C01-01 : Ensembles de Nombres

La version pdf de ce cours est téléchargeable ici. (version 2021-2022)

1. Activité : Classer des nombres

π $\sqrt{2}$ -5×10^6 $-\frac{12}{3}$ 0 $\frac{7}{5}$ $\frac{15}{5}$ $-\sqrt{0,64}$ $\frac{13}{0}$ 5 $-\sqrt{9}$ 5×10^{-3} $\sqrt{-25}$ -42 $-4,07$ $\sqrt{36}$ $\sqrt{\frac{49}{81}}$ $-\frac{1}{3}$ $\frac{3}{7}$ $3,2$ $2,6 \times 10^2$ $-3,3 \times 10^1$

1. Dans la liste ci-dessus, deux écritures sont interdites. Lesquelles et pourquoi ?
2. Classer les nombres restants en **cinq groupes**, en justifiant vos choix.

Différence entres propriétés et écritures

Un nombre peut être écrit de différentes manières, plus ou moins compliquées. Par exemple :

$$2 = \frac{6}{3} = 20 \times 10^{-1} = \sqrt{4} = -(-2) = 2,0000$$

Pour autant, ce qui nous intéresse en mathématiques c'est d'étudier les **propriétés** de ce nombre, qui elles sont indépendantes de l'écriture de ce nombre.

2. Nombres entiers naturels et relatifs

Définitions

- L'ensemble des **entiers naturels**, noté $\mathbb{N}$, est l'ensemble des nombres permettant de dénombrer une collection d'objets, de personnes, etc, c'est-à-dire la suite naturelle $0\ ;\ 1\ ;\ 2\ ;\ 3\ ;\ \dots$
- L'ensemble des **entiers relatifs**, noté $\mathbb{Z}$, est l'ensemble des entiers naturels et **leurs opposés**, c'est-à-dire la suite $\dots\ ;\ -3\ ;\ -2\ ;\ -1\ ;\ 0\ ;\ 1\ ;\ 2\ ;\ 3\ ;\ \dots$

Info

- L'ensemble $\mathbb{N}$ possède un plus petit élément, c'est 0.
- Les nombres entiers naturels sont tous **positifs ou nuls**.
- Tous les entiers naturels sont aussi des entiers relatifs.

Vocabulaire et notations

- **Appartenance** : On dit que 5 **appartient** à $\mathbb{N}$, et on note $5 \in \mathbb{N}$. De même -2 **n'appartient pas** à $\mathbb{N}$, et on note $-12 \notin \mathbb{N}$.
- **Inclusion** : Tous les éléments de $\mathbb{N}$ sont aussi des éléments de $\mathbb{Z}$. On dit alors que $\mathbb{N}$ est un **sous-ensemble** de $\mathbb{Z}$ et on note alors $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ (qui se lit $\mathbb{N}$ est inclus dans $\mathbb{Z}$).

Application : choix du bon symbole

3. Nombres décimaux

définition : Nombres décimaux

Un nombre décimal est un nombre pouvant s'écrire sous la forme d'une fraction décimale, c'est à dire sous la forme $$ \dfrac{a}{10^n} $$ avec $a \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$.

L'ensemble des décimaux est noté $\mathbb{D}$.

Application : Nombres décimaux et puissances de 10

Remarques

- Les entiers relatifs sont des décimaux, car si $k \in \mathbb{Z}$, on peut aussi écrire $k = \dfrac{k}{1} = \dfrac{k}{10^0}$. On a donc la propriété $\mathbb{Z} \subset \mathbb{D}$.
- Un nombre décimal possède une **écriture décimale finie**.

4. Nombres rationnels

Définition : Nombres rationnels

Un nombre rationnel est un nombre pouvant s'écrire sous la forme $\dfrac{a}{b}$ avec $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{N}^*$ (c'est-à-dire $\mathbb{N}$ privé de 0).

L'ensemble des nombres rationnels est noté $\mathbb{Q}$.

Remarque

Un nombre décimal est par définition un nombre rationnel.

Par définition de $\mathbb{D}$ et $\mathbb{Q}$, on a la propriété $\mathbb{D} \subset \mathbb{Q}$.

Propriété : Caractérisation des rationnels non décimaux

Tous les nombres rationnels ne possèdent pas d'écriture décimale finie. En particulier, $\frac{1}{3}$ n'est pas décimal.

Preuve

Remarques

- Les nombres rationnels non décimaux possèdent une **écriture décimale infinie périodique**, c'est-à-dire avec une série de chiffres qui se répètent à l'infini. Par exemple $\frac{1}{7} = 0,14285714285714\ldots$ (on constate la répétition de la séquence 142857}).
- Réciproquement, si un nombre possède une écriture décimale infinie périodique, alors c'est un rationnel.

Méthode : Déterminer une fraction égale à une écriture décimale infinie périodique

On considère le nombre a dont l'écriture décimale est infinie périodique $a = 2,71347134\ldots$. Démontrons que ce nombre est rationnel.

Solution

Application : Calculs avec les rationnels

5. Nombres réels

Définition : Nombres réels

Un {==nombre réel est un nombre exprimant une longueur, ou l'opposé d'un nombre exprimant une longueur.

L'ensemble des nombres rationnels est noté $\mathbb{R}$.

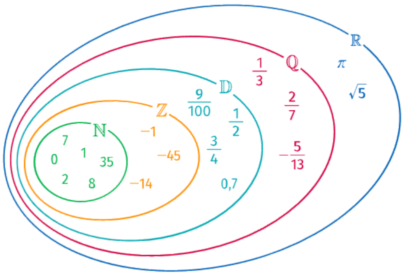
Remarques

- Un nombre réel est un nombre dont le carré est positif ou nul.
- Par définition, tous les nombres rationnels sont des réels. On a alors $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.
- Certains nombres réels ne sont pas rationnels. Par exemple π n'est pas rationnel, tout comme $\sqrt{2}$ (on le montrera en exercice). Ces nombres sont dits **irrationnels**.

Propriété : Ensembles de nombres

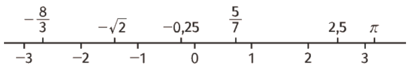
Des remarques précédentes, on à la propriété :

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$



Propriété : Droite des réels

Tout nombre réel est représenté par l'abscisse d'un point sur la droite numérique (appelée aussi **droite des réels**).



Application : Représenter sur la droite des réels