

# Notion de fonctions récursive

## 1. Activité d'introduction : de l'itératif au récursif

### Un peu de maths : les suites arithmétiques

On rappelle qu'une suite  $(u_n)$ , de premier terme  $u_0$  est dite **arithmétique** si et seulement si

$$u_{n+1} = u_n + r$$

où  $r \in \mathbb{R}$ .

La définition donnée ci-dessus est une définition dite par **réurrence**, c'est-à-dire qu'on définit le terme de rang  $n + 1$  à partir du terme de rang  $n$ .



Cette suite peut-être définie par une **formule explicite** :

$$u_n = u_0 + n \times r$$

### ? Exercice

#### Énoncé

Construire une fonction `maSuiteArithmetique(n)` qui calcule le  $n$ -ième terme de la suite arithmétique de premier terme 3 et de raison 7. Quelle formule avez-vous utilisée ?

#### Une solution

Au vu de l'énoncé, je prends le pari que la majorité d'entre vous avez utilisé la **formule explicite** avec un code de la forme suivante :

```
def maSuiteArithmetique(n) :
    return 3 + n*7
```

C'est évidemment la solution la plus simple. Dans ce cas, tout comme pour les *suites géométrique*, il est inutile de compliquer le code, nous obtenons directement la solution par un simple calcul algébrique.

## Encore des maths : les suites arithmético-géométriques

Une suite  $(u_n)$ , de premier terme  $u_0$  est dite **arithmético-géométrique** si et seulement si

$$u_{n+1} = a \times u_n + b$$

où  $a, b \in \mathbb{R}$ .

Encore une fois, la définition donnée ci-dessus est une définition dite par **récurrence**, c'est-à-dire qu'on définit le terme de rang  $n + 1$  à partir du terme de rang  $n$ .

## ? Exercice

### Enoncé

Construire une fonction `maSuiteAG(n)` qui calcule le  $n$ -ième terme de la suite arithmético-géométrique de premier terme 7 et définie par :

$$u_{n+1} = -2 \times u_n + 5$$

Quelle formule avez-vous utilisée ?

### Une solution probable

Ici nous n'avons qu'une formule - sauf pour les petits malins qui seront allés voir sur [wikipedia](https://fr.wikipedia.org/wiki/Suite_arithm%C3%A9tico-g%C3%A9om%C3%A9trique) - donc on doit utiliser un processus de répétition des opérations à partir de 7.

On peut bien sûr appliquer une boucle `pour` dans notre fonction :

```
def maSuiteAG(n) :
    u = 7
    for i in range(1,n+1) : # j'utilise ce range plutôt que range(n) car le i utilisé correspond au terme du
rang calculé.
        u = -2*u + 5
    return u
```

Deux remarques :

- dans ce code, je ne vérifie pas que  $n \in \mathbb{N}$ , et il faudrait... ;
- dans le cas où  $n = 0$ , la boucle `for` n'est pas effectuée.

Une version plus correcte serait donc celle-ci :

```
def maSuiteAG(n) :
    if not(isinstance(n, int)) or n<0 :
        raise ValueError("n must be a non negativ integer")
    u = 7
    for i in range(1,n+1) : # j'utilise ce range plutôt que range(n) car le i utilisé correspond au terme du
rang calculé.
        u = -2*u + 5
    return u
```

Une telle fonction est dite **itérative**, car elle utilise une boucle de répétitions pour parvenir au résultat souhaité.

C'est vraiment dommage, dans le premier exercice, on utilise simplement **la formule explicite**, alors que dans le deuxième cas, on est obligé de réfléchir à l'algorithme. Ce serait si simple de pouvoir utiliser *directement* la **formule récursive**, comme dans le code ci-dessous :

```
def maSuiteAGR(n) :  
    return -2*maSuiteAGR(n-1) + 5
```

Ca vaudrait peut-être le coup de tester, en prenant  $n = 3$  par exemple...

### Késako ?

Quand on teste la fonction `maSuiteAGR(3)`, python ... calcule... puis nous renvoie une erreur :

```
RecursionError: maximum recursion depth exceeded
```

Le mot important dans la phrase précédente, c'est que python **CALCULE** ! Donc il doit a minima comprendre la fonction `maSuiteAGR` !

