第2章　模糊数学基础

第1节　模糊数学的创立及发展

模糊数学创立的背景

经典集合的意义和局限性

经典集合论把数学的抽象能力延伸到人类认识过程的深处

一组对象确定一组属性，可以通过属性说明概念（内涵）

可以通过指明对象说明它，符合概念的那些对象的全体叫做这个概念的外延

经典集合可以表现概念，关系和运算又可以表现判断和推理，一切现实的理论系统都可能纳入经典集合描述的数学框架

每个集合都必须由明确的元素构成，元素对集合的隶属关系必须是明确的，决不能模棱两可

模糊概念的普遍性

日常生活中，经常遇到没有明确数量界限的事物，要使用模糊词句形容和描述它们

人们的工作经验中，有许多模糊的东西

随着科学的深化和工业的发展，研究对象越来越复杂，研究对象的复杂性和描述的精确性将互相排斥，这将涌现越来越多的模糊性问题

模糊信息处理的必要性

人脑具有处理模糊信息的能力，善于判断和处理模糊现象

计算机对模糊现象的识别能力较差

为了提高计算机识别模糊现象的能力，需要把人们常用的模糊语言设计成机器能接受的指令和程序，以便机器能像人脑那样简洁灵活地做出相应的判断

需要寻找一种描述和加工模糊信息的数学工具，推动了数学家深入研究模糊数学

模糊数学的提出

扎德围绕决策与控制及其相关问题研究，意识到传统数学方法的局限性，认为如果深入研究人类的认识过程，将发现人类能运用模糊概念是一个巨大的财富

1965年，发表了“模糊集合”，标志着模糊数学的诞生

第一次把模糊性和数学统一在一起，不是让数学放弃严格性去迁就模糊性，而是把数学方法打入具有模糊现象的“禁区”，使数学吸收人脑处理模糊现象的优点，以精确对模糊，用精确的数量关系表达模糊概念及其关系

模糊数学不是模模糊糊的学科，是以数学的手段分析与处理模糊事物的学科

经典集合中，元素与集合的关系只有明确的两种，即“属于”和“不属于”，分别利用数字“**1**”和“**0**”刻画上述两种关系

模糊集合中，给定范围内的元素与模糊集合的关系不一定只有“属于”或者“不属于”两种情况，还存在中间过渡状态，即某元素“以一定的程度属于”该集合，采用介于**0**和**1**之间的实数表示上述模糊集合概念中某元素隶属于一个集合的关系

“老人”

指明各个元素的隶属程度，就等于指定了一个集合。当隶属程度在**0**和**1**之间时，这个集合就是模糊集合

- 模糊集合与经典集合有密切关系
  - 模糊集合是经典集合的扩展，把经典集合特征函数的取值范围从**{0,1}**扩展到**[0,1]**
  - 经典集合是模糊集合的特例，当模糊集合隶属函数的取值范围退化为**{0,1}**时，就是一个经典集合
- 概率论并不能代替模糊数学
  - 概率论研究事物的随机不确定性，随机事件是否出现，因果关系是不确定的，是客观不确定的
  - 模糊数学研究模糊不确定性，区分事物的界线及人类思维概念的外延是模糊的，是主观不确定的

模糊数学的发展

刚诞生的几年间进展相当缓慢

进入**20**世纪**70**年代后，模糊集合的概念被越来越多的人接受，这方面的研究工作迅速发展起来

进入**20**世纪**80**年代，模糊数学的发展更有加速的趋势。**1984**年，成立了国际模糊系统协会

我国在**1983**年成立了模糊数学与模糊系统学会，与美国、法国、日本一起，被公认为模糊数学四强

进入**20**世纪**90**年代，模糊数学从理论研究走向了应用，国际学术会议增多，**IEEE**创办了《**Fuzzy Systems**》汇刊，并定期举办国际会议**(FUZZY-IEEE)**

