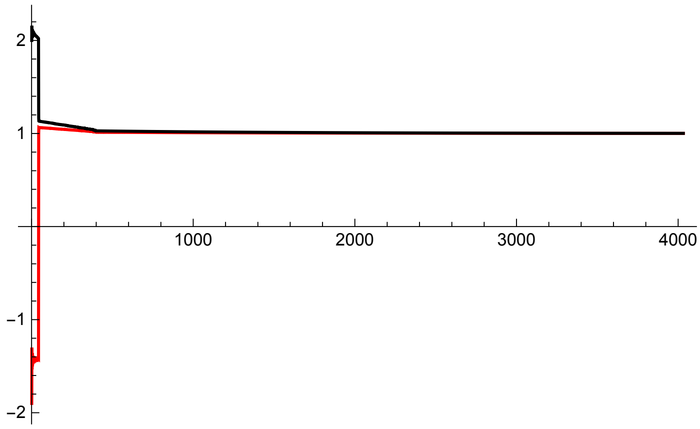
Minimierung der Rosebrock-Funktion mittels des Gradientenverfahrens

```
(* Die Parameter *)
γ = 10^(-4);
β = 1/2;
ϵ = 10^(-3);

(* Die Gradientenrichtung und Armijo-Schrittweitenregel *)
AbstiegsRichtung[f_, x_] :=
  -{D[f[{x01, x02}], x01], D[f[{x01, x02}], x02]} /. {x01 → x[[1]], x02 → x[[2]]}
    leite ab                   leite ab
ArmijoSchrittweite[f_, x_, s_] :=
 Module[{σ = 1}, While[f[x + σ s] - f[x] > σ γ (-AbstiegsRichtung[f, x]).s, σ = σ β];
 Modul               solange
  σ]

(* An das Verfahren wird eine Testfunktion f, ein Startwert x0,
Höchstanzahl an Iterationen n und ein Abbruchbedingung ϵ übergeben. Es
  berechnet zuerst den Gradientenrichtung s. Diese wird zusätzlich
  noch in Armijo-Schrittweitenregel benötigt. Zuerst wird getestet,
ob die Armijo-Bedingung mit der Schrittweite σ =
 (β=1/2)^0 = 1 erfüllt ist. Wenn dies nicht zutrifft,
wird die Schrittweite so oft mit β=
 1/2 multipliziert bis die Armijo-Bedingung erfüllt ist. Zuletzt
    wird die neue Iterierte x^(k+1) = x^k + σ*s gesetzt *)
GradientenVerfahren[f_, x0_, n_, ϵ_] :=
  Module[{x = x0, Z = {f[x0]}, X = {x0}, σ = 1, s, i = 0},
  Modul
   While[(Norm[{D[f[{x01, x02}], x01], D[f[{x01, x02}], x02]} /.
   solange Norm  leite ab                leite ab
         {x01 → x[[1]], x02 → x[[2]]}] > ϵ) && i ≤ n,
    {s = AbstiegsRichtung[f, x];
     σ = ArmijoSchrittweite[f, x, s];
     x = x + σ s; z = f[x]; i = i + 1;,
     Z = Append[Z, z],
         hänge an
     X = Append[X, x]}
         hänge an
   ];
   {X, Z}];

f[{x1_, x2_}] := 100 (x2 - x1^2)^2 + (1 - x1)^2;
{X, Z} = GradientenVerfahren[f, x0 = {-1.9, 2.}, 20000, ϵ] // N
                                                              nu

Table[{X[[i]], Z[[i]]}, {i, 1, Length[X]}] // TableForm
Tabelle                           Länge        Tabellendarstellung
```

```
Length[Table[{X[[i]], Z[[i]]}, {i, 1, Length[X]}]]
```
Länge Tabelle Länge

