Listes Chaînées

1. Le problème de la structure tableau

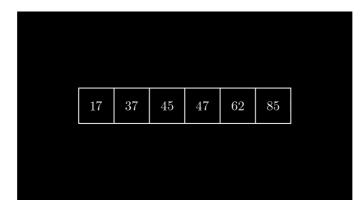
La structure de type **tableau** permet de stocker des séquences d'éléments dans des zones contigües de la mémoire, mais n'est pas forcément adaptée à toutes les opérations possibles sur ces séquences.

Par exemple, la structure de tableau de Python permet grâce aux méthodes append et pop d'ajouter et de supprimer relativement efficacement un élément en **dernière position** dans un tableau déjà existant (ce n'est pas le cas dans d'autres langages, où de telles méthodes n'existent pas forcément).

Lorsqu'on veut insérer un élément à une autre position on peut, toujours en Python, utiliser la méthode insert qui insère un élément à une position donnée. Mais cette méthode cache un certain nombre de problèmes, dont le coût en temps.

Que fait insert lorsqu'on veut ajouter un élément en position 0

Imaginons que nous avons un tableau tab, pour lequel nous voulons insérer la valeur 8 en première position :



Au total, nous avons réalisé un nombre d'opérations qui est **proportionnel à la taille du tableau** !Sur un petit, tel que celui-ci, il n'y a pas trop de problèmes, mais sur un tableau contenant *plusieurs millions* d'entrées, le nombre d'opérations devient bien trop important.

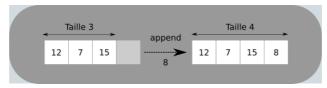
Heureusement, il existe d'autres manières de stocker des informations, qui permettent une modification bien plus rapide des différents éléments.



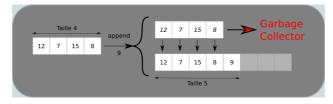
Lorsqu'un objet de type list est crée en Python, l'interpréteur réserve une taille en mémoire proportionnelle à une puissances de 2 nécessaire pour stocker le tableau. Cela signifie qu'un tableau de taille 3 occuper une taille mémoire égale à celle d'un tableau de taille 4, mais dont la dernière cellule n'est pas utilisée. De même un tableau de taille 5 est en fait stocké comme un tableau de taille 8 dont les trois dernières cellules ne sont pas utilisées. Un tableau de taille 16 sera stocké dans une structure dont toutes les cases sont occupées.

La méthode append va donc fonctionner de deux manières différentes selon la situation envisagée :

• il **reste des cases de libres** dans la réservation mémoire, alors la valeur ajoutée par append sera simplement stockée dans la première case libre :



• si la réservation mémoire est pleine, il faudra alors créer une nouvelle réservation mémoire d'une taille 2 fois supérieure à la précédente, copier chaque élément de l'ancienne liste dans la nouvelle, puis enfin la valeur ajoutée par append sera simplement stockée dans la première case libre :



On constate une utilisation mémoire très important pour juste un élément supplémentaire ajouté...

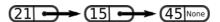
2. Les listes chaînées

2.1. Construction d'une liste chaînées



Une **liste chaînée** est une structure permettant d'implémenter une liste, c'est-à-dire une séquence finie de valeurs (de même type ou non). Les éléments sont dits **chaînés** car à chaque élément est associé l'adresse mémoire de l'élément suivant de la liste.

Exemple



On a représenté ici une liste chaînée de trois éléments :

- Le premier est 21, et il pointe vers l'adresse mémoire du second ;
- $\bullet\,$ Le deuxième élément est 15 et il pointe vers l'adresse mémoire du troisième ;
- ullet Le troisième élément est 45. Il ne pointe vers rien (l'adresse du suivant est $_{
 m None}$). On a atteint la fin de la liste.

