C01-01 : Ensembles de Nombres

La version pdf de ce cours est téléchargeable ici. (version 2021-2022)

1. Activité : Classer des nombres

π $\qquad \sqrt{2}$

-5×10^6

$-\dfrac{12}{3}$ $\qquad 0$ $\qquad \dfrac{7}{5}$

$\dfrac{15}{5}$ $\qquad -\sqrt{0,64}$ $\qquad \dfrac{13}{0}$ $\qquad 5$

$-\sqrt{9}$

5×10^{-3} $\qquad \sqrt{-25}$

-42 $\qquad -4,07$

$\sqrt{36}$ $\qquad -\dfrac{1}{3}$ $\qquad \sqrt{\dfrac{49}{81}}$

$\dfrac{3}{7}$ $\qquad 3,2$

$2,6 \times 10^2$ $\qquad -3,3 \times 10^1$

1. Dans la liste ci-dessus, deux écritures sont interdites. Lesquelles et pourquoi ?
2. Classer les nombres restants en **cinq groupes**, en justifiant vos choix.

Différence entres propriétés et écritures

Un nombre peut être écrit de différentes manières, plus ou moins compliquées. Par exemple :

\[2 = \cfrac{6}{3} = 20 \times 10^{-1} = \sqrt{4}= - \left(-2\right) = 2,0000 \]

Pour autant, ce qui nous intéresse en mathématiques c'est d'étudier les **propriétés** de ce nombre, qui elles sont indépendantes de l'écriture de ce nombre.

2. Nombres entiers naturels et relatifs

Définitions

- L'ensemble des **entiers naturels**, noté \(\mathbb{N}\), est l'ensemble des nombres permettant de dénombrer une collection d'objets, de personnes, etc, c'est-à-dire la suite naturelle \(0~;~1~;~2~;~3~;~...\)
- L'ensemble des **entiers relatifs**, noté \(\mathbb{Z}\), est l'ensemble des entiers naturels et **leurs opposés**, c'est-à-dire la suite \(...~;~-3~;~-2~;~-1~;~0~;~1~;~2~;~3~;~...\)

Info

- L'ensemble $\mathbb{N}$ possède un plus petit élément, c'est 0.
- Les nombres entiers naturels sont tous **positifs ou nuls**.
- Tous les entiers naturels sont aussi des entiers relatifs.

Vocabulaire et notations

- **Appartenance** : On dit que 5 **appartient** à $\mathbb{N}$, et on note $5 \in \mathbb{N}$. De même -2 **n'appartient pas** à $\mathbb{N}$, et on note $-12 \notin \mathbb{N}$.
- **Inclusion** : Tous les éléments de $\mathbb{N}$ sont aussi des éléments de $\mathbb{Z}$. On dit alors que $\mathbb{N}$ est un **sous-ensemble** de $\mathbb{Z}$ et on note alors $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ (qui se lit $\mathbb{N}$ est inclus dans $\mathbb{Z}$).

Application : choix du bon symbole

Exercice

Compléter avec $\in$ ou $\notin$:

$7 \dots \mathbb{N}$

$-3 \dots \mathbb{N}$

$-5 \dots \mathbb{Z}$

$7 \dots \mathbb{Z}$

$\dfrac{1}{3} \dots \mathbb{N}$

$\sqrt{9} \dots \mathbb{N}$

$-\sqrt{25} \dots \mathbb{N}$

$-\sqrt{2} \dots \mathbb{Z}$

$5 \times 10^{3} \dots \mathbb{N}$

$5 \times 10 ^{-3} \dots \mathbb{Z}$

$-4,2 \dots \mathbb{Z}$

$3 \times (1 - \dfrac{1}{3}) \dots \mathbb{N}$

Solution

Compléter avec $\in$ ou $\notin$:

