Modélisation de graphes en Python

1. Interface d'un graphe

Il existe de nombreuses manières d'**implémenter** un graphe, mais dans de nombreux cas l'**interface** recherchée est assez simple à concevoir. A ce titre l'utilisation d'une classe semble être judicieuse. Afin de définir l'interface choisie nous devons d'abord considérér les spécifications minimales de la création d'un graphe, orienté ou non, et éventuellement pondéré :

1. Obtenir un graphe vide par une méthode constructeur
2. Etre capable d'ajouter un noeud/sommet à un graphe existant.
3. Etre capable d'ajouter des arêtes/arcs à un graphe existant, avec *une éventuelle pondération*.
4. Obtenir la liste des voisins d'un sommet.

Une fois ces opérations élémentaires implémentées, nous pourrons rajouter des possibilités supplémentaires, comme par exemple

- obtenir l'ordre du graphe, sa taille ;
- obtenir donc le degré d'un sommet ;
- savoir si il existe un parcours eulérien ou un cycle eulérien dans ce graphe ;
- parcourir ce graphe en partant d'un sommet donné ;
- repérer les éventuels cycles du graphe ;
- appliquer un algorithme spécifique, comem celui de Dijkstra par exemple.

Pour commencer, nous allons donc définir une classe `Graph`, dont l'interface minimale sera la suivante (des ajustements seront possibles selon si le graphe est orienté ou non, pondéré ou non) :

Méthode	Arguments	Valeur de retour	Description
`__init__`	aucun ou ordre `n` du graphe	aucune	Crée un graphe vide, d'ordre `n` b si nécessaire
`add_vertice`	aucun ou `label` du sommet	aucune	Ajoute un sommet d'étiquette `label` si nécesaire
`add_edge`	`s` et `e`, `p` éventuellement	aucune	Ajoute un arc allant de `s` à `e`, avec la pondération `p` si nécessaire
`exist_edge`	`s` et `e`	booléen	Renvoie `True` si il existe un arc entre `s` et `e`
`get_neighbours`	`s`	itérable	renvoie un *itérable* contenant les voisins de `s`

2. Implémentation par une Matrice d'adjacence

Matrice d'adjacence

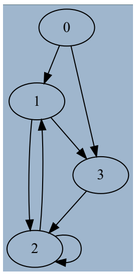
Une des possibilités pour représenter un graphe est d'utiliser ce qu'on appelle une **matrice d'adjacence**. Dans ce type de représentation, les sommets sont **ordonnés**, et considérés comme étiquetés par des entiers de 0 à $n-1$, où n est l'ordre du graphe.

Dans cette représentation, le coefficient $a_{i\ j}$ de la matrice vaut :

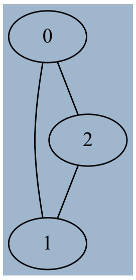
- 0 si il n'existe pas d'arc entre les sommets i et j ;
- 1 ou la pondération p si il existe un arc entre les sommets i et j.

Exemples

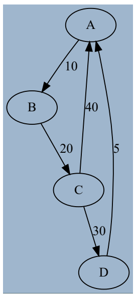
- la matrice d'adjacence $M=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ correspond au graphe suivant, avec les sommets dans l'ordre numérique



- la matrice d'adjacence $M=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ correspond au graphe suivant, avec les sommets dans l'ordre numérique

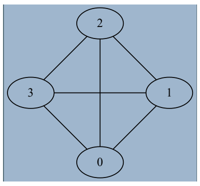


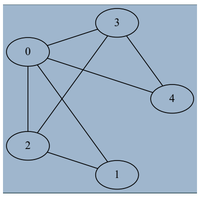
- la matrice d'adjacence $M=\begin{pmatrix} 0 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 20 & 0 \\ 40 & 0 & 0 & 30 \\ 5 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ correspond au graphe suivant, avec les sommets dans l'ordre *alphabétique*