/ Implémentation d'une liste chaînée en Python

La méthode classique pour implémenter une liste chaînée est de construire une **classe d'objets** possédant deux attributs : un pour la **valeur** et un pour l'**adresse** du chainon suivant :

```
class Chainon :
    """Chainon d'une liste chainée"""
def __init__(self, valeur, suivant) :
    self.valeur = valeur
self.suivant = suivant
```

Une fois cette classe définie, la construction de la liste s'effectue de la manière suivante :

• pour une liste chaînée contenant un unique chainon :

```
chaine = Chainon(35, None)
```

• pour une liste chaînée contenant plusieurs chainons :

```
chaine = Chainon(21, Chainon(15, Chainon(45, None)))
```

lci, on a créé une liste nommée chaine à partir de trois objets de classe Chainon qu'on peut visualiser ainsi :



1 Remarque

Cette construction est une construction récursive basée sur des objets. Il aurait été possioble d'utiliser des tuples ou des listes python, mais l'utilisation serait moins pratique :

```
(21,(15, (45, (None))))
```

Affichage d'un objet Chainon

Afin de représenter à l'écran notre objet Chainon , on implémente la méthode __str__ ainsi :

```
class Chainon :
        """Chainon d'une liste chainée"""
2
3
        def __init__(self, valeur, suivant) :
            self.valeur = valeur
 5
            self.suivant = suivant
6
        def __str__(self):
8
           if self.suivant == None :
9
                return f"{self.valeur} -> None"
10
                return f"{self.valeur} -> {str(self.suivant)}"
11
```

Ainsi l'instruction print(chaine) affichera 21 -> 15 -> 45 -> None.

2.2. Opérations sur les listes chaînées.

/ Longueur d'une liste chaînée

Nous allons créer maintenant une fonction longueur qui calcule la longueur d'une liste chaînée telle que nous l'avons implémentée.

Cette fonction devra:

- renvoyer 0 si la liste est vide;
- renvoyer le nombre d'éléments de la chaîne sinon.

Le plus simple est d'utiliser la récursivité :

```
def longueur(chaine) :
    if chaine == None :
        return 0
    else :
        return 1 + longueur(chaine.suivant)
```

La **complexité** de cette fonction est directement proportionnelle à la longueur de la liste : pour une liste de $1\,000$ éléments, la fonction effectuera :

- 1 000 comparaisons;
- 1 000 additions;
- 1 000 appels récursifs.

On en conclut que la complexité en temps de cette fonction est en $\mathbb{O}(n)$.

```
def longueur(chaine) :
    n = 0
    chainon = chaine
    while chainon is not None :
        n+=1
        chainon = chainon.suivant
    return n
```



Exercice 1 : n-ième élément

Enoncé

Créer une fonction n_i eme_element(chaine, n_i) qui renvoie la valeur du n_i eme élément de la liste chaînée passée en argument.

Solution récursive

```
def n_ieme_element(chaine, n) :
   if chaine == None :
       raise IndexError("Invalid index")
   if n == 0:
       return chaine.valeur
   else :
       return n_ieme_element(chaine.suivant, n-1)
```

La question de la complexité est un peu plus subtile :

- dans un cas correct (l'indice n fourni corresond bien à un élément de la liste), le nombre d'opérations est bien proportionnel àn;
- dans le cas où n est supérieur à la longueur de la liste, par contre, on va parcourir la totalité de la liste avant de pouvoir signaler une erreur. Ce serait cependant une très mauvaise idée de calculer la longueur de la liste pour le comparer à n, car le calcul de la longueur parcoure déjà toute la liste. Faire ce calcul en appel récursif générerait donc une complexité quadratique. On pourrait cependant encapsuler la fonction récursive dans une fonction dont l'objectif serait de vérifier la valeur de l'indice avant d'effectuer les appels récursifs.
- Pire, dans le cas où l'indice passé est négatif, la liste chaînée sera elle aussi parcourue intégralement avant de renvoyer une erreur d'indice. On peut cependant corriger celà par la ligne :

```
if chaine == None or i<0 :
```

Solution Itérative

```
def n_ieme_elementI(chaine, n) :
   if n < 0:
       raise IndexError("Invalid index")
   ni = 0
   chainon = chaine
   while chainon != None and ni != n :
       ni += 1
       chainon = chainon.suivant
    if chainon != None
       return chainon.valeur
   else :
        raise IndexError("Invalid index")
```

On retrouve en terme de complexité les mêmes éléments que pour la fonction récursive. Cependant les erreurs ainsi que les conditions de sorties sont plus complexes à prendre en compte.