$7 \in \mathbb{N}$

$-3 \notin \mathbb{N}$

$-5 \in \mathbb{Z}$

$7 \in \mathbb{Z}$

$\dfrac{1}{3} \notin \mathbb{N}$

$\sqrt{9} \in \mathbb{N}$ car $\sqrt{9} = 3$

$-\sqrt{25} \notin \mathbb{N}$ car $-\sqrt{25} = -5$

$-\sqrt{2} \notin \mathbb{Z}$ car $-\sqrt{2} \simeq -1,414...$

$5 \times 10^{3} \in \mathbb{N}$ car $5 \times 10^3 = 5 \times 1000 = 5000$

$5 \times 10 ^{-3} \notin \mathbb{Z}$ car $5 \times 10 ^{-3} = 5 \times 0,001 = 0,005$

$-4,2 \notin \mathbb{Z}$

$3 \times (1 - \dfrac{1}{3}) \in \mathbb{N}$ car $3 \times (1 - \dfrac{1}{3}) = 3 - 1 = 2$ (en développant) ou $3 \times (1 - \dfrac{1}{3}) = 3 \times \dfrac{2}{3} = 2$ (en calculant entre parenthèses).

3. Nombres décimaux

définition : Nombres décimaux

Un nombre décimal est un nombre pouvant s'écrire sous la forme d'une fraction décimale, c'est à dire sous la forme $$ \dfrac{a}{10^n} $$ avec \(a\in \mathbb{Z}\) et \(n\in \mathbb{N}\).

L'ensemble des décimaux est noté \(\mathbb{D}\).

Application : Nombres décimaux et puissances de 10

Exercice

Pour chacun des nombres suivants, déterminer si possible une écriture de la forme \(\dfrac{k}{10^n}\).

\(4,37\)

\(0,002\)

\(-12\)

\(\dfrac{1}{3}\)

\(\dfrac{2}{5}\)

\(\sqrt{0,16}\)

\(10^3\)

\(10^{-5}\)

\(-10^5\)

\(\dfrac{3.10^5}{10^7}\)

\(\dfrac{10^7}{3.10^5}\)

Solution

Pour chacun des nombres suivants, déterminer si possible une écriture de la forme \(\dfrac{k}{10^n}\).

\(4,37 = \dfrac{437}{100} = \dfrac{437}{10^{2}}\)

\(0,002 = \dfrac{2}{1~000} = \dfrac{2}{10^{3}}\)

\(-12 = \dfrac{-12}{1} = \dfrac{-12}{10^{0}}\) (car \(a^0 =1\) pour tout nombre \(a \neq 0\)).

\(\dfrac{1}{3} \notin \mathbb{D}\) car \(\dfrac{1}{3} \simeq 0,333...\) (La démonstration réelle sera donnée plus tard dans l'année)

\(\dfrac{2}{5} = \dfrac{4}{10} = \dfrac{4}{10^1}\)

\(\sqrt{0,16} = 0,4 = \dfrac{4}{10} = \dfrac{4}{10^1}\)

\(10^3 = \dfrac{1~000}{1} = \dfrac{1~000}{10^{0}}\)

\(10^{-5} = \dfrac{1}{10^5}\) (par définition des exposants négatifs \(a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}\) pour tout \(n \in \mathbb{Z}\) si \(a \neq 0\))

\(-10^5 = - 100~000 = \dfrac{- 100~000}{1} = \dfrac{- 100~000}{10^{0}}\)$

\(\dfrac{3.10^5}{10^7} = \dfrac{3}{10^2}\) par division des puissances (\(\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}\) pour tout \(m,n \in \Z\))

\(\dfrac{10^7}{3.10^5} = \dfrac{10^2}{3} \simeq 33,333.... \notin \mathbb{D}\)

Remarques

- Les entiers relatifs sont des décimaux, car si $k \in \mathbb{Z}$, on peut aussi écrire $k=\dfrac{k}{1}=\dfrac{k}{10^0}$. On a donc la propriété $\mathbb{Z} \subset \mathbb{D}$.
- Un nombre décimal possède une **écriture décimale finie**.

