

C03 – 01 Vocabulaire et rappels sur les fonctions

1. Activité : Fonctions, tableaux de valeurs, enchaînements

Malia trouve une étrange machine dans le tiroir de son grand-père.



Quand elle appuie sur les touches 4 et  $f$ , la machine affiche 9.

Quand elle appuie sur les touches  $-$  2  $g$ , la machine affiche 6.

Pour exprimer cela plus rapidement, on dira que :

- l'image de 4 par  $f$  est 9 ;
- un antécédent de 6 par  $g$  est  $-2$  ;
- Chacune des touches  $f$   $g$   $h$   $k$  est une fonction.

Elle teste la machine sur plusieurs nombres et note les résultats dans les tableaux suivants :

Nombre	-4	-3	-2	-1	0	1	2
Image par $f$	1	2	3	4	5	6	7

Nombre	-4	-3	-2	-1	0	1	2
Image par $g$	12	9	6	3	0	-3	-6

Nombre	-4	-3	-2	-1	0	1	2
Image par $h$	16	9	4	1	0	1	4

## Notation

Pour des raisons de commodité, on utilisera les notations suivantes :  $f$  pour  $\boxed{F}$ ,  $g$  pour  $\boxed{G}$ , etc...

### Question 1

#### Énoncé

1. Quel est l'image de 3 par  $f$  ? de 2 par  $h$  ?
2. Quel(s) est(sont) l'(les) antécédent(s) de  $-6$  par  $g$  ? de 1 par  $h$  ?
3. Pour quelle(s) fonction(s) 9 est-il l'image de  $-3$  ?
4. Laquelle de ces fonctions représente une situation de proportionnalité ?

#### Solution

1. L'image de 3 par  $f$  est 8, autrement dit  $f(3) = 8$ , et l'image de 2 par  $g$  est  $-6$ , autrement dit  $g(2) = -6$ .
2. D'après le tableau, le seul antécédent connu de  $-6$  par  $g$  est 2. De même, les seuls antécédents de 1 par  $h$  sont  $-1$  et 1.
3. Il s'agit des fonctions  $g$  et  $h$  :  $g(-3) = h(-3) = 9$
4. Ce ne peut pas être la fonction  $f$ , car l'image de 0 est 5, ce qui ne représente pas une situation de proportionnalité. Ensuite en extrayant le sous tableau suivant de la fonction  $h$  :

2	3
4	9

On constate que  $2 \times 9 \neq 4 \times 3$ . Il n'y a pas d'égalité des produits en croix, donc pas de situation de proportionnalité.

Il s'agit donc de la fonction  $g$ , avec un coefficient de proportionnalité qui est égal à  $-3$ .

### Question 2

#### Énoncé

Malia essaie maintenant d'appuyer sur plusieurs touches.

1. Elle essaie la séquence  $\boxed{-}$   $\boxed{2}$   $\boxed{f}$   $\boxed{g}$ . Quelle valeur va être affichée par la machine ?
2. Quelle est l'image par  $h$  de l'image de  $-3$  par  $f$  ?
3. Quel(s) est(sont) l'(les) antécédent(s) par  $h$  du(des) antécédent(s) de  $-3$  par  $g$  ?

#### Solution

1. On cherche l'image par  $g$  de l'image par  $f$  de  $-2$ . Or  $f(-2) = 3$  et  $g(3) = -9$ . Donc le nombre cherché est  $-9$ .
2.  $f(-3) = 2$  et  $h(2) = 4$ , donc le nombre cherché est 4.
3. D'après le tableau de  $g$ ,  $-3$  ne possède qu'un antécédent, le nombre 1. Le nombre 1 lui possède deux antécédents par  $h$ , les nombres  $-1$  et 1. Les nombres cherchés sont donc  $-1$  et 1.

**Fonctions : définitions, notations et vocabulaire**

- Une **fonction** est une relation entre deux ensembles de nombres, un ensemble de départ, appelé **ensemble de définition** et un ensemble d'arrivée.
- Cette relation possède donc un *sens*, chaque nombre de l'**ensemble de définition** possède **une et une seule image** dans l'ensemble d'arrivée.
- Un nombre de l'ensemble d'arrivée peut posséder (mais ce n'est pas obligé) **un ou plusieurs antécédents** dans l'ensemble de départ.
- Une fonction peut être nommée par une lettre ( $f, g, h, F, \dots$  - attention, comme en Python, la casse est importante) ou par un nom plus complexe dans des cas particuliers ( $\sin, \cos, \tan, \ln, \dots$ ).
- On représente une fonction  $f$  par le schéma suivant :

$$f : x \mapsto y$$

où  $x$  est un nombre de l'ensemble de définition et  $y$  est le nombre qui lui correspond par  $f$  dans l'ensemble d'arrivée. Cette notation sera lue «  $y$  est l'image de  $x$  par la fonction  $f$  ».

