

VVHD

Я. А. Дынников

7 ноября 2012 г.

## Аннотация

Это мануал, посвященный исходникам библиотеки. Здесь я постараюсь описать его структуру, способы работы с ним, и подводные камни, на которые нужно будет обращать внимание.

# Глава 1

## VVHDFlow

### 1.1 TVec

Представляет собой структуру из двух double: gx, gy. Поддерживает основные операторы, сложение, умножение, деление на число итд. Отдельно стоит упомянуть оператор  $\text{rotl}(\text{TVec } \mathbf{r})$  - поворот вектора влево на  $90^\circ$ . В математических терминах он эквивалентен  $\mathbf{e}_z \times \mathbf{r}$ .

Есть еще одна хитрость, связанная с векторным умножением. Так как пространство у нас двумерное, то векторное произведение двух векторов нашему пространству не принадлежит, и сохраняем мы от него только модуль:  $\text{double } c = \text{rotl}(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{b}$ ;

$$[\mathbf{a} \times \mathbf{b}] = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ a_x & a_y & 0 \\ b_x & b_y & 0 \end{vmatrix} = \mathbf{e}_z \cdot (a_x b_y - a_y b_x) = \mathbf{e}_z \cdot \begin{pmatrix} -a_y \\ a_x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix} = \mathbf{e}_z \cdot ([\mathbf{e}_z \times \mathbf{a}] \cdot \mathbf{b})$$

### 1.2 TObj

Дочерний класс TVec с лишними компонентами величины (double g), скорости, и запасной переменной double \_1\_eps. TObj используется для почти всех частиц: вихревых, тепловых, меченых. В переменной g у каждого типа хранится свое значение. Для вихревых доменов это циркуляция  $\gamma$ ; для тепловых — интенсивность  $q = \int T dS$ ; для меченых частиц — просто номер маркера. Переменная \_1\_eps чаще всего используется для хранения диффузионного

эпсилон (расстояние до второго ближайшего объекта), хотя в утилитах ей находятся и другие применения.

## 1.3 TList

Лист является шаблонным классом и надстройкой над массивом. Лист предоставляет функции добавления, удаления элементов и динамического изменения размеров. В принципе, лист является усовершенствованным вектором (из `std::`), он даже почти полностью с ним совместим.

```
template <class T>
class list
{
    public:
        list ();
        ~list ();

        void push_back(const T &item);
        void erase(T* item);
        void clear();
        T& at(size_t i);
        T* begin();
        T* end();
        size_t size();
        size_t size_safe();
        T* next(T* item);
        T* prev(T* item);

    private:
        size_t size_;
        size_t maxsize;
        T* begin_;
        T* end_;

        void realloc_();
};
```

```
};
```

```
#define const_for(list , it) \
    for (auto it=list->begin(); it<list->end(); it++)
```

Вот о чем нужно помнить

1. Если вы добавляете в массив элементы, не пользуйтесь инкрементом `TObj* obj++`. Если вдруг произойдет `realloc` — адресация массива сместится непредсказуемо.
2. При удалении элемента на его место перемещается последний элемент, а `size` уменьшается. Если Вы удалили элемент функцией `erase()`, не забудьте указатель уменьшить на единичку, иначе этот элемент массива останется необработанным

## 1.4 Обозначения

Сейчас попробуем ввести индексы для каждого массива, так что бы в формулах не происходило путаницы.

- $v$  — индекс свободных вихрей. Их количество  $N_v$
- $h$  — индекс тепловых частиц. Аналогично количество  $N_h$
- $b$  — индекс тела. Количество тел =  $N_b$
- $s$  — индекс отрезков на теле. Так как тел много, то применяется вместе с  $b$ .  $N_{sb}$  — число отрезков на  $b$ -ом теле.
- $m$  — индекс меченых частиц (маркеров).
- $i$  — запасной индекс. Например для нумерации сенсоров в пространстве.

## 1.5 Reference frame

Расчет проводится в системе координат, ни с чем не связанной. Это значит что в этой системе у каждого объекта есть своя скорость. В отличие от предыдущей версии программы, где система отсчета была жестко связана с телом, а пересчет в другую СО проводился уже при постобработке, в данной версии

тела представляются закрепленными на пружине к державке, которая имеет свою детерминированную скорость.

Таким образом у нас есть богатый выбор переменных:

- $\mathbf{V}_\infty(t)$  — скорость жидкости на бесконечности.
- $\Gamma_\infty$  — циркуляция на бесконечности. Константа. Моделирует вихрь, ушедший на бесконечность. Эта переменная пригодится нам для расчета вращающегося цилиндра и аэродинамических профилей.
- $\mathbf{V}_b(t), \omega_b(t)$  — Скорость державки  $b$ -го тела. Поступательная и вращательная.
- $\mathbf{V}_{b?}, \omega_{b?}$  — Полная скорость тела, (включает скорость державки относительно системы координат + скорость тела относительно державки). Подробнее об этом в секции 1.6

## 1.6 Discrete view

Файл `body.h` описывает класс `TBody`, в котором хранится тело. Поверхность тела представляет собой массив отрезков класса `TAtt` (наследник `TObj` <sup>1</sup>).

Основные переменные в классе `TAtt`:

- $\mathbf{r}$  — координаты центра
- $\gamma$  — неизвестная циркуляция (располагается в центре отрезка)
- $\mathbf{c}$  — вектор начала отрезка
- $\Delta \mathbf{l}$  — вектор отрезка. При обходе жидкость слева
- $q_{\text{att}}$  — интенсивность присоединенного источника
- $\gamma_{\text{att}}$  — циркуляция присоединенного вихря

Как уже говорилось в секции 1.5, комплекс моделирует тело, закрепленное на пружине. Пружина, в свою очередь, крепится к виртуальной “державке”, которая фиксирует все 3 степени свободы: 2 поступательные, и 1 вращательную. В программном комплексе хранятся две скорости: скорость державки

---

<sup>1</sup>Это сделано из-за того, что дерево работает с классом `TObj*`. Тем не менее одно неудобство остается: при получении отрезка из дерева тип все равно придется приводить к `TAtt*` руками.

