# C01-01: Ensembles de Nombres

La version pdf de ce cours est téléchargeable ici. (version 2021-2022)

#### 1. Activité : Classer des nombres

- 1. Dans la liste ci-dessus, deux écritures sont interdites. Lesquelles et pourquoi?
- 2. Classer les nombres restants en **cinq groupes**, en justifiant vos choix.

## i Différence entres propriétés et écritures

Un nombre peut être écrit de différentes manières, plus ou moins compliquées. Par exemple :

$$2=rac{6}{3}=20 imes 10^{-1}=\sqrt{4}=-\left(-2
ight)=2,0000$$

Pour autant, ce qui nous intéresse en mathématiques c'est d'étudier les **propriétés** de ce nombre, qui elles sont indépendantes de l'écriture de ce nombre.

## 2. Nombres entiers naturels et relatifs

#### **b** Définitions

- L'ensemble des entiers naturels, noté  $\mathbb{N}$ , est l'ensemble des nombres permettant de dénombrer une collection d'objets, de personnes, etc, c'est-à-dire la suite naturelle  $0~;~1~;~2~;~3~;~\dots$
- L'ensemble des entiers relatifs, noté  $\mathbb{Z}$ , est l'ensemble des entiers naturels et leurs opposés, c'est-à-dire la suite  $\ldots$ ; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3;  $\ldots$

## 1 Info

- L'ensemble  $\mathbb N$  possède un plus petit élément, c'est 0.
- Les nombres entiers naturels sont tous positifs ou nuls.
- Tous les entiers naturels sont aussi des entiers relatifs.

#### **b** Vocabulaire et notations

- Appartenance : On dit que 5 appartient à  $\mathbb N$ , et on note  $5\in\mathbb N$ . De même -2 n'appartient pas à  $\mathbb N$ , et on note  $-12
  ot\in\mathbb N$ .
- Inclusion : Tous les éléments de  $\mathbb N$  sont aussi des éléments de  $\mathbb Z$ . On dit alors que  $\mathbb N$  est un sous-ensemble de  $\mathbb Z$  et on note alors  $\mathbb N \subset \mathbb Z$  (qui se lit  $\mathbb N$  est inclus dans  $\mathbb Z$ ).

# **▼** Application : choix du bon symbole

#### Exercice

#### Compléter avec $\in$ ou $\notin$ :

 $7...\mathbb{N}$ 

 $-3\dots\mathbb{N}$ 

 $-5\dots\mathbb{Z}$ 

 $7 \dots \mathbb{Z}$ 

 $\frac{1}{3}\dots\mathbb{N}$ 

 $\sqrt{9}\dots\mathbb{N}$ 

 $-\sqrt{25}\dots$ 

 $-\sqrt{2}\dots\mathbb{Z}$ 

 $5 imes 10^3\dots \mathbb{N}$ 

 $5 imes 10^{-3}\dots \mathbb{Z}$ 

 $-4,2\dots \mathbb{Z}$ 

 $3 imes (1 - rac{1}{3}) \dots \mathbb{N}$ 

#### Solution

#### Compléter avec $\in$ ou $\notin$ :

 $7\in\mathbb{N}$ 

 $-3
otin\mathbb{N}$ 

 $-5\in\mathbb{Z}$ 

 $7 \in \mathbb{Z}$ 

 $\frac{1}{3} \notin \mathbb{R}$ 

 $\sqrt{9}\in\mathbb{N}$  car  $\sqrt{9}=3$ 

 $-\sqrt{25}
ot\in\mathbb{N}$  car  $-\sqrt{25}=-5$ 

 $-\sqrt{2}
ot\in\mathbb{Z}$  car  $-\sqrt{2}\simeq-1,414..$  .

 $5 imes 10^3 \in \mathbb{N}$  car  $5 imes 10^3 = 5 imes 1000 = 5000$ 

 $5 imes 10^{-3}
ot\in\mathbb{Z}$  car  $5 imes 10^{-3}=5 imes 0,001=0,005$ 

 $-4,2
otin\mathbb{Z}$ 

 $3\times (1-\frac{1}{3})\in \mathbb{N} \text{ car } 3\times (1-\frac{1}{3})=3-1=2 \text{ (en développant) ou } 3\times (1-\frac{1}{3})=3\times \frac{2}{3}=2 \text{ (en calculant entre parenthèses)}.$ 

#### 3. Nombres décimaux



**6** définition : Nombres décimaux

Un nombre décimal est un nombre pouvant s'écrire sous la forme d'une fraction décimale, c'est à dire sous la forme \$\$ \drac{a} {10^n} \$\$ avec  $a \in \mathbb{Z}$  et  $n \in \mathbb{N}$ .