第2节　经典集合及其运算

一 集合的基本概念

集合的描述

集合：具有某种属性的、确定的、彼此之间可以区别的事物的全体

用大写字母表示：$A, B, C, \cdots, X, Y, Z$

元素：组成集合的事物

用小写字母表示：$a, b, c, \cdots, x, y, z$

集合与元素的关系

属于 $x \in X$

不属于 $x \notin X$

常用概念

论域：被考虑对象的全体称为论域，U

空集：不包含任何元素的集合，$\varnothing$

子集：集合A的每一个元素都是集合B的元素，称A是B的子集，$A \subseteq B$

相等

幂集：以U的所有子集为元素构成的集合，$P(U)$

例2.2.1

有限集：集合包含的元素为有限个

无限集

集合运算

交：属于集合A，同时又属于集合B的所有元素组成的集合，$A \cap B$

并：由属于A，或属于B的所有元素构成的集合，$A \cup B$

补：若A为集合，由论域U中不属于A的所有元素构成的集合，称为A在U中的补集，$A^c = U - A$

差：由属于A，但不属于B的所有元素构成的集合，$A - B$

二 集合的运算性质

幂等律	交换律
结合律	分配律
吸收律	同一律
复原律	排中律
对偶律	

三 集合的直积

A、B两个集合，从A中取出一个元素x, 从B中取出一个元素y，把它们搭配起来组成一个序偶（x, y），序偶的全体叫做集合A和B的直积

$$A\times B=\{(x,y)\,|\,x\in A, y\in B\}$$

序偶中元素的顺序不可改变 $\Rightarrow A\times B\neq B\times A$ （若$A\neq B$）

例： $A=\{a,b\}, B=\{c,d,e\}$

$$A\times B=\{(a,c),(a,d),(a,e),(b,c),(b,d),(b,e)\}$$

$$B\times A=\{(c,a),(c,b),(d,a),(d,b),(e,a),(e,b)\}$$

多个集合的直积

多个集合 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 之间也可以进行直积运算，如

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = \{(a_1, a_2, \cdots, a_n) \mid a_i \in A_i, i = 1, 2, \cdots, n\}$$

例2.2.2：对于实数集 $R = \{x \mid -\infty < x < +\infty\}$ 有

$$R^2 = R \times R = \{(x, y) \mid -\infty < x, y < +\infty\}$$

$$R^3 = R \times R \times R = \{(x, y, z) \mid -\infty < x, y, z < +\infty\}$$

$$R^n = R \times R \times \cdots \times R = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) \mid -\infty < x_i < +\infty, i = 1, 2, \cdots, n\}$$