и скорость тела. Обе скорости записаны относительно основной системы отсчета. Державка движется со скоростью  $\mathbf{V}_b(t)$ ,  $\omega_b(t)$ . Эта скорость детерминирована, ее пользователь задает при запуске программы. Полная скорость движения тела находится из СЛАУ и обозначается через  $\mathbf{V}_{b?}$ ,  $\omega_{b?}$ . Скорость движения тела относительно державки легко угадать:  $(\mathbf{V}_{b?} - \mathbf{V}_b)$ ,  $(\omega_{b?} - \omega_b)$ . Для сохранения координат державки и тела в классе TBody имеются специальные переменные:

- $\alpha$  — угол поворота державки относительно основной системы координат
- $\mathbf{R}$  — смещение державки относительно начала системы координат
- $\Delta\alpha$  — поворот тела относительно державки (поворот пружины)
- $\Delta\mathbf{R}$  — смещение тела относительно державки (растяжение пружины)

Функции getRotation, setRotation, getMotion, setMotion манипулируют с детерминированной скоростью тела (точнее державки), угловой и поступательной. Функции doRotation, doMotion принимают в качестве аргумента величины  $(\mathbf{V}_{b?}\Delta t)$ ,  $(\omega_{b?}\Delta t)$ . Изменения, которые они вносят, описываются следующими формулами:

$$\alpha = \alpha + \omega \cdot \Delta t$$

$$\mathbf{R} = \mathbf{R} + \mathbf{V} \cdot \Delta t$$

$$\Delta\alpha = \Delta\alpha + (\omega_{?} - \omega) \cdot \Delta t$$

$$\Delta\mathbf{R} = \Delta\mathbf{R} + (\mathbf{V}_{?} - \mathbf{V}) \cdot \Delta t$$

Помимо изменений общих координат, изменяются все углы тела, вектора отрезков и координаты центров. Как следует из формул, порядок выполнения поворота или сдвига значения не имеет.

$$\begin{aligned} \mathbf{c}_s|_{\text{Rotation}} &= (\mathbf{R} + \Delta\mathbf{R}) + \begin{pmatrix} \cos & -\sin \\ \sin & \cos \end{pmatrix} (\omega_{?}\Delta t) \cdot \underbrace{(\mathbf{c}_s - (\mathbf{R} + \Delta\mathbf{R}))}_{\mathbf{c}_*} \\ &= (\mathbf{R} + \Delta\mathbf{R}) + \mathbf{c}_* \cos(\omega_{?}\Delta t) + [\mathbf{e}_z \times \mathbf{c}_*] \sin(\omega_{?}\Delta t) \\ \mathbf{c}_s|_{\text{Motion}} &= \mathbf{c}_s + \mathbf{V}_{?}\Delta t \end{aligned}$$

Для моделирования двигающегося тела используется понятие присоединенных вихрей и источников. Они располагаются в центре каждого отрезка и имитируют разрыв скорости на поверхности. Интенсивность присоединенного источника и циркуляция присоединенного вихря зависят от скорости

отрезка, к которому они привязаны.

$$\mathbf{V}_s = \mathbf{V}_? + \omega_? \cdot [\mathbf{e}_z \times \underbrace{(\mathbf{r}_s - (\mathbf{R} + \Delta\mathbf{R}))}_{r_*}], \quad (1.1)$$

где  $\{\mathbf{R} + \Delta\mathbf{R}\}_b$  — ось вращения данного тела<sup>2</sup>. Здесь сделано предположение о малости отрезка и об однородности скорости по всей длине. В таком случае формулы для вычисления присоединенной циркуляции и интенсивности будут иметь вид.

$$\begin{aligned} \gamma_{\text{att } s} &= -\mathbf{V}_s \cdot \Delta\mathbf{l}_s = \mathbf{n} \times \mathbf{V}_s \\ q_{\text{att } s} &= -[\mathbf{V}_s \times \Delta\mathbf{l}_s] = \mathbf{n} \cdot \mathbf{V}_s \end{aligned} \quad (1.2)$$

Присоединенные вихреисточники должны учитываться при вычислении конвективной скорости, при вычислении давления, при заполнении СЛАУ. Если расписать формулы 1.2 с учетом 1.1, то получится

$$\begin{aligned} \gamma_{\text{att } s} &= -V_{?x} \cdot (\Delta l_{sx}) - V_{?y} \cdot (\Delta l_{sy}) - \omega_? \cdot [\Delta\mathbf{l}_s \times \mathbf{r}_*] \\ q_{\text{att } s} &= -V_{?x} \cdot (\Delta l_{sy}) + V_{?y} \cdot (\Delta l_{sx}) + \omega_? \cdot (\Delta\mathbf{l}_s \cdot \mathbf{r}_*) \end{aligned} \quad (1.3)$$

## 1.7 Geometry formulae

В будущем нам так-же понадобятся формулы вычисления центра масс, площади и момента инерции тела. Привожу их здесь.

Площадь легче всего вычислить как сумму площадей трапеций  $S_{\text{body}} = \sum S_{\text{att } i}$ . Для трапеции используем формулу полусумма оснований на высоту.  $S_i = \frac{1}{2}(x_{i+1} - x_i)(y_i + y_{i+1})$  Здесь стоит сказать пару слов про обход контура. Положительным направлением обхода считается направление, при котором жидкость находится по левую руку. То есть если вы загрузили тело, обход которого совершается по часовой стрелке (ось абсцис направлена вправо, ординат — вверх) — вы получите внешнее обтекание. Если загруженное тело составлено против часовой стрелки — течение внутри замкнутой области. Для внутренних течений площадь тела, вычисленная по этой формуле окажется отрицательной (как и момент инерции). Это нужно будет учитывать в будущем, а пока мы не занимаемся течениями в канале, можно расслабиться.

---

<sup>2</sup>Заметьте, осью вращения является не державка, а место крепления пружины к телу.



Для вычисления центра масс удобно использовать формулу Грина. Но я спер эту формулу из википедии

$$\mathbf{r}_{\text{com}} = \frac{1}{S} \int \mathbf{r} dS = -\frac{1}{3S} \sum_s \mathbf{r}_s [c_s \times c_{s+1}]$$

Минус в последнем равенстве возник из-за того, что в комплексе заложена ориентация контура для внешней области (для жидкости), а здесь нам нужна внутренность контура.

