

C03 – 01 Vocabulaire et rappels sur les fonctions

1. Activité : Fonctions, tableaux de valeurs, enchaînements

Malia trouve une étrange machine dans le tiroir de son grand-père.



Quand elle appuie sur les touches 4 et f , la machine affiche 9.

Quand elle appuie sur les touches $-$ 2 g , la machine affiche 6.

Pour exprimer cela plus rapidement, on dira que :

- l'image de 4 par f est 9 ;
- un antécédent de 6 par g est -2 ;
- Chacune des touches f g h k est une fonction.

Elle teste la machine sur plusieurs nombres et note les résultats dans les tableaux suivants :

Nombre	-4	-3	-2	-1	0	1	2
Image par f	1	2	3	4	5	6	7

Nombre	-4	-3	-2	-1	0	1	2
Image par g	12	9	6	3	0	-3	-6

Nombre	-4	-3	-2	-1	0	1	2
Image par h	16	9	4	1	0	1	4

Notation

Pour des raisons de commodité, on utilisera les notations suivantes : f pour \boxed{F} , g pour \boxed{G} , etc...

Question 1

Énoncé

1. Quel est l'image de 3 par f ? de 2 par h ?
2. Quel(s) est(sont) l'(les) antécédent(s) de -6 par g ? de 1 par h ?
3. Pour quelle(s) fonction(s) 9 est-il l'image de -3 ?
4. Laquelle de ces fonctions représente une situation de proportionnalité ?

Solution

1. L'image de 3 par f est 8, autrement dit $f(3) = 8$, et l'image de 2 par g est -6 , autrement dit $g(2) = -6$.
2. D'après le tableau, le seul antécédent connu de -6 par g est 2. De même, les seuls antécédents de 1 par h sont -1 et 1.
3. Il s'agit des fonctions g et h : $g(-3) = h(-3) = 9$
4. Ce ne peut pas être la fonction f , car l'image de 0 est 5, ce qui ne représente pas une situation de proportionnalité. Ensuite en extrayant le sous tableau suivant de la fonction h :

2	3
4	9

On constate que $2 \times 9 \neq 4 \times 3$. Il n'y a pas d'égalité des produits en croix, donc pas de situation de proportionnalité.

Il s'agit donc de la fonction g , avec un coefficient de proportionnalité qui est égal à -3 .

Question 2

Énoncé

Malia essaie maintenant d'appuyer sur plusieurs touches.

1. Elle essaie la séquence $\boxed{-}$ $\boxed{2}$ \boxed{f} \boxed{g} . Quelle valeur va être affichée par la machine ?
2. Quelle est l'image par h de l'image de -3 par f ?
3. Quel(s) est(sont) l'(les) antécédent(s) par h du(des) antécédent(s) de -3 par g ?

Solution

1. On cherche l'image par g de l'image par f de -2 . Or $f(-2) = 3$ et $g(3) = -9$. Donc le nombre cherché est -9 .
2. $f(-3) = 2$ et $h(2) = 4$, donc le nombre cherché est 4.
3. D'après le tableau de g , -3 ne possède qu'un antécédent, le nombre 1. Le nombre 1 lui possède deux antécédents par h , les nombres -1 et 1. Les nombres cherchés sont donc -1 et 1.



Fonctions : définitions, notations et vocabulaire

- Une **fonction** est une relation entre deux ensembles de nombres, un ensemble de départ, appelé **ensemble de définition** et un ensemble d'arrivée.
- Cette relation possède donc un *sens*, chaque nombre de l'**ensemble de définition** possède **une et une seule image** dans l'ensemble d'arrivée.
- Un nombre de l'ensemble d'arrivée peut posséder (mais ce n'est pas obligé) **un ou plusieurs antécédents** dans l'ensemble de départ.
- Une fonction peut être nommée par une lettre (f, g, h, F, \dots - attention, comme en Python, la casse est importante) ou par un nom plus complexe dans des cas particuliers ($\sin, \cos, \tan, \ln, \dots$).
- On représente une fonction f par le schéma suivant :

$$f : x \mapsto y$$

où x est un nombre de l'ensemble de définition et y est le nombre qui lui correspond par f dans l'ensemble d'arrivée. Cette notation sera lue « y est l'image de x par la fonction f ».

On notera aussi : $y = f(x)$, qui sera lu « y est égal à f de x »



Exemples

D'après les questions précédentes :

- $f : 4 \mapsto 9$ ou autrement noté $f(4) = 9$;
- $g : -2 \mapsto 6$ ou autrement noté $g(-2) = 6$;
- $h : 2 \mapsto 4$ ou autrement noté $h(2) = 4$.