四 映射与关系

集合X和Y，若存在一对应法则f，使得对于集合X中的任意元素x，Y中有唯一的元素y与之对应，称f为从X到Y的映射

$$f : X \to Y$$

X：定义域

$\{f(x) | x \in X\}$：值域

集合X，Y直积的一个子集R，称为X到Y的二元关系，简称为关系，$R \subseteq X \times Y$

$(x, y) \in X \times Y$　　若 $(x, y) \in R$，称x与y相关，xRy

若 $(x, y) \notin R$，称x与y相关，$x\overline{R}y$

例：第一个元素不小于第二个元素

$$X = \{1,\ 2,\ 3\}, Y = \{2,\ 3,\ 4\}$$

$$X \times Y = \{(1,2),(1,3),(1,4),(2,2),(2,3),(2,4),(3,2),(3,3),(3,4)\}$$

$$R\left(X, Y\right) = \{(2,2),(3,2),(3,3)\}$$

五 集合的表示法

描述法

通过描述集合中元素的性质描述一个集合

适用于有很多元素而不能一一列举的集合

例： $A=\{a \mid a$为自然数且$a<500\}$表示小于500的自然数集合

列举法

将集合的元素全部列出

适用于元素有限的集合

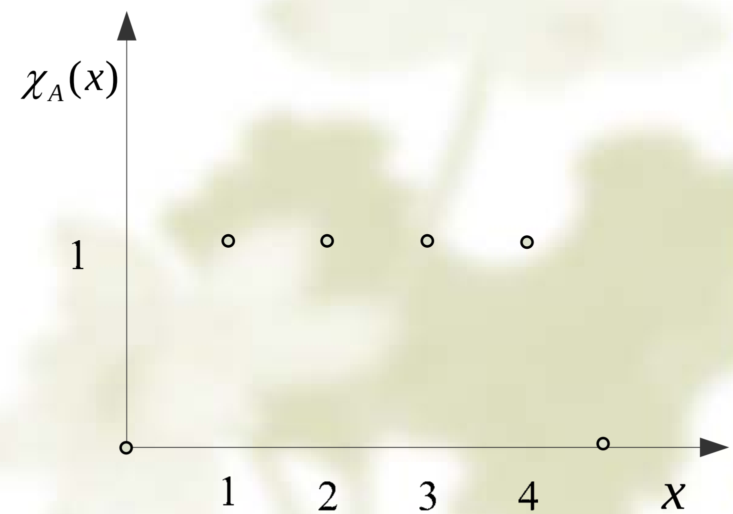
特征函数法

设A为论域U中的子集，$x \in U$，$\chi_A(x)$ 定义为A的特征函数

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}$$

例2.2.7 设 U 为自然数集，A = {1, 2, 3, 4}，则

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & x = 1, 2, 3, 4 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$



特征函数只取0, 1两个值

A的特征函数在x处的值 $\chi_A(x)$ 叫做x对于A的隶属度

$$\chi_A(x) \equiv 0 \Leftrightarrow A = \varnothing$$

$$\chi_A(x) \equiv 1 \Leftrightarrow A = U$$

$$\chi_A(x) \le \chi_B(x) \Leftrightarrow A \subseteq B$$

$$\chi_A(x) = \chi_B(x) \Leftrightarrow A = B$$

特征函数运算性质

$$\chi_{A^c}(x) = 1 - \chi_A(x)$$

$$\chi_{A \cup B}(x) = \max(\chi_A(x), \chi_B(x))$$

$$\chi_{A \cap B}(x) = \min(\chi_A(x), \chi_B(x))$$

递推法

通过一个递推公式描述一个集合

给出集合的一个元素和一个规则，集合的其它元素可以借助这个规则得到

运算法

通过集合的并、交、补等运算描述一个集合

第3节　模糊集合及其运算

一 经典集合论及其局限性

元素与集合之间的关系只可能有两种：“属于”和“不属于”，两者必居其一且只居其一

处理清晰、确定性问题时，达到了高度的严密性和精确性

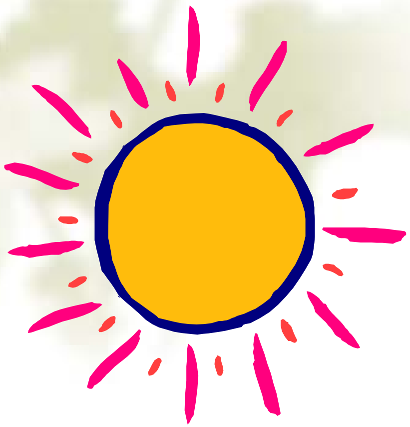
经典集合表达概念的内涵和外延都是明确的

内涵：集合的定义

外延：组成该集合的所有元素

人们的思维中，有许多没有明确外延的概念，表现在语言上，有许多模糊概念的词

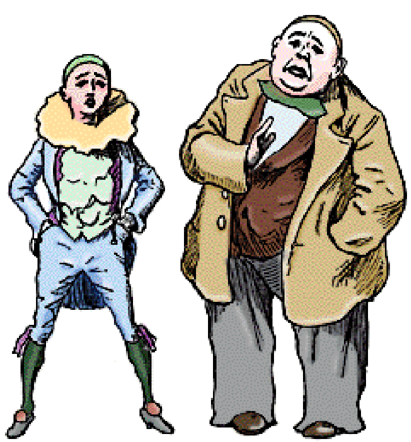
模糊概念的普遍性



天气冷热

雨的大小

风的强弱



体形胖瘦

年龄大小

个子高低

模糊概念不能用经典集合加以描述

不能绝对地区别“属于”或“不属于”，很多情况下是“以一定的程度属于”

论域上的元素符合概念的程度不是绝对的**0**或**1**，而是介于**0**和**1**之间的一个实数

二 模糊集合的基本概念

给定论域U，考虑U到$[0, 1]$的映射 $\mu_{\underset{\sim}{A}}(\cdot)$

$$\mu_{\underset{\sim}{A}} : U \to [0, 1]$$
$$u \to \mu_{\underset{\sim}{A}}(u)$$

