Applications de la récursivité : Tris de tableaux

1. Rappels sur les algorithmes de tris vus en classe de première

Principe du tri par insertion

Le principe du tri par insertion est le suivant : au moment où on considère un élément du tableau à trier, les éléments qui le précèdent sont déjà triés, tandis que les éléments qui le suivent ne sont pas encore triés.

On peut voir sur l'animation suivante extraite de wikipedia :

6 5 3 1 8 7 2 4

La complexité du tri par insertion est $\mathbb{O}(n^2)$ dans le pire cas et en moyenne, et linéaire dans le meilleur cas (tableau presque trié). C'est donc un tri dont la vitesse d'exécution dépendra fortement de la situation initiale.

▼ Le code en Python

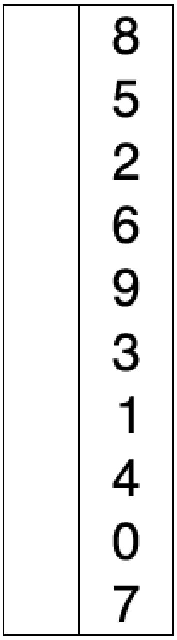
```python
def tri_insertion(L):
    N = len(L)
    for n in range(1,N):
        cle = L[n]
        j = n-1
        while j>=0 and L[j] > cle:
            L[j+1] = L[j] # decalage
            j = j-1
        L[j+1] = cle
```

Principe du tri par sélection

Sur un tableau de n éléments, le principe du tri par sélection est le suivant :

- rechercher le plus petit élément du tableau, et l'échanger avec l'élément d'indice 0 ;
- rechercher le second plus petit élément du tableau, et l'échanger avec l'élément d'indice 1 ;
- continuer de cette façon jusqu'à ce que le tableau soit entièrement trié.

On peut voir sur l'animation suivante extraite de wikipedia :



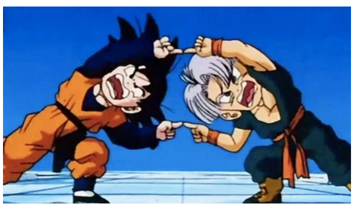
Cet algorithme de tri, simple à comprendre, est considéré comme mauvais car sa complexité en temps est en $\mathbb{O}(n^2)$, que ce soit dans le pire des cas ou bien le meilleur des cas (même pour un tableau déjà trié il faudra faire toutes les comparaisons).

▼ **Le code en Python**

```
def tri_selection(tab):
    for i in range(len(tab)):
      # Trouver le min
       min = i
       for j in range(i+1, len(tab)):
           if tab[min] > tab[j]:
               min = j

       tmp = tab[i]
       tab[i] = tab[min]
       tab[min] = tmp
    return tab
```

2. Le tri fusion

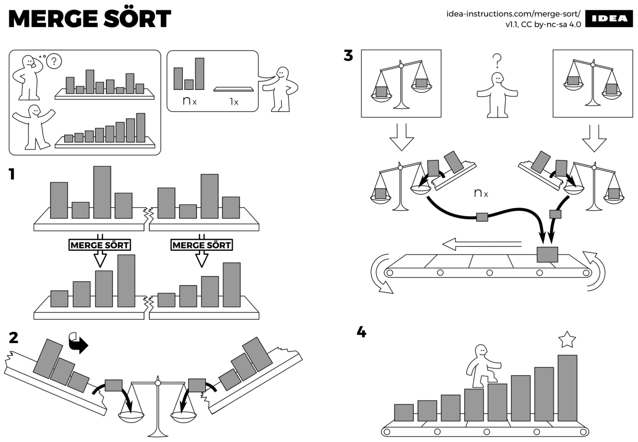


Principe du Tri Fusion (Merge Sort)

Le principe du **tri fusion**, est de séparer un tableau à trier en **deux sous-tableaux** qu'on triera récursivement (ou itérativemment mais ce ne sera pas le cas dans ce cours) de nouveau par tri fusion.

Une fois les sous-tableaux triés, il faudra **fusionner** ces deux sous-tableaux en une seule identité.

Cet algorithme est du type **diviser pour régner** (*Divide and Conquer*) : on sépare la tâche à priori difficile en deux tâches plus simples (ici, il s'agit de diminuer la taille des tableaux). Il a été inventé par **John Von Neumann en 1945**.



