Generación de la Medida Producto

En el presente documento se tratará de hacer una descripción detallada del procedimiento para generar una medida en el producto cartesiano $X\times Y$, basado en la medida sobre conjuntos de la forma $A\times B$ con $A\in X$ y $B\in Y$. Para ello, intentaremos demostrar el siguiente Teorema:

$$\underline{\text{Teorema:}}\quad\text{Si } (X,\bold{X},\kappa)\text{ y }(Y,\bold{Y},\lambda)\text{ son espacios de medida, entonces existe una medida }\mu \text{ definida en } Z=X\times Y\text{ tal que,}$$ $$\mu(A\times B)=\mu(A)\mu(B) $$ $\text{para toda } A\in X\text{ y }B\in Y\text{. A esta medida le llamaremos Medida Producto y establecerá que la medida del producto de dos conjuntos medibles será el producto de sus medidas.}$

$\underline{\text{Demostración:}}$ Primero, consideremos a los rectángulos medibles $A\times B$ como uniones disjuntas de una sucesión de rectángulos de la forma $(A_i \times B_i)$, tal que $$(A\times B)\subset\bigcup^{\infty}_{i=1}(A_i \times B_i)$$

Por definición de rectángulos medibles (una extensión del concepto de n-volumen), siendo $x\in A$ e $y\in B$ tenemos que, $$\xi_{A\times B}(x,y)=\xi_{A}(x)\xi_{B}(y)$$

Ahora, por propiedad 3 de Medidas (axioma 3), tenemos que $$\xi_{A\times B}(x,y)=\xi_{A}(x)\xi_{B}(y)=\sum_{i=1}^{\infty}\xi_{A_i}(x)\xi_{B_i}(y)$$

Para continuar con esta demostración, recordemos el siguiente teorema que nos será muy útil:

Teorema Auxiliar (Convergencia Monótona): Sea ${f_n}$ una sucesión monótona creciente de funciones en $\mathcal{M^+}$ que converge a f puntualmente, entonces $f\in\mathcal{M^+}$ y además $$\int f d\mu=\lim_{n \to \infty}\int f_n d\mu$$

Como $A\times B$ son rectángulos medibles y $(A_i \times B_i)$ una sucesión de rectángulos entonces, aplicando el Teorema anterior obtenemos que $(A_i\times B_i)$ son medibles y fijando ya sea x o y, tenemos $$\kappa(A)\xi_{B}(y)=\sum_{i=1}^{\infty}\kappa(A_i)\xi_{B_i}(y)$$ Ahora fijando y, $$\kappa(A)\lambda(B)=\sum_{i=1}^{\infty}\kappa(A_i)\lambda(B_i)$$

Para continuar con la demostración, utilicemos el siguiente resultado

$$\underline{\text{Lema}}: \text{Sea }C=A\times B\text{ un rectángulo medible, entonces la unión finita de todos los rectángulos } C_0\text{ es un álgebra de subconjuntos de C}.$$

Esto es fácil de demostrar ya que,

- Con κ y λ bien definidas, podemos tomarnos cualquier rectángulo de medida cero y así obtener el conjunto vacío $\implies \emptyset\in C_0$
- Sea $R\in A_i \times B_i$ dentro de $C=A \times B$. El complemento R^c de R en C se puede expresar como la unión de rectángulos que cubren el resto de C sin solaparse con R^c. Esto se puede hacer dividiendo C en rectángulos que no incluyen a R y cuya unión junto con R recomponen a C $\implies$ si $R\in C_0$ entonces $R^c\in C_0$
- La unión finita de cualquier conjunto de rectángulos C_0 dentro de C es simplemente otro subconjunto de C que puede ser cubierto por una unión finita de rectángulos, cada uno de los cuales es un miembro de nuestra colección. Esto es porque podemos reorganizar o combinar estos

rectángulos en un número finito de rectángulos más grandes, para cubrir la unión deseada sin salirnos de C.

Este lema nos sirve ya que si $R\in C_0$, entonces, por definición (y dado que es álgebra de C),

$$R=\bigcup_{i=1}^{n}(A_i\times B_i)$$

con $A_j\times B_j$ son rectángulos disjuntos. Al definir la medida μ como

$$\mu(R)=\sum_{i=1}^n\kappa(A_i)\lambda(B_i)$$

notamos que la medida queda bien definida ya que

- Sean κ y λ medidas bien definidas, $\mu(\emptyset)=\sum_{i=1}^n\kappa(\emptyset)\lambda(B_j)$=0 por propiedades de la medida.
- Como $\kappa(A_i)\geq0$ y $\lambda(B_i)\geq0\quad\forall i\implies \mu(R)\geq0\quad\forall R$

Por lo que μ está bien definida $\square$