Аналогичный алгоритм можно использовать для момента инерции. Здесь используется теорема Стокса. Минус в конце появляется по той-же причине.

$$J_0 = \int r^2 dS = \frac{1}{4} \int (\text{rot}([\mathbf{e}_z \times \mathbf{r}] r^2)) dS = \frac{1}{4} \int r^2 ([\mathbf{e}_z \times \mathbf{r}] \cdot d\mathbf{l}) = -\frac{1}{4} \sum r^2 \cdot ([\mathbf{e}_z \times \mathbf{r}] \cdot \Delta \mathbf{l})$$

Это не совсем момент инерции, так как в него не входит плотность. Он безразмерен на плотность жидкости, как и все уравнения, которые мы решаем. Поэтому во всех последующих выкладках для сил перед этим самым моментом будет появляться отношение  $\rho_b/\rho_0$ . Этот момент инерции вычислен относительно центра основной системы координат. Пересчитать его относительно центра масс или оси вращения легко:  $J_{\text{com}} = J_0 - S r_{\text{com}}^2$ ,  $J_c = J_{\text{com}} + S (r_c - r_{\text{com}})^2$

## 1.8 Convective

### 1.8.1 Конвективная скорость

Скорость, индуцированная вихрем  $(\mathbf{r}_\gamma, \gamma)$  в точке  $\mathbf{r}$  вычисляется по формуле

$$\mathbf{V}_\gamma(\mathbf{r}) = \frac{1}{2\pi} [\mathbf{e}_z \times \mathbf{K}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_\gamma)] \cdot \gamma, \quad (1.4)$$

а скорость, индуцированная источником  $(\mathbf{r}_q, q)$  — по формуле

$$\mathbf{V}_q(\mathbf{r}) = \frac{1}{2\pi} \mathbf{K}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_q) \cdot q. \quad (1.5)$$

$\mathbf{K}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_i)$  можно вычислять несколькими способами:

1. Классическая формула для точечного вихря:  $\mathbf{K}_1 = \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta r^2}$ ,  $\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_i$
2. Для вихря Рэнкина:  $\mathbf{K}_2 = \begin{cases} \Delta \mathbf{r}/r_0^2, & \Delta r \leq r_0 \\ \Delta \mathbf{r}/\Delta r^2, & \Delta r > r_0 \end{cases}$   
(круг постоянной завихренности)

3. Для вихря Лэмба:  $\mathbf{K} = \mathbf{K}_3 = \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta r^2 + \delta^2}$

Мы пользуемся третьим способом. Эта формула удобнее и быстрее.

### 1.8.2 Flow

Название этой функции сложилось исторически. Она описывает влияние вихревого отрезка на точку, либо наоборот — вихря на отрезок. Короче, позволяет аналитически вычислить интеграл

$$\int_{\mathbf{c}_1}^{\mathbf{c}_2} [\mathbf{e}_z \times \mathbf{K}_2(\mathbf{r}, \mathbf{r}_\gamma)] \cdot d\mathbf{r} = \begin{pmatrix} \Re(z_V) \\ \Im(z_V) \end{pmatrix}, \quad (1.6)$$

$$z_V = \begin{cases} -i \cdot \log \left( \frac{z - z_1}{z - z_2} \right) \cdot \frac{|z_2 - z_1|}{z_2 - z_1} \\ - \left( z - \frac{z_1 + z_2}{2} \right) \cdot \frac{|z_2 - z_1|}{r_0^2} \end{cases}$$

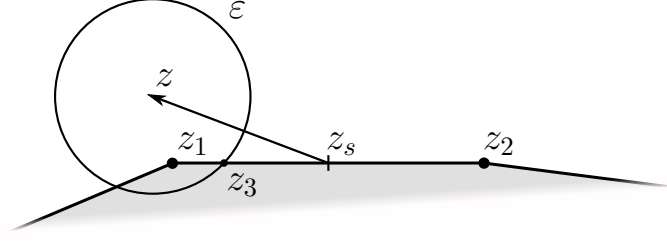
$$z = (r_{\gamma x}) - i(r_{\gamma y}), \quad z_{1,2} = (c_{1,2 x}) - i(c_{1,2 y}), \quad z_s = (r_{sx}) - i(r_{sy}) = \frac{1}{2}(z_1 + z_2)$$

Если один из концов отрезка является ближним, а другой дальним, отрезок делится на две части точкой  $z_3$ , для каждой из которых влияние вычисляется по своей формуле. Такое раздвоение вызвано тем, что под интегралом стоит функция  $\mathbf{K}_2$ , а не  $\mathbf{K}_3$ : ее удобнее интегрировать.

### 1.8.3 ConvectiveInfluence

Функция вычисляет интеграл нормальной скорости, индуцируемой единичным вихрем в точке  $\mathbf{r}_\gamma$  на отрезок  $[\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2]$ .

$$\begin{aligned} \Xi_\gamma(\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{r}_\gamma) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{c}_1}^{\mathbf{c}_2} [\mathbf{e}_z \times \mathbf{K}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_\gamma)] \cdot \mathbf{n} \cdot d\mathbf{r} = \\ &= \frac{1}{2\pi} \cdot \begin{cases} -\Re \left\{ \log \left( \frac{z - z_1}{z - z_2} \right) \right\}, & \text{для дальних} \\ \frac{1}{\epsilon^2} \Re \{ (z_s - z)(\bar{z}_2 - \bar{z}_1) \}, & \text{для ближних} \end{cases} \end{aligned} \quad (1.7)$$



В обычном случае, функцию для ближних вихрей удобней записать без использования комплексных чисел:  $\frac{1}{2\pi}(\mathbf{r}_{sb} - \mathbf{r}_v)\Delta\mathbf{l}_{sb}/\varepsilon^2$

Аналогичная формула  $\Xi_q$  вычисляет влияние единичного источника на отрезок.

