THM | CAMPUS FRIEDBERG
TECHNISCHE HOCHSCHULE MITTELHESSEN

MND
Mathematik, Naturwissenschaften und Datenverarbeitung

Nichtlineare Optimierung

Unrestringierte und Restringierte Optimierungsprobleme

Trust-Region-Verfahren

Es wird das unrestringierte Optimierungsproblem

$$\min_{x\in\mathbb{R}^n} f(x) \tag{1}$$

mit der Zielfunktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^n$ betrachtet.
Mit $x^k\in\mathbb{R}^n$ wird die aktuelle Iterierte bezeichnet und die Berechnung eines Schrittes s^k zur Bestimmung der neuen Iterierten $x^{k+1}=x^k+s^k$ basiert auf folgender Idee:
Durch Taylor-Entwicklung von $f(x^k+s)$ um $s=0$ entsteht ein *quadratisches Modell*

$$q_k(s)=f_k+g^{k^T}s+\frac{1}{2}s^T H_k s$$

mit $f_k=f(x^k)$, $g^k=\nabla f(x^k)$ und $H_k=\nabla^2 f(x^k)$.
Das Modell $q_k(s)$ stimmt in einer Umgebung von $s=0$ gut mit $f(x^k+s)$ überein, denn nach dem Satz von Taylor gilt: $f(x^k+s)=q_k(s)+o(\|s\|^2)$. Das heißt es soll

$$q_k(0)=f(x^k)=f_k$$

gelten. Ist aber $\|s\|$ groß, so muss dies nicht mehr gelten. Daher ist es sinnvoll, dem Modell q_k nur auf einem *Vertrauensbereich* (einer *Trust-Region*) $\{s;\ \|s\|\le\Delta_k\}$ zu trauen. Hierbei bezeichnet $\Delta_k>0$ den *Trust-Region-Radius*. Die Schrittberechnung erfolgt durch Lösen des
Trust-Region Teilproblems:

$$\min_{s\in\mathbb{R}^n}\{q_k(s);\|s\|\le\Delta_k\}. \tag{2}$$

Anpassung des Vertrauensbereichs:
Es stellt sich nun die Frage, wie Δ_k gewählt werden sollte. Hierfür erfolgt die Bewertung der Qualität des berechneten Schritts durch Vergleich der Abnahme der Modellfunktion q_k (predicted reduction)

$$pred_k(s^k)=q_k(0)-q_k(s^k)=f_k-q_k(s^k)$$

und der tatsächlichen Abnahme (actual reduction) der Zielfunktion

$$ared_k(s^k)=f_k-f(x^k+s^k).$$

Der Quotient

$$\rho_k(s^k)=\frac{ared_k(s^k)}{pred_k(s^k)} \tag{3}$$

dient somit als Qualitätsmaß für die Übereinstimmung von $pred_k$ und $ared_k$. Unabhängig vom aktuellen Iterationsschritt werden Parameter $0<\eta_1<\eta_2<1$ gewählt.

Das Trust-Region-Verfahren ist bereits dann global konvergent, wenn alle berechneten Schritte s^k folgender Bedingung genügen:
Cauchy-Abstiegsbedingung (Fraction of Cauchy Decrease):
Es gibt von k unabhängige Konstanten $\alpha\in(0,1]$ und $\beta\ge 1$ mit

$$\|s^k\|\le\beta\Delta_k,\quad pred_k(s^k)\ge\alpha\cdot pred_k(s_c{}^k), \tag{4}$$

wobei der *Cauchy-Schritt* $s_c{}^k$ die eindeutige Lösung des folgenden eindimensionalen Minimierungsproblems ist:

$$min\ q_k(s)\quad \text{u.d.N}\quad s=\tau\cdot s_l^k,\ \ \tau\ge 0,\ \ \|s\|\le\Delta_k. \tag{5}$$

Algorithmus 1 ***Trust-Region-Verfahren.***
Wähle Parameter $\alpha\in(0,1],\beta\ge 1, 0<\eta_1<\eta_2<1, 0<\gamma_0<\gamma_1<1<\gamma_2$ und $\Delta_{min}\ge 0$. Wähle einen Startpunkt $x^0\in\mathbb{R}^n$ und einen Trust-Region-Radius $\Delta_0>0$ mit $\Delta_0\ge\Delta_{min}$. Für $k=0,1,2,\ldots$:

1. *Falls $g^k=0$, dann STOP mit Resultat x^k.*
2. *Wähle eine symmetrische Matrix $H_k\in\mathbb{R}^{n\times n}$.*
3. *Berechne einen Schritt s^k, der die Cauchy-Abstiegsbedingung (4) erfüllt.*
4. *Berechne $\rho_k(s^k)$ gemäß (3).*
5. *Falls $\rho_k(s^k)>\eta_1$, dann akzeptiere den Schritt s^k, das heißt setze $x^{k+1}=x^k+s^k$. Andernfalls verwerfe den Schritt, das heißt setze $x^{k+1}=x^k$.*
6. *Berechne Δ_{k+1} gemäß Algorithmus 2.*

Algorithmus 2 ***Update des Trust-Region-Radius Δ_k.***
Seien η_1,η_2 und $\gamma_0,\gamma_1,\gamma_2$ wie in Algorithmus 1 gewählt.