4. Nombres rationnels

Définition : Nombres rationnels

Un nombre rationnel est un nombre pouvant s'écrire sous la forme $\dfrac{a}{b}$ avec $a\in \mathbb{Z}$ et $b\in \mathbb{N}^{*}$ (c'est-à-dire $\mathbb{N}$ privé de 0).

L'ensemble des nombres rationnels est noté $\mathbb{Q}$.

Remarque

Un nombre décimal est par définition un nombre rationnel.

Par définition de $\mathbb{D}$ et $\mathbb{Q}$, on a la propriété $\mathbb{D} \subset \mathbb{Q}$.

Propriété : Caractérisation des rationnels non décimaux

Tous les nombres rationnels ne possèdent pas d'écriture décimale finie. En particulier, $\dfrac{1}{3}$ n'est pas décimal.

Preuve

La démonstration de cette propriété sera faite plus tard dans l'année, dans le chapitre arithmétique.

Remarques

- Les nombres rationnels non décimaux possèdent une **écriture décimale infinie périodique**, c'est-à-dire avec une série de chiffres qui se répètent à l'infini. Par exemple $\dfrac{1}{7} = 0,14285714285714...$ (on constate la répétition de la séquence 142857}).
- Réciproquement, si un nombre possède une écriture décimale infinie périodique, alors c'est un rationnel.

Méthode : Déterminer une fraction égale à une écriture décimale infinie périodique

On considère le nombre a dont l'écriture décimale est infinie périodique $a = 2,71347134...$. Démontrons que ce nombre est rationnel.

Solution

On constate que la partie répétitive des chiffres de \(a\) est \(7134\), donc de taille 4.

Donc \(10^4 \times a = 10~000\times a = 27134,71347134...\).

D'où \(10~000\times a - a = 27134,71347134... - 2,71347134... = 27134 -2 = 27~132\).

Or \(10~000\times a - a = 9~999\times a\).

D'après les deux lignes précédentes, on a alors \(9~999\times a = 27132\) soit \(a = \dfrac{27~132}{9~999} = \dfrac{9~044}{3~333}\).

Donc \(a\) est bien un nombre rationnel puisqu'il s'écrit sous la forme d'une fraction.

Application : Calculs avec les rationnels

Exercice

Dans chacun des cas suivants, calculer **à la main** chacune des expressions suivantes :

$A = \dfrac {5}{7} - \dfrac{3}{11}$

$B = -\dfrac {4}{3} + \dfrac{7}{8}$

$C = \dfrac {3}{8} - \dfrac{5}{12}$

$D = \dfrac {-6}{7} \times \dfrac{8}{9}$

$E = \dfrac {3}{2} \times \left(-\dfrac{7}{3}\right)$

$F = \dfrac {48}{35} \times \dfrac{25}{64}$

$G = \dfrac {4}{7} \div \dfrac{8}{21}$

$H = \dfrac{~~\dfrac{3}{4}~~}{\dfrac{18}{20}}$

$I = \dfrac{~~7~~}{\dfrac{5}{3}}$

$J = \dfrac{~~\dfrac{7}{5}~~}{3}$

Solution

$A = \dfrac {5}{7} - \dfrac{3}{11} = \dfrac {5\times 11}{7\times 11} - \dfrac{3\times 7}{11\times 7} = \dfrac {55}{77} - \dfrac{21}{77} = \dfrac{34}{77}$

$B = -\dfrac {4}{3} + \dfrac{7}{8} = -\dfrac {4 \times 8}{3 \times 8} + \dfrac{7 \times 3}{8 \times 3} = -\dfrac {32}{24} + \dfrac{21}{24} - \dfrac {11}{24}$

$C = \dfrac {3}{8} - \dfrac{5}{12} = \dfrac {3\times 3}{8\times 3} - \dfrac{5 \times 2}{12 \times 2} = \dfrac {9}{24} - \dfrac{10}{24} = - \dfrac{1}{24}$

$D = \dfrac {-6}{7} \times \dfrac{8}{9} = \dfrac{-6 \times 8}{7 \times 9} = \dfrac{-2 \times 3 \times 8}{7 \times 3 \times 3} = -\dfrac{16}{21}$ N'oubliez pas de simplifier !