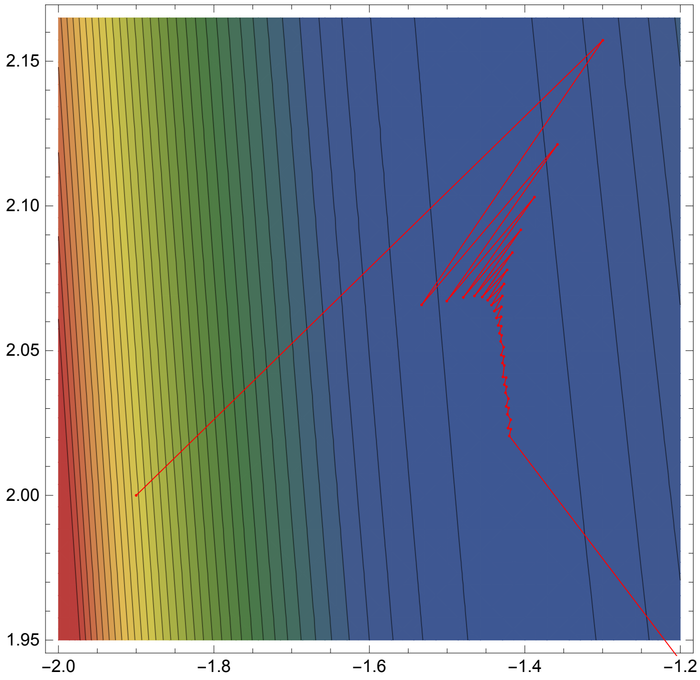
```
(* Die Iterationsverlauf von x1 und x2 *)
ListLinePlot[Transpose[X], PlotStyle → {Red, Black}, PlotRange → All]
```
Liniengrafik einer ·· transponiere Grafikstil rot schwarz Definitions- un··· alle




```
(* Die Iterierten x^0 bis x^42 *)
ContourPlot[f[{x1, x2}], {x1, -2, -1.2}, {x2, 1.95, 2.165},
```
Konturgraphik

```
 Epilog → {Red, PointSize[0.0015], Map[Point, X], Line[X]},
```
Epilog rot Punktgröße w··· Punkt Linie

```
 ColorFunction → "DarkRainbow", Contours → 35]
```
Farbfunktion Konturen

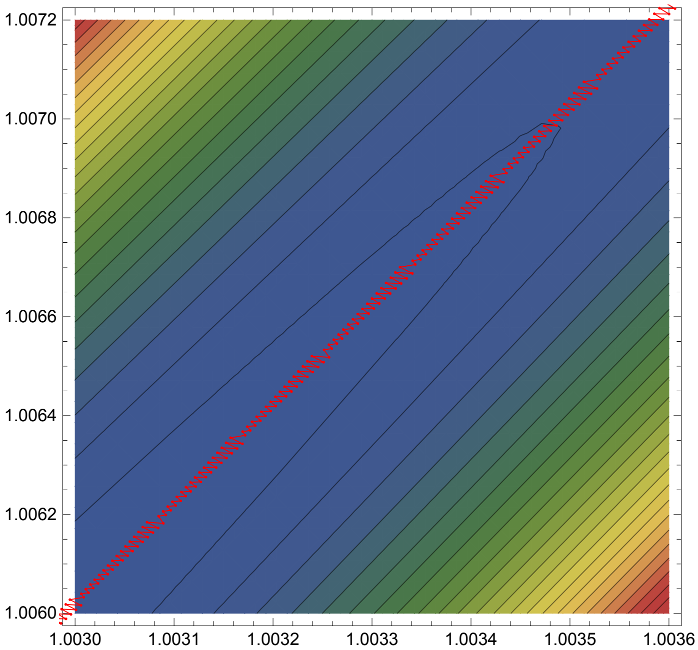


```
(* Iterationsverlauf kurz vor Minimum (1,1) *)
ContourPlot[f[{x1, x2}], {x1, 1.003, 1.0036}, {x2, 1.006, 1.0072},
 Epilog → {Red, PointSize[0.0015], Map[Point, X], Line[X]},
 ColorFunction → "DarkRainbow", Contours → 25]
```