Question 3**Énoncé**

Parmi les propositions ci-dessous, préciser celles qui sont vraies et celles qui sont fausses :

1. $g(4) = -12$
2. $h(4) = 2$
3. 3 est la solution de $h(x) = 9$
4. 3 est une solution de $f(x) = 8$
5. Si x est le nombre de départ, alors $h(x) = \sqrt{x}$
6. Le programme de calcul suivant pourrait correspondre à h :

Prendre un nombre
Le mettre au carré
Donner le résultat.

Solution

1. Vrai
2. Faux $h(4) = 16$
3. Faux, il n'est pas la seule solution. On sait que au moins -3 et 3 sont solutions de cette équation.
4. Vrai
5. Faux car en prenant 4 comme nombre de départ, on obtient 16 et non pas $\sqrt{4} = 2$.
6. Vrai

Question 4

Enoncé

Pour chacune des fonctions f , g et h :

- Déterminer un programme de calcul pouvant correspondre à la fonction.
- Soit x le nombre de départ. Déterminer l'image de x par la fonction. Une telle expression est appelée **expression algébrique de la fonction**.
- D'après vos réponses précédentes :
 - Quelle serait l'image prévisible alors pour 10 par f ?
 - Quelle serait l'image prévisible alors pour 4, 3 par g ?
 - Quelle serait l'image prévisible alors pour $\sqrt{5}$ par h ?

Solution

- Pour chacune des fonctions

f

Prendre un nombre
Lui ajouter 5
Donner le résultat

g

Prendre un nombre
Le multiplier par -3
Donner le résultat

h

Prendre un nombre
Le mettre au carré
Donner le résultat

- $$f(x) = x + 5$$

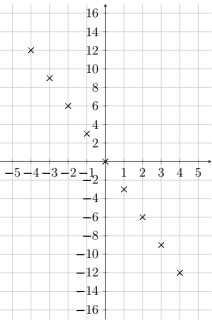
$$g(x) = -3x$$

$$h(x) = x^2$$
- D'après la question précédente :
 - $f(10) = 10 + 5 = 15$
 - $g(4, 3) = -3 \times 4, 3 = -12, 9$
 - $h(\sqrt{5}) = (\sqrt{5})^2 = 5$

Question 5

Enoncé

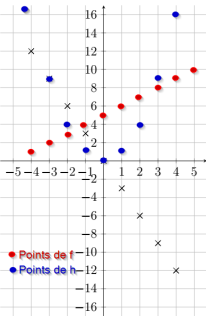
Malia veut maintenant représenter graphiquement les trois fonctions f , g et h . Pour cela elle construit le repère suivant, où l'axe des abscisse représente l'ensemble de départ et l'axe des ordonnées représente l'ensemble d'arrivée.



- 1. Elle n'a complété le graphique que pour une seule des fonctions. Laquelle ?
- 2. Compléter de même pour les deux autres.

Solution

- 1. Les points représentés sont alignés avec l'origine, il s'agit d'une situation de proportionnalité, donc de la fonction g .

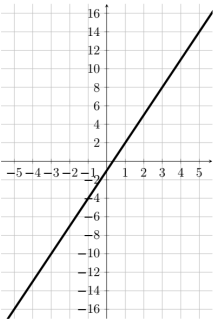


- 2.

Question 6

La touche **k** de sa machine ne semble pas fonctionner.

Étant une experte de la recherche sur le web, elle parvient à trouver un manuel d'utilisation de la machine. Dans celui-ci, elle trouve la courbe ci-contre représentant la fonction k .



Énoncé

1. Quelle est l'image de 1 par k ? de 3 par k ?
2. Compléter un tableau de valeur de la fonction k pour les nombres entiers allant de -4 à 4 .
3. Proposer une expression algébrique représentant k sur $[-4; 4]$.
4. Résoudre graphiquement $k(x) = 0$.
5. Résoudre algébriquement $k(x) = 0$.
6. Résoudre graphiquement $k(x) \leq 8$.
7. Résoudre algébriquement $k(x) \leq 8$.

Solution

1. $k(1) = 2$ et $k(3) = 8$
2. Le tableau :

Nombre	-4	-3	-2	-1	0	1	2
Image par k	-13	-10	-7	-4	-1	2	5

3. $f : x \mapsto 3x - 1$
4. Résoudre graphiquement $k(x) = 0$, c'est trouver l'abscisse des points d'intersections de la courbe représentative de k avec l'axe des abscisses
Ici on trouve graphiquement $S = \{0, 3\}$.

