钢条切割实验报告

程远 2234412848

目录

1 问题描述 **2**

2 问题分析 **2**

3 算法设计 **2**

3.1 状态定义 2

3.2 最优子结构 2

3.3 重叠子问题 2

3.4 边界条件 2

4 算法实现 **3**

5 复杂度分析 **4**

6 运行结果 **4**

7 反思与改进 **5**

7.1 反思 5

7.2 改进 5

1 问题描述

设有一个长度为 L 的钢条，在钢条上标有 n 个位置点（p1,p2,···,pn)。现在需要按钢条上标注的位置将钢条切割为 n+1 段，假定每次切割所需要的代价与所切割的钢条长度成正比。现需要编写一个算法，能够确定一个切割方案，使切割的总代价最小。

2 问题分析

此问题与课本 50 页的矩阵连乘问题非常相似，可以用类似的方法解决。矩阵连乘问题中，切割成本为 $p_{i-1} * p_k * p_j$ 而在本题中，切割成本为 $j-i$。要想总切割成本最少，应该要使得在切割方案中，尽可能避免切割长钢条，以减少总切割代价。而切割问题显然具有最优子结构的特征，可以分解为一系列子问题，每个子问题求解一个较小区间的最小切割代价，当所有子问题最优时，总问题也达到最优，具体算法设计见下一部分。

3 算法设计

3.1 状态定义

为了找到最优切割方案，需要对切割过程进行拆解，定义每一段的最小代价：令 points 数组记录所有的切割点的位置，其中 $points[0]$ 和 $points[n+1]$ 分别表示钢条的起始点和终点。由题目定义可知，$points[0]=0, points[n+1]=L$ 设 $m[i][j]$ 表示将钢条从 $points[i]$ 到 $points[j]$ 切割的最小代价。

3.2 最优子结构

该问题的最优子结构在于，对于每一个区间 $[i,j]$ 的切割位置，可以将其分解为若干子区间的最优解。具体而言，如果我们在 $[i,j]$ 之间选择某个切割位置 $breakPoint$，那么总代价为

$$m[i][j] = m[i][breakPoint] + m[breakPoint][j] + points[j] - points[i]$$

3.3 重叠子问题

该问题分解为一系列子问题之后，不难发现不同的子问题之间有所重叠。例如，计算 $[k,k+5]$ 区间的最小代价与计算 $[k-1,k+6]$ 区间的最小代价都涉及到计算 $[k,k+5]$ 区间的最小代价。因此，子区间切割代价的计算会多次重复。通过动态规划，使用二维数组 m 来存储中间结果，可以避免重复计算。

3.4 边界条件

还有一些算法细节方面的问题，即为边界条件提供初始值。当区间长度为 1 时，即没有可以切割的钢条，代价自然为 0，因此设置 $m[i][i+1]=0$。此外，在求解最优切割点 $breakPoint$ 时，需要为初始代价赋值为最大数。

4 算法实现

```
const int MAX = 10e8;

void MinCost(int L,int n,int *points)
{
    sort(points, points + n + 2); //排序切割点，方便处理
    int m[n+2][n+2]; //储存最小代价的数组
    for(int i = 0; i < n + 1; i++)
    {
        m[i][i+1] = 0; //相邻切割点之间无需切割，代价为0
    }
    for(int lengthOfIron = 2; lengthOfIron <= n + 1; lengthOfIron++) //最外层循环，用于按照切割长度顺序依次计算切割代价，便于长切割代价计算调用短切割代价计算的结果
    {
        for(int start = 0; start <= n - lengthOfIron + 1; start++) //中层循环，遍历给定切割长度时的所有切割方法
        {
            int minStep = MAX; //赋最大值
            for(int breakPoint = start + 1; breakPoint < start + lengthOfIron; breakPoint++) //内层循环，遍历给定切割方法时的所有切割点，找到最优切割点
            {
                int t = m[start][breakPoint] + m[breakPoint][start+lengthOfIron] + points[start+lengthOfIron] - points[start];
                if(t < minStep)
                {
                    minStep = t;
                    m[start][start+lengthOfIron] = minStep;
                }
            }
        }
    }
    cout << m[0][n+1]; //输出结果
}
```

5 复杂度分析

内层循环的时间复杂度是 $O(lengthOfIron{-}1)$，中层循环的时间复杂度可以近似看作 $O(n)$，外层循环的时间复杂度是 $O(n)$ 将三层复杂度合在一起，得总时间复杂度为：

$$O\left(\sum_{\text{lengthOfIron}=2}^{n+1}\sum_{\text{start}=0}^{n-\text{lengthOfIron}+1}(\text{lengthOfIron}-1)\right)$$

