C01-02 Intervalles

1. Intervalles de nombres réels

E Définition

Soient a et b deux nombres réels tels que $a \leqslant b$.

• On appelle intervalle fermé [a;b] l'ensemble des nombres réels x tels que $a \leqslant x \leqslant b$.



- On appelle intervalle ouvert]a;b[l'ensemble des nombres réels x tels que a < x < b.



- On définit de même les intervalles [a;b[et]a;b].
- On note $[a; +\infty[$ l'ensemble des nombres réels x tels que $x\geqslant a.$



• On note $a; +\infty[$ l'ensemble des nombres réels x tels que x>a.



• On définit de même $]-\infty;a]$ et $]-\infty;a[$.

Remarques

- Le symbole $+\infty$ se lit " Plus l'infini ".
- Le symbole $-\infty$ se lit " Moins l'infini ".



Représenter des intervalles

Enoncé

Ecrire les inégalités suivantes sous la forme d'un intervalle, puis représenter cet intervalle sur la droite des réels :

- 1. $x \leqslant 5$
- 2. x > -3
- 3. 2 < x < 5
- 4. $-4 \leqslant x \leqslant -3$
- 5. $-3 \leqslant x < 8$
- 6. $-2 < x \le 0$

Solution

- 1. $]-\infty;5]$
- 2.] $-3; +\infty$ [
- 3.]2; 5[
- 4. [-4; -3]
- 5. [-3; 8]
- 6.]-2;0]

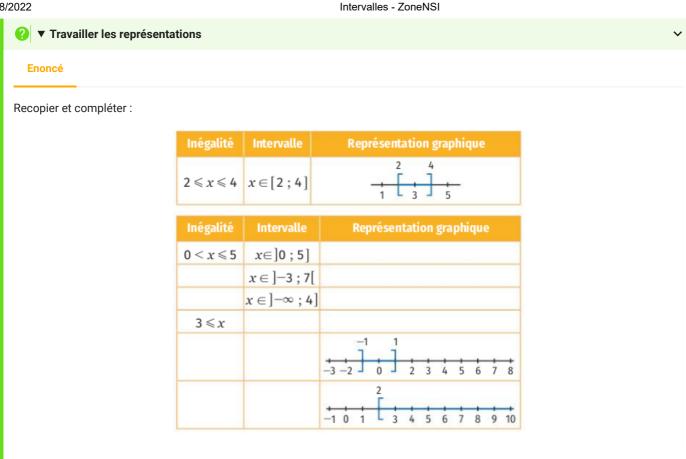
Enoncé

Compléter avec un symbole \in ou \notin :

- $-2 \dots [-2;1[$
- -3...[-5;-1[
- $-\frac{26}{5}\ldots]-5;-4[$
- $4 \dots [-3; 4[$
- $2\pi \dots [7; 8]$
- 0 . . . ℝ
- 0 . . . ℝ*

Solution

- $-2 \in [-2;1[$
- $-3 \in [-5; -1[$
- $-\frac{26}{5} \notin]-5;-4[$
- $4 \notin [-3; 4[$
- $2\pi \notin [7; 8]$
- $0 \in \mathbb{R}$
- $0 \notin \mathbb{R}^*$



Solution

A venir....

2. Unions et intersections d'intervalles

Définition

Soient I et J deux intervalles.

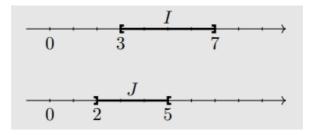
- L'intersection de I et J est l'ensemble des réels qui appartiennent à la fois à I \textbf{ET} à J. On note cet ensemble $I\cap J$.
- La réunion de I et J est l'ensemble des réels qui appartiennent à I \textbf{OU} à J. On note cet ensemble $I\cup J$.

Remarques

- La notation \cap se lit \backslash og inter \backslash fg. D'où $I \cap J$ se lit \backslash og I inter $J \backslash$ fg.
- La notation \cup se lit \log union \backslash fg. D'où $I \cup J$ se lit $\log I$ union $J \backslash$ fg.
- Parfois, il n'y a aucun élément qui appartiennent à la fois à I et J. L'intersection est donc \textbf{vide}, et on note \emptyset l'ensemble vide. Dans ce cas $I \cap J = \emptyset$.