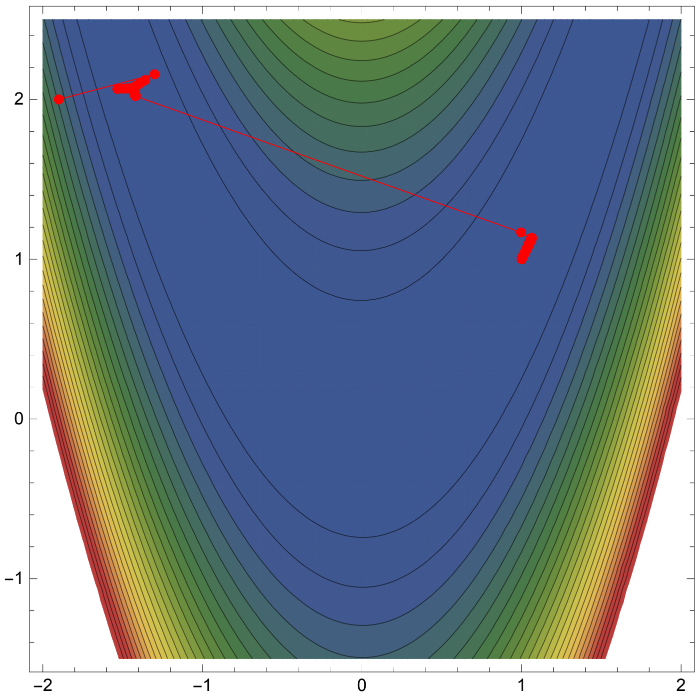
Konturgraphik

Epilog | rot | Punktgröße | w··· | Punkt | Linie

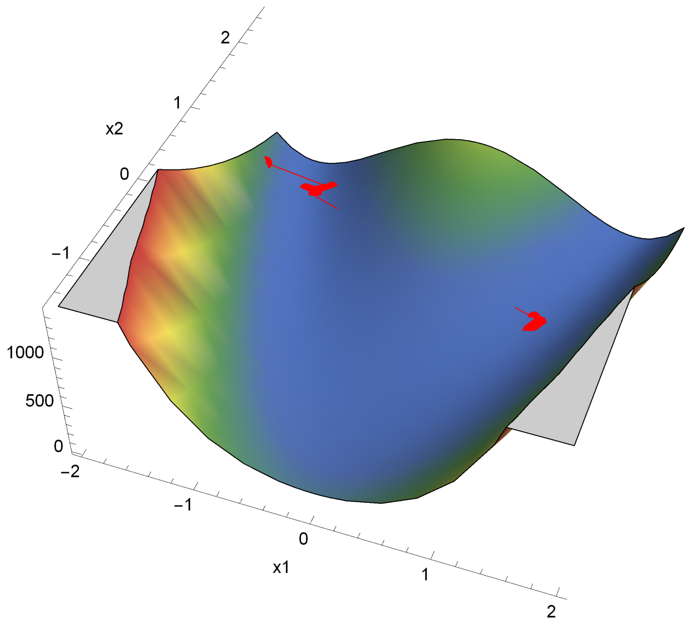
Farbfunktion | Konturen



```
ContourPlot[f[{x1, x2}], {x1, -2, 2}, {x2, -1.5, 2.5},
Konturgraphik
 Epilog → {Red, PointSize[0.015], Map[Point, X], Line[X]},
 Epilog      rot   Punktgröße              w··· Punkt       Linie
 ColorFunction → "DarkRainbow",  Contours → 25]
 Farbfunktion                    Konturen
```



```
G1 = Plot3D[f[{x1, x2}], {x1, -2, 2}, {x2, -1.5, 2.5}, ColorFunction →
     grafische Darstellung 3D                           Farbfunktion
    "DarkRainbow", Boxed → False, AxesLabel → Automatic, Mesh → None];
                   einger···  falsch  Achsenbeschri··· automatisch  Netz  keine
G2 = Graphics3D[{PointSize[0.02], Red, Point[Table[
     3D-Graphik   Punktgröße        rot  Punkt Tabelle
     {X[[i, 1]], X[[i, 2]], f[{X[[i, 1]], X[[i, 2]]}]}, {i, 1, Length[X]}]]}];
                                                               Länge
G3 = Graphics3D[{Red, Line[Table[{X[[i, 1]], X[[i, 2]],
     3D-Graphik  rot  Linie Tabelle
       f[{X[[i, 1]], X[[i, 2]]}]}, {i, 1, Length[X]}]]}];
                                         Länge
Show[
zeige an
 G1,
 G2,
 G3]
```



Konvergenzgeschwindigkeit bei versch. ϵ-Werte

ϵ = 10^(-2), 1150 Iterationen

```
Norm[{1.007844634602773, 1.0157662290974787} - {1., 1.}]
Norm
0.01761
```

ϵ = 10^(-3), 4031 Iterationen

```
Norm[{1.0007809416256455, 1.0015671709533085} - {1., 1.}]
Norm
```

0.00175097

ϵ = 10^(-4), 6884 Iterationen

```
Norm[{1.0000774985140735, 1.0001554737613876} - {1., 1.}]
```
Norm

0.000173718

ϵ = 10^(-5), 9705 Iterationen

```
Norm[{1.0000078593615962, 1.0000157657353972} - {1., 1.}]
```
Norm

0.0000176161

ϵ = 10^(-6), 12545 Iterationen

```
Norm[{1.0000007851861243, 1.0000015751028364} - {1., 1.}]
```
Norm

1.75996×10^{-6}

ϵ = 10^(-7), 15385 Iterationen

```
Norm[{1.0000000784444656, 1.0000001573614579} - {1., 1.}]
```
Norm

1.7583×10^{-7}

ϵ = 10^(-8), 18225 Iterationen

```
Norm[{1.000000007837046, 1.0000000157212594} - {1., 1.}]
```
Norm

1.75664×10^{-8}