$k(x)$	=	0
$3x - 1$	=	0
$3x$	=	1
x	=	$\frac{1}{3}$

- 5.

D'où $S = \left\{ \frac{1}{3} \right\}$

6. Résoudre graphiquement $k(x) \leq 8$, c'est trouver les intervalles de l'abscisses sur lesquels la courbe représentative de la fonction k possède des ordonnées inférieures ou égales à 8.



Ici on trouve graphiquement $S =] - \infty; 3]$

7.

$k(x)$	\leq	8
$3x - 1$	\leq	8
$3x$	\leq	9
x	\leq	3

D'où $S =] - \infty; 3]$



Représentations d'une fonction

Une fonction peut-être **représentée** de différentes manières :

- **par une expression algébrique** : on connaît *explicitement* les opérations nécessaires pour calculer une image. Déterminer un antécédent se fait alors en **résolvant une équation**.
- **par un tableau de valeurs** : la connaissance de la fonction n'est que *parcellaire*. Il est impossible de connaître les images en dehors de celles données dans le tableau.
- **par une représentation graphique** : la courbe représentative d'une fonction f est la courbe d'équation $y = f(x)$, c'est-à-dire l'ensemble des points du plan dont les coordonnées $(x ; y)$ vérifient $y = f(x)$.

Une représentation graphique n'est qu'une vision *partielle* d'une fonction, et ne permet de donner que des **valeurs approchées** ou des **estimations** des images et antécédents par cette fonction.

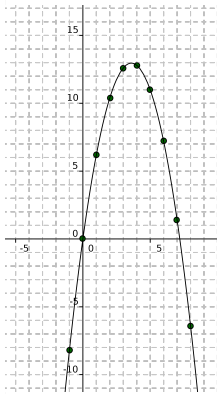


Remarques

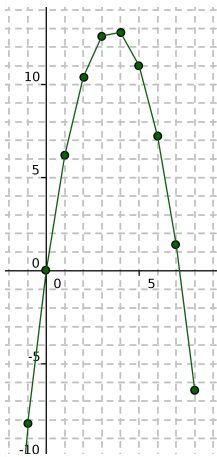
- Un graphique représentant une fonction se trace au crayon à papier ou au criterium, pas au stylo !
- Il faut toujours réfléchir avant de tracer ! Quelle sera mon échelle ? Comment placer mes axes pour avoir tous mes points ?
- On ne trace que ce dont on est sûr et certain !

En effet, un tableau de valeur ne permet pas de connaître l'allure réelle de la courbe. Différentes courbes peuvent passer par les mêmes points, comme sur les trois exemples ci-dessous

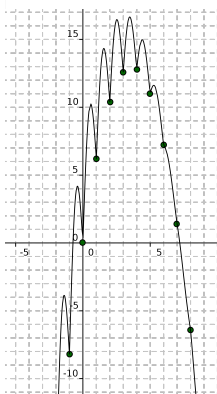
Courbe 1



Courbe 2



Courbe 3



Question 7 : Enchaînement de fonctions

On admet dans cette question que les fonctions f , g , h et k admettent bien comme expression algébrique les expressions données dans les questions précédentes.

Enoncé

- 1. Malia souhaite connaître la fonction qui est créé par l'appui sur **F** puis sur **H**. Elle appelle cette fonction u .
 - a. Compléter un tableau de valeur de u pour les nombres entiers allant de -4 à 4 .
 - b. Donner une expression algébrique de cette fonction.
- 2. Elle souhaite faire de même, mais en changeant l'ordre des touches, donc en appuyant d'abord sur **H** puis sur **F**. Elle appelle cette fonction v .
 - a. Compléter un tableau de valeur de v pour les nombres entiers allant de -4 à 4 .
 - b. Donner une expression algébrique de cette fonction.
- 3. L'ordre d'appui sur les touches (c'est-à-dire l'ordre d'enchaînement des fonctions) est-il important ?
- 4. Questions pour ceux qui ont terminé en avance :

La fonction u est définie par $u(x) = h(f(x))$, et la fonction v par $v(x) = f(h(x))$. En utilisant la même notation, Déterminer les expressions algébriques des fonctions suivantes :

