LA PRUEBA KRUSKAL-WALLIS

Es una prueba que se utiliza para grupos independientes con *k* número de muestras. Se usa como sustituto para la ANOVA de un factor. La prueba no supone normalidad en la población ni homogeneidad en la varianza como lo hace la ANOVA y sólo requiere la escala ordinal de la variable dependiente. Se utiliza cuando las violaciones de la normalidad de la población o la homogeneidad de la varianza son extremas o cuando la escala de intervalo o de razón es requerida y no se cumple con ella por el tipo de datos obtenidos.

Ejemplo 1
Una psicóloga de la salud contratada por una gran compañía está interesada en evaluar dos programas de reducción de peso que considera aplicar con los empleados de su compañía. Lleva a cabo un experimento en el que 18 empleados obesos son asignados al azar a tres condiciones, con seis sujetos cada una.

- Los sujetos en la condición 1 se someten a una dieta que reduce su ingesta calórica diaria a 500 calorías.
- Los sujetos en la condición 2 reciben la misma dieta restringida, pero además se les pide caminar dos millas diarias.
- La condición 3 es la condición control, en la cual se les pide a los sujetos que mantengan su consumo alimenticio normal y sus hábitos de ejercicio (o no) acostumbrados.

Los datos recolectados en el cuadro siguiente corresponden a la cantidad de libras perdidas por cada sujeto a lo largo de un periodo de seis meses. Un número positivo indica pérdida de peso y un número negativo indica aumento de peso. El supuesto es que los datos muestran una violación de la normalidad de la población, por lo tanto, se decide analizarlos con la prueba Kruskal-Wallis en lugar del ANOVA paramétrico.

Cuadro 3. Programas y Perdida de peso

1 Dieta		2 Dieta + ejercicio		3 Control	
Libras perdidas	*Rango*	*Libras perdidas*	*Rango*	*Libras perdidas*	*Rango*
2	5	12	12	8	9
15	14	9	10	3	6
7	8	20	16	-1	4
6	7	17	15	-3	2
10	11	28	17	-2	3
14	13	30	18	-8	1
$n_1 = 6$	$R_1 = 58$	$n_2 = 6$	$R_2 = 88$	$n_3 = 6$	$R_3 = 25$

Preguntas
1. ¿Cuál es la hipótesis alternativa?
2. ¿Cuál es la hipótesis nula?
3. ¿A qué conclusión se llega? (usando el nivel de significación α = 0.05)

Nota de clase. No circular

1) H_1 = Al menos una de las condiciones (la dieta o la caminata) afecta la pérdida de peso de manera distinta a cuando menos alguna de las otras condiciones (no dieta o no caminata).

2) H_0 = Ninguna de las condiciones (la dieta o la caminata) afecta la pérdida de peso de manera distinta a cuando menos algunas de las otras condiciones (no dieta o no caminata).

Las muestras son aleatorias de las mismas (o de idénticas) distribuciones poblacionales. No existe predicción específica en cuanto a μ_1, μ_2 o μ_3

3)
Paso 1. Calcular el estadístico
El estadístico que calculamos para la Kruskal-Wallis es H_{obt}. El procedimiento es muy similar al cálculo de U_{obt} para la U de Mann-Whitney. Todos los puntajes se agrupan y se ordenan por rangos. A continuación, se asigna 1 al puntaje más bajo, 2 al siguiente y así sucesivamente hasta llegar al más alto. Cuando se ha finalizado, los rangos para cada condición o muestra se suman. Estos datos ya se encuentran en el cuadro anterior.

Las sumas de los rangos para cada grupo se representan como R_1, R_2 y R_3 respectivamente. Para los datos del ejemplo tenemos $R_1 = 58$, $R_2 = 88$ y $R_3 = 25$. La prueba evalúa si esas sumas de rangos difieren una de otra tanto que resulte razonable considerar que provienen de muestras que fueron seleccionadas al azar de la misma población. Mientras más grandes sean las diferencias entre las sumas de los rangos de cada muestra, menos probable será que las muestras provengan de la misma población.

