Nama : Yasmine Khairatun Hisan
~~NIM~~ : H0602410082
Kelas : B

No.
Date . .

2.4 Gradient, Divergence, and Curl
Del / Nabla

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}$$

1. Gradien $\phi(x, y, z) \rightarrow$ hasil akhir vektor
vektor turunan parsial fungsi skalar, menunjukkan arah dan laju perubahan max.

$$\nabla\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\hat{k}$$

contoh : permukaan $x^2y + 2xz = 4$
normal vektor di titik $(2, -2, 3)$

$$\nabla(x^2y + 2xz) = (2xy + 2z)\hat{i} + (x^2)\hat{j} + (2x)\hat{k}$$
$$= (2(2)(-2) + 2(3))\hat{i} + (2^2)\hat{j} + (2(2))\hat{k}$$
$$= -2\hat{i} + 4\hat{j} + 4\hat{k}$$

2. Diverdensi $\rightarrow$ hasil akhir skalar dot vektor
skalar yang mengukur seberapa banyak medan vektor di satu titik

$$\nabla \cdot A = \left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}\right) \cdot (A_1\hat{i} + A_2\hat{j} + A_3\hat{k})$$

$$\text{div} A = \frac{\partial A_1}{\partial x} + \frac{\partial A_2}{\partial y} + \frac{\partial A_3}{\partial z}$$ $\rightarrow$ penurunan thd x, y, z

contoh: $A = x^2z\hat{i} - 2y^3z^2\hat{j} + xy^2z\hat{k}$
$\text{div} A = 2xz - 6y^2z^2 + xy^2$, misal ditanya div $A(1,-1,0)$:
$= 0 - 0 + 1(-1)^2 = 1$.

3. Curl $\rightarrow$ cross vektor
$\nabla \times A$ $\quad A = xz^3\hat{i} + 2x^2yz\hat{j} + 2yz^4\hat{k}$

$$\nabla \times A = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xz^3 & 2x^2yz & 2yz^4 \end{vmatrix} = \left[\frac{\partial(2yz^4)}{\partial y} - \frac{\partial(2x^2yz)}{\partial z}\right]\hat{i} - \left[\frac{\partial(2yz^4)}{\partial x} - \frac{\partial(xz^3)}{\partial z}\right]\hat{j} + \left[\frac{\partial(2x^2yz)}{\partial x} - \frac{\partial(xz^3)}{y}\right]\hat{k}$$

cara operasinya seperti matriks, selain yang dikerjakan ditutup

$$= (2z^4 - 2x^2y)\hat{i} - (0 - 3xz^2)\hat{j} + (4xyz - 0)\hat{k}$$
$$= (2z^4 - 2x^2y)\hat{i} + 3xz^2\hat{j} + 4xyz\hat{k}$$

Date . .

2.6 Double Integral

Double integral digunakan untuk menghitung volume, massa, atau integral fungsi 2 variabel di atas suatu wilayah R dengan rumus umum. Fungsi vektor G dikatakan konservatif jika itu bisa ditulis dalam gradien skalar.

Konsep Awal

- Dalam menghitung $\int_a^b f(x)\,dx$
- Selang (a,b) dipartisi menjadi selebar Δx.
- Dari setiap partisi dibuat persegi panjang yang setinggi kurva
- Dengan membuat Δx cukup kecil, maka jumlah luas persegi panjang ini akan setara dengan luas di bawah kurva satu peubah $f(x)$.

Misal $f(x,y)$ kontinu di $R = [a,b] \times [c,d]$ maka

$$\iint_R f(x,y)\,dA = \int_a^b \int_c^d f(x,y)\,dy\,dx = \int_c^d \int_a^b f(x,y)\,dx\,dy$$

Urutan integral dilakukan dari "bagian dalam" variabel yang tidak dikaji di integral "bagian dalam" dianggap seperti konstanta.

$$\int_a^b \int_c^d f(x,y)\,dy\,dx = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy \right) dx.$$

contoh :

1. $\int_0^1 \int_0^1 x e^{xy}\,dy\,dx$
$= \int_0^1 e^{xy} \Big|_0^1 dx$
$= \int_0^1 e^x - 1\,dx$
$= e^x - x \Big|_0^1$
$= e - 1 - (1-0)$
$= e - 2$