$$\begin{aligned}\Xi_q(\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{r}_q) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{c}_1}^{\mathbf{c}_2} \mathbf{K}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_q) \cdot \mathbf{n} \cdot d\mathbf{r} = \\ &= -\frac{1}{2\pi} \cdot \begin{cases} \Im \left\{ \log \left( \frac{z - z_1}{z - z_2} \right) \right\}, & \text{для дальних} \\ \frac{1}{\varepsilon^2} \Im \{ (z_s - z)(\bar{z}_2 - \bar{z}_1) \}, & \text{для ближних} \end{cases} \end{aligned} \quad (1.8)$$

Без использования комплексных чисел формула для ближних источников принимает вид  $\frac{1}{2\pi}[\Delta\mathbf{l}_{sb} \times (\mathbf{r}_{sb} - \mathbf{r}_v)]/\varepsilon^2$

#### 1.8.4 SegmentInfluence

Эти формулы описывают скорость, индуцированную в точке  $\mathbf{r}_0$  отрезком  $[\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2]$  с линейным распределением источников интенсивностью от  $q_1$  до  $q_2$ . В отличие от предыдущих формул источники здесь точечные.

$z_{12} = (r - r_{12})_x + i(r - r_{12})_y$ ,  $r$  — точка наблюдения

$$\mathbf{V}_{sq}(z_1, z_2, q_1, q_2) = \frac{1}{2\pi} \int_{z_1}^{z_2} \frac{q}{z^*} dz = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{(z_2 - z_1)^*} \cdot \left( (q_2 - q_1) - \frac{q_2 z_1^* - q_1 z_2^*}{(z_2 - z_1)^*} \ln \frac{z_2^*}{z_1^*} \right) \quad (1.9)$$

#### 1.8.5 СЛАУ

Для вычисления циркуляций новых доменов, на каждом шаге решается система линейных алгебраических уравнений. Составлять ее можно несколькими способами, но в самом общем варианте в нее входит несколько типов условий:

1. Условие непротекания/прилипания. Мы используем интегральный вариант

$$\int \mathbf{V}_{\text{liquid}}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n} \cdot d\mathbf{r} = \int \mathbf{V}_{\text{body}}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n} \cdot d\mathbf{r}$$

Интеграл вычисляется по конткетному отрезку аналитически по формуле (1.8.3).  $\mathbf{V}_{\text{liquid}}$  — скорость жидкости, которая включает в себя индуцированную свободными и присоединенными вихрями, а так же скорость на бесконечности.  $\mathbf{V}_{\text{body}}$  — скорость самого отрезка (1.1).

2. Условие отсутствия возмущений на бесконечности. Если говорить кратко, то  $\sum \gamma = 0$ , что имеено подразумевается под  $\gamma$  зависит от конкретного случая; об этом будет рассказано позже.
3. Второй закон Ньютона.  $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ . Более подробно об этом позже.

Прежде чем расписывать каждое уравнение в отдельности, определимся с тем, что мы ищем. Неизвестными переменными на каждом временном шаге являются циркуляции новых доменов и скорости тела:  $\mathbf{V}_?$ ,  $\omega_?$ . Известными величинами являются скорость и циркуляция на бесконечности  $(\mathbf{V}_\infty, \Gamma_\infty)$ , скорость державки тела  $(\mathbf{V}, \omega)$ , коэффициенты упругости пружины  $(k_x, k_y, k_\alpha)$ . Вектор неизвестных величин составим следующим образом:

$$X_b = \left( \gamma_1 \quad \dots \quad \gamma_{N_s} \quad V_{?x} \quad V_{?y} \quad \omega_? \right)^T \quad (1.10)$$

Это для одного тела. Если тел несколько — итоговый вектор будет состоять из нескольких таких частей. Теперь придется подробно расписать каждое уравнение в системе.

### 1.8.6 Условие непротекания/прилипания

Говоря русским языком, жидкость не должна протекать внутрь тела. Мы используем интегральный вариант

$$\int \mathbf{V}_{\text{liquid}}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n} \cdot d\mathbf{r} = \int \mathbf{V}_{\text{body}}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n} \cdot d\mathbf{r}$$

Интеграл вычисляется по конткетному отрезку аналитически по формуле (1.8.3).

$\mathbf{V}_{\text{liquid}}$  — скорость жидкости, которая включает в себя индуцированную свободными и присоединенными вихрями, а так же скорость на бесконечности.  $\mathbf{V}_{\text{body}}$  — скорость самого отрезка (1.1).

Расписывая каждое слагаемое в отдельности получим уравнение для отрезка  $[\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2]$

$$\left( \Xi_\gamma(\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_s) \dots \quad a_I \quad a_{II} \quad a_{III} \right) \cdot X = -[\Delta \mathbf{l} \times \mathbf{V}_\infty] - \sum_{v=0}^{N_v} \Xi_\gamma(\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{r}_v) \cdot \gamma_v \quad (1.11)$$

Члены  $a_1, a_2, a_3$  получаются из влияния присоединенных вихрей (чья интенсивность определяется неизвестной скоростью тела). Аналитически  $a_1 = -\Delta l_y$ ,  $a_2 = \Delta l_x$ , но это утверждение еще надо проверить

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{c}_1}^{\mathbf{c}_2} \mathbf{V}(\mathbf{r}) \mathbf{n} dr &= \int_{\mathbf{c}_1}^{\mathbf{c}_2} \sum_{s=0}^{N_s} \left( \frac{\gamma_{\text{att } s}}{2\pi} \cdot [\mathbf{e}_z \times \mathbf{K}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_s)] + \frac{q_{\text{att } s}}{2\pi} \cdot \mathbf{K}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_s) \right) \cdot \mathbf{n} \cdot dr = \\ &= \sum_{s=0}^{N_s} \left( \underbrace{\gamma_{\text{att } s} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{c}_1}^{\mathbf{c}_2} [\mathbf{e}_z \times \mathbf{K}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_s)] \cdot \mathbf{n} \cdot dr}_{\Xi_\gamma(\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{r}_s)} + \underbrace{q_{\text{att } s} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{c}_1}^{\mathbf{c}_2} \mathbf{K}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_s) \cdot \mathbf{n} \cdot dr}_{\Xi_q(\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{r}_s)} \right) = \\ &= -V_{?x} \cdot \underbrace{\sum_{s=0}^{N_s} \begin{pmatrix} \Xi_\gamma \\ \Xi_q \end{pmatrix} \cdot \Delta \mathbf{l}_s}_{-a_I} - V_{?y} \cdot \underbrace{\sum_{s=0}^{N_s} \begin{pmatrix} \Xi_\gamma \\ \Xi_q \end{pmatrix} \times \Delta \mathbf{l}_s}_{-a_{II}} - \omega_{?} \cdot \underbrace{\sum_{s=0}^{N_s} \begin{pmatrix} \Xi_\gamma \\ \Xi_q \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} [\mathbf{r}_* \times \Delta \mathbf{l}_s] \\ -\mathbf{r}_* \cdot \Delta \mathbf{l}_s \end{pmatrix}}_{-a_{III}} \end{aligned} \quad (1.12)$$

