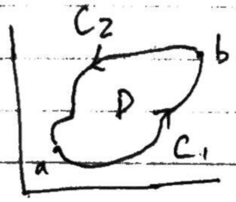
Yasmine Khairatun Hisan (H0612410027)

1) Green's Theorem

Misal C suatu kurva tertutup sederhana yang mulus sepotong-potong dan merupakan batas dari suatu daerah D pada bidang XOY. $P(x,y)$ dan $Q(x,y)$ adalah fungsi-fungsi yang kontinu serta mempunyai turunan yang kontinu pada D yang batasnya C, maka

$$\oint_C (P\,dx + Q\,dy) = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy$$



$$F = P\,dx + Q\,dy$$

$$\int_{C_1} P\,dx + Q\,dy \quad , \quad \int_{C_2} P\,dx + Q\,dy$$

Contoh : Misal C adalah batas daerah dengan titik sudut (0,0), (1,0), (1,1), (0,1).
Hitung $\oint_C (xy\,dx + x^2\,dy)$

Untuk C_1, $y=0$ maka $dy=0$
$$\oint_C (xy\,dx + x^2 dy) = \int_0 0\,dx = 0$$

Untuk C_2, $x=1$ maka $dx=0$
$$\oint_C (xy\,dx + x^2 dy) = \oint_0 1^2\,dy = y\Big|_0^1 = 1$$

Untuk C_3, $y=1$ maka $dy=0$
$$\oint_C (xy\,dx + x^2 dy) = \oint_1^0 x\,dx = \frac{1}{2}x^2\Big|_1^0 = -\frac{1}{2}$$

Untuk C_4, $x=0$ maka $dx=0$
$$\oint_C (xy\,dx + x^2 dy) = \oint_1 0\,dy = 0$$

$\hookrightarrow 0 + 1 + \left(-\frac{1}{2}\right) + 0 = \frac{1}{2}$.

$$= \oint_C (xy\,dx + x^2\,dy) = \int_0^1\!\!\int_0^1 \left(\frac{\partial}{\partial x}x^2 - \frac{\partial}{\partial y}xy\right) dx\,dy = \int_0^1\!\!\int_0^1 2x - x\,dx\,dy = \int_0^1\!\!\int_0^1 x\,dx\,dy$$

$$\int_0^1\!\!\int_0^1 x\,dx\,dy = \int_0^1 \left[\frac{x^2}{2}\Big|_0^1\right] dy = \int_0^1 \frac{1}{2}\,dy = \frac{y}{2}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}$$

2) Surface Integral

- Integral garis memperumum integral tentu, sedangkan integral permukaan memperumum integral lipat 2.
- Misal permukaan G berupa grafik $z = f(x,y)$, P partisi yang membagi R menjadi n persegi panjang bagian R_j. dan berpotongan dengan partisi permukaan G_j.

• Pilih titik contoh $(\bar{x}_i ; \bar{y}_i) \in R$ dan titik yang berpadanan di R_j. yaitu $(\bar{x}_i; \bar{y}_i; \bar{z}_i) = (\bar{x}_i, \bar{y}_i, f(\bar{x}_i, \bar{y}_i))$.
Sehingga didefinisikan integral permukaan $\iint_G g(x,y,z)\,ds = \lim_{\|P\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} g(\bar{x}_i, \bar{y}_i, \bar{z}_i)\,\Delta S_i$

Di mana ΔS_i = luas G_i

Contoh : Hitung integral $\iint_G e^x\,dS$. Di mana G adalah permukaan $z = \sqrt{2}x + y + 1$, $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$

$\iint_G e^x\,ds$

$dS = \sqrt{z_x^2 + z_y^2 + 1}\,dA$

$z_x = \sqrt{2}$

$z_y = 1$

$dS = \sqrt{2+1+1}\,dA$

$dS = 2\,dA$

$\Rightarrow \iint_G e^x\,dS = \iint_{G} 2e^x\,dx\,dy$

$= \int_0^1\int_0^1 2e^x\,dx\,dy$

$= \int_0^1 2e^x\,dy$

$= \int_0^1 2e^x\Big|_0^1\,dy$

$= \int_0^1 2e - 2\,dy$

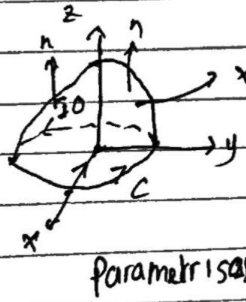
$= (2e-2)\,y\Big|_0^1$

$= 2e - 2$

3) Stokes's Theorem

Misal S permukaan piece wise-smooth yang batasnya adalah kurva tertutup sederhana C dengan orentasi postif. Misalkan F adalah medan vektor yang semua komponennya mempunyai turunan parsial yang kontinu pada suatu himpunan buka yang memuat S, maka :

$$\oint_C F \cdot dr = \iint_S \text{curl } F \cdot dS$$



Parametrisasi permukaan

$x = \cos\theta \sin\phi,\ y = \sin\theta\sin\phi,\ z = \cos\phi$

$0 \le \theta < 2\pi,\ 0 \le \phi \le \pi/2$

$r(\theta,\phi) = \langle x(\theta,\phi), y(\theta,\phi), z(\theta,\phi)\rangle$

Parametrisasi C

$r(t) = \langle \cos t, \sin t, 0\rangle,\ 0 \le t \le 2\pi$

$\int_C F \cdot dr = \int_0^{2\pi} F \cdot \langle -\sin t, \cos t, 0\rangle\,dt$

