a

1. Introducción

Presento a continuación el temario y avances de las investigaciones realizadas durante los primeros cinco semestres de mi precandidatura a estudiante doctoral como parte del proceso de examen de candidatura a doctorante. Durante el periodo indicado, tanto mi director de tesis (Dr. Santiago Alberto Verjovsky Solá) como yo nos dedicamos a estudiar foliaciones holomorfas $\mathfrak{F}$ cuyas hojas cumplan con ciertas propiedades geométricas que permiten garantizar cierta regularidad en la estructura del espacio de hojas de la foliación. Nos referimos a regularidad en el sentido de que normalmente el espacio de hojas es topológicamente complejo (no Hausdorff), por lo que es necesario restringir el tipo de dinámicas en las hojas de la foliación para garantizar cierta regularidad topológica en el espacio de hojas. Un ejemplo de estas propiedades es el caso de foliaciones cuyas hojas tengan volúmenes acotados en variedades de Kähler (M, h). La base histórica de estudiar foliaciones con volumen acotado proviene de trabajos previos hechos por matemáticos como Epstein, Edwards, Millet, Reeb, Sullivan, Haeflinger, J.C. Alexander y el mismo Dr.Verjovsky, entre otros, véase [15], [16], [12], [14], [13]. Sin embargo, la investigación que hemos propuesto hasta ahora se encuentra apoyada por el trabajo previo de J.C. Alexander y el Dr.Verjovsky [13] el cual a su vez se basa en trabajos de Erret Bishop [5] sobre extensiones y límites de Hausdorff de sucesiones de variedades analíticas y sigue el espíritu de la presentación de los resultados de Bishop que se presentan en el libro "Volumes, Limits and Extensions of Analytic Varieties" de Gabriel Stolzenberg [24].

SUGIERO CAMBIAR:
el Dr. Sm Alberto Verjovsky (mi director de tesis),

Más precisamente, hemos estado investigando maneras de extender el rango de las posibles aplicaciones de estos resultados a distintas áreas del análisis complejo y la geometría compleja, con énfasis en la teoría de foliaciones holomorfas. En el trabajo ya realizado hemos encontrado conexiones entre teoremas conocidos del análisis complejo y la geometría compleja e incluso hemos escrito un pequeño artículo de divulgación con estos hallazgos, el cual por el momento se encuentra en una etapa de correcciones y posibles expansiones. Uno de los primeros hallazgos de estas conexiones es, por ejemplo, una pueba novedosa del teorema de Chow [9]

2. Resultados de Bishop

2.1. Variedades analíticas y algebraicas

Teorema 2.1 (Chow) *Todo subespacio cerrado analítico del espacio proyectivo complejo $\mathbb{CP}^n$ es algebraico.*

Demostado a partir de los resultados de Bishop sobre variedades analíticas de dimensión pura k. Aquí se define como *espacio analítico* o *variedad analítica* a un espacio topológico Hausdorff X paracompacto con una estructura anillada $\mathcal{H}_X$, es decir, una gavilla de anillos en X que es localmente isomorfa a un subconjunto analítico de $\mathbb{C}^n$. Más precisamente, un conjunto es analítico si para cada $x \in X$ existe una vecindad abierta V y un homeomorfismo $\varphi_V : V \to Z$, donde $U \subset \mathbb{C}^n$ es un abierto y $Z = Z(f_1, \ldots, f_k)(U)$ representa al subconjunto analítico de los ceros de las funciones holomorfas $f_i : U \to \mathbb{C}$ y el pullback $\varphi^* : \mathcal{H}(U)/\mathcal{I}(Z) \to \mathcal{H}_X(V)$ es un isomorfismo de anillos entre $\mathcal{H}_X(V)$ y el anillo cociente de

$$\mathcal{H}(U) = \{f : U \to \mathbb{C} \mid f \text{ es holomorfa}\} \text{ con } \mathcal{I}(Z) = \{f \in \mathcal{H}(U) \mid f|_Z = 0\}.$$

Así, un subespacio analítico Y de X es un espacio anillado $(Y, \mathcal{H}_Y)$ con un encaje cerrado $\iota : Y \to X$ tal que localmente el anillo $\mathcal{H}_Y$ es isomorfo al anillo cociente de $\mathcal{H}$ con el ideal de funciones nulas en la imagen de Y, donde el isomorfismo se da por medio del pullback ι^*. Similarmente, la definición de conjunto algebraico se obtiene reemplazando el anillo de funciones analíticas $\mathcal{H}(U)$ con el anillo de polinomios en $\mathbb{C}^n$ denotado por $\mathbb{C}[z_1, \ldots, z_n]$.

2.2. El crecimiento del volumen como medida para determinar si un conjunto es algebraico

Siguiendo la presentacion del libro de Stolzenberg (véase [24]) el resultado que liga los resultados de Bishop con el teorema de Chow es un resultado que estipula lo siguiente:

Teorema 2.2 (Bishop) *Sea $X \subset \mathbb{C}^n$ una subvariedad analítica de dimensión compleja pura k, si para toda $R \in \mathbb{R}^+$*

.Si

$$Vol_{2k}(X \cap B_R(0)) \leq CR^{2k},$$

donde $B_R(0)$ denota a la bola centrada en el origen de radio R, $C \in \mathbb{R}^+$ es una constante positiva y Vol_{2k} es el volumen de dimensión $2k$. Entonces X es algebraica. ⇒ ENTONCES

La demostración que dimos en nuestro artículo del teorena de Chow es de un carácter muy distinto a la demostración famosa de Serre (véase [21]) y nos habla de una conexión interesante entre análisis y geometría algebraica.

