Big(\prod_{\nu\in S_{\text{inf}}}\mathbb{R}^+\Big) \cong \mathcal{C}l^+(K).$$

Sea $G = Res_{K/\mathbb{Q}}(GL(2,K))$ la restricción sobre $\mathbb{Q}$ del grupo matrices invertibles 2×2 con coeficientes en K, así definimos

$$G(\mathbb{R}) = \prod_{\nu\in S_\infty} GL(2,\mathbb{R}),$$

además definimos el morfismo de grupos $h_0 : \mathbb{C}^* \to G(\mathbb{R})$ definido por

$$x+iy \mapsto \left(\begin{pmatrix} x & -y \\ y & x\end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x\end{pmatrix}\right). \tag{3.2}$$

El centralizador de h_0 en $G(\mathbb{R})$ es

$$K_\infty = \left\{\left(\begin{pmatrix} x_1 & -y_1 \\ y_1 & x_1\end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} x_n & -y_n \\ y_n & x_n\end{pmatrix}\right) \middle| \{x_i, y_i\} \subset \mathbb{R}\,\forall i \in \{1,\cdots,n\}\right\}.$$

Notamos que K_∞ es un subgrupo conexo de $G(\mathbb{R})$ isomorfo al tangente del toro n-dimensional. Más aún el cociente $G(\mathbb{R})/K_\infty$ es una variedad real de dimensión

$2n$ con 2^n componentes conexas permutadas por

$$\pi_0(G(\mathbb{R})) = G(\mathbb{R})/G(\mathbb{R})^0 \cong (\mathbb{Z}/2\,\mathbb{Z})^n.$$

Podemos darle a $G(\mathbb{R})/K_\infty$ una estructura de variedad compleja por medio de la siguiente identificación

$$G(\mathbb{R})/K_\infty \to (\mathbb{C} \setminus \mathbb{R})^n \quad g \mapsto (g_1(i), \cdots, g_n(i)).$$

La acción de $\epsilon_j \in \pi_0(G(\mathbb{R}))$ es la conjugación compleja en la coordenada j-ésima, donde

$$\epsilon_j = \left(Id_2, \cdots, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \cdots, Id_2 \right).$$

Denotamos por $\mathbb{A}_K^{fin}$ al subanillo de $\mathbb{A}_K$ de adeles finitos, es decir que sólo se consideran las valuaciones no arquimideanas en el producto reducido. Así tenemos que

$$G(\mathbb{A}_K)/K_\infty = (G(\mathbb{R})/K_\infty) \times G(\mathbb{A}_K^{fin}).$$

Este cociente también tiene una estuctura compleja debido a la acción izquierda de $G_{fin} = G(\mathbb{A}_K^{fin})$ en $G(\mathbb{A})/K_\infty$.

El grupo $G(\mathbb{A}_K)$ es un grupo topológico con la topología que determina que el subbgrupo

$$\prod_{\nu \in S_f} GL(2, \mathcal{O}_\nu) \times G(\mathbb{R})^0,$$

sea abierto. Ahora consideramos un subgrupo compacto C_{fin} de G_{fin} y considermos el cociente

$$X_{C_{fin}} := G(\mathbb{Q}) \backslash G(\mathbb{A}_K)/K_\infty C_{fin}.$$

Para anallizar este cociente utilizamos el mapeo $G(\mathbb{A}_K) \to \mathbb{A}_K^*$ definido por el determinante en cada entrada, esto induce el mapeo

$$G(\mathbb{Q}) \backslash G(\mathbb{A}_K)/K_\infty C_{fin} \to \mathbb{A}_K^*/K^*\, det(G(\mathbb{R})^0 C_{fin}).$$

Donde escogemos $\{g_1, \cdots, g_m\} \subset G_{fin}$ tal que $\{det(g_i)\}$ forma un conjunto completo de representantes de $\mathbb{A}_K^*/K^*\, det(G(\mathbb{R})^0 C_{fin})$, entonces