### 1.8.7 Циркуляция = 0

Это может пригодиться, когда добавляется дополнительная перегородка, что бы обеспечить непротекание между телами. Пользоваться этим условием нужно очень аккуратно с полным пониманием того, что происходит в программе.

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot X = 0$$

### 1.8.8 Отсутствие возмущений для одного тела

Суть заключается в том, что бы данное тело не вносило возмущений на бесконечности. Изменение циркуляции на теле за данный шаг = 0. Это условие нельзя ставить на двух отрезках одного тела — матрица будет вырожденной.

$$\begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 & 0 & 0 & 2S \end{pmatrix} \cdot X = 2S \cdot \omega_\gamma(t - \Delta t) + \gamma_{\text{dead}}$$

### 1.8.9 Отсутствие возмущений на бесконечности

Помимо нечаянно проникших внутрь вихрей, возникают ошибки при решении СЛАУ, из-за чего может меняться суммарная циркуляция в пространстве. Что бы этого избежать, на одном из тел обязательно вместо предыдущего условия надо использовать данное. На двух телах данное условие ставить нельзя — это приведет к вырождению матрицы.

$$\begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 & 0 & 0 & 2S \end{pmatrix} \cdot X = - \sum_{v=0}^{N_v} \gamma_v - \Gamma_\infty$$

### 1.8.10 Второй закон ньютона

Теперь разберемся с силами. Что бы ничего не забыть, нужно учитывать гидродинамическую силу, действующую на данное тело; силу тяжести, Архимедову силу; силу действия пружины. Отдельно стоит упомянуть случай, когда пружина бесконечно жесткая. Тогда нужно записать просто, что скорость неизвестная равна известной.

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot X = \mathbf{V}_b$$

В соответствии с формулами 3.5.19, 3.5.20 в [?] (в другой версии книжки это 18.19 и 18.20) силы и момент давления вычисляются по формулам

$$\frac{\mathbf{F}_{\text{fluid}}}{\rho_0} = \frac{1}{\Delta t} \sum_{s=1}^{N_s} \Delta \gamma_s \cdot [\mathbf{e}_z \times \mathbf{c}_s] - \underbrace{\frac{1}{2} \sum_{s=1}^{N_s} [\mathbf{e}_z \times \Delta \mathbf{l}_s] \cdot V_s^2}_{\text{с предыдущего шага}} \quad (1.13)$$

$$\frac{M_{\text{fluid}}}{\rho_0} = \frac{1}{2\Delta t} \sum_{s=1}^{N_s} \Delta \gamma_s \cdot \mathbf{c}_*^2 - \underbrace{\frac{1}{2} \sum_{s=1}^{N_s} (\mathbf{r}_* \cdot \Delta \mathbf{l}_s) \cdot V_s^2}_{\text{с предыдущего шага}} \quad (1.14)$$

$\Delta \gamma_s$  — приращение циркуляции на отрезке за текущий шаг. Этот член очень коварен, он включает в себя 3 части: рожденную циркуляцию в узлах тела ( $\mathbf{c}_s$ ); удаленные на прошлом шаге вихри (их вклад мы предварительно

сохраним в  $\mathbf{F}_{\text{dead}}, M_{\text{dead}}$ ); а так же изменение присоединенной циркуляции (обозначим его  $\mathbf{F}_{\text{att}}, M_{\text{att}}$ ).

$\mathbf{V}_s$  — скорость отрезка в соответствии с (1.1). Берется с предыдущего шага.  $\mathbf{r}_* = \mathbf{r}_s - (\mathbf{R} + \Delta\mathbf{R})$ ,  $\mathbf{c}_* = \mathbf{c}_s - (\mathbf{R} + \Delta\mathbf{R})$  — координаты относительно оси вращения тела (1.1).

Последние суммы (которые с предыдущего шага), можно посчитать аналитически.

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} \sum [\mathbf{e}_z \times \Delta\mathbf{l}_s] V_s^2 &= -[\mathbf{e}_z \times \mathbf{V}_?] \omega_? S + \mathbf{r}_{*\text{com}} \omega_?^2 S \\ \frac{1}{2} \sum_{s=1}^{N_s} (\mathbf{r}_* \cdot \Delta\mathbf{l}_s) \cdot V_s^2 &= -\mathbf{r}_{*\text{com}} \mathbf{V}_? \omega_? S\end{aligned}$$

Влияние присоединенных вихрей на силу выпишем здесь отдельно

$$\begin{aligned}\frac{\mathbf{F}_{\text{att}}}{\rho_0} &= \dot{\mathbf{V}}_? S + [\mathbf{e}_z \times (3\mathbf{r}_{\text{com}} - \mathbf{r}_c)] \dot{\omega}_? S \\ \frac{M_{\text{att}}}{\rho_0} &= [\dot{\mathbf{V}}_? \times \mathbf{r}_{*\text{com}}] S - 2\dot{\omega}_? J_c\end{aligned}$$

