交流学习

模糊数学基础

王建宏

提 纲

- 模糊集概念
- 隶属函数确定
- 模糊关系
- 模糊综合评判
- 实例介绍

1、模糊集

模糊集理论

美国加州大学

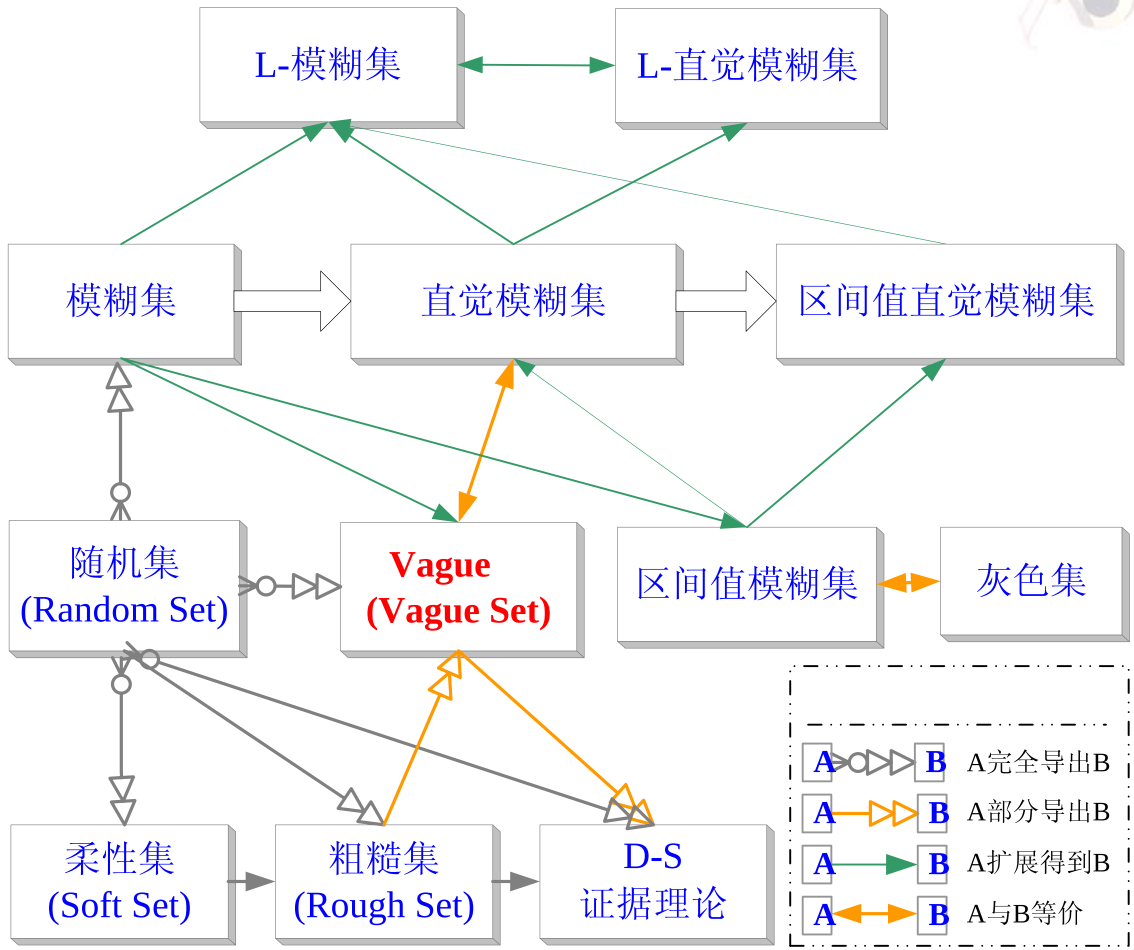
控制专家

L.A. Zadeh

1965年开创

1、模糊集

在农业、林业、气象、管理科学、系统工程、经济学、社会学、生态学、未来学、语言学、军事学、地质学等领域得到广泛应用，并取得显著成效。



1976年　传入我国

1980年　成立中国模糊数学与模糊系统学会

1981年　创办《模糊数学》杂志

1987年　创办《模糊系统与数学》杂志

我国已成为全球四大模糊数学研究中心之一（美国、西欧、日本、中国）

集合是现代数学的基础概念

模糊集合是集合的发展，是模糊数学的基础

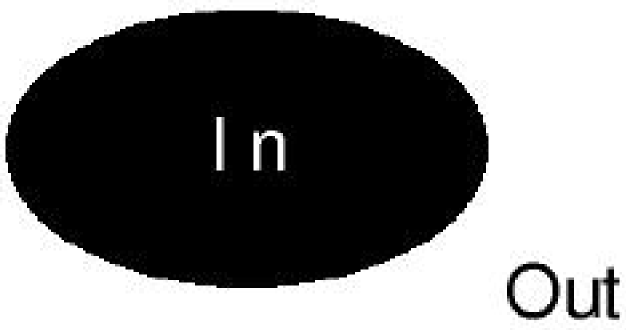
经典集合论任意元素和任意一个集合之间的关系是“属于”和“不属于的”；强调精确性

模糊集合论是用“隶属度“来表示的；强调模糊性

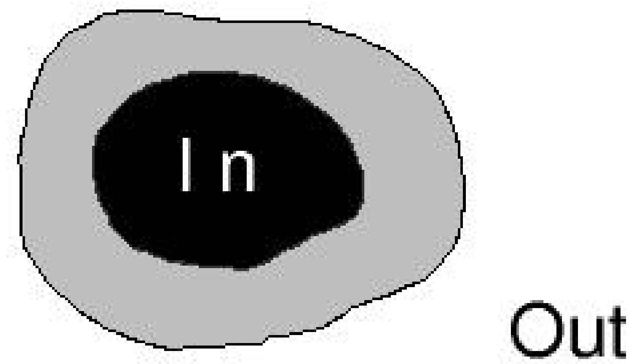
经典集合表示 “非此即彼”

模糊集合表示“亦此亦彼”