$E = \dfrac {3}{2} \times \left(-\dfrac{7}{3}\right) = -\dfrac {3 \times 7}{2 \times3} = - \dfrac{7}{2}$

$F = \dfrac {48}{35} \times \dfrac{25}{64} = \dfrac{48 \times 25}{35 \times 64} = \dfrac{2 \times 3 \times 8 \times 5 \times 5}{5\times 7 \times 2 \times 4 \times 8} = \dfrac{15}{28}$

$G = \dfrac {4}{7} \div \dfrac{8}{21} = \dfrac {4}{7} \times \dfrac{21}{8} = \dfrac{4 \times 21}{7 \times 8} = \dfrac{ 4 \times 3 \times 7}{7 \times 2 \times 4} = \dfrac{3}{2}$

$H = \dfrac{~~\dfrac{3}{4}~~}{\dfrac{18}{20}} = \dfrac{3}{4}\div\dfrac{18}{20} = \dfrac{3}{4}\div\dfrac{20}{18} = \dfrac{3 \times 4 \times 5}{ 4 \times 3 \times 6} = \dfrac{5}{6}$.

$I = \dfrac{~~7~~}{\dfrac{5}{3}} = 7 \div \dfrac{5}{3} = 7 \times \dfrac{3}{5} = \dfrac{21}{5}$

$J = \dfrac{~~\dfrac{7}{5}~~}{3} = \dfrac{7}{5} \div 3 = \dfrac{7}{5} \times \dfrac{1}{3} = \dfrac{7}{15}$

5. Nombres réels

Définition : Nombres réels

Un {==nombre réel est un nombre exprimant une longueur, ou l'opposé d'un nombre exprimant une longueur.

L'ensemble des nombres rationnels est noté $\mathbb{R}$.

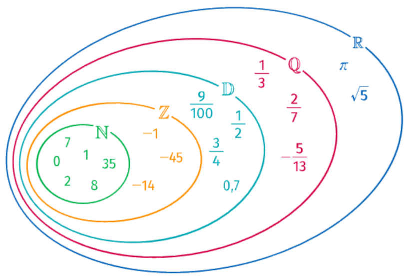
Remarques

- Un nombre réel est un nombre dont le carré est positif ou nul .
- Par définition, tous les nombres rationnels sont des réels. On a alors $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.
- Certains nombres réels ne sont pas rationnels. Par exemple π n'est pas rationnel, tout comme $\sqrt{2}$ (on le montrera en exercice). Ces nombres sont dits **irrationnels** .

Propriété : Ensembles de nombres

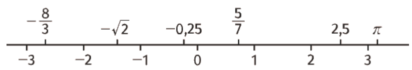
Des remarques précédentes, on à la propriété :

$$ \mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} $$



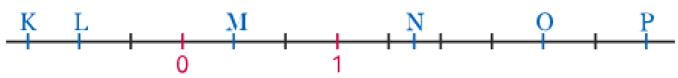
Propriété : Droite des réels

Tout nombre réel est représenté par l'abscisse d'un point sur la droite numérique (appelée aussi **droite des réels**).



Application : Représenter sur la droite des réels

1. Déterminer l'abscisse de chacun des points de la droite ci-dessous :



1. Représenter la droite des réels (unité : 5) et y placer le plus précisément possible les nombres suivants :

$$ 3 ~;~ -0,75 ~;~ \dfrac{5}{4} ~;~\dfrac{-2}{5} ~;~ \dfrac{7}{3} ~;~ \sqrt{2} $$