2.3. El teorema secuencial de Bishop, la métrica de Haussdorff y una demostración del teorema de Montel

Las conexiones entre el análisis y la geometría compleja nos han guiado a explorar más sobre las posibles conexiones entre estas dos ramas, además de otros resultados con el análisis complejo. Un ejemplo es el siguiente resultado clásico que demostramos a partir de los resultados de Bishop.

Teorema 2.3 (Montel) *Sea $B \subset \mathbb{C}^n$ la bola unitaria, si $\mathcal{H}(\overline{B})$ es el álgebra de Banach de funciones holomorfas que son continuas en la frontera de B, entonces toda familia de funciones localmente acotadas $F \subset \mathcal{H}(\overline{B})$ es una familia normal.*

Como recordatorio hay que mencionar que una familia de funciones F es *normal* si y sólo si su cerradura es secuencialmente compacta. Si vemos este teorema desde la perspectiva de los teoremas de Bishop, entonces podemos considerar que el siguiente teorema es una generalización en un contexto más general (véase [24, p. 30]).

CUIDADO CON LA REDACCIÓN.

Teorema 2.4 (Bishop) *Sea $\{V_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de subvariedades analíticas de dimensión compleja pura k de una región $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ con volumen uniformemente acotado por una constante $C \in \mathbb{R}^+$. Si $V_n \to V$ converge a un cerrado $V \subset \mathbb{C}^n$ en el sentido de Hausdorff, entonces V es una variedad analítica.*

SI LA SUCESIÓN V_n CONVERGE A UN CERRADO $V \subset \mathbb{C}^n$, $V_n \to V$, EN EL SENTIDO DE HAUSDORFF...

Esto debido a que Dr. Verjovsky y yo demostramos el resultado de Montel por medio del teorema 2.4 pensando a las gráficas de las funciones como variedades analíticas

$$\Gamma_f = \{(z, w) \in B \times \mathbb{C} \,|\, w = f(z)\} = Z(w - f(z)),$$

donde → B ES UNA BOLA EN $\mathbb{C}^n$, Y para una función holomorfa $g : \Omega \to \mathbb{C}$ denotamos a su conjunto nulo como $Z(g) = \{z \in \Omega \,|\, g(z) = 0\}$. Ahora aquí pensamos a Γ_f como variedades analíticas de dimensión pura n en un abierto de $\mathbb{C}^{n+1}$, así demostramos que para toda sucesión $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset F$ de funciones en una familia localmente acotada, tiene una subsucesión cuyas gráficas convergen en el sentido de la métrica de Hausdorff. Además, demostramos que su conjunto límite es a su vez la gráfica de una función holomorfa en B.

REDACCIONA B Y Ω.

LA CONVER...

Convergencia de una sucesión de conjuntos $S_n \to S$ *en el sentido de Hausdorff* para conjuntos cerrados de un espacio métrico (X, d) sucede cuando $S_n \cap K \to S \cap K$ en la métrica de Hausdorff d_H para todo $K \subset X$ compacto, donde ésta se define como

$$d_H(K_1, K_2) := \max_{x\in K_1} \{d(x, K_2)\} + \max_{y\in K_2} \{d(y, K_1)\}.$$

2.4. Similitudes entre teoremas clásicos de análisis complejo y los resultados de Bishop

Se puede apreciar desde la perspectiva que he mostrado hasta ahora que los resultados de Bishop se pueden pensar como generalizaciones de resutados clásicos del análisis complejo, pero en el contexto de la teoría de variedades analíticas.

¡BIEN!

Más aún, las variedades analíticas en sí se pueden pensar claramente como una generalización de funciones holomorfas, ya que cada función holomorfa $f : \Omega \subset \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ tiene asociada como variedad analítica a su divisor cero $[Z] = Z(g)$ o como ya se mencionó previmente, a su gráfica $\Gamma_f \subset \Omega \times \mathbb{C}$, la primera es una subvariedad analítica de dimensión $n - 1$ y la segunda es una subvariedad analítica de dimensión pura n. Aunado a esto, es ampliamente conocido que en el contexto clásico de la variable compleja, toda función holomorfa en una variedad holomorfa compacta es constante, por ejemplo $\mathbb{CP}^n$ es compacta, y por lo tanto toda función holomorfa global es constante. Sin embargo, como sabemos $\mathbb{CP}^n$ tiene muchas subvariedades analíticas, tantas como subconjuntos

¡MUY BIEN!

SEPARO CLARAMENTE EL NOMBRE DEL TEOREMA Y EL ENUNCIADO
SUGIERO ITÁLICOS

BISHOP

Cuadro 1: Tabla con similitudes entre teoremas clásicos de variable compleja y los teoremas de Bihop.

