INTERVALOS DE CONFIANZA

Una práctica muy común en estadística es estimar la media de una población a partir de una muestra. Por ejemplo, lo haríamos si quisiéramos -a partir de una muestra de estudiantes de un curso- estimar la estatura media de todos los estudiantes de la población relevante.

La idea es tomar una muestra representativa y estimar la media de la población a partir de dicha muestra. Supongamos que la altura media de 16 personas en dicho curso es de 1.71 metros. Esta media de la muestra no será exactamente la misma que la altura media de todo el curso, pero es un buen estimado. Un estimado de la media se denomina una **estimación puntual**.

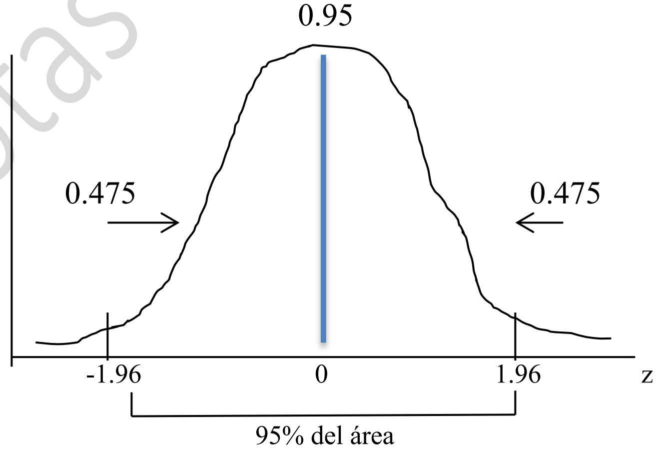
La pregunta es saber si una media de una muestra es el mejor punto estimado para la media de la población si consideramos que con varias muestras de la misma población tendremos diferentes respuestas para cada ocasión. Sin embargo, esta variación, si las muestras se seleccionaron bien, es sistemática. Por lo tanto, el punto estimado es el mejor número estimado. Adicionalmente, podríamos tener un estimado del rango probable en el cual podríamos estar razonablemente seguros de que ahí se ubica la media de la población. Esto se denomina una **estimación por intervalos** y es mejor que una estimación puntual. Para hacer esto es necesario calcular un **intervalo de confianza** para la media poblacional.

Podemos hacer un estimado para cualquier nivel de confianza, sin embargo, en general se considera que los dos límites es los que estamos 95% seguros de la ubicación de la media (poblacional) es el **intervalo de confianza de 95%**[1]**.** En otras palabras, calcularemos un rango en el cual esperamos que el valor verdadero (de la media poblacional) sea correcto 19 de 20 ocasiones.

Volviendo al ejemplo de la altura, supongamos que la altura media de los 16 estudiantes es de 1.71 metros con una desviación estándar de 0.12 metros. Queremos calcular una **estimación por intervalos** para la media de todos los estudiantes del curso.

Ahora bien, si pensamos en la distribución normal y si observamos el 95% en la mitad de la distribución, la podemos partir en dos partes, con un 47.5% de cada lado de la media como se aprecia en la gráfica 1.

Gráfica 1



Notas de clase. No circular

[1] Nótese que, no obstante, es posible usar otros intervalos de confianza que no sean del 95%.

Si observamos adentro de la tabla normal para el área de 0.475, observaremos que corresponde con un puntaje z de 1.96. De hecho 1.96 es **el número** que hay que recordar para calcular el intervalo de confianza de 95%. Para calcular la posible variación alrededor de la media de la muestra multiplicamos el error estándar por 1.96:

$$1.96 \times \frac{DE}{\sqrt{n}} = 1.96 \times \frac{0.12}{\sqrt{16}} = 0.0588$$

Así que tenemos un rango de 0.0588 en cualquier lado de la media muestral en el que estamos 95% confiados o seguros de que se ubicará la media poblacional.

Para calcular los dos límites entre los que se ubicaría la media poblacional, necesitamos sumar y restar este valor de nuestra media muestral:

$$1.71 + 0.0588 = 1.7688$$
$$1.71 - 0.0588 = 1.6512$$

De tal suerte que podemos estar 95% seguros de que la media poblacional se ubicará entre 1.6512 y 1.7688. Esto normalmente se presenta como se ve a continuación, con el límite más bajo primero:

$$95\%\ IC = (1.6512,\ 1.7688)$$

Entonces, la fórmula para calcular un intervalo de confianza de 95% es:

$$95\%\ IC = \text{media muestral} \pm \left[1.96 \times \frac{DE}{\sqrt{n}} \right]$$

Esto quiere decir que un intervalo de confianza toma en consideración tanto la variabilidad de la muestra como el tamaño de la muestra. Una muestra más grande o menos variable producirá un mejor estimado de la media poblacional y el intervalo de confianza será más angosto que con una muestra más pequeña o variable.

