Отчет Будзинского С.С., 601, по практическому заданию №1 по курсу «Методы прикладной математики в естествознании и медицине»

Рассматривается автокаталитическая химическая реакция, происходящая на поверхности катализатора и описывающаяся системой дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= k_1(1-x-2y) - k_{-1}x - k_3x(1-x-2y) + k_{-3}y - k_2(1-x-2y)^2x \\ \frac{dy}{dt} &= k_3x(1-x-2y) - k_{-3}y, \end{aligned} \tag{1}$$

где $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$, $0 \le x + 2y \le 1$ и все параметры $k_{\pm j}$ положительны. В качестве базового набора параметров возьмем

$$k_1 = 0.12,\ k_{-1} = 0.01,\ k_3 = 0.0032,\ k_{-3} = 0.002,\ k_2 = 0.95.$$

1 Однопараметрический анализ по k_1

Из уравнения (1) выразим $y = y(x, k_3, k_{-3})$ и $k_1 = k_1(x, k_{-1}, k_3, k_{-3}, k_2)$, где (x, y) – стационарное решение уравнения. При фиксированных значениях параметров k_{-1}, k_3, k_{-3}, k_2 мы теперь можем построить графики зависимостей (x, y) от k_1. Отслеживая смены знака якобиана системы (1) на стационарном решении, мы находим точки бифуркации.

На Рисунке 1 показаны результаты однопараметрического анализа для различных значений k_{-3}; на Рисунке 2 – для различных значений k_{-1}. Если значение параметра явно не указано, то оно берется из базового набора. Черными маркерами отмечены точки бифуркаций.

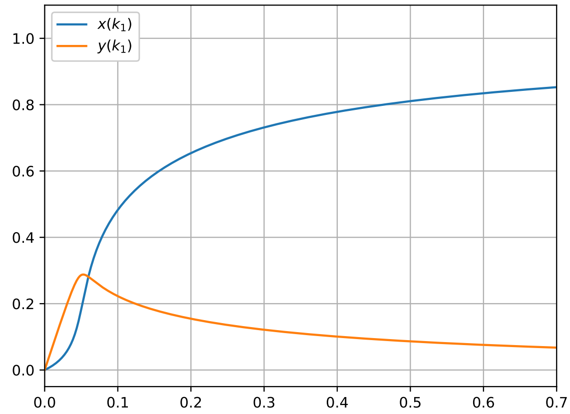
2 Двухпараметрический анализ по (k_1, k_2)

На плоскости параметров (k_1, k_2) проведем линии кратности и нейтральности для (1). Чтобы построить линии кратности, будем изучать точки покоя системы (1) при дополнительном условии вырожденности матрицы Якоби. Из системы теперь уже трех уравнений получим зависимости $k_1 = k_1(x, k_3, k_{-3}, k_{-1})$ и $k_2 = k_2(x, k_3, k_{-3}, k_{-1})$ и построим параметрическую кривую, варьируя x в пределах от 0 до 1 при фиксированных значениях k_3, k_{-3}, k_{-1}. Для построения линий нейтральности, условие вырожденности матрицы Якоби заменим на равенство нулю ее следа и продолжим по той же схеме.

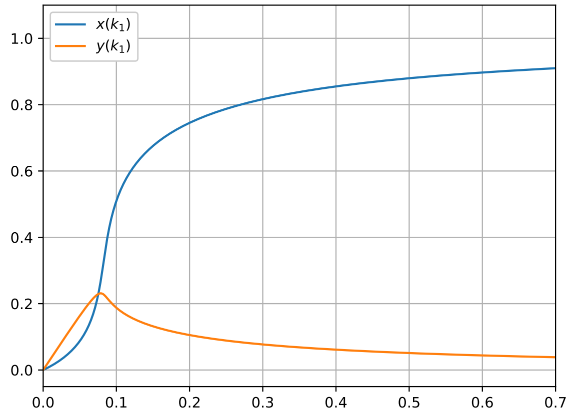
На Рисунке 3 представлены линии нейтральности и кратности на плоскости параметров (k_1, k_2) при $k_3 = 0.0032, k_{-1} = 0.01, k_{-3} = 0.001$.

Основываясь на Рисунке 3, построим автоколебательное решение системы (1). Будучи одновременно в области единственности стационарного решения и в области положительности следа матрицы Якоби, параметры $k_1 = 0.09$ и $k_2 = 1$ гарантируют существование устойчивого предельного цикла, что подтверждается Рисунком 4 фазового портрета.