Crisp set vs. Fuzzy set

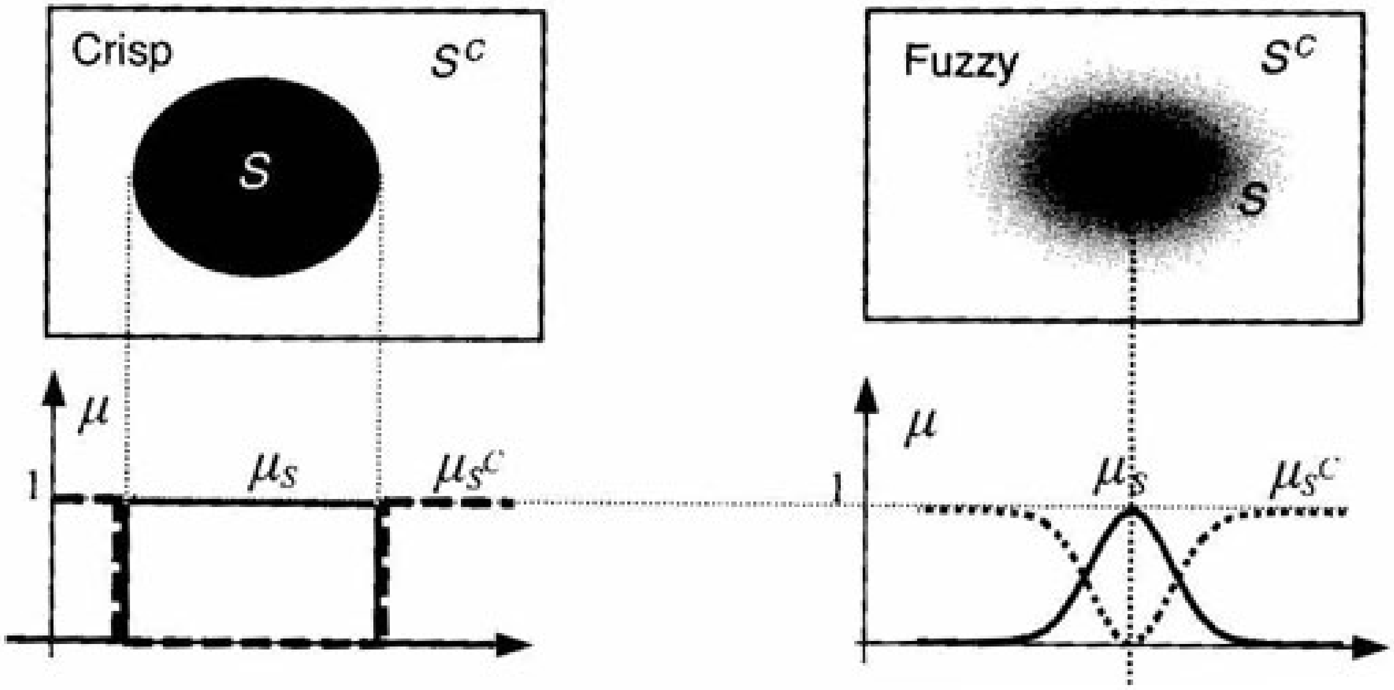


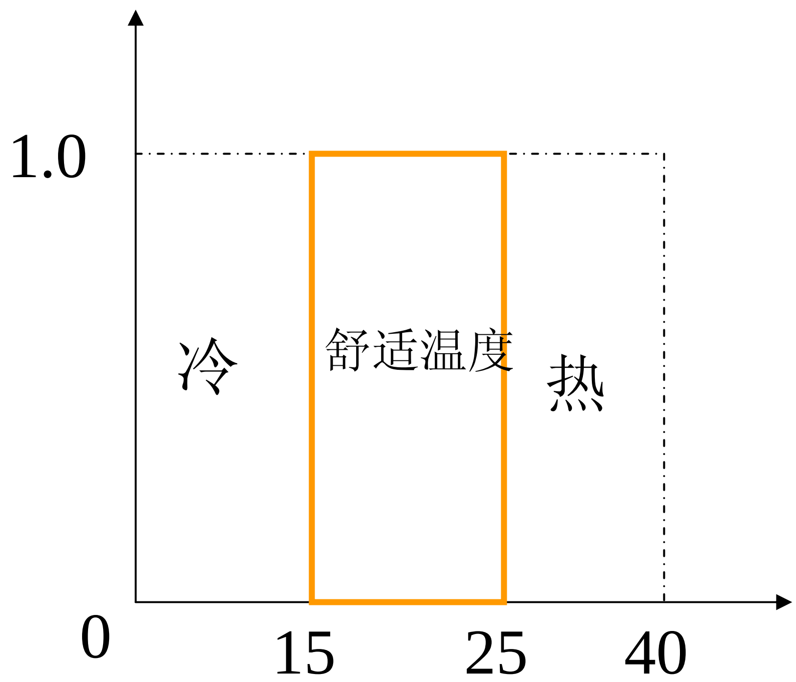
A traditional crisp set



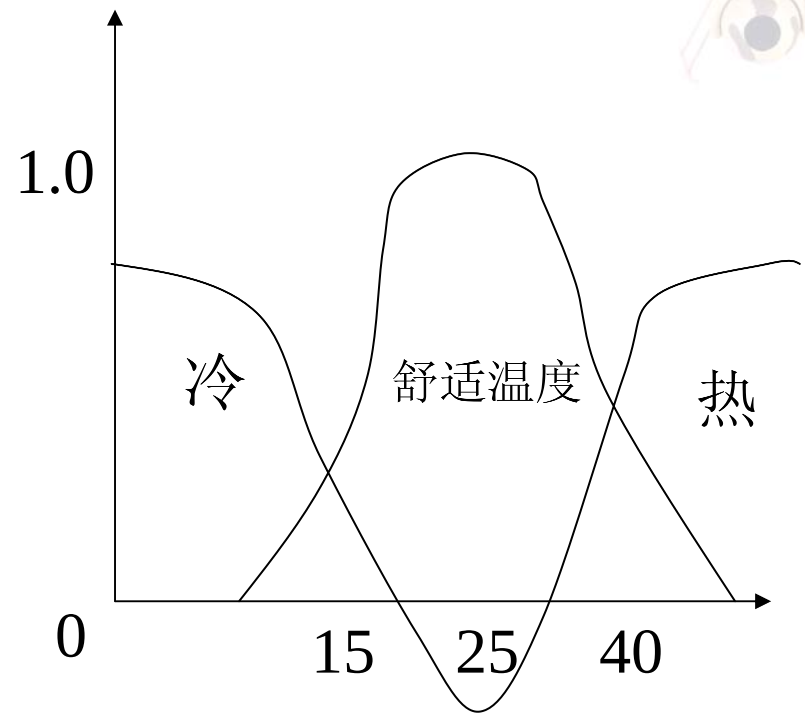
A fuzzy set

Crisp set vs. Fuzzy set





经典集合对温度的定义



模糊集合对温度的定义

1.2 概念

定义1-1　**模糊集合**：论域U中的模糊集F用一个在区间[0，1]上的取值的隶属函数 μ_F 来表示，即

$$\mu_F : U \to [0,1]$$

μ_F 是用来说明隶属于的程度。

$\mu_F(u) = 1$, 表示完全属于F;

$\mu_F(u) = 0$，表示完全不属于F;

$0 < \mu_F < 1$, 表示部分属于F.

F可以表示为：$F = \{(u, \mu_F(u)) / u \in U\}$

例1-1　设F表示远远大于0的实数集合，则它的隶属度函数可以用下式来定义

$$\mu_F = \begin{cases} 0 & x \le 0 \\ \dfrac{1}{1+\dfrac{100}{x^2}} & x > 0 \end{cases}$$

可以算出u(5)=0.2；　u(10)=0.5; u(20)=0.8；表示5属于大于零的程度为0.2，也就意味5算不上是远远大于0的数。

1.3 模糊集的表示

若U为离散域，即论域U是有限集合时，模糊集合可以有以下三种表示方法：

1、查德表示法　即：$F=\sum_{i=1}^{n}\mu_F(u_i)/u_i$

例1-2　考虑论域U={0,1,2,……10}和模糊集F”接近于0的整数“，它的隶属度函数表示法

$$F=1.0/0+0.9/1+0.75/2+0.5/3+0.2/4+0.1/5$$

1.3 模糊集的表示

2、“序偶”表示法：

$$F=\{(u_1,\mu(u_1)),(u_2,\mu(u_2)),\cdots\cdots(u_n,\mu(u_n))$$

3、“向量”表示法

$$F=\{\mu(u_1),\mu(u_2),\cdots\cdots,\mu(u_n)\}$$

4、“积分”表示法

$$F=\int_U \frac{\mu_F}{u}$$

1.4 集合运算

定义2-2　论域U中模糊子集的全体，称为U中的**模糊幂集**，记作F(U)，即

$$F(U)=\{A/\mu_A:U\to[0,1]\}$$

对于任一$u\in U$，若 $\mu_A=0$，则称A为空集 ϕ ，

若 $\mu_A=1$，则称A=U为全集 。

1.4 集合运算

模糊集合是利用集合中的特征函数或者隶属度函数来定义和操作的，A、B是U中的两个模糊子集，隶属度函数分别为 μ_A和μ_B

定义2-3　设A、B是论域U的模糊集，即 $A、B \in F(U)$，

若对于任一 $u \in U$ 都有 $B(u) \le A(u)$ ，则称**B包含于A**，或者称B是A的一个子集，记作 $B \subseteq A$ 。

若对于任一 $u \in U$ 都有 $B(u) = A(u)$ ，则称**B等于A**，记作 $B = A$ 。

1.4 集合运算

定义2-4 并：并 $(A\cup B)$ 的隶属度函数 $\mu_{A\cup B}$ 对所有的 $u\in U$ 被逐点定义为取大运算，即

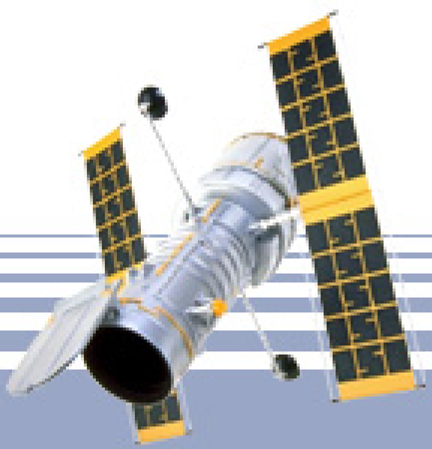
$$\mu_{A\cup B}=\mu_A(u)\vee\mu_B(u)$$

式中，符号 $\vee$ 为取极大值运算。

定义2-5 交：交 $(A\cap B)$ 的隶属度函数 $\mu_{A\cap B}$ 对所有的 $u\in U$ 被逐点定义为取小运算，即

$$\mu_{A\cap B}=\mu_A(u)\wedge\mu_B(u)$$

式中，符号 $\wedge$ 为取极小值运算。



1. 4 集合运算

定义2-6　补：模糊集合A的不隶属度函数$\mu_{\bar{A}}$，对所有的 $u \in U$，被逐点定义为$\mu_{\bar{A}} = 1 - \mu_A(u)$

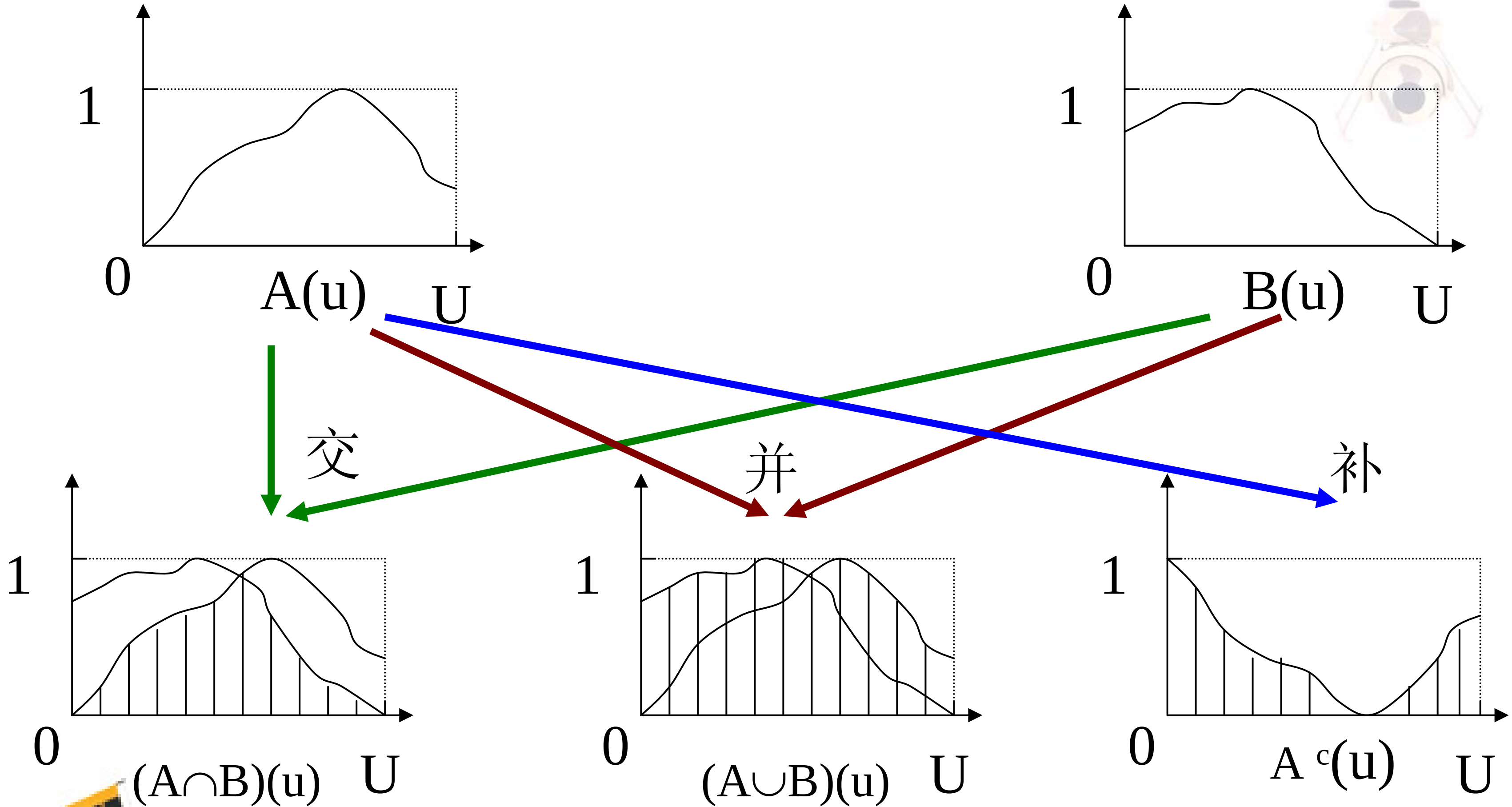
例2-3　设论域 $U = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\}$ 中的两个模糊子集为：