Exercice 2 : Concaténation de deux listes

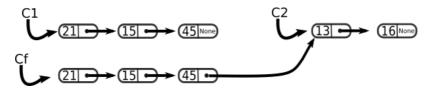
Enoncé

Créer une fonction concatener (c1, c2) qui renvoie une liste chaînée obtenue par concaténation de c1 et c2.

Solution récursive

```
def concatener(c1, c2) :
   if c1 == None :
   else :
        return Chainon(c1.valeur,concatener(c1.suivant, c2))
```

La complexité dépend fortement de la longueur de la liste c1. par contre elle ne dépend pas de celle de c2. Dans cette version, les chaines c1 et c2 ne sont pas modifiée! concatener renvoie une nouvelle liste chaînée qui a copié les valeurs de c1 avant de les lier à celles de c2.



Solution Itérative

```
def concatenerI(c1, c2) :
   chainon = c1
   while chainon.suivant != None :
        chainon = chainon.suivant
   chainon.suivant = c2
    return c1
```

Attention! Dans cette solution, c1 est modifiée!



ET C'EST UNE TRES MAUVAISE IDEE

Imaginons qu'on exécute deux fois la concaténation concatener I (c1, c2), puis qu'on demande un affichage de c1.

La première concaténation va donner le schéma ci-dessus, la châine c1 ayant pour dernier chaînon le dernier chaînon de c2. A l'exécution de la deuxième concaténation, il n'y aura pas de création de nouvelle chaîne, mais simplement la modification du dernier chaînon de l'actuel c1 vers le premier élément de c2, soit... une boucle menant du dernier élément de c2 vers le premier de c2:



La chaîne obtenue ne possède plus de fin (jamais elle ne pointe vers None). La méthode __str__ effectuant un appel récursif dont le cas de base correspond au fait de pointer vers None, on aura alors une erreur de type RecursionError: maximum recursion depth exceeded, puisqu'il est devenu impossible de passer par le cas de base.



Comment faire pour renverser une liste chaînée ? Sachant que nous avons vu des procédés récursif pour les questions précédentes, nous sommes tenter d'en utiliser un aussi pour ce cas, par exemple en sélectionnant le premier chaînon et en le concaténant à la liste renversée de la suite de la chaîne, Le cas de base étant celui d'une liste vide, auquel cas on renvoie cette liste :

```
def renverser(chaine) :
    if chaine == None :
        return None
    else :
        return concatener(renverser(chaine.suivant), Chainon(chaine.valeur, None))
```

Cependant cette solution n'est pas efficace! En effet, à chaque appel de renverser, on fait aussi appel à la fonction concatener qui parcoure la totalité de la chaine, à part un élément. La complexité devient alors quadratique!

La récursivité n'est pas toujours la meilleure solution! (mais parfois elle l'est quand même!)

On va don passer en itératif, surtourt qu'il est facile d'attacher un chainon en tête d'une chaine déjà consrtituée :

```
def renverser(chaine) :
    reverse = None
    c= chaine
    while c != None :
        reverse = Chainon(c.valeur, reverse)
        c = c.suivant
    return reverse
```

La complexité est celle du parcours d'une chaîne complète, donc en $\mathbb{O}(n)$.

2.3. Modification de listes chaînées

\mathbf{A}

Pourquoi se casser la tête?