$\mu_{\underset{\sim}{A}}(\cdot)$ 确定了U的一个模糊子集 $\underset{\sim}{A}$

$\mu_{\underset{\sim}{A}}$ ： 模糊子集 $\underset{\sim}{A}$ 的隶属函数

$\mu_{\underset{\sim}{A}}(u)$： u对 $\underset{\sim}{A}$ 的隶属度，也可以记为 $\underset{\sim}{A}(u)$

隶属函数的含义

论域U上的模糊子集 $\underset{\sim}{A}$ 由隶属函数 $\mu_{\underset{\sim}{A}}$ 表征

$\mu_{\underset{\sim}{A}}$ 的取值范围为闭区间$[0, 1]$，$\mu_{\underset{\sim}{A}}(u)$的大小反映了$u$对于模糊子集 $\underset{\sim}{A}$ 的隶属程度

接近**1**，属于模糊子集的程度高；等于**1**，完全属于

接近**0**，属于模糊子集的程度低；等于**0**，完全不属于

模糊子集完全由隶属函数描述

与经典集合的关系

当 $\mu_{\underset{\sim}{A}}(u)$ 的值域为{0,1}时，隶属函数退化为经典集合的特征函数，模糊集合蜕化为经典集合

经典集合是模糊集合的特殊形态，模糊集合是经典集合的推广

例2.3.1 模糊集合“年轻”

三 模糊集合的表示方法

论域是有限集 $U=\{u_1,u_2,\cdots,u_n\}$

扎德表示法 $\underset{\sim}{A}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\mu_{\underset{\sim}{A}}(u_i)}{u_i}=\frac{\mu_{\underset{\sim}{A}}(u_1)}{u_1}+\frac{\mu_{\underset{\sim}{A}}(u_2)}{u_2}+\cdots\frac{\mu_{\underset{\sim}{A}}(u_n)}{u_n}$

$\frac{\mu_{\underset{\sim}{A}}(u_i)}{u_i}$ ：元素与隶属度的对应关系

$+$ ：模糊集合在论域U上的整体

例2.3.2 模糊概念“几个”

论域是有限集 $U=\{u_1,u_2,\cdots,u_n\}$

序偶表示法 $\underset{\sim}{A}=\{(u_1,\mu_{\underset{\sim}{A}}(u_1)),(u_2,\mu_{\underset{\sim}{A}}(u_2)),\ldots,(u_n,\mu_{\underset{\sim}{A}}(u_n))\}$

例2.3.3 模糊概念“几个”

采用序偶表示法，隶属度为**0**的项可不写入

向量表示法 $\underset{\sim}{A}=(\mu_{\underset{\sim}{A}}(u_1),\mu_{\underset{\sim}{A}}(u_2),\cdots,\mu_{\underset{\sim}{A}}(u_n))$

例2.3.4 模糊概念“几个”

隶属度为零的项不能省略

课堂练习2.3.1 模糊集合“高个子”

论域是连续的

扎德表示法 $$\underset{\sim}{A}=\int_U \frac{\mu_{\underset{\sim}{A}}(u)}{u}$$

例2.3.5 模糊子集“年老”和“年青”

四 模糊集合的运算

常用概念

模糊幂集：U上所有模糊集合的全体， $F(U)$

模糊包含：$\boldsymbol{U}$上两个模糊子集 $\underset{\sim}{A}, \underset{\sim}{B}$

$$u \in U \Rightarrow \mu_{\underset{\sim}{A}}(u) \geq \mu_{\underset{\sim}{B}}(u)$$

称 $\underset{\sim}{A}$ 模糊包含 $\underset{\sim}{B}$ ，$\underset{\sim}{A} \supseteq \underset{\sim}{B}$