## 2. Principe de récursivité

### Fonction récursive

Une fonction est dite **récursive** quand elle s'appelle elle-même, une ou plusieurs fois.

### Des problèmes

Décomposons l'instruction l'appel à `maSuiteAGR(3)` :

- `maSuiteAGR(3)` doit calculer `-2*maSuiteAGR(2) +5`, et donc doit calculer :
  - `maSuiteAGR(2)`, qui doit calculer `-2*maSuiteAGR(1) +5`, et donc doit calculer :
    - `maSuiteAGR(1)`, qui doit calculer `-2*maSuiteAGR(0) +5`, et donc doit calculer :
      - `maSuiteAGR(0)`, qui doit calculer `-2*maSuiteAGR(-1) +5`, et donc doit calculer :
        - `maSuiteAGR(-1)`, qui doit calculer `-2*maSuiteAGR(-2) +5`, et donc doit calculer :
          - ...

"**HELP ! Mais ça s'arrête quand !**" me direz-vous !

Et bien jamais, en théorie.

Mais en réalité cette instruction s'arrêtera quand python aura levé une erreur de type `RecursionError`, qui signifie qu'une limite aura été atteinte (nous en parlerons plus tard pour lever toute ambiguïté).

### ✓ Supprimer le problème : le cas d'arrêt

Pour supprimer le problème précédent, revenons aux maths : dans une définition par récurrence de suite, on signale toujours la valeur du premier terme (qui peut être  $u_0$ , ou  $u_1$ , ou même  $u_{42}$  selon le problème et la définition de l'indice). Or dans notre fonction `maSuiteAGR`, jamais nous ne précisons ce cas, c'est-à-dire que quand  $n = 0$ , alors la suite vaut 7. Rajoutons-donc cette condition dans la fonction :

```
def maSuiteAGR(n) :
    if n== 0 :
        return 7
    else :
        return -2* maSuiteAGR(n-1) + 5
```

Et testons de nouveau `maSuiteAGR(3)` :

- `maSuiteAGR(3)` doit calculer  $-2 \times \text{maSuiteAGR}(2) + 5$ , et donc doit calculer :
  - `maSuiteAGR(2)`, qui doit calculer  $-2 \times \text{maSuiteAGR}(1) + 5$ , et donc doit calculer :
    - `maSuiteAGR(1)`, qui doit calculer  $-2 \times \text{maSuiteAGR}(0) + 5$ , et donc doit calculer :
      - `maSuiteAGR(0)`, qui **maintenant renvoie 7** !
    - donc `maSuiteAGR(1)` renvoie  $-2 \times 7 + 5$  soit  $-9$  ;
  - donc `maSuiteAGR(2)` renvoie  $-2 \times (-9) + 5$  soit  $23$  ;
- donc `maSuiteAGR(3)` renvoie  $-2 \times 23 + 5$  soit  $-41$ .

Non seulement la fonction s'arrête, mais en plus elle renvoie la bonne valeur, c'est-à-dire  $u_3 = -41$ .

### ✏ Récapitulons

Pour utiliser une **fonction récursive** correctement, il faudra distinguer :

- le ou les **cas d'arrêts** (ou **cas de base**), c'est-à-dire des cas particuliers pour lesquels la valeur (ou l'objet) renvoyé par la fonction est connu ;
- le **cas récursif**, pour lequel la fonction s'appelle elle-même, une ou plusieurs fois.

### ☰ Exemple commenté

La somme des  $n$  premiers entiers est la somme :

$$0 + 1 + 2 + 3 + \dots + n$$

Comment faire pour construire une fonction récursive `sommeR(n)` qui effectue la somme des  $n$  premiers entiers, avec  $n$  passé en argument.

- Quel est le **cas récursif** ?  
On a  $0 + 1 + 2 + 3 + \dots + n = (0 + 1 + 2 + 3 + \dots + (n-1)) + n$ ,  
donc le cas récursif est `sommeR(n) = sommeR(n-1) + n`
- Quel est le cas de base ?  
Il y a plusieurs possibilités, soit en partant de l'indice 0 car `sommeR(0) = 0`, soit en partant de l'indice 1, car `sommeR(1) = 1`.

