

# Animacja paczek falowych Rydberga: Symulacja ewolucji czasowej stanów koherentnych dla $n=320$

Mateusz Budzyński

February 8, 2026

## 1 Równanie funkcji falowej

W celu ułatwienia obliczeń należy przejść do współrzędnych biegunowych, gdzie dwuwymiarowy operator Laplasjanu ( $\nabla^2$ ) przyjmuje postać:

$$\nabla^2 = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2}$$

Równanie funkcji falowej niezależnej od czasu w układzie biegunowym:

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu} \nabla^2 \Psi + V \Psi = E \Psi$$

Zakładając separację zmiennych w postaci:

$$\Psi(r, \phi) = R(r) \Phi(\phi)$$

## 2 Separacja Zmiennych

Pełną funkcję falową  $\Psi(r, \phi, t)$  można rozbić na składowe:

### 2.0.1 Równanie Radialne (używając podstawienia $u(r) = rR(r)$ ):

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{d^2 u(r)}{dr^2} + V_{eff}(r) u(r) = E u(r)$$

### 2.0.2 Równanie Kątowe:

$$\frac{d^2 \Phi(\phi)}{d\phi^2} = -m^2 \Phi(\phi)$$

## 3 Rozwiązania Równań i Przybliżenie Stanów Kołowych

Dla bardzo wysokich liczb kwantowych ( $n \gg 1$ ), funkcje falowe atomu wodoru dążą do granicy klasycznej. W przypadku **stanów kołowych** (ang. *circular states*), gdzie orbitalna liczba kwantowa jest maksymalna ( $l = n - 1$ ), rozwiązania równania  $R(r)$  można przybliżyć do znacznie prostszej formy.

### 3.0.1 Rozwiązanie Kątowe

Rozwiązaniem równania kątowego jest funkcja wykładnicza o czysto urojonym argumente:

$$\Phi(\phi) = e^{im\phi}$$

Dla stanów kołowych przyjmujemy  $m = n - 1$ .

### 3.0.2 Przybliżenie Radialne dla $n \approx 320$

Dokładne rozwiązanie równania radialnego wykorzystuje wielomiany Laguerre'a, jednak dla  $n = 320$  są one numerycznie niemożliwe do bezpośredniego obliczenia (osiągają wartości rzędu  $10^{600}$ ). Stosujemy więc przybliżenie wynikające z asymptotycznej postaci funkcji dla maksymalnego  $l$  i jednostek atomowych ( $Z = 1$ ):

$$R(r) \approx N \cdot r^{n-1} e^{-\frac{r}{n}}$$

W symulacji, aby uniknąć błędów przepełnienia (overflow), wartości te obliczono w skali logarytmicznej:

$$\ln(R(r)) \approx (n-1) \ln(r) - \frac{r}{n} + \ln(N)$$

### 3.0.3 Stała Normalizacyjna w skali logarytmicznej

Aby funkcja falowa była poprawnie znormalizowana (całkowite prawdopodobieństwo równe 1), należy uwzględnić stałą normalizacyjną  $N$ . Ze względu na operowanie na bardzo wysokich liczbach kwantowych, zastosowano przybliżenie Stirlinga dla silni, zapisane w formie logarytmicznej:

$$\ln(N) \approx -\frac{1}{2} \left[ 2n \ln(2n) - 2n + \frac{1}{2} \ln(4\pi n) \right] + \left( n + \frac{1}{2} \right) \ln \left( \frac{2}{n} \right)$$

## 4 Sumaryczna Postać Paczki Falowej (Superpozycja)

Paczka falowa widoczna na animacji nie jest pojedynczym stanem stacjonarnym, lecz **superpozycją** wielu stanów własnych. Każdy składnik sumy jest modyfikowany przez wagę Gaussa  $w_n$  oraz czynnik ewolucji czasowej:

$$\Psi(r, \phi, t) = \sum_n w_n \cdot R_n(r) e^{i(n-1)\phi} e^{-iE_n t}$$

Gdzie energia (w j.u.) wynosi  $E_n = -\frac{1}{2n^2}$ .

**Równanie wagi ( $w_n$ ):** W symulacji zastosowano rozkład Gaussa:

$$w_n = \exp \left( -\frac{(n - \bar{n})^2}{4\sigma^2} \right)$$

```
[1]: import sympy as sp
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
```

```

from matplotlib import cm
from matplotlib.animation import FuncAnimation, FFMpegWriter
from IPython.display import HTML

sp.init_printing(use_latex='mathjax')

```

```

[2]: # import matplotlib
# matplotlib.rcParams['animation.embed_limit'] = matplotlib.rcParams['animation.
    ↪ embed_limit'] * 10
# matplotlib.use('WebAgg')

```

```

[3]: n, n_avg, sigma = sp.symbols(r'n \bar{n} sigma')
phi, r, t = sp.symbols('phi r t')
R = sp.symbols('R(r)')

```

```

[4]: weight_expr = sp.exp(-(n - n_avg)**2 / (4*sigma**2))
weight_expr

```

```

[4]: 
$$e^{-\frac{(-\bar{n}+n)^2}{4\sigma^2}}$$


```

```

[5]: angular_phase_expr = sp.exp(sp.I * (n - 1) * phi)
angular_phase_expr