Análisis Complejo	**Conjuntos analíticos en $\mathbb{C}^n$**
1. Teorema de Liouville.	Teorema de Bishop (Teorema 2.2).
Si $\lvert f(z)\rvert \leq CR^k$ en el conjunto $\{\lvert z\rvert \leq R\}$ para todo $R \in \mathbb{R}^+$con f entera y $k \in \mathbb{Z}^+$, entonces f es un polinomio.	Si $\mathrm{Vol}_{2k}(X \cap B(R,0)) \leq CR^{2k}$ para todo $R \in \mathbb{R}^+$, donde X es una subvariedad analítica en $\mathbb{C}^n$, entonces X es algebraica.
2. Teorema de extensión de Riemann.	Generalización del teorema de Remmert-Stein de Bishop (véase [18] y [24, p. 34]).
Si $f : (\Omega \setminus E) \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es una función holomorfa y E es un subconjunto compacto de capacidad 0, entonces f es extendible a una función holomorfa en la región completa Ω.	Sea $U \subset \mathbb{C}^n$ un abierto acotado de $\mathbb{C}^n$ y sea $B \subset U$ un subconjunto cerrado tal que $X \subset U \setminus B$ es una subvariedad de dimensión pura k tal que $B \subset \overline{X}$. Si B tiene capacidad 0 relativa al álgebra de funciones analíticas en X que son continuas en $\overline{X}$ y si existe una función $f : U \to \mathbb{C}^k$ propia en B tal que $f(B)$ no sea un subconjunto abierto conexo de $\mathbb{C}^k$, entonces $\overline{X} \cap U$ es un subconjunto analítico de U (véase [5, teorema 4]).
3. Teorema de compacidad de Montel.	Teorema de sucesiones de variedades analíticas con volumen uniformemente acotado de Bishop.
Sea $\{\Gamma_i\}$ una sucesión de gráficas de funciones holomorfas uniformemente acotadas, $f_i : \Delta \to \mathbb{C}$ tales que $\Gamma_i \xrightarrow{d_H} \Gamma$ (convergencia de Hausdorff), donde $\Gamma \subset \mathbb{C}^2$ es un subconjunto cerrado y Δ es el disco unitario en $\mathbb{C}$, entonces Γ es la gráfica de una función holomorfa.	Sea $\{V_i\}$ una sucesión de subvariedades analíticas de $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ con volúmenes uniformemente acotados tales que $V_i \xrightarrow{d_H} V \subset \Omega$ en el sentido de Hausdorff, entonces V es una subvariedad analítica de $\mathbb{C}^n$ ([24, p. 30]).

→ ITÁLICAS

→ ITÁLICAS

ITÁLICAS

de funciones polinomiales homogéneas algebraicamente independientes. El cuadro 1 enlista una serie de versiones de teoremas clásicos de análisis complejo y sus correspondientes en el contexto de variedades analíticas.

3. Límites de hojas compactas de foliaciones en Variedades Kähler

3.1. Variedades Kähler, foliaciones y sus volúmenes

Además de la geometría compleja y el análisis complejo, otra aplicación de los teoremas de Bishop y en particular el teorema 2.4, es el siguiente resultado sobre foliaciones holomorfas en variedades de Kähler con hojas compactas y volumen uniformemente acotado.

DATE MÁS ESPACIO PARA DEFINIR CUIDADOSAMENTE UNA VARIEDAD DE KÄHLER. ESTARÁN PRESENTES A LO LARGO DE TODO EL TEXTO. INCLUYE EJEMPLOS ILUSTRATIVOS

Se define una variedad de Kähler como una variedad compleja (M, I), es decir M es una variedad diferenciable real de dimensión $2d$ e I es una estructura compleja $I^2 = -1$ con una estructura adicional métrica dada por $h = g - i\omega$ una métrica hermitiana tal que su (1,1)-forma definida por $\omega = -\Im(\omega)$ sea cerrada, es decir, $d\omega = 0$. Observamos que g es una métrica riemanniana con la misma forma de volumen que la inducida por ω. Además, es importante mencionar que toda subvariedad compleja de una variedad Kähler es Kähler. De la misma forma, las subvariedades compactas complejas de una variedad Kähler minimizan el volumen en su clase de homología. Además de las previas definiciones, hay que mencionar que una foliación holomorfa $\mathfrak{F}$ en una variedad compleja (M, I) es una distribución involutiva de subespacios del haz tangente con dimensión constante. Geométricamente se describe a la foliación como una partición de $M = \bigcup \mathcal{L}_z$, donde cada $\mathcal{L}_z$ es una subvariedad holomorfa de (M, I) de una dimensión dada.

¡REDACCIÓN! No juntes una noción con otra sin las pausas adecuadas

3.2. Estabilidad en Variedades Kähler y la conjetura de Beauville

Así, es clara la descripción del siguiente teorema, el cual demostramos Dr. Verjovsky y yo como parte del artículo previamente mencionado:

Teorema 3.1 (Edwards, Millet y Sullivan) *Sea M una variedad compacta Kähler conexa de dimensión compleja n, es decir $2n$ real, y $\mathfrak{F}$ una foliación holomorfa por hojas compactas de dimensión real $2d$ donde $d < n$, entonces:*

a) El volumen con respecto a la métrica Kähler de las hojas es uniformemente acotado.

b) El espacio cociente $M/\mathfrak{F}$ es un orbifold complejo con singularidades en las hojas de holonomía no trivial.