On notera aussi :  $y = f(x)$ , qui sera lu «  $y$  est égal à  $f$  de  $x$  »

**Exemples**

D'après les questions précédentes :

- $f : 4 \mapsto 9$  ou autrement noté  $f(4) = 9$  ;
- $g : -2 \mapsto 6$  ou autrement noté  $g(-2) = 6$  ;
- $h : 2 \mapsto 4$  ou autrement noté  $h(2) = 4$ .

**Question 3****Énoncé**

Parmi les propositions ci-dessous, préciser celles qui sont vraies et celles qui sont fausses :

1.  $g(4) = -12$
2.  $h(4) = 2$
3. 3 est la solution de  $h(x) = 9$
4. 3 est une solution de  $f(x) = 8$
5. Si  $x$  est le nombre de départ, alors  $h(x) = \sqrt{x}$
6. Le programme de calcul suivant pourrait correspondre à  $h$  :

Prendre un nombre  
Le mettre au carré  
Donner le résultat.

**Solution**

1. Vrai
2. Faux  $h(4) = 16$
3. Faux, il n'est pas la seule solution. On sait que au moins  $-3$  et  $3$  sont solutions de cette équation.
4. Vrai
5. Faux car en prenant 4 comme nombre de départ, on obtient 16 et non pas  $\sqrt{4} = 2$ .
6. Vrai

**Question 4****Enoncé**

Pour chacune des fonctions  $f$ ,  $g$  et  $h$  :

1. Déterminer un programme de calcul pouvant correspondre à la fonction.
2. Soit  $x$  le nombre de départ. Déterminer l'image de  $x$  par la fonction. Une telle expression est appelée **expression algébrique de la fonction**.
3. D'après vos réponses précédentes :
  - a. Quelle serait l'image prévisible alors pour 10 par  $f$  ?
  - b. Quelle serait l'image prévisible alors pour 4, 3 par  $g$  ?
  - c. Quelle serait l'image prévisible alors pour  $\sqrt{5}$  par  $h$  ?

**Solution**

1. Pour chacune des fonctions

$f$

Prendre un nombre  
Lui ajouter 5  
Donner le résultat

$g$

Prendre un nombre  
Le multiplier par -3  
Donner le résultat

$h$

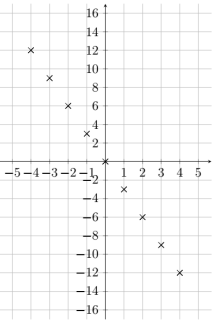
Prendre un nombre  
Le mettre au carré  
Donner le résultat

1.  $f(x) = x + 5$   
 $g(x) = -3x$   
 $h(x) = x^2$
2. D'après la question précédente :
  - a.  $f(10) = 10 + 5 = 15$
  - b.  $g(4, 3) = -3 \times 4, 3 = -12, 9$
  - c.  $h(\sqrt{5}) = (\sqrt{5})^2 = 5$

**Question 5**

**Enoncé**

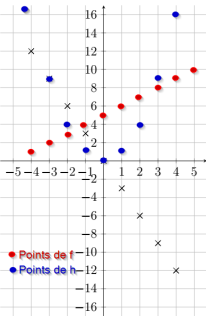
Malia veut maintenant représenter graphiquement les trois fonctions  $f$ ,  $g$  et  $h$ . Pour cela elle construit le repère suivant, où l'axe des abscisse représente l'ensemble de départ et l'axe des ordonnées représente l'ensemble d'arrivée.



- 1. Elle n'a complété le graphique que pour une seule des fonctions. Laquelle ?
- 2. Compléter de même pour les deux autres.

**Solution**

- 1. Les points représentés sont alignés avec l'origine, il s'agit d'une situation de proportionnalité, donc de la fonction  $g$ .

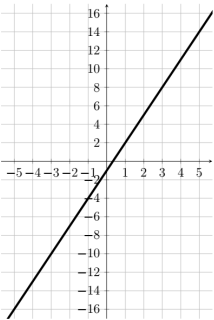


- 2.

**Question 6**

La touche **k** de sa machine ne semble pas fonctionner.