```

```

[5]: 
$$e^{i\phi(n-1)}$$


```

```

[6]: time_phase_expr = sp.exp(sp.I * t / (2 * n**2))
time_phase_expr

```

```

[6]: 
$$e^{\frac{it}{2n^2}}$$


```

```

[7]: Psi_total_expr = weight_expr * R * angular_phase_expr * time_phase_expr
Psi_total_expr

```

```

[7]: 
$$R(r)e^{-\frac{(-\bar{n}+n)^2}{4\sigma^2}}e^{\frac{it}{2n^2}}e^{i\phi(n-1)}$$


```

```

[8]: log_norm_expr = -1/2 * ((2*n)*sp.log(2*n) - (2*n) + 1/2*sp.log(2*sp.pi*2*n)) +
    ↪ (n + 1/2)*sp.log(2/n)

log_radial_part_expr = (n - 1) * sp.log(r + 1e-10) - (r / n)

# COMBINED LOG EXPONENT
# Dostajemy całą stałą normalizującą przy czym dodajemy zamiast mnożyć bo sq
    ↪ zlogarytmowane
# Normalnie byśmy je mnożyli
combined_log_expr = log_radial_part_expr + log_norm_expr
combined_log_expr

```

```

[8]: 
$$-1.0n \log(2n) + 1.0n + (n - 1) \log(r + 1.0 \cdot 10^{-10}) + (n + 0.5) \log\left(\frac{2}{n}\right) - 0.25 \log(4\pi n) - \frac{r}{n}$$


```

```

[ ]: # Stałe z artykułu
N_AVG = 320
SIGMA = 2.5
RESOLUTION = 300

Psi_total_lambda = sp.lambdify((r, phi, t, n, R), Psi_total_expr.subs({sigma :  $\sigma$ 
    ↪ SIGMA, n_avg : N_AVG}), 'numpy')
combined_log_lambda = sp.lambdify((r, n), combined_log_expr, 'numpy')

# poziomy energetyczne które będziemy uwzględniać na naszym wykresie
# ('3 * standardowe odczylenie zgarnia ~99.7% pakietów energetycznych' ~ Gemini)
n_range = np.arange(int(N_AVG - 4*SIGMA), int(N_AVG + 4*SIGMA) + 1)

# Wzięcie odległości R dla których prawdopodobieństwo ma sens (nie jest ~0)
r_min = N_AVG**2 - (40 * N_AVG)
r_max = N_AVG**2 + (40 * N_AVG)

r_vals = np.linspace(r_min, r_max, RESOLUTION)

phi_vals = np.linspace(0, 2*np.pi, RESOLUTION)

R, PHI = np.meshgrid(r_vals, phi_vals)

# Kepler Period  $T = 2 * \pi * n^3$ 
T_kepler = 2 * np.pi * (N_AVG**3)
# Przybliżony czas na powrót do stanu początkowego
T_rev = (N_AVG / 3) * T_kepler

def update(frame_fraction):
    ax.clear() # Clear the previous mountain

    Psi_total = np.zeros_like(R, dtype=np.complex128)

    X = R * np.sin(PHI)
    Y = R * np.cos(PHI)

    curr_t = frame_fraction*T_rev

    for n in n_range:
        c_1 = combined_log_lambda(R, n)
        c_max = np.max(c_1)

        Psi_total += Psi_total_lambda(R, PHI, curr_t, n, np.exp(c_1 - c_max))

    Prob_Density = np.abs(Psi_total)**2

    Z = Prob_Density/np.max(Prob_Density)

```

```

# Redraw the surface
surf = ax.plot_surface(X, Y, Z, cmap='CMRmap',
                      linewidth=0, antialiased=True,
                      rcount=500, ccount=300)

ax.set_title(f"Rydberg Wave Packet (n={N_AVG}, FPS={FPS})\nTime =_
↪{frame_fraction:.3f} $T_{\{{rev}}\}$")
ax.set_zlim(0, np.max(Z) * 1.1)
return surf,

# Stałe do animacji, przy SMOOTHNESS = 0.0117 zajmuje dość długo (nie wiem ile)
# ale jak się zmniejszy smoothness do np 0.1 to będzie się kompilowało szybciej_
↪ale kosztem słabszej animacji

# Liczba klatek na sekundę
FPS = 15

# Czas w jednostkach T_rev (czasu odrodzenia)
# 1 oznacza powrót do stanu początkowego, nie dokońca bo tak naprawdę to 0.99_
↪ale blisko tego
FROM_TF = 0
TO_TF = 0.9883 # 0.9883 <- aby fajnie się zapętleło

# Parametr kontrolujący gęstość próbkowania czasu
SMOOTHNESS = 0.1 # 0.0117 <- aby animacja była ładna (zwiększając zminiejsza_
↪się ilość odległość między t_i a t_{i-1})

fig, ax = plt.subplots(subplot_kw={"projection": "3d"}, figsize=(10, 8))

frames = np.linspace(FROM_TF, TO_TF, int((TO_TF - FROM_TF)/SMOOTHNESS * FPS))

ani = FuncAnimation(fig, update, frames=frames, interval=1000/FPS)

plt.close()
HTML(ani.to_jshtml())

```

## 5 Bibliografia

- Gaeta, Z. D., & Stroud Jr, C. R. (1990). *Classical and quantum-mechanical dynamics of a quasiclassical state of the hydrogen atom*. Physical Review A, 42(11), 6308–6319.