Aunado a esto, demostramos que la función volumen $\nu : M/\mathfrak{F} \to \mathbb{R}^+$ definida por el volumen

$$\nu(\mathcal{L}_z) := \mathrm{Vol}_{2d}(\mathcal{L}_z)$$

¿QUÉ VAS A ENTENDER POR HOLONOMÍA? SUGIERO DEFINIRLA PUES APARECERÁ REPETIDAS VECES.

es discretamente semicontinua inferiormente, es decir, que para todo $n \in \mathbb{Z}^+$ y $z \in M$ se cumple que existe una vecindad tal que para todo $\epsilon \in \mathbb{R}^+$

$$\nu(y) > n\nu(z) \ \text{ o } \ |\nu(y) - k\nu(z)| < \epsilon \ \text{ para algún } \ k \in \{1, \dots, n\}.$$

Más aún, los brincos en la continuidad corresponden a las hojas con holonomía no trivial, las cuales son cubiertas por hojas con holonomía trivial. Como todas las hojas son compactas, la holonomía es finita y el volumen de las hojas con holonomía no trivial es una fracción del volumen de las hojas con holonomía trivial por estabilidad de Reeb [25]. Luego, el teorema generalizado de estabilidad de Reeb [25] nos dice cómo obtener las cartas coordenadas de $M/\mathfrak{F}$. En el caso de las hojas con holonomía trivial, para cada hoja $\mathcal{L}$ existe una vecindad saturada, es decir, $U = \bigcup_{z \in U} \mathcal{L}_z$ de la hoja, tal que U es biholomorfa a $\mathcal{L} \times B$ donde $B \subset \mathbb{C}^{n-d}$ es una bola. Además, cada hoja en U es biholomorfa a $\mathcal{L} \times \{w\}$ con $w \in B$. Esto quiere decir que $M/\mathcal{F}$ tiene una carta coordenada holomorfa a una bola de dimensión compleja $n - d$ en cada hoja con holonomía trivial. Ahora, en el caso de que la hoja $\mathcal{L}$ tenga holonomía no trivial, sabemos que el grupo de holonomía es finito y así el mismo resultado de Reeb nos dice que de todas formas existe un abierto saturado U, el cual es un haz en discos de dimensión complementaria a la dimensión de $\mathcal{L}$, cuyo grupo de estructura es el grupo de holonomía. Es decir, que las hojas en dicho abierto son cubrientes de nuestra hoja original y que este abierto de $\mathcal{L}$ otorga a $M/\mathcal{F}$ una carta de orbifold complejo alrededor de este punto. Esto se puede contrastar con el enunciado y prueba originales de Edwards, Millet y Sullivan, los cuales son más generales, pero al mismo tiempo pierden las peculiaridades de la geometría kähleriana, además el Dr. Verjovsky y yo hacemos mayor énfasis en la estructura del espacio de hojas (véase [12]).

Es importante observar que es posible encontrar foliaciones en variedades compactas real analíticas e incluso algebraicas, donde todas las hojas de la foliación son curvas cerradas (círculos) cuyas longitudes no se encuentren uniformemente acotadas, véase el ejemplo de [14]. Algo que es importante destacar de este ejemplo es que la codimensión es lo suficientemente grande para garantizar que el volumen (longitud) no se encuentre uniformemente acotado y también sucede que la función de longitud de las hojas no es localmente acotada.

Lo anteriormente mencionado nos pone en el contexto de la conjetura de Beauville (2000):

Conjetura 1 (Beauville) *Sea M una varidead compacta Kähler tal que exista una descomposición holomorfa de su haz tangente*

¿No sería mejor nombrarlo $\widetilde{M}$?

$$TM = \bigoplus_{i \in I} \mathcal{F}_i \ \textit{ tal que cada } \bigoplus_{i \in J} \mathcal{F}_i,\ J \subset I \ \textit{ es involutivo,}$$

universal $\widetilde{X}$ de M

entonces el cubriente univeral de M es isomorfo a un producto $\prod_{i \in I} U_i$

$$\widetilde{X} \cong \prod_{i \in I} U_i, \textit{ de tal forma que esto induce } T\widetilde{X} \cong \bigoplus_{i \in I} \widetilde{\mathcal{F}}_i$$

¿$\widetilde{M}$?

Un isomorfismo de ---

No los presentaste: $T\widetilde{X}$ y $\widetilde{\mathcal{F}}_i$

No dejes las cosas a la imaginación del lector

Recientemente, Druel, Pereira, Pym y Touzet demostraron una versión de esta conjetura en el contexto que expusimos previamente, pero con el enfoque particular de variedades de Poisson, véase [11].

Teorema 3.2 (Druel, Pereira, Pym y Touzet) *Supóngase que M es una variedad compacta Kähler tal que su haz tangente se escinde $TM = \mathfrak{F} \oplus \mathfrak{G}$, donde los subhaces $\mathfrak{F}$ y $\mathfrak{G}$ son involutivos. Si $\mathfrak{F}$ tiene una hoja compacta L con holonomía finita, entonces $\widetilde{M}$ es biholomorfa a un producto de variedades $N \times P$ cuyas haces tangentes son isofomorfos a $\mathfrak{F}$ y $\mathfrak{G}$ respectivamente.*

o

Como observación, se puede apreciar del resultado anterior que en una variedad de Kähler conexa, la existencia de una hoja compacta con holonomía finita implica que todas las hojas lo son. Esto también lo pudimos demostrar utilizando el teorema 2.4. Este resultado ya era conocido, pero nuestra prueba es distinta a la expuesta en el artículo original [26]. Nosotros creemos que es posible demostrar la proposición de Druel, Pereira, Pym y Touzet utilizando límites de las hojas de forma similar a la previamente expuesta. Más sobre esto se expondrá en la sección de *Problemas a resolver*.