$$A = \frac{0.6}{u_1} + \frac{0.6}{u_2} + \frac{1}{u_3} + \frac{0.4}{u_4} + \frac{0.3}{u_5} \qquad B = \frac{0.5}{u_1} + \frac{0.6}{u_2} + \frac{0.3}{u_3} + \frac{0.4}{u_4} + \frac{0.7}{u_5}$$

则

$$A \cup B = \frac{0.6 \vee 0.5}{u_1} + \frac{0.5 \vee 0.6}{u_2} + \frac{1 \vee 0.3}{u_3} + \frac{0.4 \vee 0.4}{u_4} + \frac{0.3 \vee 0.7}{u_5} = \frac{0.6}{u_1} + \frac{0.6}{u_2} + \frac{1}{u_3} + \frac{0.4}{u_4} + \frac{0.7}{u_5}$$

$$A \cap B = \frac{0.6 \wedge 0.5}{u_1} + \frac{0.5 \wedge 0.6}{u_2} + \frac{1 \wedge 0.3}{u_3} + \frac{0.4 \wedge 0.4}{u_4} + \frac{0.3 \wedge 0.7}{u_5} = \frac{0.5}{u_1} + \frac{0.5}{u_2} + \frac{0.3}{u_3} + \frac{0.4}{u_4} + \frac{0.3}{u_5}$$


1
0
A(u)
U
1
0
B(u)
U
交
并
补
1
0
(A∩B)(u)
U
1
0
(A∪B)(u)
U
1
0
A c(u)
U

定理2-1 **模糊集运算的基本定律**：设U为论域，A、B、C为U中的任意模糊子集，则下列等式成立：

（1）、幂等律 $A\cap A=A，A\cup A=A$

（2）、结合律 $A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C，A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$

（3）、交换律 $A\cap B=B\cap A，A\cup B=B\cup A$

（4）、分配律 $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)，A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$

（5）、同一律 $A\cap U=A，A\cup\Phi=A$

（6）、零一律 $A\cup U=U，A\cap\Phi=\Phi$

（7）、吸收律 $A\cap(A\cup B)=A，A\cup(A\cap B)=A$

（8）、德.摩根律 $\overline{A\cap B}=\overline{B}\cup\overline{A},\overline{A\cup B}=\overline{B}\cap\overline{A}$

（9）、双重否认律 $\overline{\overline{A}}=A$

1.5 模糊集的截集——*从模糊中寻找确定，“矬子里选将军”*

定义：设A∈F(U), λ∈[0,1] 则：

(1) $A_\lambda = \{u \mid u \in U, A(u) \ge \lambda\}$ 称A_λ 为A的一个- λ截集，

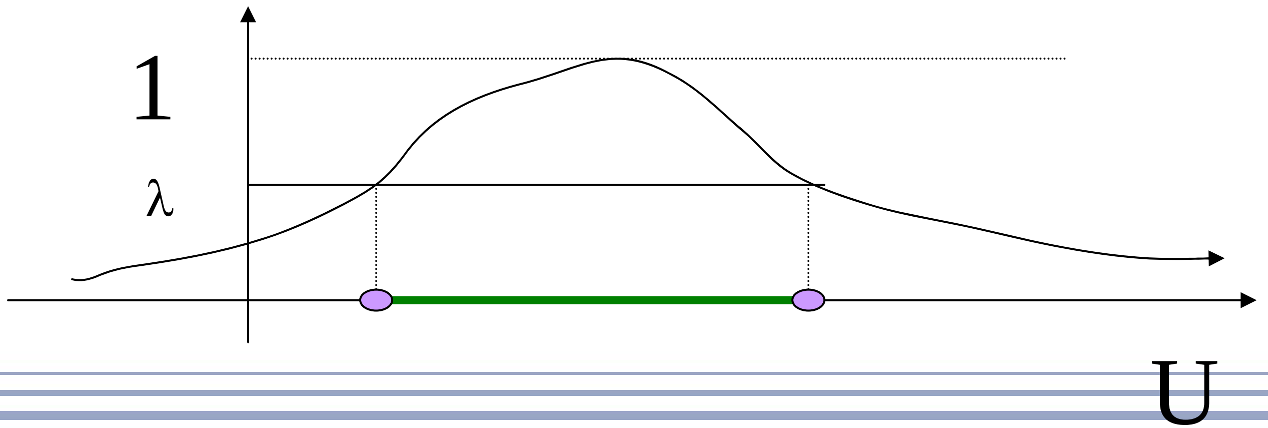
称λ为阈值（或置信水平）

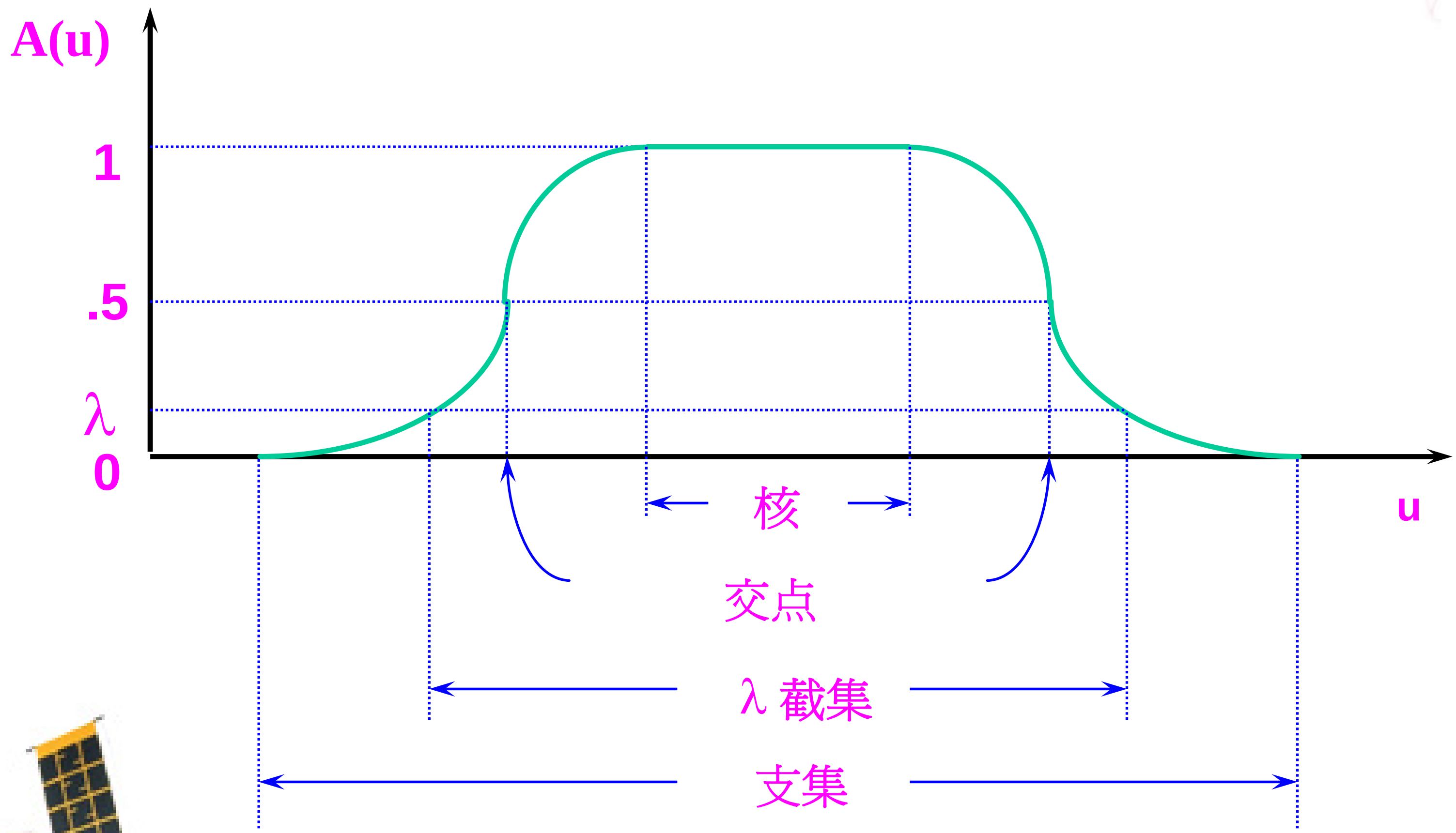
(2) $A_{\underset{\cdot}{\lambda}} = \{u \mid u \in U, A(u) > \lambda\}$ 称$A_{\underset{\cdot}{\lambda}}$ 为A的一个- λ强截集