Étant une experte de la recherche sur le web, elle parvient à trouver un manuel d'utilisation de la machine. Dans celui-ci, elle trouve la courbe ci-contre représentant la fonction  $k$ .



**Énoncé**

1. Quelle est l'image de 1 par  $k$  ? de 3 par  $k$  ?
2. Compléter un tableau de valeur de la fonction  $k$  pour les nombres entiers allant de  $-4$  à  $4$ .
3. Proposer une expression algébrique représentant  $k$  sur  $[-4; 4]$ .
4. Résoudre graphiquement  $k(x) = 0$ .
5. Résoudre algébriquement  $k(x) = 0$ .
6. Résoudre graphiquement  $k(x) \leq 8$ .
7. Résoudre algébriquement  $k(x) \leq 8$ .

**Solution**

1.  $k(1) = 2$  et  $k(3) = 8$
2. Le tableau :

Nombre	-4	-3	-2	-1	0	1	2
Image par $k$	-13	-10	-7	-4	-1	2	5

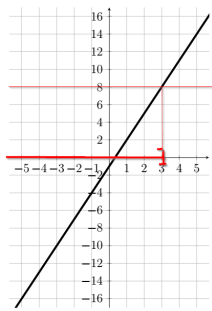
3.  $f : x \mapsto 3x - 1$
4. Résoudre graphiquement  $k(x) = 0$ , c'est trouver l'abscisse des points d'intersections de la courbe représentative de  $k$  avec l'axe des abscisses  
Ici on trouve graphiquement  $S = \{ \simeq 0, 3 \}$ .

$k(x)$	=	0
$3x - 1$	=	0
$3x$	=	1
$x$	=	$\frac{1}{3}$

- 5.

D'où  $S = \{ \frac{1}{3} \}$

6. Résoudre graphiquement  $k(x) \leq 8$ , c'est trouver les intervalles de l'abscisses sur lesquels la courbe représentative de la fonction  $k$  possède des ordonnées inférieures ou égales à 8.



Ici on trouve graphiquement  $S = ]-\infty; 3]$

7.

$k(x)$	$\leq$	8
$3x - 1$	$\leq$	8
$3x$	$\leq$	9
$x$	$\leq$	3

D'où  $S = ]-\infty; 3]$

### Représentations d'une fonction

Une fonction peut-être **représentée** de différentes manières :

- **par une expression algébrique** : on connaît *explicitement* les opérations nécessaires pour calculer une image. Déterminer un antécédent se fait alors en **résolvant une équation**.
- **par un tableau de valeurs** : la connaissance de la fonction n'est que *parcellaire*. Il est impossible de connaître les images en dehors de celles données dans le tableau.
- **par une représentation graphique** : la courbe représentative d'une fonction  $f$  est la courbe d'équation  $y = f(x)$ , c'est-à-dire l'ensemble des points du plan dont les coordonnées  $(x ; y)$  vérifient  $y = f(x)$ .

Une représentation graphique n'est qu'une vision *partielle* d'une fonction, et ne permet de donner que des **valeurs approchées** ou des **estimations** des images et antécédents par cette fonction.

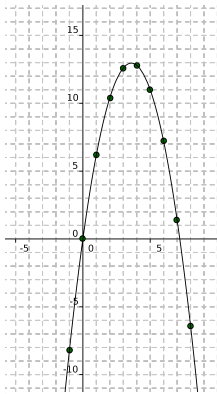


## Remarques

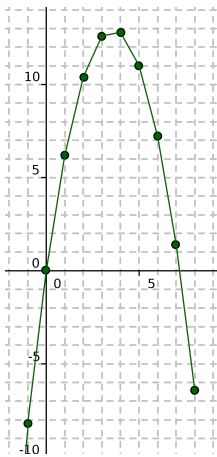
- Un graphique représentant une fonction se trace au crayon à papier ou au criterium, pas au stylo !
- Il faut toujours réfléchir avant de tracer ! Quelle sera mon échelle ? Comment placer mes axes pour avoir tous mes points ?
- On ne trace que ce dont on est sûr et certain !

En effet, un tableau de valeur ne permet pas de connaître l'allure réelle de la courbe. Différentes courbes peuvent passer par les mêmes points, comme sur les trois exemples ci-dessous

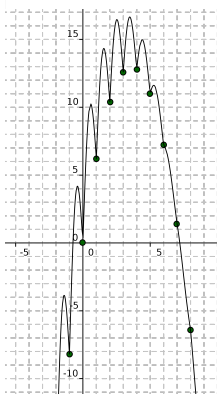
**Courbe 1**



**Courbe 2**



**Courbe 3**



**Question 7 : Enchaînement de fonctions**

On admet dans cette question que les fonctions  $f$ ,  $g$ ,  $h$  et  $k$  admettent bien comme expression algébrique les expressions données dans les questions précédentes.