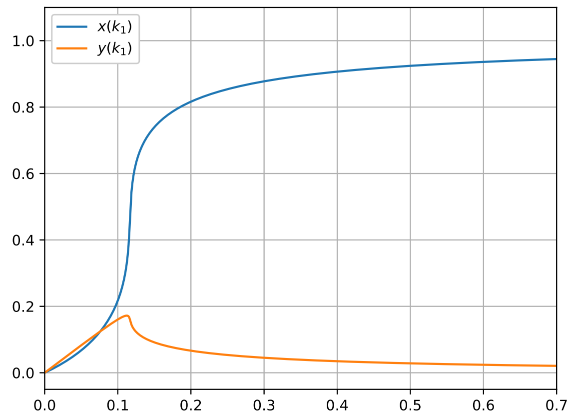
На Рисунке 5 показана эволюция решения стартовавшего из точки $(0.38, 0.22)$, находящейся внутри предельного цикла, при параметрах $k_3 = 0.0032, k_{-1} = 0.01, k_{-3} = 0.001, k_1 = 0.09$, $k_2 = 1$. Решение выходит на колебательный режим.



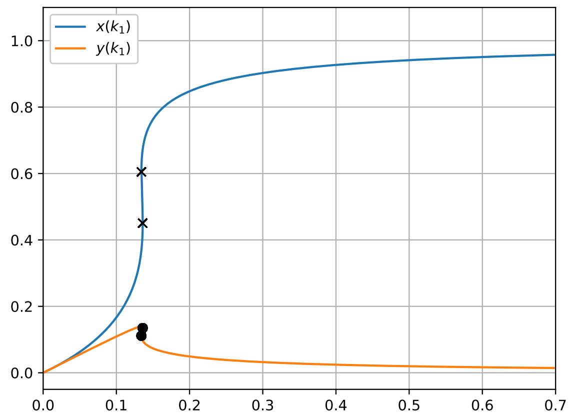
(a) $k_{-3} = 5 \cdot 10^{-4}$



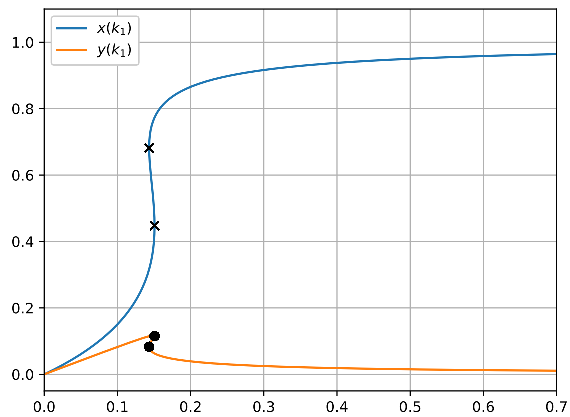
(b) $k_{-3} = 1 \cdot 10^{-3}$



(c) $k_{-3} = 2 \cdot 10^{-3}$

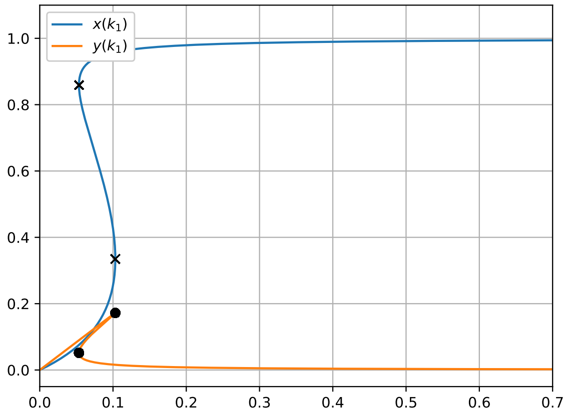


(d) $k_{-3} = 3 \cdot 10^{-3}$

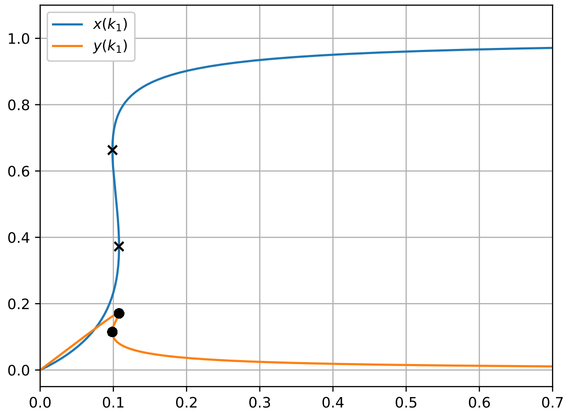


