C01-01 : Ensembles de Nombres

La version pdf de ce cours est téléchargeable ici. (version 2021-2022)

1. Activité : Classer des nombres

π $\sqrt{2}$

-5×10^6

$-\dfrac{12}{3}$ 0 $\dfrac{7}{5}$

$\dfrac{15}{5}$ $-\sqrt{0,64}$ $\dfrac{13}{0}$ 5

$-\sqrt{9}$

5×10^{-3} $\sqrt{-25}$

-42 $-4,07$

$\sqrt{36}$ $\sqrt{\dfrac{49}{81}}$

$-\dfrac{1}{3}$ $\dfrac{3}{7}$ $3,2$

$2,6 \times 10^2$ $-3,3 \times 10^1$

1. Dans la liste ci-dessus, deux écritures sont interdites. Lesquelles et pourquoi ?
2. Classer les nombres restants en **cinq groupes**, en justifiant vos choix.

Différence entres propriétés et écritures

Un nombre peut être écrit de différentes manières, plus ou moins compliquées. Par exemple :

$$2 = \frac{6}{3} = 20 \times 10^{-1} = \sqrt{4} = -(-2) = 2,0000$$

Pour autant, ce qui nous intéresse en mathématiques c'est d'étudier les **propriétés** de ce nombre, qui elles sont indépendantes de l'écriture de ce nombre.

2. Nombres entiers naturels et relatifs

Définitions

- L'ensemble des **entiers naturels**, noté $\mathbb{N}$, est l'ensemble des nombres permettant de dénombrer une collection d'objets, de personnes, etc, c'est-à-dire la suite naturelle $0\ ;\ 1\ ;\ 2\ ;\ 3\ ;\ \dots$
- L'ensemble des **entiers relatifs**, noté $\mathbb{Z}$, est l'ensemble des entiers naturels et **leurs opposés**, c'est-à-dire la suite $\dots\ ;\ -3\ ;\ -2\ ;\ -1\ ;\ 0\ ;\ 1\ ;\ 2\ ;\ 3\ ;\ \dots$

Info

- L'ensemble $\mathbb{N}$ possède un plus petit élément, c'est 0.
- Les nombres entiers naturels sont tous **positifs ou nuls**.
- Tous les entiers naturels sont aussi des entiers relatifs.

Vocabulaire et notations

- **Appartenance** : On dit que 5 **appartient** à $\mathbb{N}$, et on note $5 \in \mathbb{N}$. De même -2 **n'appartient pas** à $\mathbb{N}$, et on note $-12 \notin \mathbb{N}$.
- **Inclusion** : Tous les éléments de $\mathbb{N}$ sont aussi des éléments de $\mathbb{Z}$. On dit alors que $\mathbb{N}$ est un **sous-ensemble** de $\mathbb{Z}$ et on note alors $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ (qui se lit $\mathbb{N}$ est inclus dans $\mathbb{Z}$).

Application : choix du bon symbole

Exercice

Compléter avec $\in$ ou $\notin$:

$7 \dots \mathbb{N}$

$-3 \dots \mathbb{N}$

$-5 \dots \mathbb{Z}$

$7 \dots \mathbb{Z}$

$\frac{1}{3} \dots \mathbb{N}$

$\sqrt{9} \dots \mathbb{N}$

$-\sqrt{25} \dots \mathbb{N}$

$-\sqrt{2} \dots \mathbb{Z}$

$5 \times 10^3 \dots \mathbb{N}$

$5 \times 10^{-3} \dots \mathbb{Z}$

$-4,2 \dots \mathbb{Z}$

$3 \times (1 - \frac{1}{3}) \dots \mathbb{N}$

Solution

Compléter avec $\in$ ou $\notin$:

$7 \in \mathbb{N}$

$-3 \notin \mathbb{N}$

$-5 \in \mathbb{Z}$

$7 \in \mathbb{Z}$

$\frac{1}{3} \notin \mathbb{N}$

$\sqrt{9} \in \mathbb{N}$ car $\sqrt{9} = 3$

$-\sqrt{25} \notin \mathbb{N}$ car $-\sqrt{25} = -5$

$-\sqrt{2} \notin \mathbb{Z}$ car $-\sqrt{2} \simeq -1,414..$

$5 \times 10^3 \in \mathbb{N}$ car $5 \times 10^3 = 5 \times 1000 = 5000$

$5 \times 10^{-3} \notin \mathbb{Z}$ car $5 \times 10^{-3} = 5 \times 0,001 = 0,005$

$-4,2 \notin \mathbb{Z}$

$3 \times (1 - \frac{1}{3}) \in \mathbb{N}$ car $3 \times (1 - \frac{1}{3}) = 3 - 1 = 2$ (en développant) ou $3 \times (1 - \frac{1}{3}) = 3 \times \frac{2}{3} = 2$ (en calculant entre parenthèses).

