

C01-01 : Ensembles de Nombres

La version pdf de ce cours est téléchargeable [ici](#). (version 2021-2022)

1. Activité : Classer des nombres

$$\begin{array}{ccccccc}
 \pi & & & & & & \sqrt{2} \\
 & & & -5 \times 10^6 & & & \\
 & -\frac{12}{3} & 0 & & & & \frac{7}{5} \\
 & & & & & & \\
 \frac{15}{5} & & -\sqrt{0,64} & \frac{13}{0} & 5 & & \\
 & & & & & & \\
 & & 5 \times 10^{-3} & & \sqrt{-25} & & -\sqrt{9} \\
 & & & -42 & & -4,07 & \\
 \sqrt{36} & & & & & & \sqrt{\frac{49}{81}} \\
 & -\frac{1}{3} & & & & & \\
 2,6 \times 10^2 & & \frac{3}{7} & & 3,2 & & \\
 & -3,3 \times 10^1 & & & & &
 \end{array}$$

1. Dans la liste ci-dessus, deux écritures sont interdites. Lesquelles et pourquoi ?
2. Classer les nombres restants en **cinq groupes**, en justifiant vos choix.

Différence entre propriétés et écritures

Un nombre peut être écrit de différentes manières, plus ou moins compliquées. Par exemple :

$$2 = \frac{6}{3} = 20 \times 10^{-1} = \sqrt{4} = -(-2) = 2,0000$$

Pour autant, ce qui nous intéresse en mathématiques c'est d'étudier les **propriétés** de ce nombre, qui elles sont indépendantes de l'écriture de ce nombre.

2. Nombres entiers naturels et relatifs

🔥 Définitions

- L'ensemble des **entiers naturels**, noté \mathbb{N} , est l'ensemble des nombres permettant de dénombrer une collection d'objets, de personnes, etc, c'est-à-dire la suite naturelle $0 ; 1 ; 2 ; 3 ; \dots$
- L'ensemble des **entiers relatifs**, noté \mathbb{Z} , est l'ensemble des entiers naturels et **leurs opposés**, c'est-à-dire la suite $\dots ; -3 ; -2 ; -1 ; 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; \dots$

📘 Info

- L'ensemble \mathbb{N} possède un plus petit élément, c'est 0.
- Les nombres entiers naturels sont tous **positifs ou nuls**.
- Tous les entiers naturels **sont aussi des entiers relatifs**.

🔥 Vocabulaire et notations

- **Appartenance** : On dit que 5 **appartient** à \mathbb{N} , et on note $5 \in \mathbb{N}$. De même -2 **n'appartient pas** à \mathbb{N} , et on note $-12 \notin \mathbb{N}$.
- **Inclusion** : Tous les éléments de \mathbb{N} sont aussi des éléments de \mathbb{Z} . On dit alors que \mathbb{N} est un **sous-ensemble** de \mathbb{Z} et on note alors $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ (qui se lit \mathbb{N} est inclus dans \mathbb{Z}).

📚 Application : choix du bon symbole



3. Nombres décimaux

🔥 définition : Nombres décimaux

Un **nombre décimal** est un nombre pouvant s'écrire sous la forme d'une **fraction décimale**, c'est à dire sous la forme $\frac{a}{10^n}$ avec $a \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$.

L'ensemble des décimaux est noté \mathbb{D} .

📚 Application : Nombres décimaux et puissances de 10



📘 Remarques

- Les entiers relatifs sont des décimaux, car si $k \in \mathbb{Z}$, on peut aussi écrire $k = \frac{k}{1} = \frac{k}{10^0}$. On a donc la propriété $\mathbb{Z} \subset \mathbb{D}$.
- Un nombre décimal possède une **écriture décimale finie**.

4. Nombres rationnels

🔥 Définition : Nombres rationnels

Un **nombre rationnel** est un nombre pouvant s'écrire sous la forme $\frac{a}{b}$ avec $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{N}^*$ (c'est-à-dire \mathbb{N} privé de 0).

L'ensemble des nombres rationnels est noté \mathbb{Q} .

i Remarque

Un nombre décimal est par définition un nombre rationnel.

Par définition de \mathbb{D} et \mathbb{Q} , on a la propriété $\mathbb{D} \subset \mathbb{Q}$.

🔥 Propriété : Caractérisation des rationnels non décimaux

Tous les nombres rationnels ne possèdent pas d'écriture décimale finie. En particulier, $\frac{1}{3}$ n'est pas décimal.

🔗 Preuve**i Remarques**

- Les nombres rationnels non décimaux possèdent une **écriture décimale infinie périodique**, c'est-à-dire avec une série de chiffres qui se répètent à l'infini. Par exemple $\frac{1}{7} = 0,14285714285714\dots$ (on constate la répétition de la séquence **142857**).
- Réciproquement, si un nombre possède une écriture décimale infinie périodique, alors c'est un rationnel.

📋 Méthode : Déterminer une fraction égale à une écriture décimale infinie périodique

On considère le nombre a dont l'écriture décimale est infinie périodique $a = 2,71347134\dots$. Démontrons que ce nombre est rationnel.

✓ Solution**🔗 Application : Calculs avec les rationnels**

5. Nombres réels

🔥 Définition : Nombres réels

Un nombre réel est un nombre exprimant une longueur, ou l'opposé d'un nombre exprimant une longueur.

L'ensemble des nombres rationnels est noté \mathbb{R} .

i Remarques

- Un nombre réel est un **nombre dont le carré est positif ou nul**.
- Par définition, tous les nombres rationnels sont des réels. On a alors $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.
- Certains nombres réels ne sont pas rationnels. Par exemple π n'est pas rationnel, tout comme $\sqrt{2}$ (on le montrera en exercice). Ces nombres sont dits **irrationnels**.

 **Propriété : Ensembles de nombres**

Des remarques précédentes, on à la propriété :

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$


The diagram illustrates the nested nature of number sets. The innermost set is \mathbb{N} (Natural numbers), containing 7, 1, 35, 0, 2, 8. The next set is \mathbb{Z} (Integers), containing -1, -45, -14. The third set is \mathbb{D} (Decimals), containing 9/100, 1/2, 3/4, 0,7. The fourth set is \mathbb{Q} (Rational numbers), containing 1/3, 2/7, -5/13. The outermost set is \mathbb{R} (Real numbers), containing π and $\sqrt{5}$.

 **Propriété : Droite des réels**

Tout nombre réel est représenté par l'abscisse d'un point sur la droite numérique (appelée aussi **droite des réels**).



The number line shows the following points marked: $-\frac{8}{3}$, $-\sqrt{2}$, $-0,25$, $\frac{5}{7}$, $2,5$, and π .

 **Application : Représenter sur la droite des réels**

>