Es claro por lo que se ha mostrado aquí que existe un vínculo importante entre la estructura de un espacio analítico y su volumen. En el caso de las foliaciones, podemos extender esta noción a los volúmenes de sus hojas, además de que los resultados de Bishop nos otorgan un puente entre geometría y análisis, por lo que proponemos estudiar vínculos más profundos entre estas dos áreas utilizando las herramientas previamente expuestas además de otros métodos de la geometría compleja moderna. Como ya fue aludido con anterioridad, las foliaciones holomorfas en variedades de tipo Kähler son de particular interés en este aspecto y por lo tanto es en este contexto que pensamos que la expansión de nuestra investigación podría ser más fructífera en la búsqueda de resultados nuevos.

4. Comportamiento local de foliaciones de hojas uniformizadas por discos y sus límites

el

En términos de comportamiento local de las foliaciones holomorfas, Dr. Verjovsky y yo hemos estudiado el caso de foliaciones por curvas complejas (superficies de Riemann), en la bola unitaria $B \subset \mathbb{C}^n$, en el caso cuando se encuentran uniformizadas por el disco unitario $\Delta := \{|z| < 1\} \subset \mathbb{C}$, es decir las hojas tienen una estructura hiperbólica. Así, se busca el comportamiento límite de las hojas si se piensa al disco como una variedad Kähler completa. En este caso, las hojas no son necesariamente compactas ni es necesario que su volumen sea acotado. Se busca saber más acerca de las propiedades métricas y geométricas de las hojas. En este sentido, se entiende por *límite* al conjunto al que se aproximan las geodésicas de las hojas en $\overline{B}$ cuando las recorremos en un tiempo infinito. Para entender estos límites de geodésicas, proponemos estudilarlos por medio de una compactación del disco adecuada donde sea posible esclarecer algo sobre la pregunta en cuestión. Con esto en mente, proponemos encajar al disco en el espectro del álgebra de Banach de funciones holomorfas acotadas en el disco, es decir, $\mathcal{H}^\infty = \mathcal{L}(\Delta)^\infty \cap \mathcal{H}(\Delta)$, así $M^\infty := \{\kappa : \mathcal{H} \to \mathbb{C} \,|\, \kappa(fg) = \kappa(f)\kappa(g),\, \kappa(f+g) = \kappa(f) + \kappa(g),\, \kappa(1) = 1\}$ y por lo tanto Δ claramente encaja en M^∞, $\Delta \to M^\infty$ por medio de la funcion evaluación $ev(z)[f] = f(z)$. Se saben muchas propiedades del conjunto M^∞, es · A SABER, ES un espacio métrico compacto con la topología débil dada por la acción natural de $\mathcal{H}^\infty$ en M^∞, es decir para toda $f \in \mathcal{H}^\infty$ define $\tilde{f} : M^\infty \to \mathbb{C}$ dada por $\kappa \mapsto \kappa(f)$ (véase [23]). Además, al actuar la función identidad id_Δ en M^∞, se obtiene lo siguiente $\pi = \tilde{id_\Delta}$ es la inversa al encaje $ev : \Delta \to M^\infty$, claramente. Más aún como M^∞ es compacta, la imagen bajo π es un conjunto compacto. Se puede demostrar que este conjunto es en efecto $\overline{\Delta} \subset \mathbb{C}$ (véase [23]). De esta forma, al investigar el subconjunto $M^\infty \setminus \Delta$, conocido como la *corona*, se obtienen muchas propiedades interesantes; este conjunto fibra sobre $S (= \overline{\Delta} \setminus \Delta$ por medio de el mapeo π y por lo tanto es posible extender cualquier función del continua definida en Δ a una función en M^∞, la cual es constante en las fibras de π sobre S. Además, los biholomorfismos de Δ actúan de forma natural en $\mathcal{H}^\infty$ por medio de la composición derecha, por lo que es posible definir a los biholomorfismos de Δ en M^∞. Simplemente si φ es un biholomorfismo, entonces $\varphi^*[\kappa](f) = \kappa(f \circ \varphi)$ está bien definida y es un homeomorfismo de M^∞. Con esto es posible demostrar que las fibras de π en S son homeomorfas entre sí bajo rotaciones por el origen y además notamos que esto permite actuar al grupo de isometrías hiperbólicas $PSL(2, \mathbb{R})$ en M^∞, por lo que es posible hablar de cierta estructura hiperbólica en M^∞. Así, definimos el límite como la imagen $\overline{\varphi}(M^\infty \setminus \Delta)$, donde φ es la uniformización de la hoja y $\overline{\varphi}$ es su extensión a M^∞. El contexto de estas preguntas que hemos hecho es:

1. Toda foliación en la bola $B \subset \mathbb{C}^2$ con una singularidad en el origen tiene una hoja que pasa por el origen por el teorema de Camacho-Sad. Así, en $B \setminus \{0\}$ las hojas son incompletas y por lo tanto existe una hoja y una geodésica cuyo límite es 0 (vése [7, teorema 3.3]).

2. Sorprendentemente, existen foliaciones no singulares por discos en B donde las hojas son completas, por lo que encontrar los límites de las geodésicas en la bola $\overline{B}$ es interesante en esos casos, véase [1].

5. Variedades de Fano-Poisson

Inspirados por la demostración del teorema 3.2 del artículo reciente [11], creemos que existen relaciones interesantes entre la función de volumen de las hojas definidas por la foliacion natural de una variedad *Poisson* (teorema 5.1) y la estructura de una variedad Fano-Poisson.