(3) SuppA={u|u∈U, A(u)>0} A的支集

KerA={u|u ∈U,A(u)=1} A的核

当A的核不空，称A为正规F集




A(u)
1
.5
λ
0
u
核
交点
λ 截集
支集

1.5　模糊集的截集——*性质：注意从有限到无限*

截集

性质1　$(A\cup B)_\lambda = A_\lambda \cup B_\lambda$

$(A\cap B)_\lambda = A_\lambda \cap B_\lambda$

性质2　若$\{A_t|t\in T\}$，则

$$\bigcup_{t\in T}(A_t)_\lambda \subseteq (\bigcup_{t\in T} A_t)_\lambda$$

$$\bigcap_{t\in T}(A_t)_\lambda = (\bigcap_{t\in T} A_t)_\lambda$$

性质3　设λ_1、$\lambda_2\in[0,1]$，$A\in F$（U），若$\lambda_1<\lambda 2$ 则

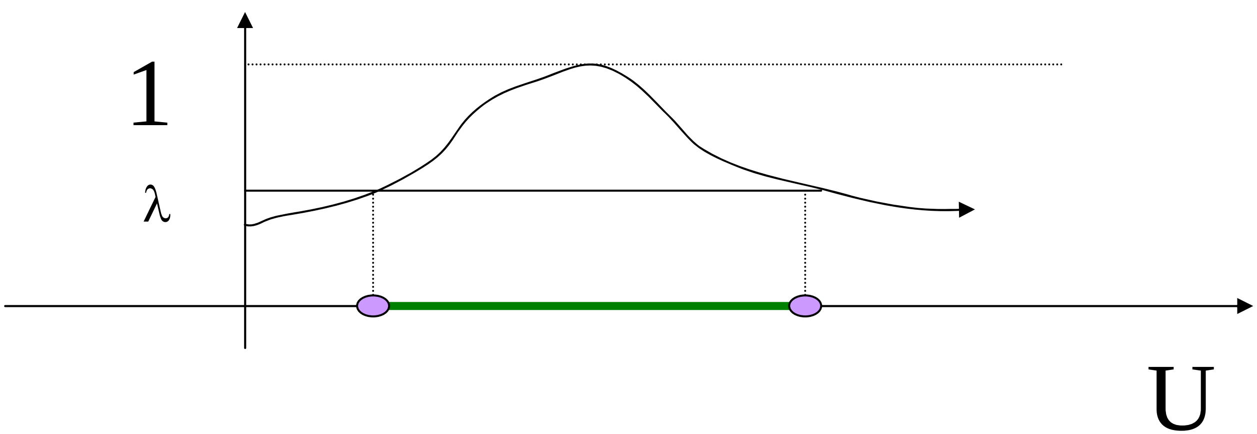
$$A_{\lambda_2} \subseteq A_{\lambda_1}$$

强截集

性质1、2、3、4、5

1.6 分解定理——*模糊集用普通集合表示*

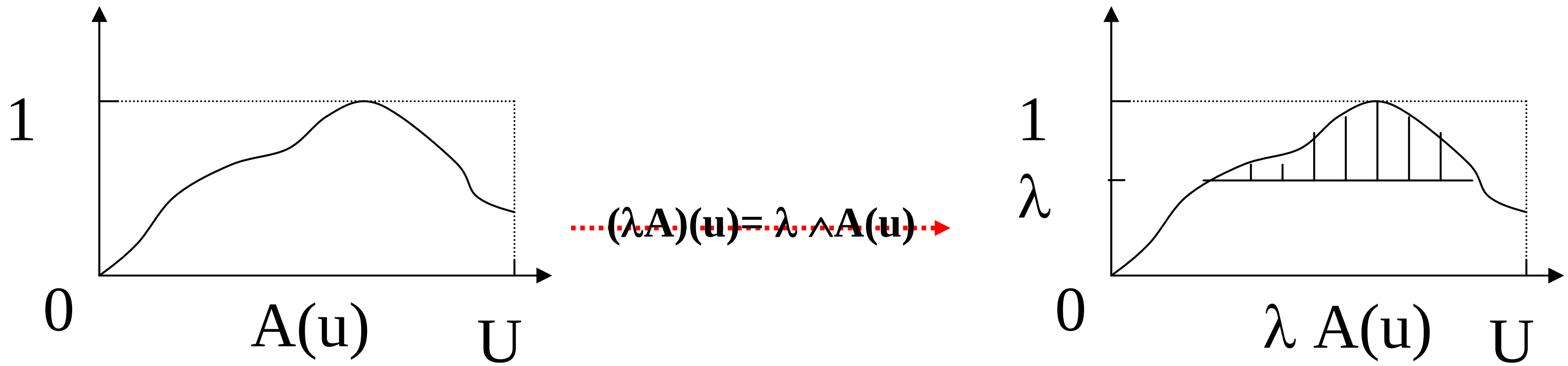
可以看到，当λ从1下降到0的时候，就是从KerA逐渐扩展为SuppA，因此，F集A可以看作是普通集合族 $\{A_\lambda \mid \lambda \in [0,1]\}$



1.6 分解定理——*模糊集用普通集合表示（2）*

数积的定义：

模糊集合的数积：设$\lambda\in[0,1]$，$A \in F(U)$，记 $(\lambda A)(u)= \lambda \wedge A(u)$ 则称λA为λ与A的数积。



数积的性质： 1 若$\lambda_1 < \lambda_2$ 则$\lambda_1 A \subseteq \lambda_2 A$

2 若$A < B$ 则$\lambda A \subseteq \lambda B$

分解定理1：设$A \in F(U)$，则

$$A = \bigcup_{\lambda \in [0,1]} (\lambda A_\lambda)$$

推论：$A(u)=\sup\{\lambda | u \in A_\lambda\}$

证明：因为A_λ是普通集合，所以它的特征函数

$$C_{A_\lambda}(u) = \begin{cases} 1 & A(u) \ge \lambda \\ 0 & A(u) < \lambda \end{cases}$$

$$\left(\bigcup_{\lambda \in [0,1]} \lambda A_\lambda\right)(u) = \bigvee_{\lambda \in [0,1]} (\lambda \wedge C_{A_\lambda}(u))$$

$$= \max\left(\bigvee_{\lambda \le A(u)} (\lambda \wedge C_{A_\lambda}(u)), \bigvee_{A(u) < \lambda} (\lambda \wedge C_{A_\lambda}(u))\right)$$

$$= \max\left(\bigvee_{\lambda \le A(u)} (\lambda \wedge 1), \bigvee_{A(u) < \lambda} (\lambda \wedge 0)\right)$$

$$= \max\left(\bigvee_{\lambda \le A(u)} (\lambda), \bigvee_{A(u) < \lambda} (0)\right)$$

$$= \max(A(u), 0) = A(u)$$

1.6 分解定理——*分解定理1举例*

$$A = \frac{0.4}{u_1} + \frac{0.5}{u_2} + \frac{1}{u_3} + \frac{0.8}{u_4} + \frac{0.2}{u_5}$$

$A_1 = \{u_3\}$

$A_{0.8} = \{u_3, u_4\}$

$A_{0.5} = \{u_2, u_3, u_4\}$

$A_{0.4} = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$

$A_{0.2} = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\}$

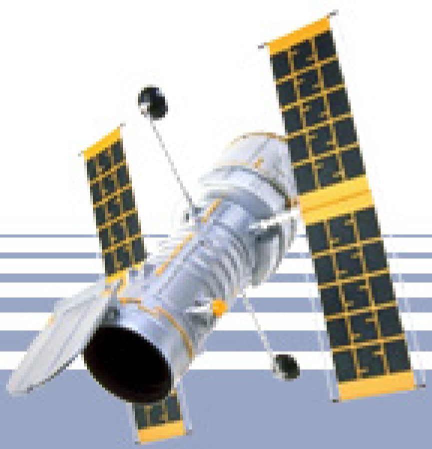
$$1A_1 = \frac{1}{u_3}$$

$$0.8A_{0.8} = \frac{0.8}{u_3} + \frac{0.8}{u_4}$$

$$0.5A_{0.5} = \frac{0.5}{u_2} + \frac{0.5}{u_3} + \frac{0.5}{u_4}$$

$$0.4A_{0.4} = \frac{0.4}{u_1} + \frac{0.4}{u_2} + \frac{0.4}{u_3} + \frac{0.4}{u_4}$$

$$0.2A_{0.2} = \frac{0.2}{u_1} + \frac{0.2}{u_2} + \frac{0.2}{u_3} + \frac{0.2}{u_4} + \frac{0.2}{u_5}$$



$$A=\frac{0.4}{u_1}+\frac{0.5}{u_2}+\frac{1}{u_3}+\frac{0.8}{u_4}+\frac{0.2}{u_5}$$

$$\begin{aligned}
A &= \bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda A_\lambda \\
&= 1A_1 \cup 0.8A_{0.8} \cup 0.5A_{0.5} \cup 0.4A_{0.4} \cup 0.2A_{0.2} \\
&= 1/\mu_3 \cup (0.8/\mu_3+0.8/\mu_4) \cup (0.5/\mu_2+0.5/\mu_3+0.5/\mu_4) \\
&\quad \cup (0.4/\mu_1+0.4/\mu_2+0.4/\mu_3+0.4/\mu_4) \cup (0.2/\mu_1+0.2/\mu_2+0.2/\mu_3+0.2/\mu_4+0.2/\mu_5) \\
&= (0.2\vee 0.4)/\mu_1+(0.2\vee 0.4\vee 0.5)/\mu_2+(0.2\vee 0.4\vee 0.5\vee 0.8\vee 1)/\mu_3 \\
&\quad +(0.2\vee 0.4\vee 0.5\vee 0.8)/\mu_4+0.2/\mu_5 \\
&= 0.4/\mu_1+0.5/\mu_2+1/\mu_3+0.8/\mu_4+0.2/\mu_5
\end{aligned}$$

