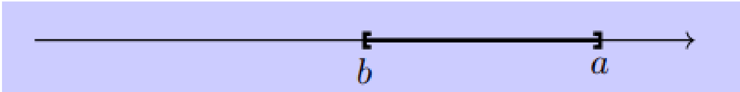
$C01 - 02$ Intervalles

1. Intervalles de nombres réels

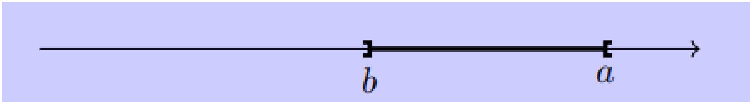
Définition

Soient a et b deux nombres réels tels que $a \leqslant b$.

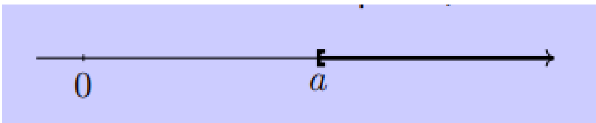
- On appelle intervalle fermé $[a; b]$ l'ensemble des nombres réels x tels que $a \leqslant x \leqslant b$.



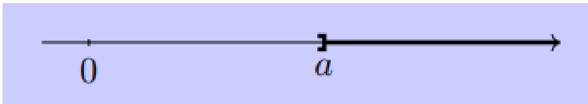
- On appelle intervalle ouvert $]a; b[$ l'ensemble des nombres réels x tels que $a < x < b$.



- On définit de même les intervalles $[a; b[$ et $]a; b]$.
- On note $[a; +\infty[$ l'ensemble des nombres réels x tels que $x \geqslant a$.



- On note $]a; +\infty[$ l'ensemble des nombres réels x tels que $x > a$.



- On définit de même $]-\infty; a]$ et $]-\infty; a[$.

Remarques

- Le symbole $+\infty$ se lit " Plus l'infini ".
- Le symbole $-\infty$ se lit " Moins l'infini ".

Représenter des intervalles

Enoncé

Ecrire les inégalités suivantes sous la forme d'un intervalle, puis représenter cet intervalle sur la droite des réels :

1. $x \leqslant 5$
2. $x > -3$
3. $2 < x < 5$
4. $-4 \leqslant x \leqslant -3$
5. $-3 \leqslant x < 8$
6. $-2 < x \leqslant 0$

Solution

1. $]-\infty; 5]$
2. $]-3; +\infty[$
3. $]2; 5[$
4. $[-4; -3]$
5. $[-3; 8[$
6. $]-2; 0]$

Appartient ou pas ?

Enoncé

Compléter avec un symbole $\in$ ou $\notin$:

- $-2 \ldots [-2; 1[$
- $-3 \ldots [-5; -1[$
- $-\frac{26}{5} \ldots]-5; -4[$
- $4 \ldots [-3; 4[$
- $2\pi \ldots [7; 8]$
- $0 \ldots \mathbb{R}$
- $0 \ldots \mathbb{R}^*$

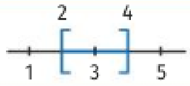
Solution

- $-2 \in [-2; 1[$
- $-3 \in [-5; -1[$
- $-\frac{26}{5} \notin]-5; -4[$
- $4 \notin [-3; 4[$
- $2\pi \notin [7; 8]$
- $0 \in \mathbb{R}$
- $0 \notin \mathbb{R}^*$

Travailler les représentations

Enoncé

Recopier et compléter :

Inégalité	Intervalle	Représentation graphique
$2 \leqslant x \leqslant 4$	$x \in [2\,;4]$	

Inégalité	Intervalle	Représentation graphique
$0 < x \leqslant 5$	$x \in]0\,;5]$	
	$x \in]-3\,;7[$	
	$x \in]-\infty\,;4]$	
$3 \leqslant x$		
		
		

Solution

A venir....

2. Unions et intersections d'intervalles

Définition

Soient I et J deux intervalles.

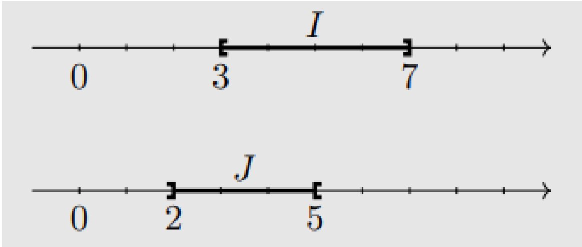
- L'intersection de I et J est l'ensemble des réels qui appartiennent à la fois à I \textbf{ET} à J. On note cet ensemble $I \cap J$.
- La réunion de I et J est l'ensemble des réels qui appartiennent à I \textbf{OU} à J. On note cet ensemble $I \cup J$.