5.1. Variedades de Poisson, el teorema de Weinstein y su foliación natural

Primero hay que recordar que una variedad compleja M es de Poisson si existe una operación bilineal en el anillo de gérmenes de funciones holomorfas en M, la cual se le conoce por el nombre de *corchete de Poisson*. Denotaremos por $\mathcal{O}_M := \mathcal{H}_M/\sim$, donde $f_1 \sim f_2$ si $f_1 = f_2|_U$, al anillo de gérmenes de funciones holomorfas. Así, un corchete de Poisson es una función bilineal

¿Quién es U?

$$\{\cdot,\cdot\} : \mathcal{O}_M \times \mathcal{O}_M \to \mathcal{O}_M,$$

que cumple las siguientes propiedades

1. $\{f,g\} = -\{g,f\}$
2. $\{f,gh\} = \{f,g\}h + g\{f,h\}$
3. $\{f,\{g,h\}\} + \{g,\{h,f\}\} + \{h,\{f,g\}\} = 0.$

Se observa que un germen de una función fija $H \in \mathcal{O}_M$ define un campo vectorial definido por $\xi_H(\cdot) = \{H,\cdot\}$. A dicho campo vectorial le llamamos el campo *hamiltoniano* definido por H. Utilizando la notación de campos *multivectoriales*, una definición alternativa del corchete de Poisson es la siguiente: al denotar los campos vectoriales holomorfos como $\mathcal{T}M = H^0(M,TM)$, entonces el espacio de *p-vectores* se define por

$$\Lambda^p(\mathcal{T}M) := \{\mathcal{O}_M \times \cdots \times \mathcal{O}_M \to \mathcal{O}_M \,|\, \text{anti simétrica}\}.$$

Entonces, un corchete de Poisson es un campo *bivectorial*, el cual podemos definir por medio del emparejamiento $\langle\cdot,\cdot\rangle$, entre los campos p-vectoriales y el espacio de *p-formas diferenciales holomorfas* $\Omega^p(M)$ por medio de

$$\pi \in H^0(M, \Lambda^2(\mathcal{T}M)) \text{ entonces } \{f,g\} = \langle \pi, df \wedge dg\rangle.$$

Por lo tanto, generalizando esto tenemos el siguiente mapeo definido por un corchete de Poisson π

$$\pi^\# : \Omega^1_M \to \mathcal{T}M, \;\; \pi^\#(\alpha) := \iota_\alpha(\pi) := \langle \pi, \alpha \wedge \cdot\rangle.$$

Con esto, el rango de π en un punto $p \in M$ se define como el entero positivo $r \in \mathbb{Z}^+$ que define la dimensión del espacio máximo, donde $\pi^\#_p$ es no degenerada, es decir, es la dimensión del espacio más grande, tal que $\pi^\#$ es una biyección. Si $\pi^\#$ es no degenerada, su rango es $2n = \dim(M)$, entonces π^{-1}, la inversa de $\pi^\#$, define una forma simpléctica en M. El teorema de esción escisión de Weinstein define una foliación natural en una variedad (M,π) de Poisson, pero primero recordamos que una función holomorfa entre dos variedades de Poisson $(M_1,\{\cdot,\cdot\}_1)$ y $(M_2,\{\cdot,\cdot\}_2)$ es un morfismo de Poisson $\phi : M_1 \to M_2$ si $\{f,g\}_1 \circ \phi = \{f\circ\phi, g\circ\phi\}_2$.

Teorema 5.1 (Weinstein) *Sea (M, π) una variedad holomorfa de Poisson de dimensión real $2n$. Supongamos que π es de rango $2r$ en un punto $x \in M$, entonces existe una vecindad U de x tal que U es isomorfa en el sentido de Poisson a un producto $S \times P$ de tal forma que S es simpléctica con coordenadas $(p_i, q_i)_{i=1}^r$ y $(P, \tilde{\pi})$ es una variedad de Poisson de rango cero en x con coordenadas $z = (z_j)_{j=1}^{2n-2r}$*

$$\pi = \sum_{i=1}^{r} \partial p_i \wedge \partial q_i + \sum_{1 \leq j \leq k \leq 2n-2r} f^{jk}(z) \partial z_j \wedge \partial z_k.$$

Observamos del teorema anterior que $f^{jk}(x) = 0$. Este teorema define claramente una foliación natural en (M, π) de hojas simplécticas. Sin embargo, no todas son de las misma dimensión, por lo que es necesario notar que la definición de foliación se puede expandir a este contexto más general, es decir, una foliación es simplemente un $\mathcal{O}_M$-submódulo de $\mathcal{T}M$ involutivo. Ahora, esto define una filtración $X_0 \subset X_2 \subset X_4 \subset \cdots \subset M$, donde $X_{2k} = \{x \in M \,|\, \mathrm{rang}(\pi_x) \leq 2k\}$, si denotamos a las hojas simplécticas de (M, π) como $\mathcal{L}$, entonces también podemos pensar a X_{2k} como

$$X_{2k} = \bigcup_{\dim(\mathcal{L}) \leq 2k} \mathcal{L}.$$

5.2. Variedades de Fano-Poisson desde la perspectiva de la geometría kähleriana

Con esto establecido, presentaremos una conjetura establecida en 1993 por Bondal para variedades Fano-Poisson que esperamos poder iluminar con nueva información utilizando la función volumen. Una variedad M es Fano si cumple lo siguiente (véase [27] y [4]):