模糊相等

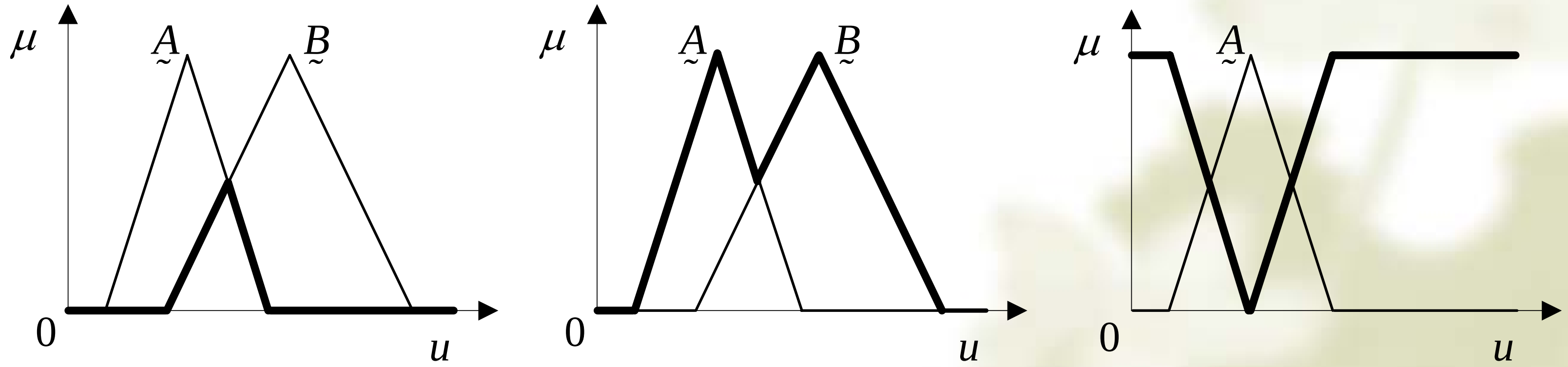
模糊集合运算

扎德算子

$$\mu_{\underset{\sim}{A}\cap\underset{\sim}{B}}(u) \triangleq \mu_{\underset{\sim}{A}}(u) \wedge \mu_{\underset{\sim}{B}}(u) = \min\{\mu_{\underset{\sim}{A}}(u), \mu_{\underset{\sim}{B}}(u)\}$$

$$\mu_{\underset{\sim}{A}\cup\underset{\sim}{B}}(u) \triangleq \mu_{\underset{\sim}{A}}(u) \vee \mu_{\underset{\sim}{B}}(u) = \max\{\mu_{\underset{\sim}{A}}(u), \mu_{\underset{\sim}{B}}(u)\}$$

$$\mu_{\underset{\sim}{A}^c}(u) \triangleq 1 - \mu_{\underset{\sim}{A}}(u)$$



例2.3.6 模糊集合的运算

五 模糊集合的运算性质

幂等律	交换律
结合律	分配律
吸收律	同一律
复原律	对偶律

模糊集合为什么不满足排中律?

六 其他模糊算子

模糊集合的运算本质上是其隶属函数的运算

“交”和“并”运算除了分别对相应集合的隶属度“取小”和“取大”外，还可以采用其他的隶属度运算方式

“交”运算

代数积 $\mu_{\underset{\sim}{A}\cap \underset{\sim}{B}}(u) \triangleq \mu_{\underset{\sim}{A}}(u)\cdot \mu_{\underset{\sim}{B}}(u)$

有界积 $\mu_{\underset{\sim}{A}\cap \underset{\sim}{B}}(u) \triangleq \max\{0, \mu_{\underset{\sim}{A}}(u)+\mu_{\underset{\sim}{B}}(u)-1\}$

“并”运算

代数和 $\mu_{\underset{\sim}{A}\cup \underset{\sim}{B}}(u) \triangleq \mu_{\underset{\sim}{A}}(u)+\mu_{\underset{\sim}{B}}(u)-\mu_{\underset{\sim}{A}}(u)\cdot \mu_{\underset{\sim}{B}}(u)$

有界和 $\mu_{\underset{\sim}{A}\cup \underset{\sim}{B}}(u) \triangleq \min\{1, \mu_{\underset{\sim}{A}}(u)+\mu_{\underset{\sim}{B}}(u)\}$