2. $\int_0^2 \int_{-x}^{x} e^{-x^2}\,dy\,dx$
$= \int_0^2 e^{-x^2}\, y \Big|_{-x}^{x} dx$
$= \int_0^2 2x\, e^{-x^2}\,dx$
$= -e^{-x^2} \Big|_0^2$
$= -e^{-4} - (-1)$
$= 1 - e^{-4}$

3. Hitung integral dengan terlebih dahulu merubahnya dalam koor polar!

$\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-y^2}} \sin(x^2+y^2)\,dx\,dy$

$\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-y^2}} \sin(x^2+y^2)\,dx\,dy$

$= \int_0^{\pi/2} \int_0^1 \sin(r^2)\, r\,dr\,d\theta$

$= \int_0^{\pi/2} \cos(r^2) \times \frac{1}{-2} \Big|_0^1 d\theta$

$= \frac{1}{-2} \int_0^{\pi/2} \cos(1) - 1 \Big|_0^1 d\theta$

$= \frac{\cos(1) - 1}{-2}\, \theta \Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4}(1 - \cos 1)$

fungsinya dan batasnya

1. fungsi $\sin(x^2+y^2) = \sin(r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta) = \sin(r^2)$
2. Batas
$x = 0$ sampai $x = \sqrt{1-y^2}$
$x^2 = 1 - y^2 \rightarrow x^2 + y^2 = 1.$
Dalam r dan θ
$r : 0 \rightarrow 1$
$\theta : 0 \rightarrow \pi/2$

Date

2.5 Path Independence

adalah integral garis dari suatu medan vektor $\overline{F}$ untuk kurva C yang bernilai sama walaupun bentuk kurva berbeda asal ujung-ujungnya tetap.

Teorema 1.

Andai C kurva mulus sepotong-potong yang secara parameter diberikan oleh $r = (t)$, $a \le t \le b$, yang dimulai di $a = r(a)$ dan berakhir di $b = r(b)$. Jika f dapat di deferensialkan secara kontinu pada suatu himpunan terbuka yang mengandung C, maka:

$$\int_c \nabla f(r) \cdot dr = f(b) - f(a)$$

Bukti : $\int_c \nabla f(r) \cdot dr = \int_a^b [\nabla f(r(t)) \cdot r'(t)]\, dt$

$$= \int_a^b \frac{d}{dt}[f(r(t))]\, dt = f(r(b)) - f(r(a)).$$

$$= f(b) - f(a)$$

Teorema.

Andai C kurva mulus sepotong-potong yang secara parameter diberikan oleh $r = r(t)$, $a \le t \le b$, yang dimulai $a = r(a)$, berakhir $b = r(b)$. Jika f di deferensialkan secara kontinu pada suatu himpunan terbuka yang mengandung C:

$$\int_c \nabla f(r) \cdot dr = f(b) - f(a)$$

Pada R3 juga berlaku demikian. Apabila f fungsi tiga perubah dan C kurva dengan titik awal $A(x_1, y_1, z_1)$ dan titik akhir $B(x_2, y_2, z_2)$ maka:

$$\int_c \nabla f(r) \cdot dr = f(x_2, y_2, z_2) - f(x_1, y_1, z_1)$$

Teorema 2.

F(t) medan vektor kontinu pada suatu himpunan tersambung terbuka D. Integral $\int_c F(r) \cdot dr$ bebas lintasan jika $F(t) = \nabla \cdot f(r)$ untuk fungsi skalar f, jika F medan vektor konservatif.

$$\int_c F(r) \cdot dr = \int_{c_1} F(r) \cdot dr + \int_{c_2} F(r) \cdot dr$$

$$= \int_{c_1} F(r) \cdot dr - \int_{c_2} F(r) \cdot dr = \int_{c_1} F(r) \cdot d - \int_{c_1} F(r) \cdot dr.$$

Teorema 3.

$F = Mi + Nj + Pk$ dengan M, N, P kontinu bersama-sama dengan turunan parsial tingkat pertama dalam himpunan tersambung terbuka D tanpa lubang. F konservatif ($F = \nabla f$) jika curl $F = 0$. Maka:

$$\left.\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \quad \frac{\partial M}{\partial z} = \frac{\partial P}{\partial x} \quad \frac{\partial N}{\partial z} = \frac{\partial P}{\partial y}\right\} \text{pers. Diferensial Biasa}$$

Untuk $F = Mi + Nj$ medan konservatif pada D jika $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$