- M admite una métrica de Kähler-Einstein, es decir, si definimos la métrica por medio de su forma simpléctica Kähler ω, entonces

$$\mathrm{Ric}_\omega = \lambda\omega \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

  donde en coordendas podemos calcular la curvatura de Ricci para la métrica $h = g - i\omega = \sum h_{i\bar{j}}\, dz_i \otimes d\bar{z}_j$ como

$$\mathrm{Ric}_\omega = \frac{i}{2\pi} \sum_{ij} R_{i\bar{j}}\, dz_i \wedge d\bar{z}_j = \frac{-i}{2\pi} \partial\bar{\partial} \log(\det(h_{k\bar{l}})).$$

- La clase de cohomología definida por la curvatura de Ricci (primera clase de Chern) es positiva

$$[\mathrm{Ric}_\omega] = c_1(M) > 0.$$

Hay que mencionar que normalmente en la literatura se define una variedad Fano como una variedad algebraica X completa en el sentido de que toda proyección

$X \times Y \to Y$ es cerrada para toda variedad algebraica Y, tal que su divisor/haz anticanónico K_X^* es amplio, por lo tanto, toda variedad Fano es *proyectiva*. La disparidad entre la definición que dimos y la utilizada ampliamente en la literatura proviene de la demostración dada por Yau de la conjeturla de Calabi (véase [27]). Una varieda *Fano-Poisson* es entonces una variedad compleja con estas dos estructuras, en particular son compactas Kähler [22].

REDACCIÓN

Conjetura 2 (Bondal) *Sea M una variedad de Fano-Poisson, bajo la notación previamente establecida, X_{2k} es la unión de las hojas simplécticas de dimensión $2k$, entonces X_{2k} tiene una componente de dimensión mayor a $2k$.*

TAMBIÉN CORRIGE LA REDACCIÓN POR FAVOR.

No sabemos si es cierta o falsa o si es posible demostrar con lo que vamos a proponer, pero creemos que como una investigación entre la relación entre la geometría complejo-diferencial y la geometría algebraica lo que proponemos es interesante. Esta conexión creemos que es relevante para el acercamiento a la geometría que nosotros proponemos, esto está inspirado por trabajos previos de Yau [27] y sobre todo Donaldson y Sun [10]. En particular, Donaldson y Sun muestran resultados de naturaleza muy similar a los resultados de Bishop (teorema 2.4) en el contexto generalizado de límites de Gromov-Hausdorff en variedades de Kähler, con particular aplicación a las variedades de Fano.

6. Especulaciones y problemas a resolver

- En el caso de la conjetura de Beauville 1, pretendemos primero demostrar el caso en el que las hojas sean compactas, utilizando los métodos de Bishop. Así obendríamos una demostración alternativa al teorema 3.2.
- Creemos que es posible prescindir de la suposición de hojas compactas suponiendo solamente que las hojas son de volumen localmente acotado, es decir, que las hojas son de volumen finito y en cualquier punto existe una vecindad tal que la foliación en esa vecindad son hojas con volumen uniformemente acotado. Bajo esta suposición podemos garantizar que el espacio de hojas es un espacio analítico complejo, además la foliación es localmente una fibración (véase [2]).
- Bajo estas suposiciones, creemos que es posible definir un biholomorfismo entre los cubrientes universales de las hojas por medio de levantamientos de curvas y trabajar con el grupoide de holonomía de la foliación similar a lo realizado en [11]. Además, creemos que es posible extraer información métrica de las hojas (o su cubriente) si se levantan geodésicas en lugar de curvas arbitrarias, donde simplemente utilizamos la métrica riemanniana en $M/\mathfrak{F}$ heredada de la métrica Kähler original.
- En el caso de foliaciones con volumen acotado, especulamos que el fenómeno de semicontinuidad que se expuso en el caso de los voluúmenes, sucede de manera similar a nivel de grupos de homotopía y que posiblemente nos

permita comprender más sobre la estructura analítica del cubriente universal de las hojas, el cual en el caso de variedades Kähler es el mismo para todas éstas si es válida la hipótesis de Beauville. Es decir, en el límite de una sucesión de hojas con volumen acotado, su cubriente universal es el mismo y el grupo fundamental del límite tiene como subgrupo al de las hojas que se le aproximan, posiblemente sea necesario pedir que dichos grupos sean finitos. ?

- Otorgar un significado homológico/cohomológico a la semicontinuidad discreta en el teorema 3.1.

- Si suponemos que el espacio M o el espacio de las hojas $M/\mathfrak{F}$ tienen estructura adicional (Poisson, Fano, Stein, proyectiva) ¿Qué tipo de comportamiento pueden tener las funciones de volumen de una variedad?

- Si $\mathfrak{F}$ es una foliación con una singularidad aislada en el origen de B cuyas hojas se uniformizan por el disco Δ, entonces existe una hoja incompleta y una geodésica en ésta cuyo límite es 0.

- Estudiar el crecimiento del volumen de los conjuntos $X_{2k} \cap B_R(p)$ donde $B_R(p)$ es la bola métrica de radio R centrada en un punto $p \in X_{2k}$ cuando $R \to \infty$. Si el conjunto X_{2k} es de dimensión mayor a $2k$, esperamos un comportamiento de crecimiento de volumen mayor a $O(R^{2k})$.

- Buscar casos en los que existan descripciones de los conjuntos X_{2k} que nos permitan describir dichos conjuntos como límites de Gromov-Hausdorff y hacer uso de cotas dadas en [10] para determinar la tasa de crecimiento del volumen de las hojas simplécticas.

