Universidad Nacional del Altiplano
Facultad de Ingeniería Estadística e Informática
Docente: Fred Torres Cruz
Autor : Ronald Junior Pilco Nuñez

Trabajo Encargado - N° 008

Convexidad de funciones

1 Introducción

Una función $f(x)$ es convexa en un intervalo si satisface la siguiente desigualdad para todo x_1, x_2 en el intervalo y para cualquier $\lambda \in [0, 1]$:

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2). \tag{1}$$

Verificaremos la convexidad de $f(x) = x^2$ usando tres métodos: definición, segunda derivada y visualización gráfica.

2 Método 1: Definición de Convexidad

Tomamos dos puntos arbitrarios $x_1 = -2$ y $x_2 = 2$, con $\lambda = 0.5$:

$$\begin{aligned} x_m &= \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2 = 0, \\ f(x_m) &= 0^2 = 0, \\ \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2) &= 0.5 \cdot 4 + 0.5 \cdot 4 = 4. \end{aligned}$$

Dado que $f(0) = 0 \leq 4$, se cumple la desigualdad de convexidad.

3 Método 2: Segunda Derivada

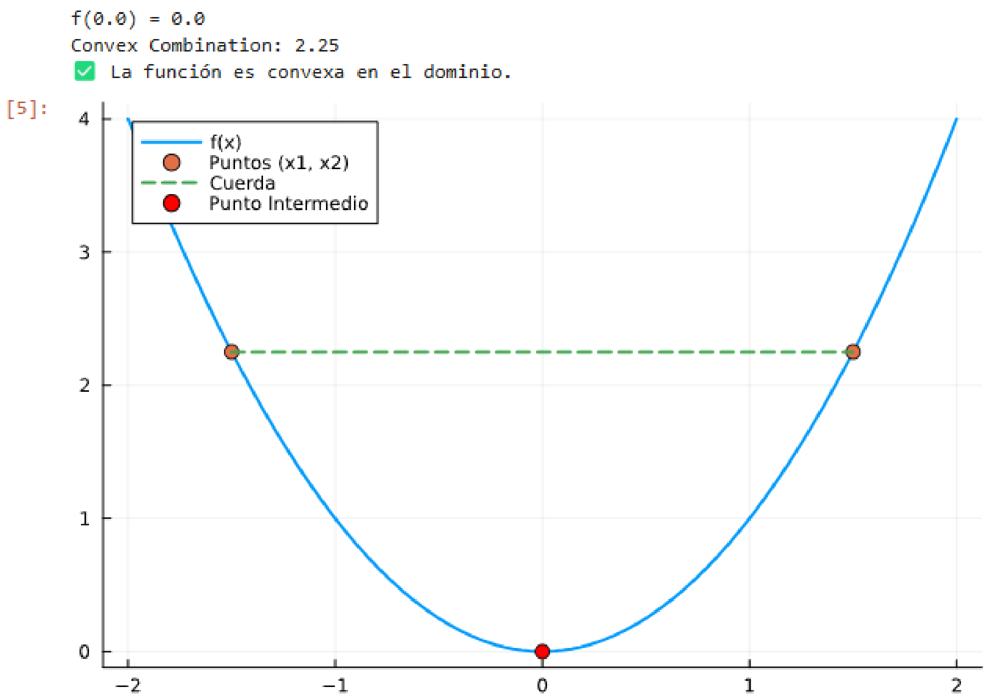
Calculamos las derivadas de $f(x) = x^2$:

- Primera derivada:
$$f'(x) = 2x. \tag{2}$$
- Segunda derivada:
$$f''(x) = 2. \tag{3}$$

Como $f''(x) = 2$ es siempre positiva, la función es convexa en todo $\mathbb{R}$.

4 Método 3: Gráfica

Si graficamos $f(x) = x^2$, notamos que cualquier recta secante entre dos puntos está por encima de la curva:



Para visualizarlo en Julia: Codigo Julia convx.ipynb

5 Conclusión

La función $f(x) = x^2$ es convexa en todo $\mathbb{R}$, ya que:

- Cumple la desigualdad de convexidad.
- Su segunda derivada es siempre positiva.
- Gráficamente, la curva nunca está por encima de sus cuerdas.