Une implémentation récursive possible est alors :

```
def sommeR(n) :
    if n== 0 :
        return 0
    else :
        return sommeR(n-1) + n
```

### 3. Applications directes

#### ? Exercice : factorielle

##### Enoncé

On rappelle que la factorielle d'un entier naturel  $n$  est donné par :

$$\begin{cases} n! &= n \times (n-1) \times \dots \times 3 \times 2 \times 1 \\ 1! &= 1 \\ 0! &= 1 \end{cases}$$

1. Ecrire une fonction **itérative** `factorielle(n)` qui renvoie la factorielle d'un entier naturel  $n$  donné, et lève une `ValueError` si  $n$  n'est pas entier ou est négatif.
2. Ecrire une fonction **récursive** `factorielleR(n)` qui renvoie la factorielle d'un entier naturel  $n$  donné, et lève une `ValueError` si  $n$  n'est pas entier ou est négatif.

##### Solution Itérative

```
1 def factorielle(n) :
2     if not(isinstance(n, int)) or n<0 :
3         raise ValueError("n must be a positiv integer")
4     produit = 1
5     for i in range(1,n+1) :# On peut effectivement partir de 2, et gagner un tour de boucle.
6         produit =produit*i
7     return produit
```

##### Solution récursive

```
1 def factorielleR(n) :
2     if not(isinstance(n, int)) or n<0 :
3         raise ValueError("n must be a positiv integer")
4     if n==0 or n==1 :
5         return 1
6     else :
7         return factorielleR(n-1)*n
```

## ? Exercice : étoiles

### Énoncé

1. Implémenter une fonction **itérative** `etoile(n)` qui écrit dans le Shell Python un triangle formé de caractères `*` tels que dans l'exemple suivant :

```
>>> etoileR(5)
*
**
***
****
*****
```

2. Implémenter une fonction **récursive** `etoileR(n)` qui effectue le même travail.

### Solution Itérative

```
1 def etoile(n) :
2     if not(isinstance(n, int)) or n<=0 :
3         raise ValueError("n must be a positiv integer")
4     for i in range(1, n+1) :
5         print("*"*i)
```

### Solution récursive

```
1 def etoileR(n) :
2     if not(isinstance(n, int)) or n<=0 :
3         raise ValueError("n must be a non null positiv integer")
4     if n == 1 :
5         print("*")
6     else :
7         etoileR(n-1)
8         print("*"*n)
```

## ? Coefficients binomiaux et triangle de Pascal

1. Soient  $a$  et  $b$  deux réels quelconques.

Développez les expressions suivantes :

a.  $A = (a + b)^0$

b.  $B = (a + b)^1$

c.  $C = (a + b)^2$

d.  $D = (a + b)^3$

e.  $E = (a + b)^4$

✓ Solution

A venir

2. Complétez deux lignes supplémentaires du tableau suivant, nommé **Triangle de Pascal**:

$p \Rightarrow$	0	1	2	3	4	5
$n = 0$	1					
$n = 1$	1	1				
$n = 2$	1	2	1			
$n = 3$	1	3	3	1		
$n = 4$	1	4	6	4	1	
$n = 5$	1	5	10	10	5	1

✓ Solution

Pour construire un nombre, il suffit d'utiliser la ligne précédente, en ajoutant le nombre situé juste au dessus de lui et celui situé à la gauche de ce dernier.

$p \Rightarrow$	0	1	2	3	4	5	6	7
$n = 0$	1							
$n = 1$	1	1						
$n = 2$	1	2	1					
$n = 3$	1	3	3	1				
$n = 4$	1	4	6	4	1			
$n = 5$	1	5	10	10	5	1		
$n = 6$	1	6	15	20	15	6	1	
$n = 7$	1	7	21	35	35	21	7	1

3. On appelle coefficient binomial de rang  $p$  et de degré  $n$  le nombre du **Triangle de Pascal** correspondant à la  $n$ -ième ligne et à la  $p$ -ième colonne. Ce nombre est noté  $\binom{n}{p}$ .

Comment exprimer récursivement ce coefficient ?

✓ Solution

A venir

4. Implémenter une fonction `binomeR(n, p)` qui renvoie la valeur du coefficient binomial  $\binom{n}{p}$  du triangle de Pascal.

✓ Solution

A venir

5. *Facultatif* : Implémenter une fonction `develope(n)` qui renvoie la chaîne de caractères correspondant au développement de  $(a + b)^n$ .

✓ **Solution**

A venir