# C01-01: Ensembles de Nombres

La version pdf de ce cours est téléchargeable ici. (version 2021-2022)

## 1. Activité : Classer des nombres

- 1. Dans la liste ci-dessus, deux écritures sont interdites. Lesquelles et pourquoi?
- 2. Classer les nombres restants en cinq groupes, en justifiant vos choix.

# i Différence entres propriétés et écritures

Un nombre peut être écrit de différentes manières, plus ou moins compliquées. Par exemple :

$$2=rac{6}{3}=20 imes 10^{-1}=\sqrt{4}=-\left(-2
ight)=2,0000$$

Pour autant, ce qui nous intéresse en mathématiques c'est d'étudier les **propriétés** de ce nombre, qui elles sont indépendantes de l'écriture de ce nombre.

# 2. Nombres entiers naturels et relatifs

### **6** Définitions

- L'ensemble des entiers naturels, noté  $\mathbb{N}$ , est l'ensemble des nombres permettant de dénombrer une collection d'objets, de personnes, etc, c'est-à-dire la suite naturelle 0; 1; 2; 3; ...
- L'ensemble des entiers relatifs, noté  $\mathbb{Z}$ , est l'ensemble des entiers naturels et leurs opposés, c'est-à-dire la suite  $\ldots$ ; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3;  $\ldots$

# 1 Info

- L'ensemble  $\mathbb N$  possède un plus petit élément, c'est 0.
- Les nombres entiers naturels sont tous positifs ou nuls.
- Tous les entiers naturels sont aussi des entiers relatifs.

#### **6** Vocabulaire et notations

- Appartenance : On dit que 5 appartient à  $\mathbb{N}$ , et on note  $5 \in \mathbb{N}$ . De même -2 n'appartient pas à  $\mathbb{N}$ , et on note  $-12 \notin \mathbb{N}$ .
- Inclusion : Tous les éléments de  $\mathbb N$  sont aussi des éléments de  $\mathbb Z$ . On dit alors que  $\mathbb N$  est un sous-ensemble de  $\mathbb Z$  et on note alors  $\mathbb N \subset \mathbb Z$  (qui se lit  $\mathbb N$  est inclus dans  $\mathbb Z$ ).

# Fig. 1 Application : choix du bon symbole

### >

## 3. Nombres décimaux

# définition : Nombres décimaux

Un nombre décimal est un nombre pouvant s'écrire sous la forme d'une fraction décimale, c'est à dire sous la forme  $\$  \dfrac{a} {10^n} \\$ avec  $a \in \mathbb{Z}$  et  $n \in \mathbb{N}$ .

L'ensemble des décimaux est noté  $\mathbb{D}$ .

### Application : Nombres décimaux et puissances de 10

#### >

#### Remarques

- Les entiers relatifs sont des décimaux, car si  $k\in\mathbb{Z}$ , on peut aussi écrire  $k=rac{k}{1}=rac{k}{10^0}$ . On a donc la propriété  $\mathbb{Z}\subset\mathbb{D}$ .
- Un nombre décimal possède une écriture décimale finie.

### 4. Nombres rationnels

### **b** Définition : Nombres rationnels

Un nombre rationnel est un nombre pouvant s'écrire sous la forme  $\frac{a}{b}$  avec  $a\in\mathbb{Z}$  et  $b\in\mathbb{N}^*$  (c'est-à-dire  $\mathbb{N}$  privé de 0).

L'ensemble des nombres rationnels est noté  $\mathbb{Q}$ .



Un nombre décimal est par définition un nombre rationnel.

Par définition de  $\mathbb{D}$  et  $\mathbb{Q}$ , on a la propriété  $\mathbb{D} \subset \mathbb{Q}$ .

# **6** Propriété : Caractérisation des rationnels non décimaux

Tous les nombres rationnels ne possèdent pas d'écriture décimale finie. En particulier,  $\frac{1}{3}$  n'est pas décimal.



# Remarques

- Les nombres rationnels non décimaux possèdent une écriture décimale infinie périodique, c'est-à-dire avec une série de chiffres qui se répètent à l'infini. Par exemple  $\frac{1}{7}=0,14285714285714...$  (on constate la répétition de la séquence 142857}).
- Réciproquement, si un nombre possède une écriture décimale infinie périodique, alors c'est un rationnel.

# Méthode : Déterminer une fraction égale à une écriture décimale infinie périodique

On considère le nombre a dont l'écriture décimale est infinie périodique a=2,71347134... Démontrons que ce nombre est rationnel.



Application : Calculs avec les rationnels

## 5. Nombres réels

#### **b** Définition : Nombres réels

Un {==nombre réel est un nombre exprimant une longueur, ou l'opposé d'un nombre exprimant une longueur.

L'ensemble des nombres rationnels est noté  $\mathbb{R}$ .

# (i) Remarques

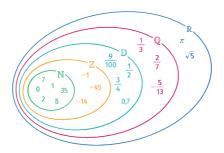
- Un nombre réel est un nombre dont le carré est positif ou nul.
- Par définition, tous les nombres rationnels sont des réels. On a alors  $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ .
- Certains nombres réels ne sont pas rationnels. Par exemple  $\pi$  n'est pas rationnel, tout comme  $\sqrt{2}$  ( on le montrera en exercice ). Ces nombres sont dits **irrationnels** .

>

# **b** Propriété : Ensembles de nombres

Des remarques précédentes, on à la propriété :

$$\mathbb{N}\subset\mathbb{Z}\subset\mathbb{D}\subset\mathbb{Q}\subset\mathbb{R}$$



# **6** Propriété : Droite des réels

Tout nombre réel est représenté par l'abscisse d'un point sur la droite numérique (appelée aussi droite des réels).

## Application : Représenter sur la droite des réels

>