**Enoncé**

- 1. Malia souhaite connaître la fonction qui est créé par l'appui sur **F** puis sur **H**. Elle appelle cette fonction  $u$ .
  - a. Compléter un tableau de valeur de  $u$  pour les nombres entiers allant de  $-4$  à  $4$ .
  - b. Donner une expression algébrique de cette fonction.
- 2. Elle souhaite faire de même, mais en changeant l'ordre des touches, donc en appuyant d'abord sur **H** puis sur **F**. Elle appelle cette fonction  $v$ .
  - a. Compléter un tableau de valeur de  $v$  pour les nombres entiers allant de  $-4$  à  $4$ .
  - b. Donner une expression algébrique de cette fonction.
- 3. L'ordre d'appui sur les touches (c'est-à-dire l'ordre d'enchaînement des fonctions ) est-il important ?
- 4. Questions pour ceux qui ont terminé en avance :

La fonction  $u$  est définie par  $u(x) = h(f(x))$ , et la fonction  $v$  par  $v(x) = f(h(x))$ . En utilisant la même notation, Déterminer les expressions algébriques des fonctions suivantes :

- $m_1(x) = g(f(x))$
- $m_2(x) = f(g(x))$
- $m_3(x) = h(g(x))$
- $m_4(x) = g(h(x))$
- $m_5(x) = h(f(g(x)))$
- $m_6(x) = h(g(f(x)))$
- $m_7(x) = f(g(h(x)))$
- $m_8(x) = f(h(g(x)))$

**Solution**

1. a. Le tableau

Nombre	-4	-3	-2	-1	0	1
Image par $u$	1	4	9	16	25	36

Fonction  $u$  :

a.  $u(x) = (x + 5)^2$

2. Fonction  $v$  :

- a. Le tableau

Nombre	-4	-3	-2	-1	0	1
Image par $u$	21	14	9	6	5	6

b.  $v(x) = x^2 + 5$

3. Oui l'ordre d'appui est important.

4. Sans explications :

- $m_1(x) = -3(x + 5) = -3x - 15$
- $m_2(x) = -3x + 5$
- $m_3(x) = (-3x)^2 = 9x^2$
- $m_4(x) = -3x^2$
- $m_5(x) = (-3x + 5)^2 = 9x^2 - 30x + 25$
- $m_6(x) = (-3x - 15)^2 = 9x^2 + 90x + 225$
- $m_7(x) = -3x^2 + 5$
- $m_8(x) = (-3x)^2 + 5 = 9x^2 + 5$

## 2. Activite : Du programme de calcul à la fonction}

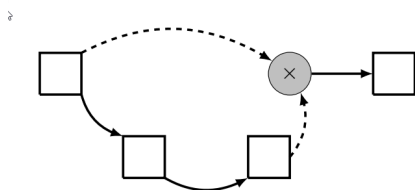
On considère l'algorithme suivant :

Prendre un nombre réel.  
Le multiplier par -1.  
Ajouter 7,2 au résultat.  
Multiplier le dernier résultat par le nombre de départ et donner le résultat final.

### ? Question 1

Ce programme peut-être représenté par le schéma suivant, que vous complèterez par des opérations sur les flèches si possible.

#### Enoncé



#### Solution



## Question 2

### Enoncé

Ce programme correspond-il à la définition de fonction donnée plus haut ? Justifiez.

### Solution

A un nombre de la case de départ, correspond bien un et un seul nombre dans la case d'arrivée. Donc oui ce schéma correspond à la définition d'une fonction.

On notera ce programme de calcul  $f$  à partir de maintenant.

## Question 3 : Etude par un tableau de valeur

### Enoncé

1. Appliquer le programme de calcul sur tous les nombres entiers compris entre  $-2$  et  $8$ , puis copier et compléter le tableau ci-dessous :

$x$	$-2$	$-1$	$0$	$1$	$2$	$3$	$4$
$f(x)$							

2. Cette fonction traduit-elle une situation de proportionnalité ?
3. Quelle est l'image de  $2$  ? De  $5$  ?
4. Donner un antécédent de  $12,8$ .