对于每个 $lengthOfIron$, 内层和中层循环的复杂度为 $O(n\ lengthOfIron)$，所以总时间复杂度化为：

$$O\left(\sum_{\text{lengthOfIron}=2}^{n+1} n\cdot\text{lengthOfIron}\right)$$

化简得：

$$O\left(n\cdot\sum_{\text{lengthOfIron}=2}^{n+1}\text{lengthOfIron}\right)$$

求和并化简：

$$O\left(n\cdot\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)$$

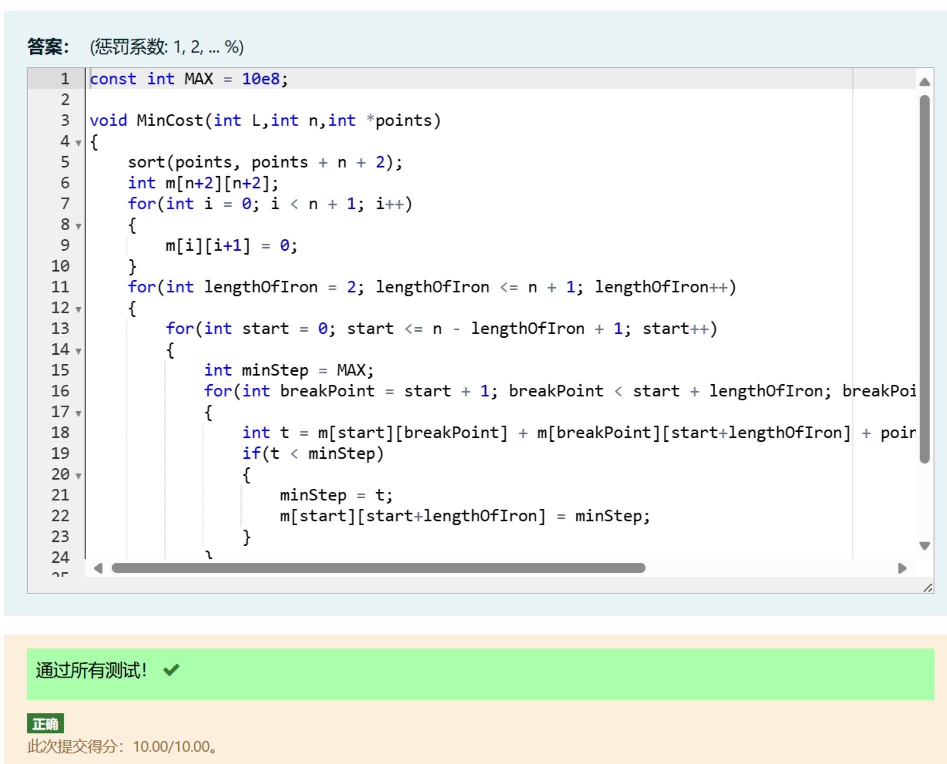
最终化简为：

$$O(n^3)$$

本算法使用二位数组 m 储存最小代价，空间复杂度为 $O(n^2)$

6 运行结果

通过 moodle 上所有用例



7 反思与改进

7.1 反思

初次提交时, 没有考虑将 minStep 赋最大值，导致部分用例错误。此外，动规算法时间复杂度较高，当 n 值较大时，算法的效率明显下降。

7.2 改进

本算法可以通过四边形不等式和单调性条件进行优化. 注意到，本题目时间代价 $w(a,b)=a-b$ 满足四边形不等式 $w(a,c)+w(b,d)\leq w(a,d)+w(b,c), a\leq b\leq c\leq d$，则本题满足单调性条件，在本问题中，即有假设对于子问题 $dp[i][j]$，最优切割点是 k，则对于更大的区间 $dp[i][j+1]$ 其最优切割点不会小于 k。利用这个性质，可以将内层循环修改为

```
int optimalK = (i < j - 1) ? s[i][j - 1] : i + 1;  // 初始切割点选择
for (int k = optimalK; k <= s[i + 1][j]; k++) //应用单调性条件
{
    int minStep = m[i][k] + m[k][j] + points[j] - points[i];
    if (minStep < m[i][j])
    {
        m[i][j] = minStep;
    }
}
```

如此优化，代码时间复杂度将降为 $O(n^2)$