(e) $k_{-3} = 4 \cdot 10^{-3}$

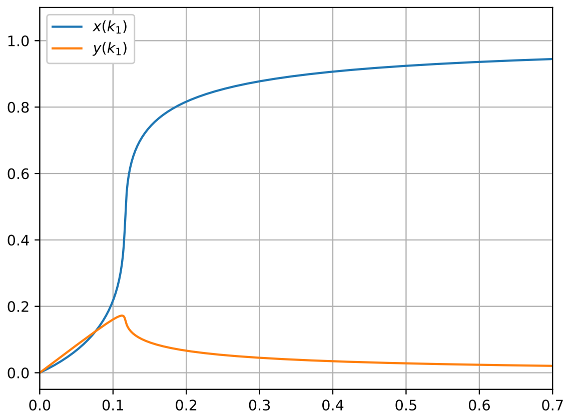
Рис. 1: $k_{-1} = 1 \cdot 10^{-2}$



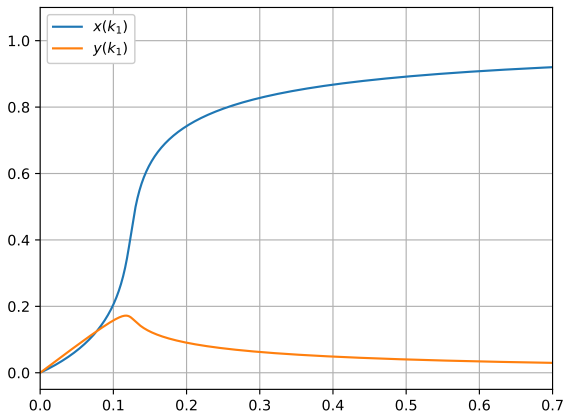
(a) $k_{-1} = 1 \cdot 10^{-3}$



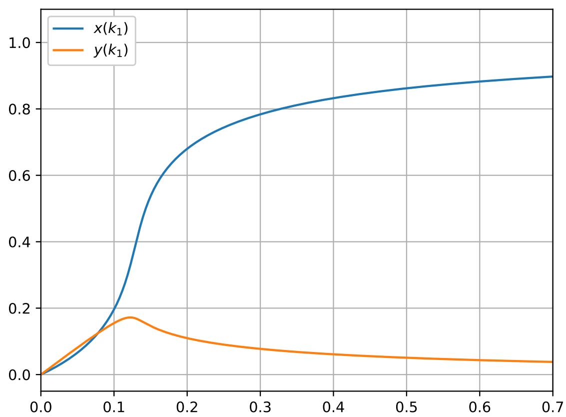
(b) $k_{-1} = 5 \cdot 10^{-3}$



(c) $k_{-1} = 1 \cdot 10^{-2}$



(d) $k_{-1} = 1.5 \cdot 10^{-2}$



(e) $k_{-1} = 2 \cdot 10^{-2}$

Рис. 2: $k_{-3} = 2 \cdot 10^{-3}$

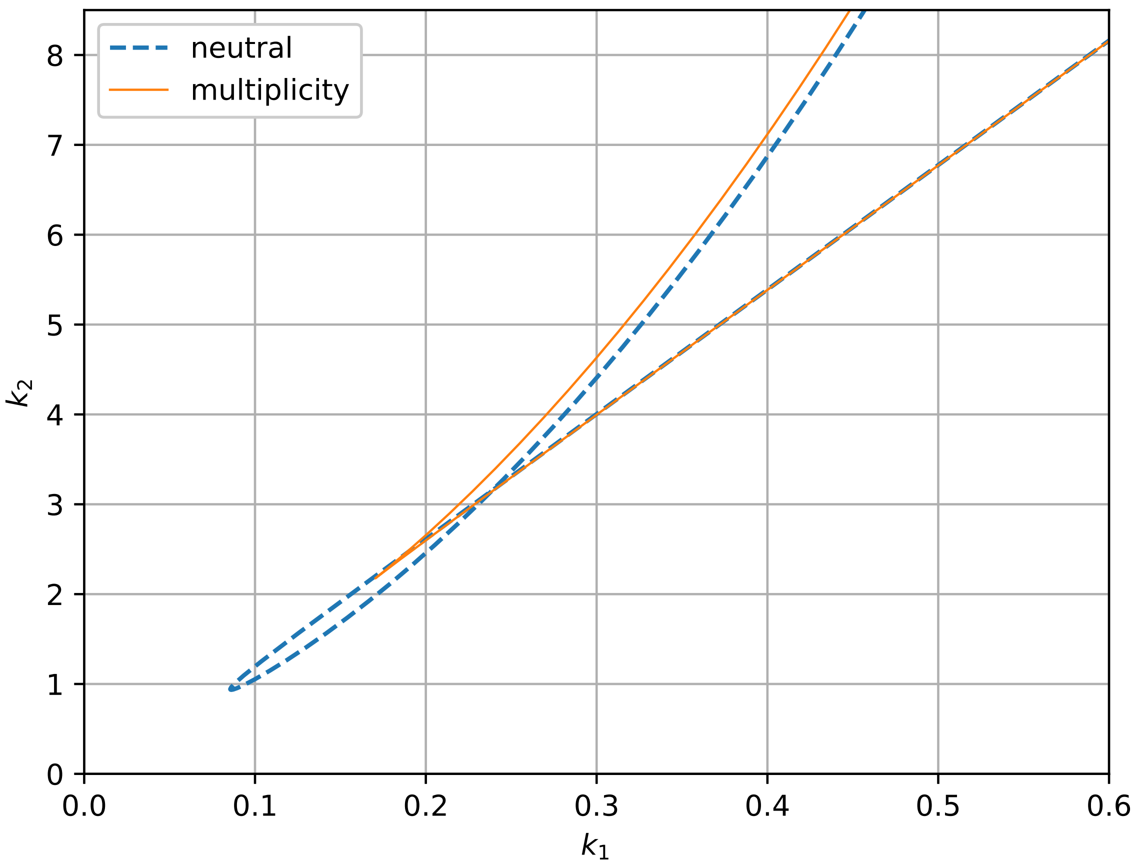


Рис. 3: Линии нейтральности и кратности на плоскости параметров (k_1, k_2) при $k_3 = 0.0032, k_{-1} = 0.01, k_{-3} = 0.001$.