- Determinar si la condición de no colapso del volumen dada en [10] y las estimaciones analíticas similares nos permiten hacer cálculo del volumen de subvariedades en variedades Fano. Si esto es posible, encontrar qué tipo de propiedades tiene la función volumen en una foliación de una variedad Fano.

- Hacer un contraste entre los aspectos geométricos encontrados y las demostraciones a la conjetura 2 en los casos ya demostrados como en [17].

Referencias

[1] Alarcón, A., Forstneric (2019) *A foliation of the ball by complete holomorphic discs*, Mathematische Zeitschrift pp. 169-174, Springer-Verlag.

[2] Alexander J.C., Verjovsky A., (1988) *First Integrals for Singular Holomorphic Foliations With Leaves of Bounded Volume* Holomorphic Dynamics. Lecture Notes in Mathematics, vol 1345. Springer, Berlin, Heidelberg.

[3] Beauville, A. (2000) *Complex manifolds with split tangent bundle*, Complex analysis and algebraic geometry , de Gruyter, Berlin.

[4] Blocki, Z., (2011) *The Complex Monge-Ampère Equation in Kähler Geometry* Lecture Notes in Mathematics 2075 paart of Pluripotential Theory, Springer-Verlag, pp. 95-143.

[5] Bishop, E. (1964) *Conditions for the Analyticity of certain sets*, Michigan Math. J. 11, No. 4, 289–304.

[6] Bondal, A. I,. (1993) *Non-commutative deformations and Poisson brackets on projetive spaces*, Max-Planck-Institut für Matematik, Germany.

[7] Brunella, M., (2015) *Birational Geometry of Foliations*, IMPA Monographs, Springer International Publishing, Switzerland.

[8] Chirka E. M. (1989) *Complex Analytic Sets*, Kluwer Academic, Dordrecht, The Netherlands.

[9] Chow, W-L. (1949) *On Compact Complex Analytic Varieties*, American Journal of Mathematics, Vol. 71, No. 4, pp. 893-914.

[10] Donaldson, S., Sun, S. (2014) *Gomov-Hausdorff Limits of Kähler Manifolds and Algebraic Geometry I*, Acta Math 213, 63–106, Springer-Verlag.

[11] Druel S., Pereira J V., Pym B., Touzet F. *A global Weinstein splitting theorem for holomorphic Poisson manifolds*, Por publicarse.

[12] Edwards, R., Millet, K., Sullivan, D. (1975) *Foliations With All Leaves Compact*, Topology Vol. 16, pp. 13-32. Pergamon Press, 1977.

[13] Epstein, D. B. A., Millet, K. C., Tischler D. (1977) *Leaves Without Holonomy*, Journal of the London Mathematical Society.

[14] Epstein, D. B. A., Voght, E. (1978) *A Counterexample to the Periodic Orbit Conjecture*, Annals of Mathematics, Vol. 108, pp. 539-552.

[15] Epstein, D. B. A. (1976) *Foliations with all leaves compact*, Annales de lÍnstitute Fourier, tome 26 no. 1, pp. 265-282.

l'Inst...

[16] Epstein, D. B. A. (1977) *Periodic Flows on Three-Manifolds*, Annals of Mathematics, Second Series, Vol. 95, No. 1 (Jan., 1972), pp. 66-82.

[17] Gualtieri, M., Pym, B. (2012) *Poisson modules and degeneracy loci*, Proceedings of the London Mathematical Society 107(3).

[18] Remmert R., Stein, K. (1953) *Über die wesentlichen Singulariäten analyscher Mengen*. Math. Annalen, Bd. 126, S. 263–306.

[19] Robert C. (1965) *Analytic Functions of Several Complex Variables*, Prentice-Hall, Inc, Englewood Cliffs, N.J.

[20] Rudin W. (1980) *Function Theory in the Unit Ball of* $\mathbb{C}^n$, Springer-Verlag Berlin Heidelberg.

[21] Serre, J.-P. (1956) *Géométrie algébrique et géométrie analytique*, Annales de línstitut Fourier, Vol. 6.

[22] Myers, S. B. (1941), *Riemannian manifolds with positive mean curvature*, Duke Mathematical Journal, 8 (2): 401–404.

[23] Schark, I. J. *Maximal Ideals in an Algebra of Bounded Analytic Functions*, The Institute for Advanced Study Princeton, New Jersey.

[24] Stolzenberg G. (1966) *Volumes, Limits and Extensions of Analytic Varieties*, Lecture Notes in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin.

[25] Thurston W., P. (1974) *A Generalization of Reeb Stability Theorem*, Topology Vol. 13.pp. 347-352. Pergamon Press, Great Britain.

[26] Pereira J. V., (2001) *Global Stability for Holomorphic Foliations in Kaehler Maniforlds*, Qualitative Theory of Dynamical Systems volume 2, pages 381–384.

[27] Yau, S-T., (1978) *On The Ricci Cirvature of a Compact Kähler Manifold and the Complex Monge-Ampère Equation, I**, Communications on Pure and Applied Mathenatics, Vol. XXXXI, 339-411, John Wiley & Sons. Inc.

✓

YO PUEDO HABERME EQUIVOCADO PERO NO USAS EN TU TEXTO LAS REFERENCIAS 3, 6, 8, 16, 19, 20, 25. POR FAVOR REVISA E INCLUYE LOS LUGARES EN DONDE ESTOS TEXTOS TE FUERON DE UTILIDAD. NO DUDO DE SU PERTINENCIA PERO ME PIDEN REVISAR ESTE ASPECTO, PERDÓN.