Eliminons tout de suite une possibilité : bien entendu, **en Python**, il est possible de modifier *directement* un attribut, donc la modification d'une valeur d'une liste chaînée est assez évidente. Par exemple, les lignes suivantes :

```
chaine = Chainon(21, Chainon(15, Chainon(45, None)))
chaine.suivant.valeur = 33
```

modifient la valeur du deuxième élément de la chaine, qui devient 21 -> 33 -> 45 -> None.

Cependant, **cette possibilité n'est pas toujours possible dans tous les langages**, et de toutes façons cette manière de modifier ne correspond pas à la logique de construction d'une liste chaînée.

On va donc préférer passer à des modifications directe des chaînons.

Exercice 3 : Insertion d'un chainon

Enoncé

Créer une fonction inserer (v, n, chaine) qui renvoie la liste chainée dans laquelle on a inséré insère l'élément v à la position n dans la liste chaine passée en argument.

Le schéma suivant doit pouvoir vous aider çà construire l'algorithme de cette fonction :



Solution

```
def inserer(v, n, chaine) :
    if n<0 :
        raise IndexError("Invalid index")
    if n == 0 or chaine == None:
        return Chainon(v, chaine)
    else :
        return Chainon(chaine.valeur, inserer(v, n-1, chaine.suivant))</pre>
```

? Exercice 4 : Suppression d'un chainon

Enoncé

Créer une fonction supprime (n, chaine) qui supprime l'élément à la position n dans la liste passée en argument.

Le schéma suivant doit pouvoir vous aider çà construire l'algorithme de cette fonction :



Solution

```
def supprimer(n, chaine) :
    if chaine == None or n<0:
        raise IndexError("Invalid index")
    if n == 0 :
        return chaine.suivant
    else :
        return Chainon(chaine.valeur, supprimer(n-1, chaine.suivant))</pre>
```

3. Quelques exercices supplémentaires

Nous voici avec une structure correcte, permettant de travailler correctement sur des listes chainées. Nous allons maintenant augmenter notre potentiel d'action avec les listes chaînées :



Exercice 5 : Création à partir d'une liste Python

Enoncé

Créer une fonction creer_depuis_tab(tab) qui crée une liste chaînée depuis un tableau donné en argument.

Par exemple:

- creer_depuis_tab([12, 15, 17]) crée la liste chaînée 12 -> 15 -> 17 -> None ;
- creer_depuis_tab([]) crée un objet None;
- creer_depuis_tab([42]) crée une liste chaînée 42 -> None.

Solutions

Il existe de nombreuses possibilités, et toutes ne sont pas équivalentes en terme de complexité (la V4 ci-dessous est beaucoup moins efficace).

Itérative Pythonesque avec reversed

```
def creer_depuis_tab(tab) :
     ""Version pythonesque avec reversed"""
   LC = None
   for e in reversed(tab) :
      LC = Chainon(e, LC)
   return LC
```

Itérative avec indices

```
def creer_depuis_tab(tab) :
   """Version avec calcul de l'indice"""
   LC = None
   1 = len(tab)
   for i in range(len(tab)):
       LC = Chainon(tab[1-1-i], LC)
    return LC
```

Récursive avec slices

```
def creer_depuis_tab(tab) :
 """Version récursive"
   if tab == [] :
       return None
       return Chainon(tab[0], creer_depuis_tabV3(tab[1:]))
```



Exercice 6 : Chercher le nombre d'occurences

Enoncé

Créer une fonction occurences (valeur, chaine) qui renvoie le nombre d'occurence de valeur dans la liste chaînée chaine.

Par exemple:

- occurences(12, chaine) devra renvoyer 3 si la chaîne est 12 -> 35 -> 12 ->42 -> 12 ->35 -> None;
- occurences (27, chaine) devra renvoyer 0 si la chaîne est 12 -> 35 -> 12 ->42 -> 12 ->35 -> None;
- occurences(42, chaine) devra renvoyer 1 si la chaîne est 12 -> 35 -> 12 ->42 -> 12 ->35 -> None.