- $m_1(x) = g(f(x))$
- $m_2(x) = f(g(x))$
- $m_3(x) = h(g(x))$
- $m_4(x) = g(h(x))$
- $m_5(x) = h(f(g(x)))$
- $m_6(x) = h(g(f(x)))$
- $m_7(x) = f(g(h(x)))$
- $m_8(x) = f(h(g(x)))$

Solution

1. a. Le tableau

Nombre	-4	-3	-2	-1	0	1
Image par u	1	4	9	16	25	36

Fonction u :

a. $u(x) = (x + 5)^2$

2. Fonction v :

- a. Le tableau

Nombre	-4	-3	-2	-1	0	1
Image par u	21	14	9	6	5	6

b. $v(x) = x^2 + 5$

3. Oui l'ordre d'appui est important.

4. Sans explications :

- $m_1(x) = -3(x + 5) = -3x - 15$
- $m_2(x) = -3x + 5$
- $m_3(x) = (-3x)^2 = 9x^2$
- $m_4(x) = -3x^2$
- $m_5(x) = (-3x + 5)^2 = 9x^2 - 30x + 25$
- $m_6(x) = (-3x - 15)^2 = 9x^2 + 90x + 225$
- $m_7(x) = -3x^2 + 5$
- $m_8(x) = (-3x)^2 + 5 = 9x^2 + 5$

2. Activite : Du programme de calcul à la fonction}

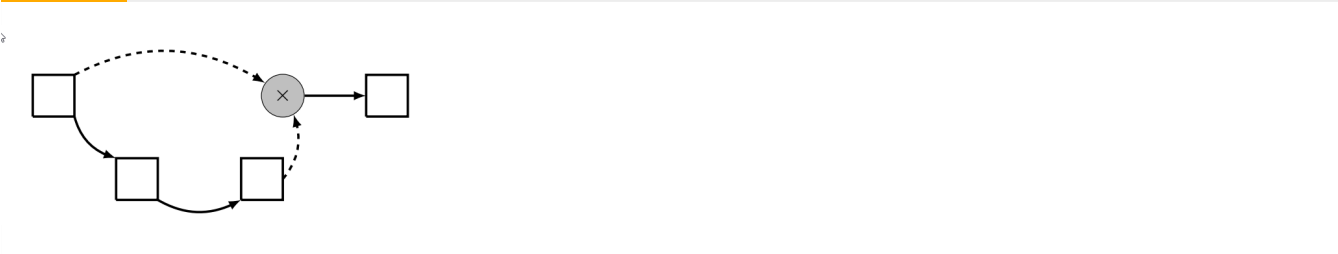
On considère l'algorithme suivant :

```
Prendre un nombre réel.  
Le multiplier par -1.  
Ajouter 7,2 au résultat.  
Multiplier le dernier résultat par le nombre de départ et donner le résultat final.
```

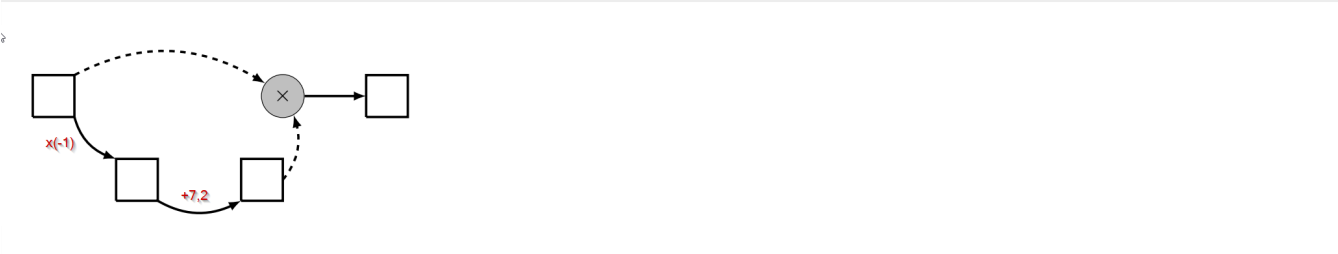
? Question 1

Ce programme peut-être représenté par le schéma suivant, que vous complèterez par des opérations sur les flèches si possible.

Enoncé



Solution



Question 2

Enoncé

Ce programme correspond-il à la définition de fonction donnée plus haut ? Justifiez.

Solution

A un nombre de la case de départ, correspond bien un et un seul nombre dans la case d'arrivée. Donc oui ce schéma correspond à la définition d'une fonction.

On notera ce programme de calcul f à partir de maintenant.