2、隶属函数确定

模糊集合是用隶属函数来描述的

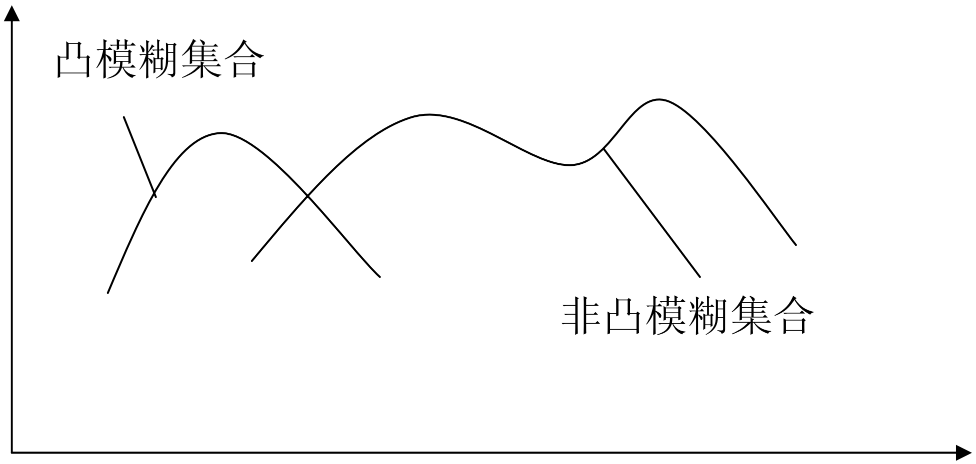
模糊集合的特征函数称作隶属函数

隶属度函数实质上反映的是事物的渐变性

2. 1、隶属函数确定原则

2.1.1、表示隶属度函数的模糊集合必须是凸模糊集合；

例如“速度适中”的隶属度函数——在一定范围内或者一定条件下，模糊概念的隶属度具有一定的稳定性——从最大的隶属度函点出发向两边延伸时，其隶属度函数的值必须是单调递减的，而不许有波浪性——总之，隶属度函数呈单峰（凸模糊集合）——一般用三角形和梯形作为隶属度函数曲线。



2.1.2、变量所取隶属度函数通常是对称和平衡的

模糊变量的标称值选择一般取3—9个为宜，通常取奇数（平衡）——在“零”、“适中”或者“合适”集合的两边语言值通常取对称（如速度适中，一边取“速度高”，一般另一边取“速度低”，满足对称）。

2.1.3、隶属度函数要符合人们的语义顺序，避免不恰当的重叠

在相同的论域上使用的具有语义顺序关系的若干标称的模糊集合，应该合理的排列。下面的排列是错误的。

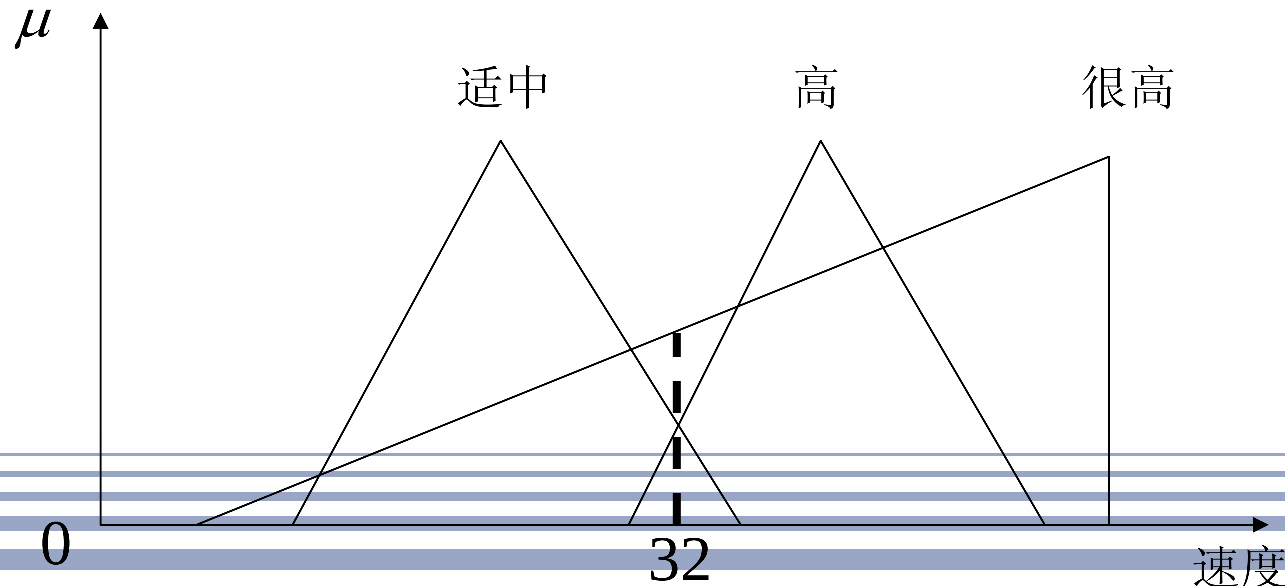
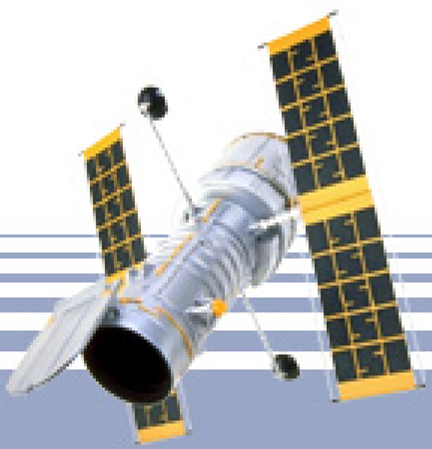


图　交叉越界的隶属度函数示意图

2.1.4、论域中的每个点应该至少属于一个隶属度函数的区域，同时它一般应该属于至多不超过两个隶属度函数的区域。

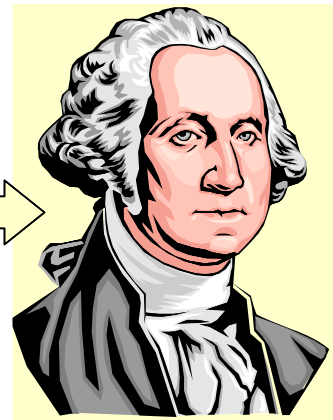
2.1.5、对于同一输入,没有两个隶属度函数会同时有最大隶属度

2.1.6、对两个隶属度函数重叠时，重叠部分对于两个隶属度函数的最大隶属度不应该有交叉。



一般取0.3——0.7

隶属度函数是模糊控制的应用基础



如何确定隶属函数?

自学习修改和完善

初步确定隶属函数

隶属函数的选择方法

- 模糊统计法
- 例证法
- 专家经验法
- 二元对比排序法

2.2.1 模糊统计法

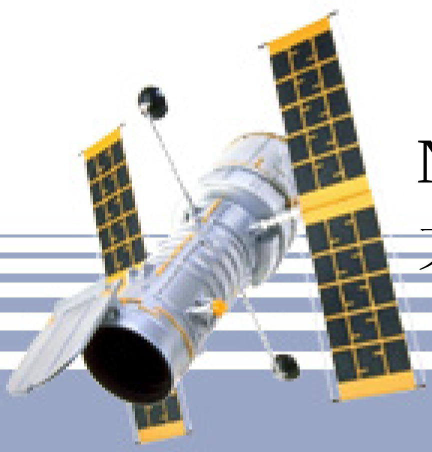
模糊统计法的基本思想是对论域U上的一个确定元素v是否属于论域上的一个可变的清晰集的判断。

模糊集——如：青年人

清晰集——“17—30岁的人“、25—35岁的人”，对于同一个模糊集可以有不同的清晰集。

模糊统计法计算步骤：

$$v_0\text{对}A\text{的隶属频率}=\frac{v_0\in A\text{的次数}}{\text{试验总次数}n}$$



N越大，隶属频率就越稳定，但是计算量比较大。

2.2.1 模糊统计法

单项变数模糊统计法：只考虑一项内容，如“青年”。
对论域U＝{“青年”,“非青年”}

Step1 确定论域。如人的年龄作为论域 U=[0,100]