Remarques

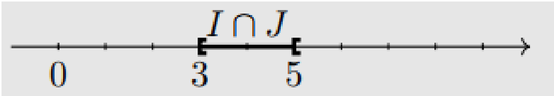
- La notation $\cap$ se lit \og inter \fg. D'où $I \cap J$ se lit \og I inter J \fg.
- La notation $\cup$ se lit \og union \fg. D'où $I \cup J$ se lit \og I union J \fg.
- Parfois, il n'y a aucun élément qui appartiennent à la fois à I et J. L'intersection est donc \textbf{vide}, et on note $\emptyset$ l'ensemble vide. Dans ce cas $I \cap J = \emptyset$.

Exemple

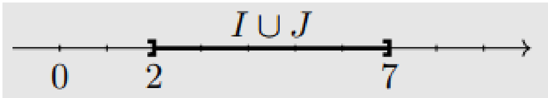
On considère les intervalles $I = [3;7]$ et $J =]2;5[$.



- L'ensemble $I \cap J$ est $[3;5[$.



- L'ensemble $I \cup J$ est $]2;7]$.



Utiliser les notations $\cap$ et $\cup$

Enoncé

R\'eduire sous la forme d'un seul intervalle si possible et représenter sur la droite des réels :

- $]-3;7] \cap]-2;8[$
- $]-4;3] \cap [-2;3,5[$
- $[-7;4[\cup]-3;5]$
- $]-3;5] \cup [-1;2]$
- $[-6;6] \cup [-2;2]$
- $]-\infty;2[\cap]1;+\infty[$
- $]-\infty;-1] \cup]2;6]$
- $[-5;3] \cap [6;8]$

Solution

- $]-3;7] \cap]-2;8[=]-2;7]$
- $]-4;3] \cap [-2;3,5[= [-2;3]$
- $[-7;4[\cup]-3;5] = [-7;5]$
- $]-3;5] \cup [-1;2] =]-3;5]$
- $[-6;6] \cup [-2;2] = [-6;6]$
- $]-\infty;2[\cap]1;+\infty[=]1;2[$
- $]-\infty;-1] \cup]2;6] =]-\infty;-1] \cup]2;6]$
- $[-5;3] \cap [6;8] = \emptyset$

Ensemble vide

L'ensemble vide est noté $\emptyset$.

Travailler les inéquations et les intervalles

Enoncé

Compléter en s'aidant de la méthode donnée dans l'exemple ci-dessous.

Exemple

On a les équivalences :

$x \in [1;2]$	$\Longleftrightarrow$	$1 \leqslant x \leqslant 2$	**par définition**
	$\Longleftrightarrow$	$3 \leqslant 3x \leqslant 6$	en multipliant chaque membre de l'inégalité par 3
	$\Longleftrightarrow$	$3x \in [3;6]$	par définition

d'où $x \in [1;2]$ si et seulement si $3x \in [3;6]$

1. $x \in [7;20]$ si et seulement si $7x \in \dots$
2. $x \in]-1;3]$ si et seulement si $x+4 \in \dots$
3. $x \in [2;6]$ si et seuelemnt si $8-x \in \dots$
4. $x \in \dots$ si et seulement si $x+6 \in]3;+\infty[$
5. $x \in \dots$ si et seulement si $-2x \in [4;+\infty[$
6. $x \in \dots$ si et seulement si $4x+3 \in [-6;5]$

Solution

1. $x \in [7;20]$ si et seulement si $7x \in [49;140]$
2. $x \in]-1;3]$ si et seulement si $x+4 \in]3;7]$
3. $x \in [2;6]$ si et seuelemnt si $8-x \in [2;6]$
4. $x \in]-3;+\infty[$ si et seulement si $x+6 \in]3;+\infty[$
5. $x \in]-\infty;-2]$ si et seulement si $-2x \in [4;+\infty[$
6. $x \in [-\dfrac{9}{4};2]$ si et seulement si $4x+3 \in [-6;5]$

Représenter sous la forme d'intervalles

Enoncé

- $y > -3$ et $y < 4$
- $y > -3$ ou $y < 4$
- $y \leqslant \dfrac{1}{3}$ et $y \leqslant \dfrac{1}{2}$
- $y \leqslant \dfrac{1}{3}$ ou $y \leqslant \dfrac{1}{2}$

Solution

A venir

Résolutions d'équations du premier degré

Enoncé

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ chacune des équations suivantes :
2. $3x - 6 = 0$
3. $3x - 4 = 0$
4. $-3x + 64 = 19$
5. $-2(x + 5) = -8$
6. $3x - \pi = 0$
7. $\dfrac{x - 8}{3} = -4$
8. Lesquelles de ces 4 équations sont résolubles dans $\mathbb{Z}$? Dans $\mathbb{Q}$?

Solution

A venir

Résolutions d'inéquations du premier degré

Enoncé

Résoudre les inéquations suivantes et présenter le résultat sous la forme d'un intervalle :

- $3x - 6 > 0$
- $3x - 4 \leqslant 0$
- $-3x + 64 < 19$