Question 3 : Etude par un tableau de valeur

Enoncé

1. Appliquer le programme de calcul sur tous les nombres entiers compris entre -2 et 8 , puis copier et compléter le tableau ci-dessous :

x	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$							

2. Cette fonction traduit-elle une situation de proportionnalité ?
3. Quelle est l'image de 2 ? De 5 ?
4. Donner un antécédent de $12,8$.

Solution

1. Le tableau :

x	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$	$-18,4$	$-8,2$	0	$6,2$	$10,4$	$12,6$	$12,8$

2. Non car il n'y a pas égalité des produits en croix, par exemple avec :

4	5
$12,8$	11

$$4 \times 11 \neq 12,8 \times 5.$$

3. L'image de 2 est $10,4$, et $f(5) = 11$.
4. Un antécédent de $12,8$ est 4 .

? Question 4 : A l'aide du schéma

Enoncé

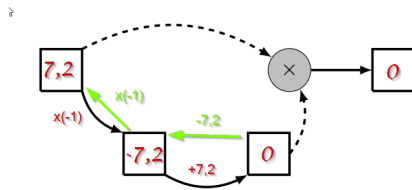
1. Calculer les images de 2, 3 et 4, 9. Quelle remarque peut-on faire ?
2. Déterminer les antécédents de 0.
3. Soit x le nombre de départ. Déterminer en fonction de x le nombre final obtenu. L'expression obtenue est **une expression algébrique** de f .

Solution

1. $f(2, 3) = 2, 3 \times (7, 2 - 2, 3) = 2, 3 \times 4, 9 = 11, 27$ et $f(4, 9) = 4, 9 \times (7, 2 - 4, 9) = 4, 9 \times 2, 3 = 11, 27$.

Les deux nombres 2, 3 et 4, 9 ont la même image. Ils sont des antécédents de 11, 27.

2. On sait déjà que 0 est un antécédent de 0. Mais il est aussi possible d'avoir un antécédent de 0 si l'avant dernière case du schéma dans le chemin du bas vaut 0 :



On en conclut que 0 possède exactement deux antécédents : 0 et 7, 2.

3.
$$f : x \mapsto x(7, 2 - x)$$

Question 5 : Différentes expressions algébriques

Enoncé

On considère les expressions $A = x(7, 2 - x)$ et $B = 12, 96 - (x - 3, 6)^2$

1. Démontrer que A et B sont égales quel que soit le nombre réel x .
2. Soit $C = (x - 3, 6)^2$
 - a. Quelles est la plus petite valeur possible pour C et pour quelle(s) valeur(s) de x est-elle atteinte ?
 - b. En déduire la plus grande valeur pour le nombre B .
 - c. Quelle est la plus grande valeur possible pour le nombre A ? Pour quelle(s) valeur(s) de x obtient-on cette plus grande valeur de A ? Conclure pour la fonction f .

Solution

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on développe A et B :

A	$=$	$x(7, 2 - x)$
A	$=$	$7, 2x - x^2$

B	$=$	$12, 96 - (x - 3, 6)^2$
	$=$	$12, 96 - (x^2 - 7, 2x + 12, 96)$
	$=$	$12, 96 - x^2 + 7, 2x - 12, 96$
B	$=$	$-x^2 + 7, 2x$

On en conclut que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $A = B$

2. $C = (x - 3, 6)^2$

- a. C est un carré donc il est positif ou nul. Donc la plus petite valeur possible pour C est 0, et on a :

$$C = 0 \iff (x - 3, 6)^2 = 0 \iff x - 3, 6 = 0 \iff x = 3, 6$$

La plus petite valeur possible pour C est donc 0 atteinte pour $x = 3, 6$.

- b. On a :

C	\geq	0
$-C$	\leq	0
$12, 96 - C$	\leq	12, 96
B	\leq	12, 96

La plus grande valeur possible pour B est donc 12, 96 et elle est atteinte quand C est égal à 0, c'est-à-dire quand x vaut 3, 6.

- c. Comme $A = B$ pour tout x réel, on en conclut que la plus grande valeur possible pour A est aussi 12, 96 atteinte pour x valant 3, 6.

On dira que f **atteint pour maximum 12, 96 en 3, 6**.

Question 6 : Tracé du graphe

Enoncé

Dans un plan muni d'un repère orthonormé (axes perpendiculaires et même unité sur chaque axe), on place les points d'abscisses x et d'ordonnées $f(x)$.

Placer tous les points possibles.

Solution