Step2 形成调查表。如随机抽取129个大学生，在独立认真考虑 “青年”的含义之后，给出各自的答案，形成129个关于 “青年”的年龄段（数据表）

2.2.1 模糊统计法

Step3 频数分布表。如数据表中最小年龄为14，最大为36。以13.5为起点，36.5为终点，以1为间距，形成“年龄分组”，并统计各段汇入数据数。

频数统计

分组区间	相对频数
13.5 - 14.5	.0155
14.5 - 15.5	.2093
15.5 - 16.5	.3953
16.5 - 17.5	.5194
17.5 - 18.5	.9612
18.5 - 19.5	.969
19.5 - 20.5	1
20.5 - 21.5	1
21.5 - 22.5	1
22.5 - 23.5	1
23.5 - 24.5	1
24.5 - 25.5	.9922
25.5 - 26.5	.7984
26.5 - 27.5	.7829
27.5 - 28.5	.7674
28.5 - 29.5	.6202
29.5 - 30.5	.5969
30.5 - 31.5	.2093
31.5 - 32.5	.2093
32.5 - 33.5	.2016
33.5 - 34.5	.2016
34.5 - 35.5	.2016
35.5 - 36.5	.0078

Step4 建立隶属函数。从频数分布表就可以写出“青年”的隶属函数

$$A = 0.0155/14 + 0.2093/15 + 0.3953/16 + \cdots + 0.2016/35 + 0.0078/36$$

Step5 隶属度。如求u=27的隶属度，从上表或隶属函数可得 A(u=27)=0.78

例证法　　例证法由已知的有限个隶属函数的值，来估计论域U上的模糊子集A的隶属函数。

专家经验法　　专家经验法是根据专家的实际经验给出模糊信息的处理算式或者相应的权系数值隶属函数的一种方法。

二元对比排序法　　二元对比排序法是通过多个事物之间两两对比来确定某种特征下的顺序，由此来确定这些失去对该特征的隶属函数的大体形状。

模糊控制中的隶属函数图形大概有以下三大类：

1、左大右小的偏小型下降函数（Z函数）

2、左小右大的偏大型上升函数（S函数）

3、对称型凸函数（II函数）

高斯函数

$$\mu_A(x) = \exp\left(\frac{-(x-m_i)^2}{2\sigma_i^2}\right)$$

S函数

$$S(x;a,b) = \begin{cases} 0 & x < a \\ 2\left(\dfrac{x-a}{b-a}\right)^2 & a \le x < \dfrac{a+b}{2} \\ 1-2\left(\dfrac{x-b}{b-a}\right)^2 & \dfrac{a+b}{2} \le x < b \\ 1 & x \ge b \end{cases}$$

II函数

$$\pi(x;a,b) = \begin{cases} S(x;b-a,b) & x < b \\ 1-S(x;b,b+a) & x > b \end{cases}$$

