

## C01-01 : Ensembles de Nombres

La version pdf de ce cours est téléchargeable [ici](#). (version 2021-2022)

### 1. Activité : Classer des nombres

$$\begin{array}{ccccccc}
 \pi & & & & & & \sqrt{2} \\
 & & & -5 \times 10^6 & & & \\
 & -\frac{12}{3} & 0 & & & \frac{7}{5} & \\
 \frac{15}{5} & & -\sqrt{0,64} & \frac{13}{0} & 5 & & \\
 & & 5 \times 10^{-3} & & \sqrt{-25} & & -\sqrt{9} \\
 & & & -42 & & -4,07 & \\
 \sqrt{36} & & & & & & \sqrt{\frac{49}{81}} \\
 & -\frac{1}{3} & & & & & \\
 2,6 \times 10^2 & & & \frac{3}{7} & 3,2 & & \\
 & & -3,3 \times 10^1 & & & & 
 \end{array}$$

1. Dans la liste ci-dessus, deux écritures sont interdites. Lesquelles et pourquoi ?
2. Classer les nombres restants en **cinq groupes**, en justifiant vos choix.

#### Différence entre propriétés et écritures

Un nombre peut être écrit de différentes manières, plus ou moins compliquées. Par exemple :

$$2 = \frac{6}{3} = 20 \times 10^{-1} = \sqrt{4} = -(-2) = 2,0000$$

Pour autant, ce qui nous intéresse en mathématiques c'est d'étudier les **propriétés** de ce nombre, qui elles sont indépendantes de l'écriture de ce nombre.

### 2. Nombres entiers naturels et relatifs

### 🔥 Définitions

- L'ensemble des **entiers naturels**, noté  $\mathbb{N}$ , est l'ensemble des nombres permettant de dénombrer une collection d'objets, de personnes, etc, c'est-à-dire la suite naturelle  $0 ; 1 ; 2 ; 3 ; \dots$
- L'ensemble des **entiers relatifs**, noté  $\mathbb{Z}$ , est l'ensemble des entiers naturels et **leurs opposés**, c'est-à-dire la suite  $\dots ; -3 ; -2 ; -1 ; 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; \dots$

### i Info

- L'ensemble  $\mathbb{N}$  possède un plus petit élément, c'est 0.
- Les nombres entiers naturels sont tous **positifs ou nuls**.
- Tous les entiers naturels **sont aussi des entiers relatifs**.

### 🔥 Vocabulaire et notations

- **Appartenance** : On dit que 5 **appartient** à  $\mathbb{N}$ , et on note  $5 \in \mathbb{N}$ . De même  $-2$  **n'appartient pas** à  $\mathbb{N}$ , et on note  $-12 \notin \mathbb{N}$ .
- **Inclusion** : Tous les éléments de  $\mathbb{N}$  sont aussi des éléments de  $\mathbb{Z}$ . On dit alors que  $\mathbb{N}$  est un **sous-ensemble** de  $\mathbb{Z}$  et on note alors  $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$  (qui se lit  $\mathbb{N}$  est inclus dans  $\mathbb{Z}$ ).

### 🔧 Application : choix du bon symbole



## 3. Nombres décimaux

### 🔥 définition : Nombres décimaux

Un **nombre décimal** est un nombre pouvant s'écrire sous la forme d'une **fraction décimale**, c'est à dire sous la forme  $\frac{a}{10^n}$  avec  $a \in \mathbb{Z}$  et  $n \in \mathbb{N}$ .

L'ensemble des décimaux est noté  $\mathbb{D}$ .

### 🔧 Application : Nombres décimaux et puissances de 10



### i Remarques

- Les entiers relatifs sont des décimaux, car si  $k \in \mathbb{Z}$ , on peut aussi écrire  $k = \frac{k}{1} = \frac{k}{10^0}$ . On a donc la propriété  $\mathbb{Z} \subset \mathbb{D}$ .
- Un nombre décimal possède une **écriture décimale finie**.

## 4. Nombres rationnels

### 🔥 Définition : Nombres rationnels

Un **nombre rationnel** est un nombre pouvant s'écrire sous la forme  $\frac{a}{b}$  avec  $a \in \mathbb{Z}$  et  $b \in \mathbb{N}^*$  (c'est-à-dire  $\mathbb{N}$  privé de 0).

L'ensemble des nombres rationnels est noté  $\mathbb{Q}$ .

**i Remarque**

Un nombre décimal est par définition un nombre rationnel.

Par définition de  $\mathbb{D}$  et  $\mathbb{Q}$ , on a la propriété  $\mathbb{D} \subset \mathbb{Q}$ .

**🔥 Propriété : Caractérisation des rationnels non décimaux**

Tous les nombres rationnels ne possèdent pas d'écriture décimale finie. En particulier,  $\frac{1}{3}$  n'est pas décimal.

**🔗 Preuve****i Remarques**

- Les nombres rationnels non décimaux possèdent une **écriture décimale infinie périodique**, c'est-à-dire avec une série de chiffres qui se répètent à l'infini. Par exemple  $\frac{1}{7} = 0,14285714285714\dots$  (on constate la répétition de la séquence **142857**).
- Réciproquement, si un nombre possède une écriture décimale infinie périodique, alors c'est un rationnel.

**📋 Méthode : Déterminer une fraction égale à une écriture décimale infinie périodique**

On considère le nombre  $a$  dont l'écriture décimale est infinie périodique  $a = 2,71347134\dots$ . Démontrons que ce nombre est rationnel.

**✓ Solution****🔗 Application : Calculs avec les rationnels**

## 5. Nombres réels

**🔥 Définition : Nombres réels**

Un nombre réel est un nombre exprimant une longueur, ou l'opposé d'un nombre exprimant une longueur.

L'ensemble des nombres rationnels est noté  $\mathbb{R}$ .

**i Remarques**

- Un nombre réel est un **nombre dont le carré est positif ou nul**.
- Par définition, tous les nombres rationnels sont des réels. On a alors  $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ .
- Certains nombres réels ne sont pas rationnels. Par exemple  $\pi$  n'est pas rationnel, tout comme  $\sqrt{2}$  (on le montrera en exercice). Ces nombres sont dits **irrationnels**.

 **Propriété : Ensembles de nombres**

Des remarques précédentes, on à la propriété :

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$


 **Propriété : Droite des réels**

Tout nombre réel est représenté par l'abscisse d'un point sur la droite numérique ( appelée aussi **droite des réels** ).



 **Application : Représenter sur la droite des réels**

>