Solution

A venir!



Exercice 7: Trouver la première occurence

Enoncé

Créer une fonction premiere_occurence (valeur, chaine) qui renvoie l'indice de la première occurence de valeur dans la liste chaînée chaine. Si valeur n'est pas dans chaine, la fonction devra renvoyer -1.

Par exemple:

- premiere_occurences(12, chaine) devra renvoyer 0 si la chaîne est 12 -> 35 -> 12 ->42 -> 12 ->35 -> None;
- premiere_occurences(27,chaine) devra renvoyer -1 si la chaîne est 12 -> 35 -> 12 ->42 -> 12 ->35 -> None;
- premiere_occurences(42,chaine) devra renvoyer 3 si la chaîne est 12 -> 35 -> 12 ->42 -> 12 ->35 -> None.

Solution

A venir!



Exercice 8: chaînes identiques

Enoncé

Créer une fonction identique (c1, c2) qui renvoie True si les deux chaînes contiennent les mêmes valeurs dans le même ordre, et False sinon.

Solution

A venir!

4. Encapsulation

On va désormais encapsuler l'implémentation précédente dans une autre classe, nommée ListeC dont l'interface est la suivante :

- 1. la construction d'un objet ListeC vide correspondre à un objet None;
- 2. une méthode is_empty doit renvoyer un booléen correspondnat au statut vide ou non vide de la liste;

- 3. une méthode push permet d'ajouter une valeur en tête de la liste;
- 4. la méthode __str__ doit renvoyer une chaîne correcte (telle que celle de la classe Chainon);
- 5. l'appel à la fonction len doit renvoyer la longueur de la liste;
- 6. on doit pouvoir atteindre le i-ème élément d'un objet lc par l'intermédiaire de lc[i] ;
- 7. l'opérateur + utilisé entre deux objets de type ListeC doit renvoyer un nouvel objet crée par concaténation.

Ainsi, un utilisateur du module crée n'aura pas à se préoccuper des différences d'implémenations présentées dans la partie précédente :



Méthode constructeur __init__:

Analyse

Un objet ListeC ne contient qu'un seul attribut : la tête de la liste. Soit c'est un objet de type Chainon, soit c'est l'objet None . La méthode __init__ ne doit donc qu'initialiser un attribut head à la valeur None .

Code

```
class ListeC :
    """Classe permettant de représenter une liste chainée, ou chaque chainon est un objet de classe
Chainon"""

def __init__(self) :
    self.head = None
```

Méthode is_empty :

Analyse

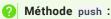
si la tête est de type None, on renvoie True, sinon False

Code

```
class ListeC :
    """Classe permettant de représenter une liste chainée, ou chaque chainon est un objet de classe
Chainon"""

def __init__(self) :
    self.head = None

def is_empty(self) :
    return self.head == None
```



Analyse

Comme on l'a vu plusieurs fois, une liste chainée se construit par ajouts successifs d'éléments en tête de la liste.

Code

```
1 class ListeC :
     """Classe permettant de représenter une liste chainée, ou chaque chainon est un objet de classe
2
3
   Chainon"""
4
      def __init__(self) :
5
          self.head = None
6
7
8
      def is_empty(self) :
          return self.head == None
9
10
11
      def push(self, v) :
           self.head = Chainon(v, self.head)
```

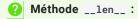
Méthode __str__ :

Analyse

Rien de particulier, il suffit de renvoyer la chaîne de caractères correspondant à la tête.

Code

```
1 class ListeC :
      """Classe permettant de représenter une liste chainée, ou chaque chainon est un objet de classe
2
3
    Chainon""
4
 5
        def __init__(self) :
           self.head = None
6
7
8
       def is_empty(self) :
9
           return self.head == None
10
11
       def push(self, v) :
12
           self.head = Chainon(v, self.head)
13
        def __str__(self) :
14
            return str(self.head)
```



Analyse

La fonction built-in len fait appel à la méthode __len__ de l'objet passé en argument. Il suffit donc de créer une telle méthode, en réutilisant la fonction longueur déjà crée.