Cabe aclarar que para usar esta fórmula necesitamos recordar el *Teorema del Límite Central*, ya sea que la población esté distribuida de forma normal o que el tamaño de la muestra sea por lo menos de 30 ($n = \geq 30$). Adicionalmente, el error estándar debería usar la desviación estándar de la población más que la desviación estándar de la muestra, pero para los intervalos de confianza podemos usar la desviación estándar de la muestra, siempre y cuando nuestra muestra no sea demasiado pequeña.

Notas de clase. No circular

EJEMPLO 1

Vamos a retomar el ejemplo de la frecuencia con que las mujeres tienen relaciones sexuales (19-20). Este cuadro proporciona la frecuencia media de relaciones sexuales en las 4 semanas previas a la entrevista junto con la desviación estándar y el tamaño de la muestra para cada uno de los años considerados. La pregunta es saber si hubo un incremento en la frecuencia de relaciones sexuales a lo largo del tiempo.

Frecuencia media y desviación estándar de relaciones sexuales para mujeres casadas de entre 19-20 años cuatro semanas antes de la entrevista. Estados Unidos, 1965-75

	Año de la Entrevista		
	1965	**1970**	**1975**
Media	9.6	9.8	12.1
Desviación Estándar	1.1	1.3	1.2
n	190	249	219

Ahora que ya podemos calcular los intervalos de confianza para las tres medias, podemos contestar la pregunta anterior adecuadamente. Por ejemplo, el intervalo de confianza de 95% para el año1965 sería:

$$1965 = \qquad 95\%\ IC = 9.6 \pm \left[\frac{1.96 \text{ x } 1.1}{\sqrt{190}}\right] = 9.6 \pm 0.14 = (9.46, 9.74)$$

En otras palabras, podemos estar 95% seguros de que el valor verdadero para la frecuencia de relaciones sexuales en la población de mujeres casadas en edad de 19-20 se ubica entre 9.46 y 9.74 veces en un periodo de cuatro semanas.

Ahora, calcule los intervalos de confianza de 95% para 1970 y 1975.

1970: 95% IC = ___________
1975: 95% IC = ___________

¿Qué observa acerca de los intervalos de confianza alrededor de las tres medias? Los intervalos de confianza para 1965 y 1970 se empalman. Sin embargo, los intervalos de confianza para 1970 y 1975 no. Sólo podemos concluir que hay una diferencia real si los intervalos de confianza no se empalman. Por lo tanto, los datos muestran que no hay una diferencia real en la frecuencia de las relaciones sexuales entre mujeres casadas de edades entre 19-20 entre los años 1965 y 1970 y, por otro lado, hay evidencia de un incremento en la frecuencia entre 1970 y 1975.

Ahora bien, como se mencionó antes, podemos usar otros intervalos de confianza que no sean del 95%, aunque éste el es más común. Para mayor precisión, podríamos querer usar el

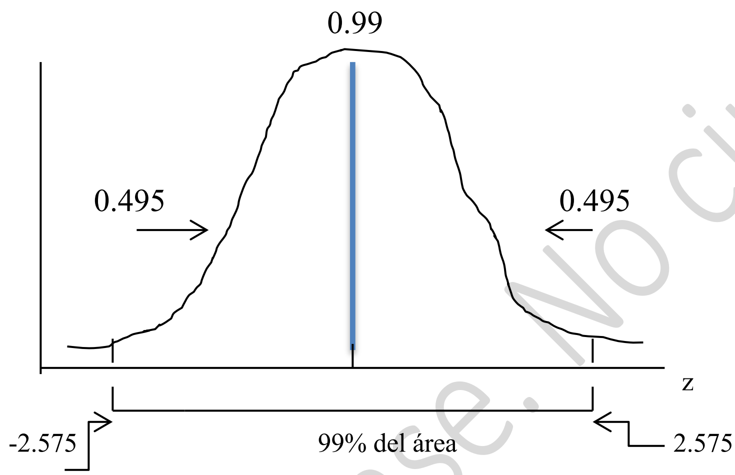
Notas de clase. No circular

intervalo de confianza de 99%. ¿Cuál sería la fórmula correspondiente? (tendríamos que cambiar el valor de 1.96).

$$99\% \text{ IC} = \text{media muestral} \pm \left[2.575 \times \frac{DE}{\sqrt{n}} \right]$$

La mita de 99% es 49.5% como se muestra en la gráfica 2. El valor de 2.575 se encontró buscando 0.495 en una tabla normal y se encontró que se ubica entre 2.57 y 2.58