1. *Falls $\rho_k(s^k)\le\eta_1$, so wähle $\Delta_{k+1}\in[\gamma_0\Delta_k,\gamma_1\Delta_k]$.*
2. *Falls $\rho_k(s^k)\in(\eta_1,\eta_2]$, so wähle $\Delta_{k+1}\in[max\{\Delta_{min},\gamma_1\Delta_k\}, max\{\Delta_{min},\Delta_k\}]$.*
3. *Falls $\rho_k(s^k)>\eta_2$, so wähle $\Delta_{k+1}\in[max\{\Delta_{min},\Delta_k\}, max\{\Delta_{min},\gamma_2\Delta_k\}]$.*

Es wird untersucht, unter welchen Voraussetzungen schnelle Konvergenz zu erwarten ist. Hierzu wird das Verhalten des Verfahrens nahe eines stationären Punktes $\bar{x}$ betrachtet, der die hinreichende Optimalitätsbedingungen 2.Ordnung erfüllt, d.h. $\nabla f(\bar{x})=0$, $\nabla^2 f(\bar{x})$ ist positiv definit.

Algorithmus 3 ***Trust-Region-Newton-Verfahren.***
Algorithmus 1, wobei die Schritte 2 und 3 wie folgt implementiert sind:

2. *Berechne $H_k=\nabla^2 f(x^k)$*
3. *Falls der Newton-Schritt $s_n^k=-H_k^{-1}g^k$ existiert und die Cauchy-Abstiegsbedingung (4) erfüllt, so wähle $s^k=s_n^k$. Sonst bestimme einen Schritt s^k, der (4) genügt.*

Restringierte Optimierung

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Aenean aliquet varius blandit. Suspendisse ligula tortor, feugiat in dapibus a, dictum vel risus. Nulla at justo vitae velit sodales dignissim. Curabitur volutpat porttitor pulvinar. Quisque vulputate massa vitae dui sagittis at ultrices lorem sagittis. Nullam lobortis tincidunt libero, et tincidunt urna consectetur ac. Proin laoreet commodo auctor. Nullam nec eros enim. Maecenas commodo sem consectetur neque ullamcorper vel iaculis massa hendrerit. Integer et sem et justo pharetra mattis ut id ante. Class aptent taciti sociosqu ad litora torquent per conubia nostra, per inceptos hime- naeos. Donec elementum pulvinar diam in accumsan. Nam laoreet tincidunt tincidunt. Nam hendrerit, lorem vel gravida fringilla, tellus augue vulputate neque, eu laoreet magna metus eu ante. Nullam auctor arcu augue, sed fringilla velit. Nunc auctor mattis nisl, sed iaculis dolor auctor faucibus. Cras libero ligula, dapibus vel egestas non, porta et ante. Nulla dolor sapien, mollis sed sodales a, posuere vitae ante. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Aenean aliquet varius blandit. Suspendisse ligula tortor, feugiat in dapibus a, dictum vel risus. Nulla at justo vitae velit sodales dignissim. Curabitur volutpat porttitor pulvinar. Quisque vulputate massa vitae dui sagittis at ultrices lorem sagittis. Nullam lobortis tincidunt libero, et tincidunt urna consectetur ac. Proin laoreet commodo auctor. Nullam nec eros enim. Maecenas commodo sem consectetur neque ullamcorper vel iaculis massa hendrerit. Integer et sem et justo pharetra mattis ut id ante. Class aptent taciti sociosqu ad litora torquent per conubia nostra, per inceptos hime- naeos. Donec elementum pulvinar diam in accumsan. Nam laoreet tincidunt tincidunt. Nam hendrerit, lorem vel gravida fringilla, tellus augue vulputate neque, eu laoreet magna metus eu ante. Nullam auctor arcu augue, sed fringilla velit. Nunc auctor mattis nisl, sed iaculis dolor auctor faucibus. Cras libero ligula, dapibus vel egestas non, porta et ante. Nulla dolor sapien, mollis sed sodales a, posuere vitae ante.