Итого уравнение превращается в такое:

$$\begin{aligned}\frac{\mathbf{F}_{(1.13)}}{\rho_0} + \left( \frac{\rho_b}{\rho_0} - 1 \right) \mathbf{g} S - \frac{k}{\rho_0} \Delta\mathbf{R} \dot{\mathbf{V}}_? \frac{\rho_b}{\rho_0} S = \\ \frac{M_{(1.14)}}{\rho_0} + \left( \frac{\rho_b}{\rho_0} - 1 \right) [\mathbf{r}_{*\text{com}} \times \mathbf{g}] S - \frac{k_\alpha}{\rho_0} \Delta\alpha = \dot{\omega}_? \frac{\rho_b}{\rho_0} J_c \\ \left( \begin{array}{cccc} \frac{[\mathbf{e}_z \times \mathbf{c}]}{\Delta t} \dots & -\frac{S}{\Delta t} \left( \frac{\rho_b}{\rho_0} - 1 \right) & 0 & -\frac{S}{\Delta t} (3\mathbf{r}_{\text{com}} - \mathbf{r}_c) \end{array} \right) \cdot X = \\ - \left( \frac{\rho_b}{\rho_0} - 1 \right) \mathbf{g} S + k \Delta\mathbf{R} + \\ + \underbrace{\frac{\mathbf{F}_{\text{dead}}}{\rho_0} - \frac{\mathbf{F}_\tau}{\rho_0} - \left( \frac{\rho_b}{\rho_0} - 1 \right) S \frac{\mathbf{V}_?}{\Delta t} + \frac{1}{2} \sum_{s=1}^{N_s} [\mathbf{e}_z \times \Delta\mathbf{l}_s] \cdot V_s^2}_{\text{с предыдущего шага}} \quad (1.15)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left( \frac{c_*^2}{2\Delta t} \cdots r_{y*\text{com}} * \frac{S}{\Delta t} - r_{x*\text{com}} * \frac{S}{\Delta t} - \frac{J_c}{\Delta t} \left( \frac{\rho_b}{\rho_0} + 2 \right) \right) \cdot X = \\
& k_\alpha \Delta \alpha - \left( \frac{\rho_b}{\rho_0} - 1 \right) [\mathbf{r}_{*\text{com}} \times \mathbf{g}] S \\
& + \underbrace{\frac{M_{\text{dead}}}{\rho_0} - \frac{M_\tau}{\rho_0} - [\mathbf{r}_{*\text{com}} \times \mathbf{V}_?] \frac{S}{\Delta t} - J_c \frac{\omega?}{\Delta t} \left( \frac{\rho_b}{\rho_0} + 2 \right) - \mathbf{r}_{*\text{com}} \mathbf{V}_? \omega? S}_{\text{с предыдущего шага}} \quad (1.16)
\end{aligned}$$

## 1.9 Результаты

### 1.9.1 Силы и моменты

Повторим сказанное в (1.13, 1.14).

$$\mathbf{F}_{\text{fluid}} = \frac{1}{\Delta t} \sum_{s=1}^{N_s} \Delta \gamma_s \cdot [\mathbf{e}_z \times \mathbf{c}_s] - \underbrace{\frac{1}{2} \sum_{s=1}^{N_s} [\mathbf{e}_z \times \Delta \mathbf{l}_s] \cdot V_s^2}_{\text{с предыдущего шага}} \quad (1.17)$$

$$M_{\text{fluid}} = \frac{1}{2\Delta t} \sum_{s=1}^{N_s} \Delta \gamma_s \cdot \mathbf{c}_*^2 - \underbrace{\frac{1}{2} \sum_{s=1}^{N_s} (\mathbf{r}_* \cdot \Delta \mathbf{l}_s) \cdot V_s^2}_{\text{с предыдущего шага}} \quad (1.18)$$

$\Delta \gamma_s$  — приращение циркуляции на отрезке за текущий шаг (рожденные минус удаленные).

$\mathbf{V}_s$  — скорость отрезка в соответствии с (1.1). Берется с предыдущего шага.

$\mathbf{r}_* = \mathbf{r}_s - (\mathbf{R} + \Delta \mathbf{R})$  — положение отрезка относительно оси вращения тела (1.1).

Не стоит удивляться разрывам в графике сил при ускорении набегающего потока. Помимо этого Ньютоновского слагаемого *та* имеются эффекты связанные с присоединенной массой, которая зависит как от размеров, так и от формы тела.

### 1.9.2 Давление

Давление в точке вычисляется по формуле:

$$p(\mathbf{r}) - p_\infty = \frac{1}{2} (V_\infty^2 - V^2(\mathbf{r})) + \sum_i \mathbf{V}_i \mathbf{u}_i - \sum_{S=1}^{N_S} \left( \frac{\Delta \mathbf{l}_S}{\Delta t} \mathbf{u}_S \sum_{s=1}^{N_s} \Delta \gamma_s \right) \quad (1.19)$$



В этой формуле достаточно запутанные индексы, но на самом деле в них ничего страшного нет, если разобраться. Суммы вида  $\sum \mathbf{V}\mathbf{u}$  учитывают вклад движущихся вихрей и источников.  $\mathbf{V}$  — это скорость движения элемента, а  $\mathbf{u}$  — скорость, индуцированная им в точке наблюдения. В эту сумму входят свободные вихри, присоединенные вихри, присоединенные источники (значение интенсивности берется с прошлого шага).

Вторая сумма достаточно похожа на первую и по виду и по смыслу. Она предназначена для вычисления вклада рожденных вихрей и источников. Так как сумма рожденных циркуляций всегда равна нулю (как и сумма интенсивностей источников), то можно представить это рождение как перераспределение вдоль поверхности. В качестве скорости движения элемента используется величина  $\Delta l / \Delta t$  (элемент как бы сдвинулся из одного угла в соседний). А в качестве интенсивности этого элемента берется сумма всех предшественников плюс интенсивность, рожденная на данном отрезке. Таким образом из каждой вершины вытекает некоторая интенсивность, а втекает на некоторую величину больше. Таким образом некоторая величина как бы родилась здесь.