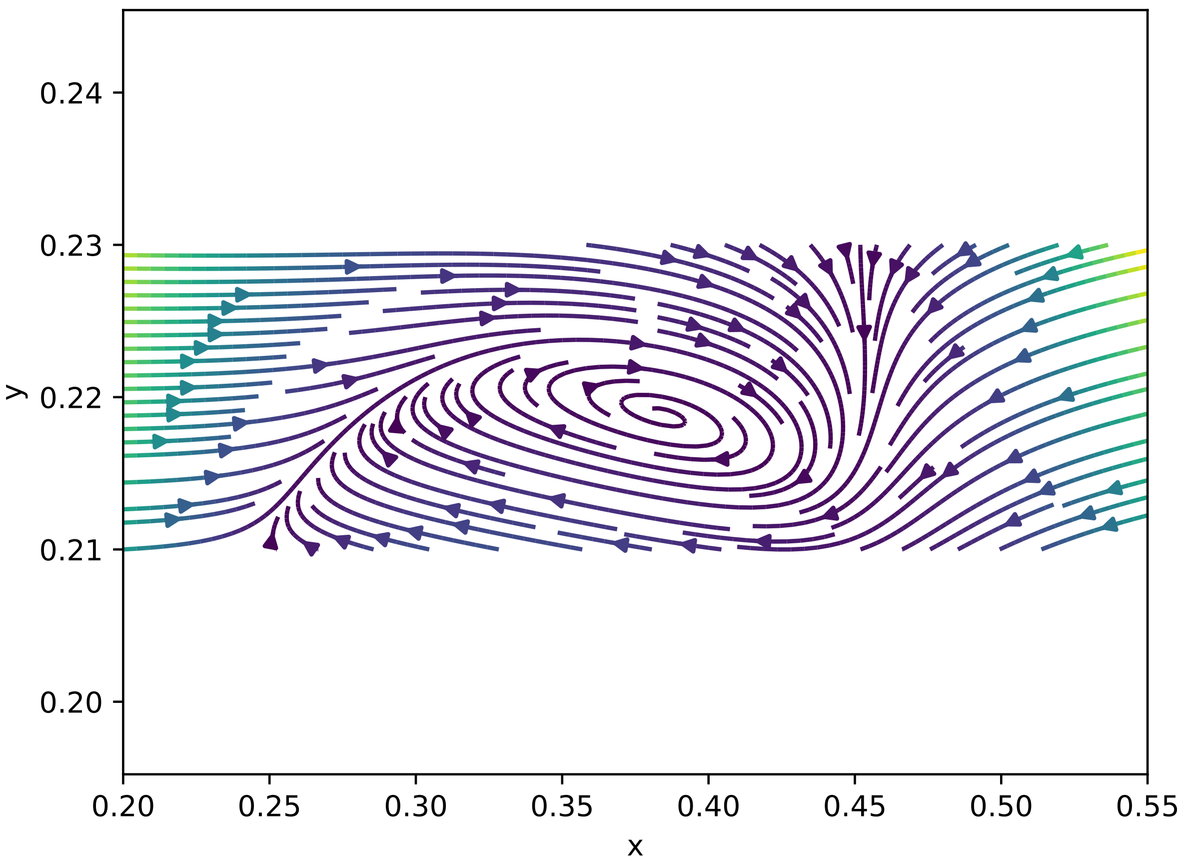


Рис. 4: Часть фазового портрета с устойчивым предельным циклом при параметрах $k_3 = 0.0032, k_{-1} = 0.01, k_{-3} = 0.001, k_1 = 0.09,\ k_2 = 1.$

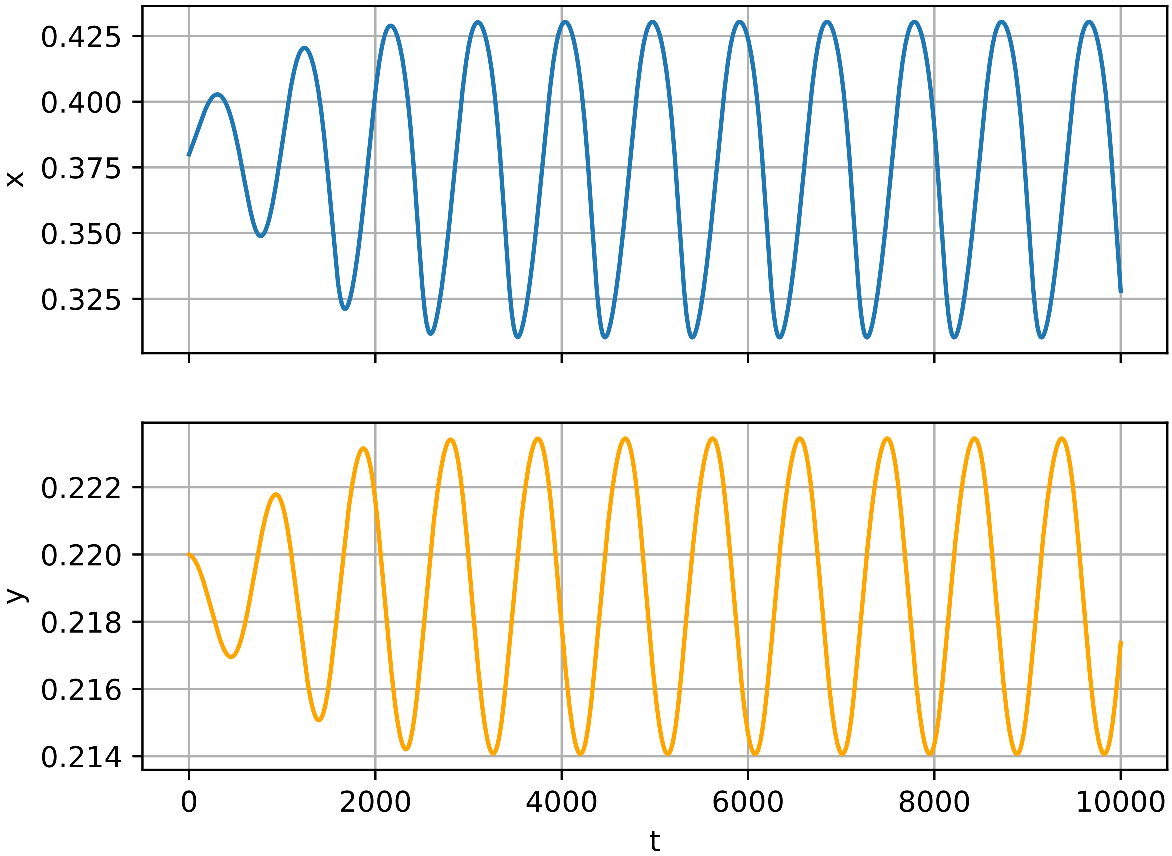


Рис. 5: Зависимость решения системы (1) от времени при начальном условии $(0.38, 0.22)$ и параметрах $k_3 = 0.0032, k_{-1} = 0.01, k_{-3} = 0.001, k_1 = 0.09,\ k_2 = 1$. Решение выходит на колебательный режим.