KKT

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Aenean aliquet varius blandit. Suspendisse ligula tortor, feugiat in dapibus a, dictum vel risus. Nulla at justo vitae velit sodales dignissim. Curabitur volutpat porttitor pulvinar. Quisque vulputate massa vitae dui sagittis at ultrices lorem sagittis. Nullam lobortis tincidunt libero, et tincidunt urna consectetur ac. Proin laoreet commodo auctor. Nullam nec eros enim. Maecenas commodo sem consectetur neque ullamcorper vel iaculis massa hendrerit. Integer et sem et justo pharetra mattis ut id ante. Class aptent taciti sociosqu ad litora torquent per conubia nostra, per inceptos hime- naeos. Donec elementum pulvinar diam in accumsan. Nam laoreet tincidunt tincidunt. Nam hendrerit, lorem vel gravida fringilla, tellus augue vulputate neque, eu laoreet magna metus eu ante. Nullam auctor arcu augue, sed fringilla velit. Nunc auctor mattis nisl, sed iaculis dolor auctor faucibus. Cras libero ligula, dapibus vel egestas non, porta et ante. Nulla dolor sapien, mollis sed sodales a, posuere vitae ante. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Aenean aliquet varius blandit. Suspendisse ligula tortor, feugiat in dapibus a, dictum vel risus. Nulla at justo vitae velit sodales dignissim. Curabitur volutpat porttitor pulvinar. Quisque vulputate massa vitae dui sagittis at ultrices lorem sagittis. Nullam lobortis tincidunt libero, et tincidunt urna consectetur ac. Proin laoreet commodo auctor. Nullam nec eros enim. Maecenas commodo sem consectetur neque ullamcorper vel iaculis massa hendrerit. Integer et sem et justo pharetra mattis ut id ante. Class aptent taciti sociosqu ad litora torquent per conubia nostra, per inceptos hime- naeos. Donec elementum pulvinar diam in accumsan. Nam laoreet tincidunt tincidunt. Nam hendrerit, lorem vel gravida fringilla, tellus augue vulputate neque, eu laoreet magna metus eu ante. Nullam auctor arcu augue, sed fringilla velit. Nunc auctor mattis nisl, sed iaculis dolor auctor faucibus. Cras libero ligula, dapibus vel egestas non, porta et ante. Nulla dolor sapien, mollis sed sodales a, posuere vitae ante.

SQP-Verfahren

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Aenean aliquet varius blandit. Suspendisse ligula tortor, feugiat in dapibus a, dictum vel risus. Nulla at justo vitae velit sodales dignissim. Curabitur volutpat porttitor pulvinar. Quisque vulputate massa vitae dui sagittis at ultrices lorem sagittis. Nullam lobortis tincidunt libero, et tincidunt urna consectetur ac. Proin laoreet commodo auctor. Nullam nec eros enim. Maecenas commodo sem consectetur neque ullamcorper vel iaculis massa hendrerit. Integer et sem et justo pharetra mattis ut id ante. Class aptent taciti sociosqu ad litora torquent per conubia nostra, per inceptos hime- naeos. Donec elementum pulvinar diam in accumsan. Nam laoreet tincidunt tincidunt. Nam hendrerit, lorem vel gravida fringilla, tellus augue vulputate neque, eu laoreet magna metus eu ante. Nullam auctor arcu augue, sed fringilla velit. Nunc auctor mattis nisl, sed iaculis dolor auctor faucibus. Cras libero ligula, dapibus vel egestas non, porta et ante. Nulla dolor sapien, mollis sed sodales a, posuere vitae ante. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Aenean aliquet varius blandit. Suspendisse ligula tortor, feugiat in dapibus a, dictum vel risus. Nulla at justo vitae velit sodales dignissim. Curabitur volutpat porttitor pulvinar. Quisque vulputate massa vitae dui sagittis at ultrices lorem sagittis. Nullam lobortis tincidunt libero, et tincidunt urna consectetur ac. Proin laoreet commodo auctor. Nullam nec eros enim. Maecenas commodo sem consectetur neque ullamcorper vel iaculis massa hendrerit. Integer et sem et justo pharetra mattis ut id ante. Class aptent taciti sociosqu ad litora torquent per conubia nostra, per inceptos hime- naeos. Donec elementum pulvinar diam in accumsan. Nam laoreet tincidunt tincidunt. Nam hendrerit, lorem vel gravida fringilla, tellus augue vulputate neque, eu laoreet magna metus eu ante. Nullam auctor arcu augue, sed fringilla velit. Nunc auctor mattis nisl, sed iaculis dolor auctor faucibus. Curabitur volutpat porttitor pulvinar. Quisque vulputate massa vitae dui sagittis at ultrices lorem sagittis. Nullam lobortis tincidunt libero, et tincidunt urna consectetur ac. Proin laoreet commodo auctor. Nullam nec eros enim. Maecenas commodo sem consectetur neque ullamcorper vel iaculis massa hendrerit. Integer et sem et justo pharetra mattis ut id ante. Class aptent taciti sociosqu ad litora torquent per conubia nostra, per inceptos hime- naeos. Donec elementum pulvinar diam in accumsan. Nam laoreet tincidunt tincidunt. Nam hendrerit, lorem vel gravida fringilla, tellus augue vulputate neque, eu laoreet magna metus eu ante. Nullam auctor arcu augue, sed fringilla velit. Nunc auctor mattis nisl, sed iaculis dolor auctor faucibus. Cras libero ligula, dapibus vel egestas non, porta et ante. Nulla dolor sapien, mollis sed sodales a, posuere vitae ante.

Literatur

[1] Michael und Stefan Ulbrich, Nichtlineare Optimierung, Birkhäuser, 2011

[2] Geiger und Kanzow, Numerische Verfahren zur Lösung unrestringierter Optimierungsaufgaben, Springer-Verlag, 1999

Zusammengestellt von Barbara Adam, Büsra Karaoglan und Prof. Dr. Ralf Rigger