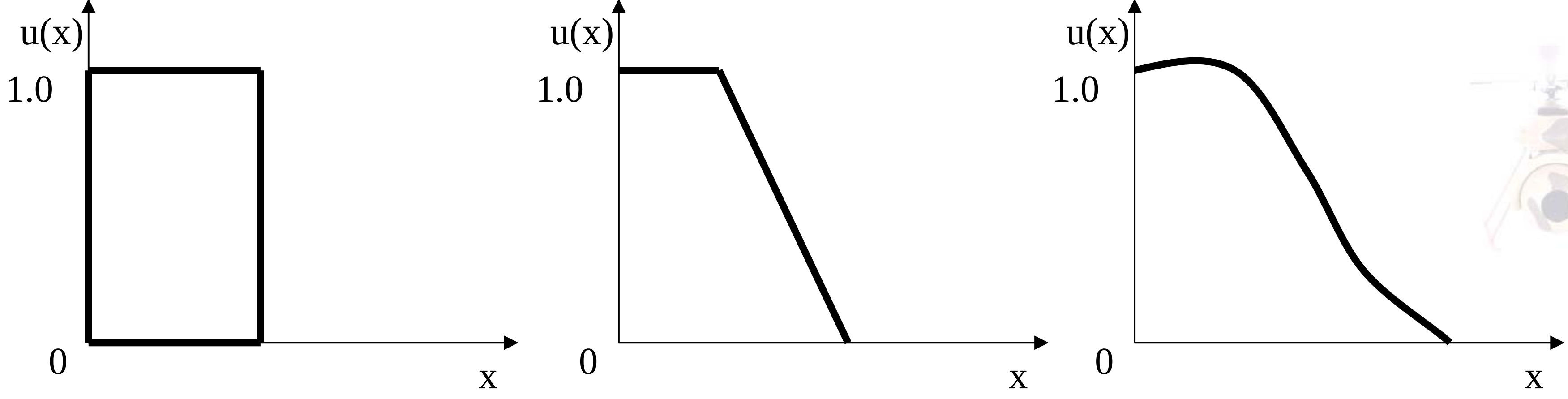


图　Z函数

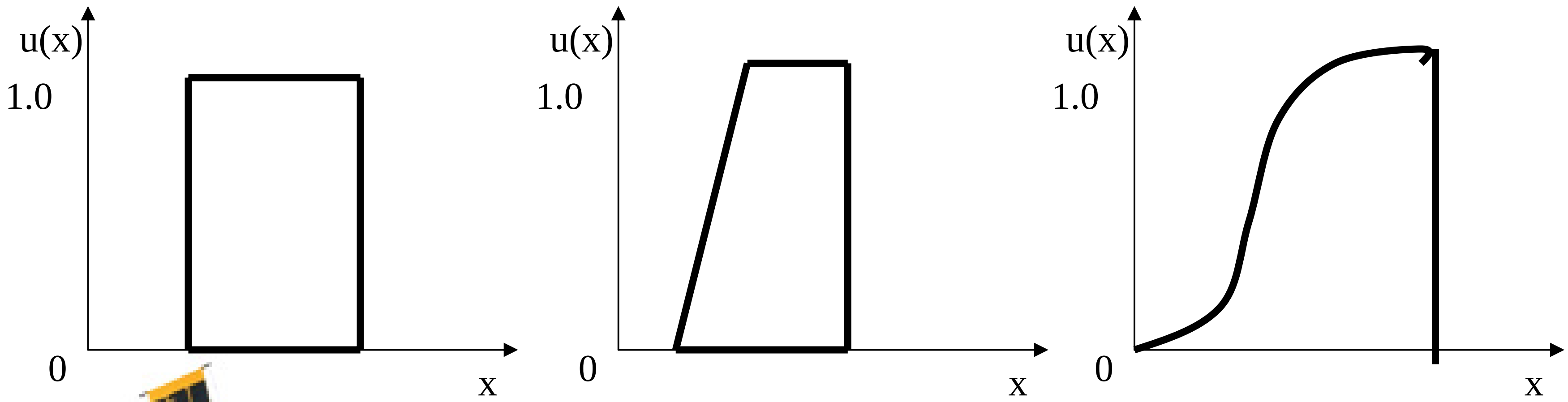


图　S函数

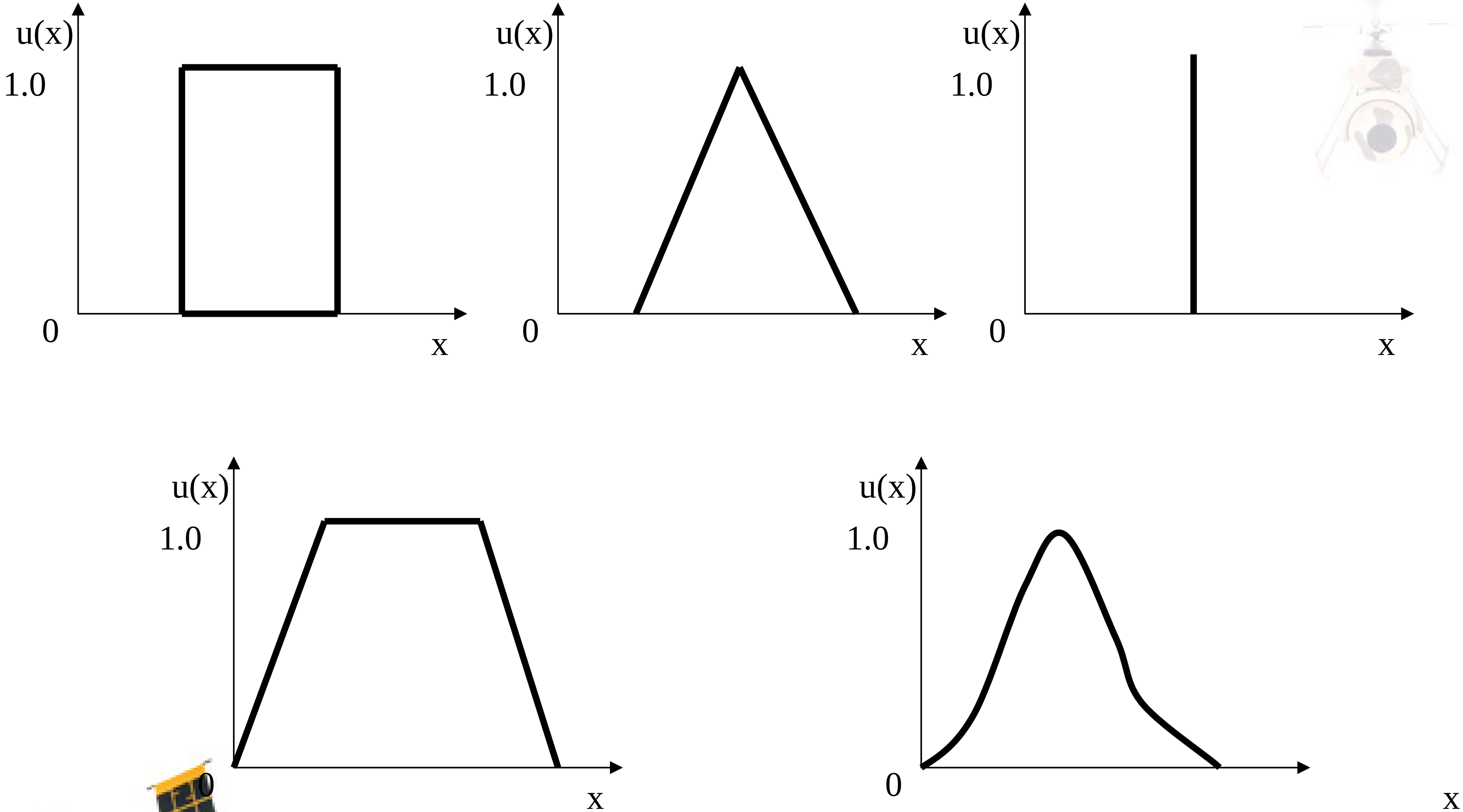


图　II函数

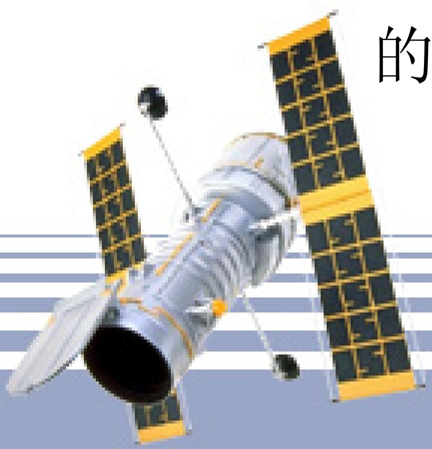
3、模糊关系

3.1、关系的定义

关系是客观世界存在的普遍现象。如父子关系、大小关系、属于关系、二元关系、多元关系、多边关系等等(关系明确）

直积体现着两集合间的无约束关系，若给以约束，就形成关系。在普通集合中，设论域U和V，从U到V的一个关系定义为直积 $U \times V$ 的一个子集R，记为

$$U \xrightarrow{R} V$$



3、模糊关系

3.1、模糊关系的定义

设论域U和V，则 $U \times V$ 的一个子集R，就是从U到V的模糊关系，记作

$$U \xrightarrow{R} V$$

这里的模糊关系R是属于模糊二元关系。其隶属函数为映射 $\mu_R : U \times V \to [0,1]$，

隶属度 $\mu_R(u_0, v_0)$ 表示u0与v0具有关系R的程度

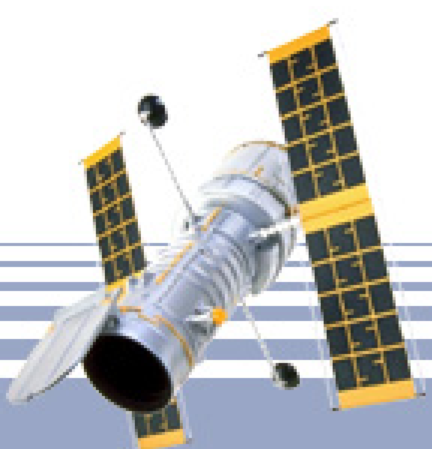
3、模糊关系

定义2-11　所谓A、B两集合的直积

$$A \times B = \{(a,b) / a \in A, b \in B\}$$

中的一个模糊关系R，是指以 $A \times B$ 为论域的一个模糊子集，序偶（a,b)的隶属度为 $\mu_R(a,b)$

当然，也可以推广到n个集合的直积



例2-6　设有七种物品：苹果、乒乓球、书、篮球、花、桃、菱形组成的一个论域U，并设x1、x2、……..x7分别为这些物品的代号，则U={x1、x2、……..x7}。现在就物品两两之间的相似程度来确定它们的模糊关系。

R	苹果	乒乓球	书	篮球	花	桃	菱形
苹果	1.0	0.	0	0.7	0.5	0.6	0
乒乓球	0.7	1.0	0	0.9	0.4	0.5	0
书	0	0	1.0	0	0	0	0.1
篮球	0.7	0.9	0	1.0	0.4	0.5	0
花	0.5	0.4	0	0.4	1.0	0.4	0
桃	0.6	0.5	0	0.5	0.4	1.0	0
菱形	0	0	0.1	0	0	0	1.0

对于确定的控制系统，系统的输入输出存在确定的关系；
对以模糊的控制系统，系统的输入输出存在模糊的关系。

其中 $$A \times B = \int_{U \times V} \min(\mu_A(u), \mu_B(u)) / (u, v)$$

例 设U={1,2,3};V={1,2,3,4};

$$\mu_A(u) = 1/1 + 0.7/2 + 0.2/3; \quad \mu_B(u) = 0.8/1 + 0.6/2 + 0.4/3 + 0.2/4;$$

$$A \times B = 0.8/(1,1) + 0.6/(1,2) + 0.4/(1,3) + 0.2/(1,4) + 0.7/(2,1) + 0.6/(2,2) + 0.4/(2,3) + 0.2/(2,4) + 0.2/(3,1) + 0.2/(3,2) + 0.2/(3,3) + 0.2/(3,4)$$

u \ v	1	2	3	4
1	0.8	0.6	0.4	0.2
2	0.7	0.6	0.4	0.2
3	0.2	0.2	0.2	0.2

3、模糊关系

模糊关系运算：

相等、包含、交、并、余

3、模糊关系

对于有有限论域$U=\{u_1,u_2,\cdots,u_m\},V=\{v_1,v_2,\cdots,v_m\}$，则$U$对$V$的模糊关系$\underline{R}$的隶属函数$\mu_{\underline{R}}(u,v)$可以用$m\times n$阶模糊矩阵$R$来表示，即

$$\underline{R}=R=(r_{ij})_{m\times n}$$

其中$r_{ij}=R(u_i,v_j)\in[0,1]$表示$(u_i,v_j)$对模糊关系$\underline{R}$的相关程序。

例2-8　某家中子女与父母的长相相似关系R为模糊关系，可表示为

R	父	母
子	0.2	0.8
女	0.6	0.1

用模糊矩阵R来表示为

$$R = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.8 \\ 0.6 & 0.1 \end{bmatrix}$$

该家中父母与祖父母的相似关系S也是模糊关系，可表示为

S	祖父	祖母
父	0.5	0.7
母	0.1	0

用模糊矩阵R来表示为

$$S=\begin{bmatrix}0.5 & 0.7\\ 0.1 & 0\end{bmatrix}$$

那么家中孙子、孙女与祖父、祖母的相似程度如何？

$$R\circ S=\begin{bmatrix}0.2 & 0.8\\ 0.6 & 0.1\end{bmatrix}\circ\begin{bmatrix}0.5 & 0.7\\ 0.1 & 0\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}(0.2\wedge 0.5)\vee(0.8\wedge 0.1) & (0.2\wedge 0.7)\vee(0.8\wedge 0)\\ (0.6\wedge 0.5)\vee(0.1\wedge 0.1) & (0.6\wedge 0.7)\vee(0.1\wedge 0)\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}0.2 & 0.2\\ 0.5 & 0.6\end{bmatrix}$$

P	祖父	祖母
孙子	0.2	0.2
孙女	0.5	0.6

2、模糊关系的合成

前面讲的是单个推理，那么对于多重推理如何解决？

如：if A then B，if b then C，则A与C是什么关系？

模糊关系也存在关系合成，主要通过模糊关系矩阵来合成

定义2-14　**模糊关系合成：**如果R和S分别为迪卡尔空间 $U\times V$ 和 $V\times W$ 上的模糊关系，则R和S的合成是定义在迪卡尔空间 $U\times V\times W$ 上的模糊关系，并记为 $R\circ S$ ，其隶属度函数的计算方法为：

$$R\circ S=\{[\underset{\vee}{\sup}(\mu_R(u,v)\wedge(\mu_s(v,w))],u\in U,v\in V\}$$

$$\overset{\sup-\min}{=}\{\max[\min(\mu_R(u,v)\wedge(\mu_s(v,w))],u\in U,v\in V\}$$