Gráfica 2



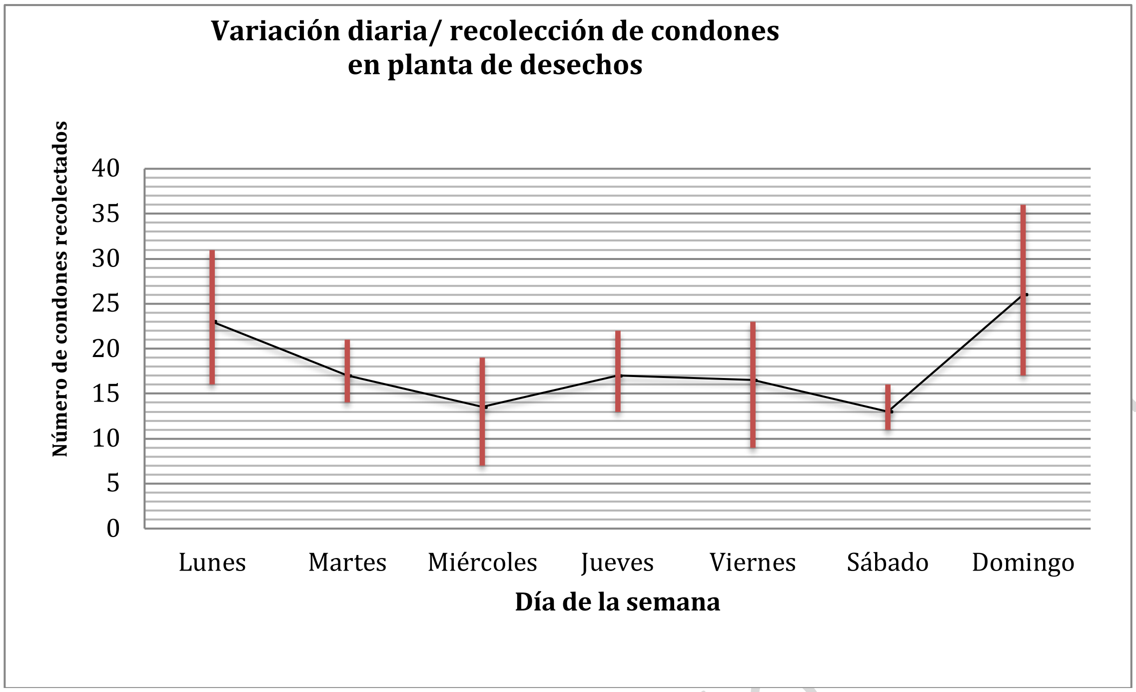
Nótese que el intervalo de confianza se amplia en la medida en que la precisión aumenta. ¿Por qué? Bueno si queremos estar más seguros de que el valor verdadero se ubicará dentro del estimado del intervalo, entonces necesitaremos un intervalo más amplio. Por otro lado, si estamos contentos con estar equivocados la mayoría de las veces [:)] entonces podemos tener un intervalo más pequeño. No hay nada mágico acerca del 95%, solamente indica un rango que ha sido aceptado ampliamente entre los estudiosos.

Los intervalos de confianza se pueden presentar de forma gráfica usando una gráfica de altos y bajos (*hi-low plots*). Estas gráficas son útiles para comparar las medias y los intervalos de confianza para varias poblaciones. Para cada población, el tamaño de la línea vertical representa el rango de 95% (o cualquier otro rango que se haya escogido) de intervalo de confianza y la línea horizontal media indica la media.

EJEMPLO 2

Un investigador quería saber si había variaciones diarias en la actividad sexual en una determinada área, así que en un periodo de 10 semanas llevó un conteo de los condones recolectados en dicha zona por la planta de desechos. Esto es lo que encontró:

Notas de clase. No circular



Al parecer hay una variación diaria en el número de condones recolectados, con una media más alta los domingos y los lunes (los días siguientes a el sábado y domingo por la noche). Los intervalos de confianza al 95% de los lunes a sábado se empalman, así que no podemos sacar una conclusión concreta acerca de las diferencias diarias en la recolección de condones para estos días. Sin embargo, los intervalos de confianza para los sábados y domingos no se empalman, así que podemos decir que hay una diferencia significativa en la recolección de condones entre el sábado y el domingo.

EJEMPLO 3

Una muestra de 40 estudiantes en una universidad se les preguntó cómo calificaban al presidente de su país en una escala del 1 al 20, donde 1 es terrible y 20 es excelente. El puntaje medio de los estudiantes fue de 12.1 con una desviación estándar de 3.5

1. Estime el nivel de aceptación del presidente para todos los estudiantes en la universidad y calcule un intervalo de confianza de 95% para su respuesta.
2. Calcule un intervalo de confianza de 99% para su respuesta. ¿Es más amplio o angosto que el intervalo de confianza de 95%? ¿Por qué?
3. Suponga que obtuvo la misma media y desviación estándar de una muestra de 100 estudiantes. Calcule un nuevo intervalo de confianza de 95% para el ranking del presidente para todos los estudiantes de la universidad. ¿Es más amplio o angosto que su respuesta para la pregunta (1)? ¿Por qué?

Notas de clase. No