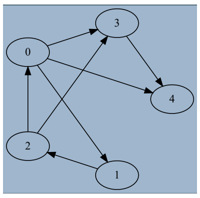


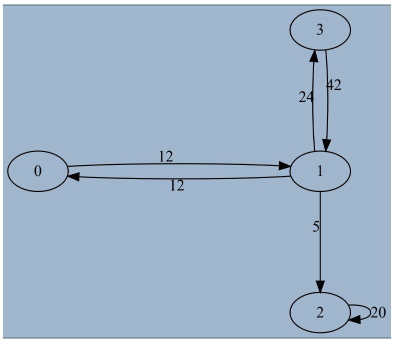
Associer Matrices d'adjacence et graphes

Enoncé

1. Déterminer la matrice d'adjacence associée à ce graphe 

2. Déterminer la matrice d'adjacence associée à ce graphe 

3. Déterminer la matrice d'adjacence associée à ce graphe 

4. Déterminer la matrice d'adjacence associée à ce graphe 

5. Tracer un graphe pouvant correspondre à la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ Est-ce un graphe orienté ou non-orienté ?
6. Tracer un graphe pouvant correspondre à la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Est-ce un graphe orienté ou non-orienté ?
7. Tracer un graphe pouvant correspondre à la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 10 & 20 & 30 \\ 100 & 200 & 300 \end{pmatrix}$ Est-ce un graphe orienté ou non-orienté ?
8. Quelle propriété semble posséder les matrices d'adjacence d'un graphe non-orienté ?

Implémentation en Python

Enoncé

Le code suivant permet d'implémenter en partie l'interface voulue d'un graphe avec une matrice d'adjacence :

```
class Graph :
    def __init__(self, n=0) :
        self.n = n
        self.adj = [[0]*n for _ in range(n)]

    def add_vertice(self) :
        self.n +=1
        for l in self.adj :
            l.append(0)
        self.adj.append([0]*(self.n))

    def add_edge(self, s, e, p=1) :
        self.adj[s][t] = p
```

1. Compléter la *méthode* `exist_edge` de la classe `Graph` pour qu'elle corresponde aux spécifications de l'interface.
2. Compléter la *méthode* `get_neighbours` de la classe `Graph` pour qu'elle corresponde aux spécifications de l'interface.
3. Ajouter une méthode `get_order` à la classe `Graph` pour qu'elle renvoie l'ordre du graphe.
4. Ajouter une méthode `get_degree` à la classe `Graph` pour qu'elle renvoie le degré d'un sommet passé en argument.
5. Ajouter une méthode `is_directed` à la classe `Graph` pour qu'elle renvoie `True` si le graphe est orienté et `False` sinon.
6. Ajouter une méthode `is_undirected_and_eulerian` qui renvoie :
    - `False` si le graphe est non-orienté et qu'il n'existe pas de parcours eulérien du graphe
    - `True` si le graphe est non-orienté et qu'il existe un cycle eulérien.
    - un tuple `(s,e)` donnant les sommlets de départ et d'arrivée d'un éventuel chemin eulérien.
7. Ajouter une méthode `delete_edge` à la classe `Graph` pour qu'elle supprime l'arc situé entre les sommets `s` et `e` passés en argument.
8. Ajouter une méthode DUNDERS `__repr__` afin qu'elle renvoie la chaîne de caractère correspondant à la matrice d'adjacence (et donc directement utilisable par l'instruction `print(G)`).

Limites du modèle

Si l'utilisation d'une matrice d'adjacence sous la forme présentée est très utile d'un point de vue mathématique (voir par exemple la propriété de l'itérée sur la page wikipedia), et très facile à mettre en oeuvre, elle possède néanmoins ceryaines limites :

- Elle utilise une place en mémoire proportionnelle à n^2. Pour un graphe de 1000 sommets, il faudra plus d'un million d'entiers pour stocker cette matrice d'adjacence, ce qui commence à être considérable;
- Pour connaître les voisins d'un sommet, il faut parcourir la totalité de la lign,e correspondant à ce sommet, ce qui peut rapidement être trop long .
- Les sommets sont limités à des entiers, ou à un ordre défini, et il est difficile d'intégrer de nouveau sommets qui ne respecteraient pas la convention fixée.

3. Implémentation par un dictionnaire

4. Exemple d'utilisation