L'ensemble des décimaux est noté  $\mathbb{D}.$ 

## **▼** Application : Nombres décimaux et puissances de 10

#### Exercice

Pour chacun des nombres suivants, déterminer si possible une écriture de la forme  $\frac{k}{10^n}$ 

- 4,37
- 0,002
- -12
- $\frac{1}{3}$
- 2
- $\sqrt{0,16}$
- 10
- $10^{-5}$
- $-10^{5}$
- $\frac{3.10^5}{10^7}$
- $\frac{10^7}{3.10^5}$

Solution

Pour chacun des nombres suivants, déterminer si possible une écriture de la forme  $\frac{k}{10^n}$ .

$$4,37 = \frac{437}{100} = \frac{437}{10^2}$$

$$0,002 = \frac{2}{1\,000} = \frac{2}{10^3}$$

$$-12=rac{-12}{1}=rac{-12}{10^0}$$
 ( car  $a^0=1$  pour tout nombre  $a
eq 0$ ).

 $rac{1}{3}
ot\in\mathbb{D}$  car  $rac{1}{3}\simeq0,333...$  (La démonstration réelle sera donnée plus tard dans l'année)

$$\frac{2}{5} = \frac{4}{10} = \frac{4}{10^1}$$

$$\sqrt{0,16}=0,4=\frac{4}{10}=\frac{4}{10^1}$$

$$10^3 = \frac{1\,000}{1} = \frac{1\,000}{10^0}$$

 $10^{-5}=rac{1}{10^5}$  (par définition des exposants négatifs  $a^{-n}=rac{1}{a^n}$  pour tout  $n\in\mathbb{Z}$  si a
eq 0)

$$-10^5 = -100\ 000 = \frac{-100\ 000}{1} = \frac{-100\ 000}{10^0}\$$$

 $rac{3.10^5}{10^7}=rac{3}{10^2}$  par division des puissances ( $rac{a^m}{a^n}=a^{m-n}$  pour tout  $m,n\in ackslash {f Z}$ )

$$\frac{10^7}{3.10^5} = \frac{10^2}{3} \simeq 33,333.\dots \not \in \mathbb{D}$$

## Remarques

- Les entiers relatifs sont des décimaux, car si  $k \in \mathbb{Z}$ , on peut aussi écrire  $k = \frac{k}{1} = \frac{k}{10^0}$ . On a donc la propriété  $\mathbb{Z} \subset \mathbb{D}$ .
- Un nombre décimal possède une écriture décimale finie.

## 4. Nombres rationnels

## **b** Définition : Nombres rationnels

Un nombre rationnel est un nombre pouvant s'écrire sous la forme  $\frac{a}{b}$  avec  $a\in\mathbb{Z}$  et  $b\in\mathbb{N}^*$  (c'est-à-dire  $\mathbb{N}$  privé de 0).

L'ensemble des nombres rationnels est noté  $\mathbb{Q}$ .

## 1 Remarque

Un nombre décimal est par définition un nombre rationnel.

Par définition de  $\mathbb{D}$  et  $\mathbb{Q}$ , on a la propriété  $\mathbb{D} \subset \mathbb{Q}$ .

## **b** Propriété : Caractérisation des rationnels non décimaux

Tous les nombres rationnels ne possèdent pas d'écriture décimale finie. En particulier,  $\frac{1}{3}$  n'est pas décimal.

## Preuve

La démonstration de cette propriété sera faite plus tard dans l'année, dans le chapitre arithmétique.

#### Remarques

- Les nombres rationnels non décimaux possèdent une écriture décimale infinie périodique, c'est-à-dire avec une série de chiffres qui se répètent à l'infini. Par exemple  $\frac{1}{7}=0,14285714285714...$  (on constate la répétition de la séquence 142857}).
- Réciproquement, si un nombre possède une écriture décimale infinie périodique, alors c'est un rationnel.

#### Méthode : Déterminer une fraction égale à une écriture décimale infinie périodique

On considère le nombre a dont l'écriture décimale est infinie périodique a=2,71347134... Démontrons que ce nombre est rationnel.



On constate que la partie répétitive des chiffres de a est 7134, donc de taille 4.

Donc  $10^4 \times a = 10\ 000 \times a = 27134,71347134...$ 

D'où  $10\ 000 \times a - a = 27134, 71347134... - 2, 71347134... = 27134 - 2 = 27\ 132.$ 

Or  $10~000 \times a - a = 9~999 \times a$ .

D'après les deux lignes précédentes, on a alors  $9~999 \times a = 27132~{
m soit}~a = \frac{27~132}{9~999} = \frac{9~044}{3~333}$ 

Donc a est bien un nombre rationnel puisqu'il s'écrit sous la forme d'une fraction.