Teorema 3.1

$$G(\mathbb{A}_K) = \bigcup_{j=1}^{m} G(\mathbb{Q}) g_j G(\mathbb{R})^0 K_{fin} \tag{3.3}$$

Teorema 3.2 *Podemos identificar:*

$$G(\mathbb{Q}) \backslash G(\mathbb{A}_K)/K_\infty C_{fin} = \bigcup_{j=1}^{m} \Gamma_j \backslash \mathbb{H}^n \tag{3.4}$$

donde $\Gamma_j = g_j \big(G(\mathbb{R})^0 K_{fin} \big) g_j^{-1} \cap G(\mathbb{Q})$

Demostración. Como sabemoss por el teorema anterior

$$\begin{aligned} X_{C_{fin}} &:= G(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A}_K)/K_\infty C_{fin} && (3.5)\\ &= G(\mathbb{Q}) \Big\backslash \bigcup_{j=1}^{m} G(\mathbb{Q}) g_j G(\mathbb{R})^0 C_{fin}/K_\infty C_{fin} && (3.6)\\ &= \bigcup_{j=1}^{m} g_j \big(G(\mathbb{R})^0 C_{fin}\big) g_j^{-1} \cap G(\mathbb{Q})\backslash (G(\mathbb{R})^0/K_\infty) && (3.7)\\ &= \bigcup_{j=1}^{m} \Gamma_j \backslash \mathbb{H}^n. && (3.8) \end{aligned}$$

■

Si hacemos esto en el caso de $C_0 = \prod_{\nu \in S_{fin}} GL(2, \mathcal{O}_\nu)$

Corolario 3.3 *$G(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A}_K)/K_\infty C_0$ se puede identificar con*

$$\bigcup_{\mathfrak{a}} \Gamma(\mathfrak{a} \oplus \mathcal{O}_K)\backslash \mathbb{H}^n,$$

donde $\mathfrak{a}$ corre sobre todos los representantes en $\mathcal{C}l^+(K)$.

Demostración. Sabemos que los componentes de $G(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A}_K)/K_\infty C_0$ están en correspondencia uno a uno con $\mathbb{A}_K^*/K^* det(G(\mathbb{R})^0 C_o) \cong \mathcal{C}l^+(K)$ (igual que el caso real) y el resultado se sigue del teorema anterior. ■

Esto explica el por qué consideramos todas las superficies $\Gamma(\mathfrak{a} \oplus \mathcal{O})/\mathbb{H}^2$, en gran parte consideramos propiedades geométricas de $G(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A}_K)/K_\infty C_0$, sin embargo al considerar las propiedades aritméticas de este espacio es imperativo hablar de adeles.

Sean C_1 y C_2 subgrupos abiertos y compactos de $G(\mathbb{A}_K^{fin})$ y sea $g \in G(\mathbb{A}_K^{fin})$ tal que $g^{-1}C_1 g \subset C_2$, entonces existe un morfismo **natural**

$$I_{C_1 C_2} : X_{C_1} \to X_{C_2}, \tag{3.9}$$

dado por la multiplicación a la derecha por g que cumple

i) $I_{C_3 C_2}(h) I_{C_2 C_2}(g) = I_{C_3 C_1}(gh)$ para toda g, h

ii) $I_{C_1 C_1} = Id_{X_{C_1}}$

iii) Si $C_1 \subset C_2$ es un subgrupo normal entonces C_2/C_1 actúa en X_{C_1} y $I_{C_1 C_2}(1)$ induce un isomorfismo

$$X_{C_1}/(C_2/C_1) \cong X_{C_2}.$$

Bibliografía

[1] Stein, W., *Algebraic Number Theory a Computaional Approach*

[2] Weil, A., *Adeles and Algebraic Groups,1982 Birkhauser*

[3] Van Der Geer, G.,*Hilbert Modular Surfaces, Springer-Verlag*