### 1.9.3 Касательное напряжение и сила трения

В физике есть такая величина, как касательное напряжение (shear stress)  $\tau_w = \mu \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=0}$ . Вычисляется оно из диффузионной скорости отталкивания от стенки, но с другими порядками суммирования.  $\tau_w = \sum_i W_d \gamma_i$ .  $i$  — индекс вихря;  $k$  — индекс отрезка. Для простоты используется тот факт, что вблизи стенки  $I_0 \approx \pi \varepsilon^2$  и целиком формула выглядит, как

$$\tau_{wk} = \frac{1}{\text{Re}} \frac{1}{\pi \varepsilon^2} \sum_i dS_k \cdot \gamma_i e^{-|\rho_i|/\varepsilon}$$

Что бы получить конечную силу, эту штуку надо проинтегрировать по поверхности. Это не сложно:

$$\mathbf{F}_\tau = \sum_k \tau_{wk} (\mathbf{p}_{k+1} - \mathbf{p}_k)$$

### 1.9.4 Температура в пространстве

Каждый тепловой домен представляет собой область конечного размера, интенсивность которой выражается как  $q_i = T \cdot dS$ . Что бы построить поле температур, и что бы оно было достаточно гладким, мы делаем предположение, что форма каждого теплового домена — ”Гауссова шапочка“. Отсюда и из условия нормировки получаем

$$T(\rho_i) = \frac{q_i}{\pi \varepsilon^2} e^{-|\rho_i|/\varepsilon^2}$$

### 1.9.5 Число Нуссельта

Локальный: Суммирование ведется по частицам, рожденным и умершим на данном отрезке.

$$\text{Nu}_{\text{loc}} = \frac{\text{Re} \cdot \text{Pr}}{\Delta t \Delta l \Delta T} \sum q_i$$

Средний: Суммирование по всем отрезкам. Для каждого тела свой.

$$\text{Nu}_{\text{avg}} = \frac{\sum (\Delta l_i \cdot \text{Nu}_{\text{loc}})}{\sum \Delta l_i}$$

Интегральный:

$$\text{Nu}_{\text{int}} = \sum (\Delta l_i \cdot \text{Nu}_{\text{loc}})$$

### 1.9.6 Линии тока

Линии тока можно построить двумя способами. Можно построить поле скорости, и загнать его в какой-нибудь TecPlot, но это черевато низкой точностью и дикими спиралями. А можно воспользоваться функцией тока (она же — векторный потенциал)  $\Psi : \text{rot } \Psi = \mathbf{V}$ . И тогда в двумере линии уровня  $|\Psi|$  будут являться линиями тока.

$$\Psi(\mathbf{r}) = -\frac{1}{2\pi} \sum_i \gamma_i \ln \left( \sqrt{(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)^2 + \delta^2} \right) = -\frac{1}{4\pi} \sum_i \gamma_i \ln (\Delta r^2 + \delta^2) - \text{вихрь.}$$

$$\Psi(\mathbf{r}) = -\frac{1}{2\pi} \sum_i q_i \arctg \left( \frac{\Delta r_y}{\Delta r_x} \right) - \text{источник.}$$

$$\Psi(\mathbf{r}) = \mathbf{r} \times \mathbf{V}_\infty - \text{бесконечность.}$$

## 1.10 Diffusive

### 1.10.1 Vortex diffusive

$\mathbf{r}$  - координаты текущего вихря (для которого вычисляем скорость)

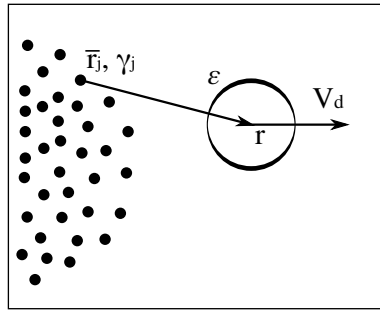
$\mathbf{V}_d$  - диффузионная скорость текущего вихря, индуцированная другими вихрями

$\varepsilon$  - расстояние от текущего вихря до 2го ближайшего

$\mathbf{r}_j, \gamma_j$  - координата j-го вихря и его циркуляция

$\boldsymbol{\rho}_j = \mathbf{r} - \mathbf{r}_j$  - и так понятно

$$\mathbf{I}_2 = \frac{1}{\varepsilon} \sum_j (\boldsymbol{\rho}_j / |\boldsymbol{\rho}_j|) \cdot \gamma_j e^{-|\boldsymbol{\rho}_j|/\varepsilon}, I_1 = \sum_j \gamma_j e^{-|\boldsymbol{\rho}_j|/\varepsilon}, \mathbf{V}_d = \frac{1}{\text{Re } I_1} \mathbf{I}_2$$



### 1.10.2 Body diffusive

$\mathbf{r}$  - координаты текущего вихря (для которого вычисляем скорость)

$\mathbf{W}_d$  - диффузионная скорость текущего вихря, индуцированная стенкой

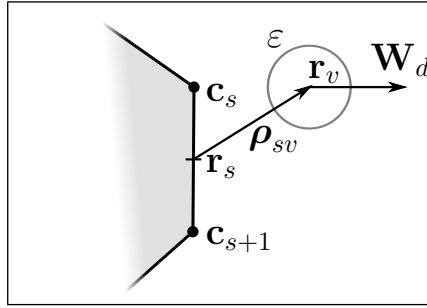
$\mathbf{p}_k$  - k-я вершина тела

$\mathbf{r}_k = \frac{1}{2}(\mathbf{p}_k + \mathbf{p}_{k+1})$  - центр k-го отрезка тела

$d\mathbf{S}_k = \mathbf{n} \cdot |\mathbf{p}_{k+1} - \mathbf{p}_k|$  - нормаль к k-му отрезку, с длиной, равной длине отрезка (направление — из тела в жидкость)

$\boldsymbol{\rho}_k = \mathbf{r} - \mathbf{r}_k$  - и так понятно

$$\mathbf{I}_3 = \sum_k d\mathbf{S}_k \cdot e^{-|\boldsymbol{\rho}_k|/\varepsilon}, I_0 = \varepsilon^2 \sum_k \frac{|\boldsymbol{\rho}_k|/\varepsilon + 1}{\rho_k^2} \cdot (\boldsymbol{\rho}_k \cdot d\mathbf{S}_k) \cdot e^{-|\boldsymbol{\rho}_k|/\varepsilon}, \mathbf{W}_d = \frac{1}{\text{Re } 2\pi\varepsilon^2 - I_0} \mathbf{I}_3$$