3. Nombres décimaux

définition : Nombres décimaux

Un nombre décimal est un nombre pouvant s'écrire sous la forme d'une fraction décimale, c'est à dire sous la forme $$ \dfrac{a}{10^n} $$ avec $a \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$.

L'ensemble des décimaux est noté $\mathbb{D}$.

Application : Nombres décimaux et puissances de 10

Exercice

Pour chacun des nombres suivants, déterminer si possible une écriture de la forme $\dfrac{k}{10^n}$.

$4,37$

$0,002$

-12

$\dfrac{1}{3}$

$\dfrac{2}{5}$

$\sqrt{0,16}$

10^3

10^{-5}

-10^5

$\dfrac{3.10^5}{10^7}$

$\dfrac{10^7}{3.10^5}$

Solution

Pour chacun des nombres suivants, déterminer si possible une écriture de la forme $\dfrac{k}{10^n}$.

$4,37 = \dfrac{437}{100} = \dfrac{437}{10^2}$

$0,002 = \dfrac{2}{1\ 000} = \dfrac{2}{10^3}$

$-12 = \dfrac{-12}{1} = \dfrac{-12}{10^0}$ (car $a^0 = 1$ pour tout nombre $a \neq 0$).

$\dfrac{1}{3} \notin \mathbb{D}$ car $\dfrac{1}{3} \simeq 0,333\ldots$ (La démonstration réelle sera donnée plus tard dans l'année)

$\dfrac{2}{5} = \dfrac{4}{10} = \dfrac{4}{10^1}$

$\sqrt{0,16} = 0,4 = \dfrac{4}{10} = \dfrac{4}{10^1}$

$10^3 = \dfrac{1\ 000}{1} = \dfrac{1\ 000}{10^0}$

$10^{-5} = \dfrac{1}{10^5}$ (par définition des exposants négatifs $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$ si $a \neq 0$)

$-10^5 = -100\ 000 = \dfrac{-100\ 000}{1} = \dfrac{-100\ 000}{10^0}$$

$\dfrac{3.10^5}{10^7} = \dfrac{3}{10^2}$ par division des puissances ($\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ pour tout $m, n \in$ \Z)

$\dfrac{10^7}{3.10^5} = \dfrac{10^2}{3} \simeq 33,333\ldots \notin \mathbb{D}$

Remarques

- Les entiers relatifs sont des décimaux, car si $k \in \mathbb{Z}$, on peut aussi écrire $k = \frac{k}{1} = \frac{k}{10^0}$. On a donc la propriété $\mathbb{Z} \subset \mathbb{D}$.
- Un nombre décimal possède une **écriture décimale finie**.

4. Nombres rationnels

Définition : Nombres rationnels

Un nombre rationnel est un nombre pouvant s'écrire sous la forme $\frac{a}{b}$ avec $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{N}^*$ (c'est-à-dire $\mathbb{N}$ privé de 0).

L'ensemble des nombres rationnels est noté $\mathbb{Q}$.

Remarque

Un nombre décimal est par définition un nombre rationnel.

Par définition de $\mathbb{D}$ et $\mathbb{Q}$, on a la propriété $\mathbb{D} \subset \mathbb{Q}$.

Propriété : Caractérisation des rationnels non décimaux

Tous les nombres rationnels ne possèdent pas d'écriture décimale finie. En particulier, $\frac{1}{3}$ n'est pas décimal.

▼ Preuve

La démonstration de cette propriété sera faite plus tard dans l'année, dans le chapitre arithmétique.

Remarques

- Les nombres rationnels non décimaux possèdent une **écriture décimale infinie périodique**, c'est-à-dire avec une série de chiffres qui se répètent à l'infini. Par exemple $\frac{1}{7} = 0,14285714285714...$ (on constate la répétition de la séquence 142857}).
- Réciproquement, si un nombre possède une écriture décimale infinie périodique, alors c'est un rationnel.

Méthode : Déterminer une fraction égale à une écriture décimale infinie périodique

On considère le nombre a dont l'écriture décimale est infinie périodique $a = 2,71347134...$. Démontrons que ce nombre est rationnel.

Solution

On constate que la partie répétitive des chiffres de a est 7134, donc de taille 4.

Donc $10^4 \times a = 10\ 000 \times a = 27134,71347134\ldots.$

D'où $10\ 000 \times a - a = 27134,71347134\ldots - 2,71347134\ldots = 27134 - 2 = 27\ 132$.

Or $10\ 000 \times a - a = 9\ 999 \times a$.

D'après les deux lignes précédentes, on a alors $9\ 999 \times a = 27132$ soit $a = \dfrac{27\ 132}{9\ 999} = \dfrac{9\ 044}{3\ 333}$.

Donc a est bien un nombre rationnel puisqu'il s'écrit sous la forme d'une fraction.