#### **▼** Application : Calculs avec les rationnels

#### Evercice

Dans chacun des cas suivants, calculer à la main chacune des expressions suivantes :

$$A = \frac{5}{7} - \frac{3}{11}$$

$$B = -\frac{4}{3} + \frac{7}{8}$$

$$C = \frac{3}{8} - \frac{5}{12}$$

$$D = \frac{-6}{7} \times \frac{8}{9}$$

$$E = \frac{3}{2} \times (-\frac{7}{3})$$

$$F = \frac{48}{35} \times \frac{25}{64}$$

$$G = \frac{4}{7} \div \frac{8}{21}$$

$$H = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{18}{20}}$$

$$I = \frac{7}{\frac{5}{3}}$$

$$J = \frac{\frac{7}{5}}{3}$$

Solution

$$A = \frac{5}{7} - \frac{3}{11} = \frac{5 \times 11}{7 \times 11} - \frac{3 \times 7}{11 \times 7} = \frac{55}{77} - \frac{21}{77} = \frac{34}{77}$$

$$B = -\frac{4}{3} + \frac{7}{8} = -\frac{4 \times 8}{3 \times 8} + \frac{7 \times 3}{8 \times 3} = -\frac{32}{24} + \frac{21}{24} - \frac{11}{24}$$

$$C = \frac{3}{8} - \frac{5}{12} = \frac{3 \times 3}{8 \times 3} - \frac{5 \times 2}{12 \times 2} = \frac{9}{24} - \frac{10}{24} = -\frac{1}{24}$$

$$D=\frac{-6}{7}\times\frac{8}{9}=\frac{-6\times8}{7\times9}=\frac{-2\times3\times8}{7\times3\times3}=-\frac{16}{21} \text{ N'oubliez pas de simplifier } !$$

$$E = \frac{3}{2} \times (-\frac{7}{3}) = -\frac{3 \times 7}{2 \times 3} = -\frac{7}{2}$$

$$F = \frac{48}{35} \times \frac{25}{64} = \frac{48 \times 25}{35 \times 64} = \frac{2 \times 3 \times 8 \times 5 \times 5}{5 \times 7 \times 2 \times 4 \times 8} = \frac{15}{28}$$

$$G = \frac{4}{7} \div \frac{8}{21} = \frac{4}{7} \times \frac{21}{8} = \frac{4 \times 21}{7 \times 8} = \frac{4 \times 3 \times 7}{7 \times 2 \times 4} = \frac{3}{2}$$

$$H = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{18}{20}} = \frac{3}{4} \div \frac{18}{20} = \frac{3}{4} \div \frac{20}{18} = \frac{3 \times 4 \times 5}{4 \times 3 \times 6} = \frac{5}{6}.$$

$$I = \frac{7}{\frac{5}{3}} = 7 \div \frac{5}{3} = 7 \times \frac{3}{5} = \frac{21}{5}$$

$$J = \frac{\frac{7}{5}}{3} = \frac{7}{5} \div 3 = \frac{7}{5} \times \frac{1}{3} = \frac{7}{15}$$

## 5. Nombres réels

## **b** Définition : Nombres réels

Un {==nombre réel est un nombre exprimant une longueur, ou l'opposé d'un nombre exprimant une longueur.

L'ensemble des nombres rationnels est noté  $\mathbb{R}$ .

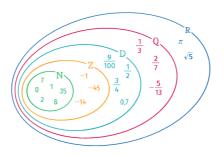
## Remarques

- Un nombre réel est un nombre dont le carré est positif ou nul.
- Par définition, tous les nombres rationnels sont des réels. On a alors  $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$  .
- Certains nombres réels ne sont pas rationnels. Par exemple  $\pi$  n'est pas rationnel, tout comme  $\sqrt{2}$  ( on le montrera en exercice ). Ces nombres sont dits irrationnels.

## **b** Propriété : Ensembles de nombres

Des remarques précédentes, on à la propriété :

$$\mathbb{N}\subset\mathbb{Z}\subset\mathbb{D}\subset\mathbb{Q}\subset\mathbb{R}$$



## **b** Propriété : Droite des réels

Tout nombre réel est représenté par l'abscisse d'un point sur la droite numérique (appelée aussi droite des réels).

#### ▼ Application : Représenter sur la droite des réels

1. Déterminer l'abscisse de chacun des points de la droite ci-dessous :



1. Représenter la droite des réels (unité: 5) et y placer le plus précisément possible les nombres suivants:

$$3; -0.75; \frac{5}{4}; \frac{-2}{5}; \frac{7}{3}; \sqrt{2}$$