### 1.10.3 Heat diffusive

$$\mathbf{V}_{d\text{heat}} = \frac{1}{\text{Pr}} \frac{1}{\text{Re}} \cdot \frac{\mathbf{I}_2 + \mathbf{I}_3}{I_1 - I_0}$$

### 1.10.4 Ограничения $\mathbf{V}_d$ и $\varepsilon$

В новой версии все идиотизмы исправлены, и ограничение сделано максимально понятным:  $I_0$  и  $\gamma_i$  должны быть одного знака, и  $|I_0| > 0.1|\gamma_i|$ . Для  $\varepsilon$  вводится ограничение снизу  $\varepsilon > \langle dS_k \rangle$

## 1.11 FlowMove

### 1.11.1 Схема Эйлера (классика)

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{r}} &= \mathbf{V}(\mathbf{r}, t) \\ \Rightarrow \mathbf{r}_{i+1} &= \mathbf{r}_i + \mathbf{V}(\mathbf{r}_i, t_i) \cdot \Delta t\end{aligned}$$

### 1.11.2 Схема Эйлера с пересчетом

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{r}} &= \mathbf{V}(\mathbf{r}, t) \\ \Rightarrow \tilde{\mathbf{r}}_{i+1} &= \mathbf{r}_i + \mathbf{V}(\mathbf{r}_i, t_i) \cdot \Delta t \\ \Rightarrow \mathbf{r}_{i+1} &= \mathbf{r}_i + \frac{\mathbf{V}(\mathbf{r}_i, t_i) + \mathbf{V}(\tilde{\mathbf{r}}_{i+1}, t_{i+1})}{2} \cdot \Delta t\end{aligned}$$

А что бы не хранить 2 скорости (или старые координаты) для каждой частицы, да и вообще упростить работу с модулем, последнюю формулу перепишем в виде

$$\Rightarrow \mathbf{r}_{i+1} = \tilde{\mathbf{r}}_{i+1} + (-\mathbf{V}(\mathbf{r}_i, t_i) + \mathbf{V}(\tilde{\mathbf{r}}_{i+1}, t_{i+1})) \cdot \frac{\Delta t}{2}$$

### 1.11.3 Последовательность действий

1. ГУ не выполнены
2. Строим дерево
3. Берем скорости набегающего потока итд, заполняем СЛАУ
4. Решаем СЛАУ
5. Удаляем дерево
6. Сохраняемся: вихри, тела
7. Спускаем вихри, чернила, тепло
8. Сохраняем файл stepdata
9. Строим дерево
10. Считаем эпсилонь, объединяем вихри
11. Считаем скорости: Convective, Diffusive, Boundary; скорости чернил, тепла

Опционально: двигаем на пол шага, заменяем скорости на отрицательные.

Опционально: считаем вторую половину скоростей.

12. Двигаем вихри, тела, стриклайны; удаляем проникшие внутрь.

13.  $t+ = \Delta t$

## 1.12 Устойчивость и выбор параметров расчета

Согласно статье в ЖВМ, параметры расчета выбираются исходя из соображений устойчивости. Параметрами, которые мы можем менять, являются:  $N$  — число отрезков разбиения контура;

$\varepsilon_{min}$  — ограничение на эpsilon из диффузии;

$\Delta t$  — шаг по времени;

$r_d$  — радиус дискретности, он же эpsilon в конвективной скорости.

Дополнительные обозначения:

$\Delta l_i$  — длина  $i$ -го отрезка на теле, соответственно

$\langle \Delta l \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^N \Delta l_i$  — средняя длина отрезков.

$N$  обычно выбирается на глаз.

$\varepsilon_{min} = 0.6 \cdot \langle \Delta l \rangle$  — определено в модуле diffmergefast

$\Delta t = \text{Re} \varepsilon_{min}^2 < 2 \text{Re} \varepsilon^2$

$r_d = ?$  — а этот вопрос остается открытым

### 1.12.1 Схемная вязкость

$$\nu_{\text{cx}}^I = 0.018 \cdot \Omega_0^2 r_*^2 \Delta t$$

$$\nu_{\text{cx}}^{II} = 5 \cdot 10^{-4} \cdot \frac{\gamma_*^2 a}{r_d^3} \cdot \Delta t$$

Обозначения:

$r_*$  — характерный размер вихря (диаметр)

$\Omega_0 = \frac{\sum \gamma_i}{\pi r_*^2}$  — характерная завихренность

$\gamma_* = \langle \gamma_i \rangle$  — средняя циркуляция доменов

$a = \sqrt{\pi r_*^2 / N}$  — характерное расстояние между доменами

$r_d$  — радиус дискретности

## 1.13 Сохранение результатов

### 1.13.1 Бинарники с каждого шага

Первые 1024 байта — закладки. Каждая закладка 16 байт. 8 байт — название (восемь букв, и еще 8 — указатель (номер байта в файле)).

“Header ” — Общая инфа о режиме, задаваемая из мейн файла. И после этого последовательно по 8 байт  $\Delta t$ ,  $1/\nu$ ,  $V_{x\infty}$ ,  $V_{y\infty}$ , real time (timet), T.

“Vortexes”, “Heat ”, “StrkSrc ”, “Streak ”, “Body ” — различные списки. У каждого списка первые 8 байт занимает количество элементов  $N$ . Оставшиеся  $8 \cdot 3 \cdot N$  байт уходят на массив троек  $(r_x, r_y, g)$ . У списка “Body ” последней тройкой хранится (RotAxis.rx, RotAxis.ry,  $\omega$ )

### 1.13.2 Профили трения, давления, и теплоотдачи

Первые  $2 \cdot 4$ байта — TValues, N.

TValues — это enum.  $C_p = 1$ ,  $Fr = 2$ ,  $Nu = 4$ .

N — число отрезков на всех телах.

На каждом временном шаге сохраняется сначала текущее время (4 байта).

Далее идут группы по 3–5 floatов:  $(r_x, r_y, [C_p], [Fr], [Nu])$