### Solution

1. Le tableau :

$x$	$-2$	$-1$	$0$	$1$	$2$	$3$	$4$
$f(x)$	$-18,4$	$-8,2$	$0$	$6,2$	$10,4$	$12,6$	$12,8$

2. Non car il n'y a pas égalité des produits en croix, par exemple avec :

$4$	$5$
$12,8$	$11$

$$4 \times 11 \neq 12,8 \times 5.$$

3. L'image de  $2$  est  $10,4$ , et  $f(5) = 11$ .
4. Un antécédent de  $12,8$  est  $4$ .

### ? Question 4 : A l'aide du schéma

#### Enoncé

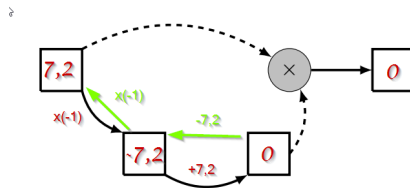
1. Calculer les images de 2, 3 et 4, 9. Quelle remarque peut-on faire ?
2. Déterminer les antécédents de 0.
3. Soit  $x$  le nombre de départ. Déterminer en fonction de  $x$  le nombre final obtenu. L'expression obtenue est **une expression algébrique** de  $f$ .

#### Solution

1.  $f(2, 3) = 2, 3 \times (7, 2 - 2, 3) = 2, 3 \times 4, 9 = 11, 27$  et  $f(4, 9) = 4, 9 \times (7, 2 - 4, 9) = 4, 9 \times 2, 3 = 11, 27$ .

Les deux nombres 2, 3 et 4, 9 ont la même image. Ils sont des antécédents de 11, 27.

2. On sait déjà que 0 est un antécédent de 0. Mais il est aussi possible d'avoir un antécédent de 0 si l'avant dernière case du schéma dans le chemin du bas vaut 0 :



On en conclut que 0 possède exactement deux antécédents : 0 et 7, 2.

3. 
$$f : x \mapsto x(7, 2 - x)$$

## Question 5 : Différentes expressions algébriques

### Enoncé

On considère les expressions  $A = x(7, 2 - x)$  et  $B = 12, 96 - (x - 3, 6)^2$

1. Démontrer que  $A$  et  $B$  sont égales quel que soit le nombre réel  $x$ .
2. Soit  $C = (x - 3, 6)^2$ 
  - a. Quelles est la plus petite valeur possible pour  $C$  et pour quelle(s) valeur(s) de  $x$  est-elle atteinte ?
  - b. En déduire la plus grande valeur pour le nombre  $B$ .
  - c. Quelle est la plus grande valeur possible pour le nombre  $A$  ? Pour quelle(s) valeur(s) de  $x$  obtient-on cette plus grande valeur de  $A$  ? Conclure pour la fonction  $f$ .

### Solution

1. Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , on développe  $A$  et  $B$  :

$A$	$=$	$x(7, 2 - x)$
$A$	$=$	$7, 2x - x^2$

$B$	$=$	$12, 96 - (x - 3, 6)^2$
	$=$	$12, 96 - (x^2 - 7, 2x + 12, 96)$
	$=$	$12, 96 - x^2 + 7, 2x - 12, 96$
$B$	$=$	$-x^2 + 7, 2x$

On en conclut que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , on a  $A = B$

2.  $C = (x - 3, 6)^2$

- a.  $C$  est un carré donc il est positif ou nul. Donc la plus petite valeur possible pour  $C$  est 0, et on a :

$$C = 0 \iff (x - 3, 6)^2 = 0 \iff x - 3, 6 = 0 \iff x = 3, 6$$

La plus petite valeur possible pour  $C$  est donc 0 atteinte pour  $x = 3, 6$ .

- b. On a :

$C$	$\geq$	0
$-C$	$\leq$	0
$12, 96 - C$	$\leq$	12, 96
$B$	$\leq$	12, 96

La plus grande valeur possible pour  $B$  est donc 12, 96 et elle est atteinte quand  $C$  est égal à 0, c'est-à-dire quand  $x$  vaut 3, 6.

- c. Comme  $A = B$  pour tout  $x$  réel, on en conclut que la plus grande valeur possible pour  $A$  est aussi 12, 96 atteinte pour  $x$  valant 3, 6.

On dira que  $f$  **atteint pour maximum 12, 96 en 3, 6**.

**Question 6 : Tracé du graphe**

**Enoncé**

Dans un plan muni d'un repère orthonormé (axes perpendiculaires et même unité sur chaque axe), on place les points d'abscisses  $x$  et d'ordonnées  $f(x)$ .

Placer tous les points possibles.

**Solution**