模糊关系合成算子sup-min存在以下特性：

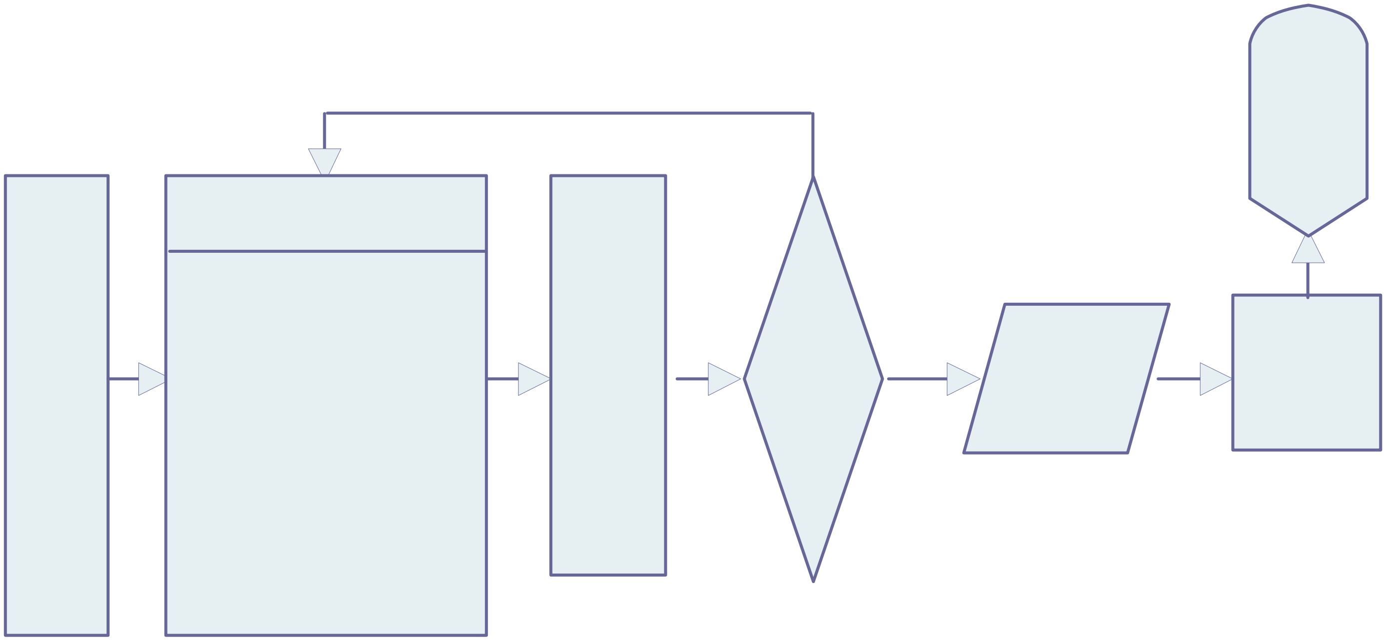
$$R\circ I=I\circ R=R$$

$$R\circ 0=0\circ R=0$$

$$R^{m+1}=R^m\circ R$$

$$R^{m+n}=R^m\circ R^n$$

4、模糊综合评判



N

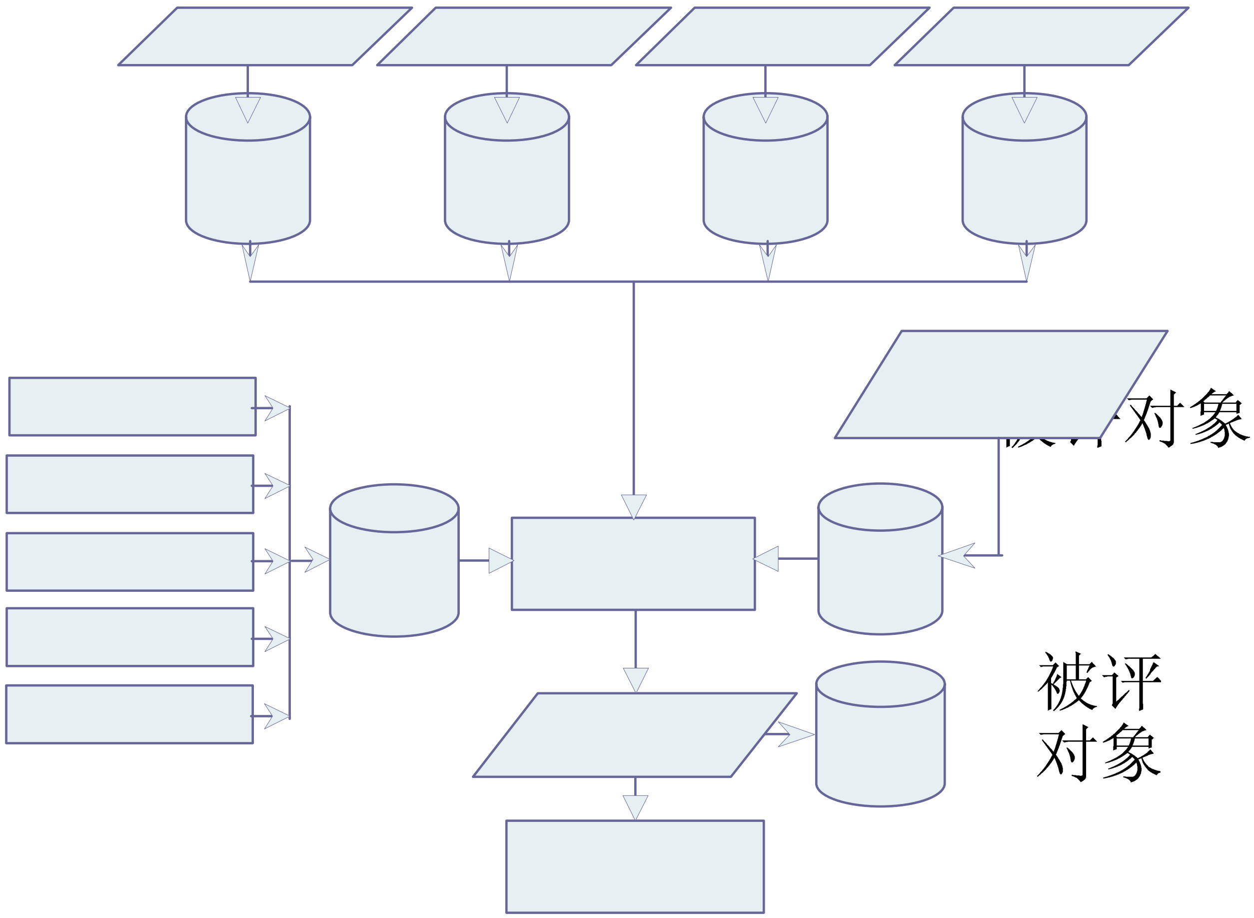
建立评估体系

成立评

明确评估对象

设计指标体系

4、模糊综合评判



4、模糊综合评判

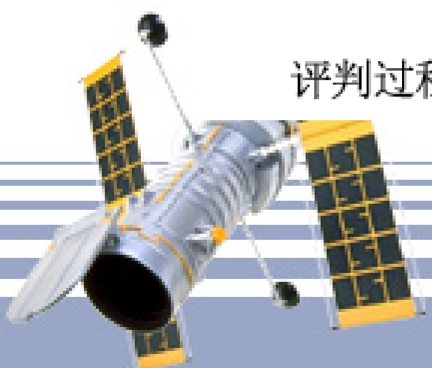
设因素集$U=\{u_1,u_2,\cdots,u_n\}$，评价集$V=\{v_1,v_2,\cdots,v_m\}$，则因素集 U 和评价集 V 之间的关系矩阵可用

$$\tilde{R}=\begin{pmatrix} r_{11} & \cdots & r_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{n1} & \cdots & r_{nm} \end{pmatrix} \tag{2.38}$$

表示。其中r_{ij}表示因素u_{ij}关于评价集的评价，$r_{ij}=[t_{\tilde{R}_{ij}},1-f_{\tilde{R}_{ij}}]$。

权重$\tilde{A}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$是表示因素重要性的相对数值。由于重要性我们缺乏明确的定义，同时考虑到问题的复杂性，a_i很难用一个数值来刻划，故将其也表示成 VS 型，即$a_i=[t_{\tilde{A}_i},1-f_{\tilde{A}_i}]$，$\tilde{A}$是一个 VS。

评判过程：评判结果$\tilde{B}=\tilde{A}\circ\tilde{R}$，这里“$\circ$”运算符是前面定义的$(\vee,\wedge)$ 运算。

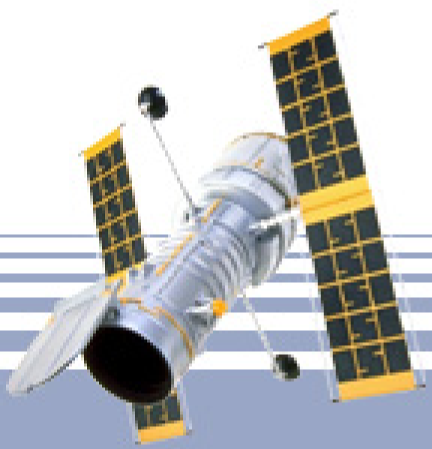


4、模糊综合评判

例：属性集 $\boldsymbol{U}$、传感器集 $\boldsymbol{S}$ 及权重向量 $\boldsymbol{w},\boldsymbol{\lambda}$ 的定义与 Vague 集方法相同，评价集 $\boldsymbol{V}$ 中属性的赋值取对应 $t_{ij}\in[0,1]$。对于本例，模糊矩阵可写成：

$$R=\begin{pmatrix}0.6 & 0.5 & 0.3\\ 0.7 & 0.6 & 0.6\\ 0.4 & 0.2 & 0.5\end{pmatrix}$$

选用以下评判模型，得到综合评判结果 $B=\lambda\circ R$，再用最大隶属原则，判定输出结果。



4、模糊综合评判

对本例数据，用最大隶属原则，模型I、III有缺陷，无法得出正确的评定结果；模型II、IV得到的评定目标为O2（轰炸机）。

其中可选模型分别为：

I. $M(\wedge,\vee)$——主因素决定型

$$b_j=\bigvee_{i=1}^{n}(\lambda_i\wedge r_{ij})\quad(j=1,2,\cdots,m)$$

评判结果 $B=(0.5,\ 0.5,\ 0.4)$.

II. $M(\bullet,V)$——主因素突出型

$$b_j=\bigvee_{i=1}^{n}(\lambda_i\bullet r_{ij})\quad(j=1,2,\cdots,m)$$

评判结果 $B=(0.3,\ 0.35,\ 0.2)$.

III. $M(\wedge,\oplus)$——主因素突出型

$$b_j=\bigoplus_{i=1}^{n}(\lambda_i\wedge r_{ij})=\sum_{i=1}^{n}(\lambda_i\wedge r_{ij})\quad(j=1,2,\cdots,m)$$

评判结果 $B=(1,\ 1,\ 0.8)$.

IV. $M(\bullet,+)$——加权平均型

$$b_j=\sum_{i=1}^{n}(\lambda_i\bullet r_{ij})\quad(j=1,2,\cdots,m)$$

评判结果 $B=(0.57,\ 0.65,\ 0.36)$.

5、实例

耕地地力评价原理与方法

环境质量评价与系统分析

基于模糊风险评估的自然
灾害风险管理策略分析

农业地质调查工作内容及方法

生态农业评价

谢谢！