Exemple

On considère les intervalles I=[3;7] et J=]2;5[.



• L'ensemble $I\cap J$ est [3;5[.



• L'ensemble $I \cup J$ est [2;7].



Utiliser les notations ∩ et ∪

Enoncé

R\'eduire sous la forme d'un seul intervalle si possible et représenter sur la droite des réels :

- $]-3;7]\cap]-2;8[$
-] $-4;3] \cap [-2;3,5[$
- $[-7; 4[\cup] 3; 5]$
-] $-3;5] \cup [-1;2]$
- $[-6;6] \cup [-2;2]$
-] $-\infty$; $2[\cap]1$; $+\infty[$
- $]-\infty;-1]\cup]2;6]$
- $[-5;3] \cap [6;8]$

Solution

•
$$]-3;7]\cap]-2;8[=]-2;7]$$

•
$$]-4;3] \cap [-2;3,5[=[-2;3]]$$

•
$$[-7;4[\cup]-3;5]=[-7;5]$$

•
$$]-3;5] \cup [-1;2] =]-3;5]$$

•
$$[-6;6] \cup [-2;2] = [-6;6]$$

•
$$]-\infty;2[\cap]1;+\infty[=]1;2[$$

•
$$]-\infty;-1]\cup]2;6]=]-\infty;-1]\cup]2;6]$$

•
$$[-5;3] \cap [6;8] = \emptyset$$

L'ensemble vide est noté ∅.

▼ Travailler les inéquations et les intervalles

Enoncé

Compléter en s'aidant de la méthode donnée dans l'exemple ci-dessous.

Exemple

On a les équivalences :

par définition	$1\leqslant x\leqslant 2$	\iff	$x \in [1;2]$
en multipliant chaque membre de l'inégalité par 3	$3\leqslant 3x\leqslant 6$	\iff	
par définition	$3x \in [3;6]$	\iff	

d'où $x \in [1;2]$ si et seulement si $3x \in [3;6]$

- 1. $x \in [7;20]$ si et seulement si $7x \in \dots$
- 2. $x \in]-1;3]$ si et seulement si $x+4 \in \dots$
- 3. $x \in [2; 6]$ si et seuelemnt si $8-x \in \dots$
- 4. $x \in \ldots$ si et seulement si $x + 6 \in]3; +\infty[$
- 5. $x \in \ldots$ si et seulement si $-2x \in [4; +\infty[$
- 6. $x \in \ldots$ si et seulement si $4x + 3 \in [-6; 5]$

Solution

- 1. $x \in [7;20]$ si et seulement si $7x \in [49;140]$
- 2. $x \in]-1;3]$ si et seulement si $x+4 \in]3;7]$
- 3. $x \in [2;6]$ si et seuelemnt si $8-x \in [2;6]$
- 4. $x \in]-3;+\infty[$ si et seulement si $x+6\in]3;+\infty[$
- 5. $x\in]-\infty;-2]$ si et seulement si $-2x\in [4;+\infty[$
- 6. $x \in [-rac{9}{4};2]$ si et seulement si $4x+3 \in [-6;5]$



▼ Représenter sous la forme d'intervalles

Enoncé

- $\bullet \quad y>-3 \text{ et } y<4$
- $\bullet \quad y > -3 \text{ ou } y < 4$
- $y \leqslant \frac{1}{3}$ et $y \leqslant \frac{1}{2}$
- $y \leqslant \frac{1}{3}$ ou $y \leqslant \frac{1}{2}$

Solution

A venir

▼ Résolutions d'équations du premier degré

Enoncé

- 1. Résoudre dans ${\mathbb R}$ chacune des équations suivantes :
- 2. 3x 6 = 0
- 3. 3x 4 = 0
- 4. -3x + 64 = 19
- 5. -2(x+5) = -8
- 6. $3x \pi = 0$
- 7. $\frac{x-8}{3} = -4$
- 8. Lesquelles de ces 4 équations sont résolubles dans $\mathbb Z$? Dans $\mathbb Q$?

Solution

A venir

4 F

▼ Résolutions d'inéquations du premier degré

Enoncé

Résoudre les inéquations suivantes et présenter le résultat sous la forme d'un intervalle :

- 3x 6 > 0
- $3x 4 \leq 0$
- -3x + 64 < 19