Application : Calculs avec les rationnels

Exercice

Dans chacun des cas suivants, calculer **à la main** chacune des expressions suivantes :

$A = \frac{5}{7} - \frac{3}{11}$

$B = -\frac{4}{3} + \frac{7}{8}$

$C = \frac{3}{8} - \frac{5}{12}$

$D = \frac{-6}{7} \times \frac{8}{9}$

$E = \frac{3}{2} \times (-\frac{7}{3})$

$F = \frac{48}{35} \times \frac{25}{64}$

$G = \frac{4}{7} \div \frac{8}{21}$

$H = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{18}{20}}$

$I = \frac{7}{\frac{5}{3}}$

$J = \frac{\frac{7}{5}}{3}$

Solution

$A = \frac{5}{7} - \frac{3}{11} = \frac{5 \times 11}{7 \times 11} - \frac{3 \times 7}{11 \times 7} = \frac{55}{77} - \frac{21}{77} = \frac{34}{77}$

$B = -\frac{4}{3} + \frac{7}{8} = -\frac{4 \times 8}{3 \times 8} + \frac{7 \times 3}{8 \times 3} = -\frac{32}{24} + \frac{21}{24} - \frac{11}{24}$

$C = \frac{3}{8} - \frac{5}{12} = \frac{3 \times 3}{8 \times 3} - \frac{5 \times 2}{12 \times 2} = \frac{9}{24} - \frac{10}{24} = -\frac{1}{24}$

$D = \frac{-6}{7} \times \frac{8}{9} = \frac{-6 \times 8}{7 \times 9} = \frac{-2 \times 3 \times 8}{7 \times 3 \times 3} = -\frac{16}{21}$ N'oubliez pas de simplifier !

$E = \frac{3}{2} \times (-\frac{7}{3}) = -\frac{3 \times 7}{2 \times 3} = -\frac{7}{2}$

$F = \frac{48}{35} \times \frac{25}{64} = \frac{48 \times 25}{35 \times 64} = \frac{2 \times 3 \times 8 \times 5 \times 5}{5 \times 7 \times 2 \times 4 \times 8} = \frac{15}{28}$

$G = \frac{4}{7} \div \frac{8}{21} = \frac{4}{7} \times \frac{21}{8} = \frac{4 \times 21}{7 \times 8} = \frac{4 \times 3 \times 7}{7 \times 2 \times 4} = \frac{3}{2}$

$H = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{18}{20}} = \frac{3}{4} \div \frac{18}{20} = \frac{3}{4} \div \frac{20}{18} = \frac{3 \times 4 \times 5}{4 \times 3 \times 6} = \frac{5}{6}.$

$I = \frac{7}{\frac{5}{3}} = 7 \div \frac{5}{3} = 7 \times \frac{3}{5} = \frac{21}{5}$

$J = \frac{\frac{7}{5}}{3} = \frac{7}{5} \div 3 = \frac{7}{5} \times \frac{1}{3} = \frac{7}{15}$

5. Nombres réels

Définition : Nombres réels

Un {==nombre réel est un nombre exprimant une longueur, ou l'opposé d'un nombre exprimant une longueur.

L'ensemble des nombres rationnels est noté $\mathbb{R}$.

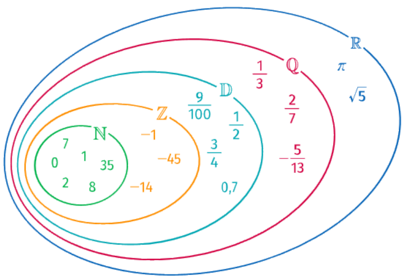
Remarques

- Un nombre réel est un nombre dont le carré est positif ou nul .
- Par définition, tous les nombres rationnels sont des réels. On a alors $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.
- Certains nombres réels ne sont pas rationnels. Par exemple π n'est pas rationnel, tout comme $\sqrt{2}$ (on le montrera en exercice). Ces nombres sont dits **irrationnels** .

Propriété : Ensembles de nombres

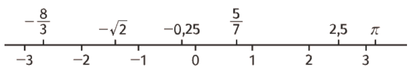
Des remarques précédentes, on à la propriété :

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$



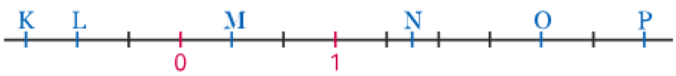
Propriété : Droite des réels

Tout nombre réel est représenté par l'abscisse d'un point sur la droite numérique (appelée aussi **droite des réels**).



▼ Application : Représenter sur la droite des réels

1. Déterminer l'abscisse de chacun des points de la droite ci-dessous :



1. Représenter la droite des réels (unité : 5) et y placer le plus précisément possible les nombres suivants :

$$3\,;\ -0,75\,;\ \frac{5}{4}\,;\ \frac{-2}{5}\,;\ \frac{7}{3}\,;\ \sqrt{2}$$