Code

```
class ListeC :
 2
         """Classe permettant de représenter une liste chainée, ou chaque chainon est un objet de classe
3
    Chainon"
 4
 5
        def __init__(self) :
            self.head = None
 6
 7
 8
        def is_empty(self) :
9
            return self.head == None
10
        def push(self, v) :
11
            self.head = Chainon(v, self.head)
12
13
14
        def __str__(self) :
15
            return str(self.head)
16
17
        def __len__(self) :
18
            if self.head == None :
19
                return 0
            else :
20
                return longueur(self.head)
```

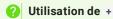
Accès direct au i-ème élément :

Analyse

Lorsqu'on veut faire appel aux opérateurs [i] pour accéder au i-ème élément d'un objet déjà construit, python regarde si une méthode __getitem__ a été définie pour ce type d'objet.

Code

```
class ListeC :
 2
        """Classe permettant de représenter une liste chainée, ou chaque chainon est un objet de classe
 3
    Chainon"
4
        def __init__(self) :
 6
            self.head = None
7
 8
        def is_empty(self) :
            return self.head == None
9
10
11
        def push(self, v) :
12
            self.head = Chainon(v, self.head)
13
14
        def __str__(self) :
15
             return str(self.head)
16
17
        def __len__(self) :
18
            if self.head == None :
19
                return 0
20
            else :
21
                 return longueur(self.head)
22
23
         def __getitem__(self, i) :
            return n_ieme_element(self.head, i)
```



Analyse

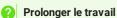
Pour utiliser l'opérateur +, il faut implémenter une méthode __add__ . Cette méthode doit renvoyer un nouvel objet, donc son implémentation est un peu plus complexe. Par ailleurs, il faut lever une erreur dans le cas où l'objet passé en argument n'est pas de type ListeC .

Code

```
class ListeC :
 1
       """Classe permettant de représenter une liste chainée, ou chaque chainon est un objet de classe
 2
    Chainon"""
3
 5
        def __init__(self) :
 6
           self.head = None
        def is_empty(self) :
 8
9
            return self.head == None
10
11
        def push(self, v) :
12
            self.head = Chainon(v, self.head)
13
14
        def __str__(self) :
            return str(self.head)
15
16
17
        def __len__(self) :
18
            if self.head == None :
19
                return 0
20
            else :
21
                return longueur(self.head)
22
23
        def __getitem__(self, i) :
24
            return n_ieme_element(self.head, i)
25
        def __add__(self, other) :
26
27
            if not isinstance(other, ListeC) :
28
                raise TypeError(f"Unable to add ListeC object with {type(other)} object")
29
            result = ListeC()
            result.head = concatener(self.head, other.head)
30
            return result
```

Une fois cette classe implémentée, on peut l'utiliser aussi simplement qu'un objet de type list de python :

```
>>> 11 = ListeC()
>>> 11
<__main__.ListeC object at 0x033A8690>
>>> 11.push(12)
>>> 11.push(15)
>>> 11.push(42)
>>> print(11)
42->15->12->None
>>> len(11)
3
>>> 11.is_empty()
False
>>> 12 = ListeC()
>>> 12.push (43)
>>> 12.push (27)
>>> 12.push (-5)
>>> print(11+12)
42->15->12->-5->27->43->None
>>> print(12+11)
-5->27->43->42->15->12->None
>>> 11[2]
12
>>> 12[0]
-5
```



Enoncé

Ajouter à la classe ListeC les méthodes suivantes

- pop : qui supprime soit la tête de la liste si aucun argument n'est passé (11.pop(), soit l'élément d'indice donné si un indice est passé en argument (11.pop(2));
- insert(v,i) qui insère dans la liste la valeur v à la position i .

Solution

A venir!