$= \int_0^{2\pi} \langle 0, \cos t, \sin t\rangle \cdot \langle -\sin t, \cos t, 0\rangle\,dt$

$= \int_0^{2\pi} \cos^2 t\,dt$

$\Rightarrow \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} 1 + \cos 2t = \frac{1}{2}\left[t + \frac{1}{2}\sin 2t\right]_0^{2\pi} = \pi.$

4) Triple Integrals.

Teorema Fubini

Jika f kontinu pada kotak $B = \{(x,y,z) \mid a \le x \le b,\ c \le y \le d,\ r \le z \le s\}$
$= [a,b] \times [c,d] \times [r,s]$

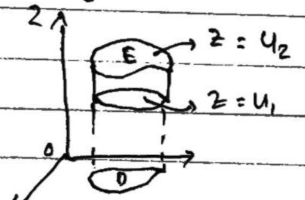
$$\iiint_B f(x,y,z)\,dV = \int_a^b \int_c^d \int_r^s f(x,y,z)\,dz\,dy\,dx = \int_r^s \int_c^d \int_a^b f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

Kasus pertama :

$E = \{(x,y,z) \mid (x,y) \in D,\ u_1(x,y) \le z \le u_2(x,y)\}$

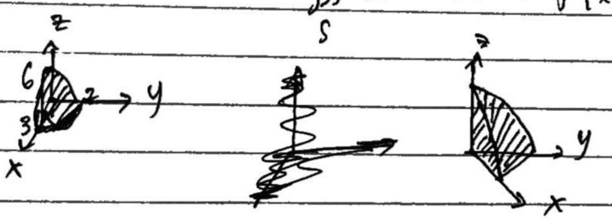
D : proyeksi E pada bidang-xy

$$\iiint_E f(x,y,z)\,dV = \iint_D \left[\int_{u_1(x,y)}^{u_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz \right] dA$$



Hitung $\iiint_S 2x\,dV$ dimana S adalah daerah di bawah bidang $2x + 3y + z = 6$ pada kuadran pertama.

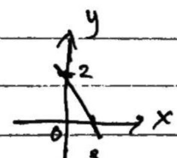
$\iiint_S 2x\,dV$ artinya $f(x,y,z) = 2x$



$2x + 3y + z = 6$

$z = 6 - 2x - 3y$

$0 \le z \le 6 - 2x - 3y$



$2x + 3y = 6$

$y = 2 - \frac{2}{3}x$

$x = 3 - \frac{3}{2}y$

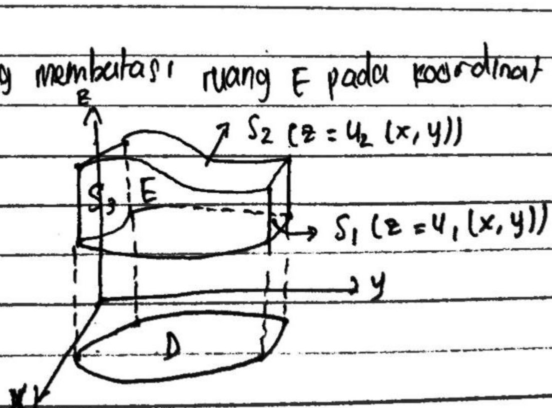
$$\iiint_S 2x\,dV = \iint_D \left[\int_0^{6-2x-3y} \right]$$

$$= \int_0^3 \int_0^{2-\frac{2}{3}x} \int_0^{6-2x-3y} 2x\,dz\,dy\,dx$$

5) Divergence Theorem

Apabila, terdapat permukaan tertutup S yang membatasi ruang E pada koordinat 3D, maka akan berlaku :

$$\iint_S \vec{F} \cdot n\,dS = \iiint_E \operatorname{div} \vec{F}\,dV$$



Disebut dengan Teorema Divergensi Gauss

Teorema Divergensi Gauss

Diberikan E berupa ruang sederhana dengan S adalah permukaan/bidang tertutup yang membatasi E.
Apabila terdapat medan vektor $\vec{F} = P\hat{i} + Q\hat{j} + R\hat{k}$, dan vektor normal n, maka fluks dari $\vec{F}$ yang keluar dari ruang E, dinyatakan dengan :

$$\iint_S \vec{F} \cdot n \, dS = \iiint_E \operatorname{div} \vec{F} \, dV = \iiint_E \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dz \, dy \, dx .$$