La ecuación para calcular H_{obt} es la siguiente:

$$H_{\text{obt}} = \left[\frac{12}{N(N+1)}\right]\left[\sum_{i=1}^{k}\frac{(R_i)^2}{n_i}\right] - 3(N+1)$$

$$= \left[\frac{12}{N(N+1)}\right]\left[\frac{R_1^2}{n_1} + \frac{R_2^2}{n_2} + \frac{R_3^2}{n_3} + \cdots + \frac{R_k^2}{n_k}\right] - 3(N+1)$$

donde…

$$\sum_{i=1}^{k}\frac{(R_i)^2}{n_i}$$

nos indica que hay que elevar al cuadrado la suma de los rangos para cada muestra, dividir cada valor cuadrado entre el número de puntajes en la muestra y sumar las muestras.

No circular ... clase. No circular

Notación:

k = número de muestras o grupos
n_i = número de puntajes en la muestra i
n_1 = número de puntajes en la muestra 1
n_2 = número de puntajes en la muestra 2
n_3 = número de puntajes en la muestra 3
n_k = número de puntajes en la muestra k
N = número de puntajes en todas las muestras combinadas
R_i = suma de los rangos para la muestra i
R_1 = suma de los rangos para la muestra 1
R_2 = suma de los rangos para la muestra 2
R_3 = suma de los rangos para la muestra 3
R_k = suma de los rangos para la muestra k

Al substituir los valores correspondientes del cuadro tenemos:

$$\begin{aligned} H_{\text{obt}} &= \left[\frac{12}{N(N+1)}\right]\left[\frac{(R_1)^2}{n_1}+\frac{(R_2)^2}{n_2}+\frac{(R_3)^2}{n_3}\right]-3(N+1) \\ &= \left[\frac{12}{18(18+1)}\right]\left[\frac{(58)^2}{6}+\frac{(88)^2}{6}+\frac{(25)^2}{6}\right]-3(18+1) \\ &= 68.61-57 \\ &= 11.61 \end{aligned}$$

Paso 2. Evaluar el estadístico
Puede demostrarse que, si el número de puntajes en cada muestra es 5 o más, la distribución de muestreo del estadístico H es aproximadamente el mismo que Ji cuadrado con gl = k – 1.

En este ejemplo tenemos que gl = k – 1, esto es 3 – 1 = 2. Si vemos la tabla de la Ji Cuadrada con un nivel de significación α = 0-0.5 y gl = 2 tenemos que

$$H_{crit} = 5.991$$

Como la prueba Kruskal-Wallis es una prueba *no direccional* (al igual que el ANOVA correspondiente) la regla para decidir es:

Si $H_{obt} \geq H_{crít}$ podemos rechazar la H_0

Si $H_{obt} < H_{crít}$ no podemos rechazar la H_0

Puesto que H_{obt} > 5.991 podemos rechazar la H_0. Tal parece que las condiciones no son iguales respecto de la pérdida de peso.

SUPUESTOS SUBYACENTES A LA PRUEBA KRUSKAL-WALLIS

Para utilizar la prueba los datos deben ser cuando menos de escala ordinal. Además, debe hacer cuando menos cinco puntajes en cada muestra para utilizar las probabilidades dadas en la tabla de la Ji Cuadrada.

Ejemplo 2

Un investigador estudia la hipótesis de que el orden de nacimiento afecta la asertividad. Sus sujetos son 20 adultos jóvenes de entre 20 y 25 años. Hay 7 primogénitos, 6 segundos hijos y 7 terceros hijos. Cada sujeto recibe una prueba de asertividad con los siguientes resultados. Los puntajes altos indican mayor asertividad. Suponga que los datos se alejan tanto de la distribución normal que no puede usarse la prueba Anova, pero los datos son cuando menos de escala ordinal. Utilice $\alpha = 0.01$ para evaluar los datos. ¿Cuál es su conclusión?

Condición 1 *Primogénito*	*Condición 2* *Segundo hijo*	*Condición 3* *Tercer hijo*
18	18	7
8	12	19
4	3	2
21	24	30
28	22	18
32	1	5
10		14

Notas de clase. No circular