Fonction de fusion

Exercice

La principale difficulté dans cet algorithme est de créer une fonction fusionnant les deux tableaux triés.

1. Avant commencer, regardez la vidéo suivante :

2. De combien de variables compteurs avons nous besoins ?
3. Quel type de boucle allons nous utiliser ?
4. Que se passe-t-il dans la vidéo quand j atteint la valeur 3 ?
5. Rédiger en langage naturel l'algorithme fusionnant deux tableaux triés.
6. Implémenter une fonction `fusion(t1, t2)` qui prend en argument deux tableaux supposés triés (on ne vérifiera pas), et qui renvoie le tableau trié contenant tous les éléments des deux tableaux `t1` et `t2`. On pourra utiliser les tests suivants pour vérifier que la fonction est correcte :

▼ **Les tests**

```
>>> fusion([12,35,45],[4,42,63])
[4, 12, 35, 42, 45, 63]
>>> fusion([12,35], [57])
[12, 35, 57]
>>> fusion([12,35], [42,57])
[12, 35, 42, 57]
>>> fusion([12,35], [])
[12, 35]
>>> fusion([], [12,35])
[12, 35]
>>> fusion([42,57,67,75], [12,35])
[12, 35, 42, 57, 67, 75]
>>> fusion([], [])
[]
```

Solution

1. C'est beau, c'est fait avec manim.
2. En réalité il n'y a que deux compteurs : i et j. En effet k est en permanence égal à $i + j$.
3. On peut utiliser une boucle `Pour`, vu que le nombre d'itérations est connu au départ : il s'agit de la somme des longueurs des deux tableaux. Mais il est aussi tout à fait possible d'utiliser une boucle `Tant que`, puisque l'algorithme se poursuit tant qu'un des deux compteurs n'a pas atteint sa position finale.
4. Quand j atteint la position 3 (soit la longueur du deuxième tableau), il ne reste plus qu'à compléter avec les valeurs restantes du premier tableau.
5. Différentes versions :

Version `Pour` sans initialisation du tableau final

```
fonction fusion(t1, t2)
    tf <- tableau vide
    i <- 0
    j <- 0
    n1 <- longueur de t1
    n2 <- longueur de t2
    Pour k allant de 0 à n1+n2-1
        Si i<n1 et j<n2
```

Tri Fusion Récursif

Exercice

Une fois la fonction `fusion` codée, l'algorithme de tri par fusion est simple :

1. Regardez la vidéo suivante :

2. Quel est le cas de base ?
3. Quel est le cas récursif ?
4. Implémenter une fonction `triFusion(t)` qui prend en argument un tableau et renvoie une copie triée de ce tableau.

Solution

A venir !

Complexié en temps

Exercice

1. Copiez-collez le code ci-dessous permettant d'utiliser le décorateur `@timeit` :

```
import time

def timeit(method):

    def timed(*args, **kw):
        ts = time.time()
        result = method(*args, **kw)
        te = time.time()
        print(f" {method.__name__} ({args},{kw}) {te-ts}" )
        return result

    return timed
```

Décorateur `@timeit`

pour utiliser le décorateur, on le place dans la ligne précédant la définition de la fonction qu'on veut décorer. Par exemple :

```
@timeit
def tri_insertion(tab) :
    ...
```

Chaque fois que la fonction `tri_insertion` sera appelée, le décorateur sera appliqué et exécuterala fonction `timed`, qui calcule le temps d'exécution de la fonction décorée.

Il faudra être attentif à son utilisation **dans le cas des fonctions récursives !** (Je vous laisse constater par vous même le problème rencontré.)

1. Créer une fonction `genereTab(n)` qui crée un tableau de taille n d'entiers aléatoires compris entre 0 et n^2.
2. Créer à l'aide de toutes les fonctions précédentes une fonction `testeTemps(n)` qui compare les temps d'exécution des différents tris pour n valant 100, $1\ 000$, $10\ 000$. **Attention**, il faudra effectuer à chaque fois les tests sur le même tableau, et donc créer des copies du tableau original avant de le trier (on peut utiliser la fonction `deepcopy` du module `copy`)
3. Que peut-on en conclure quand à la complexité en temps du tri fusion ?

Solution

A venir !

Complexités du tri fusion

La version la plus simple du tri fusion sur les tableaux a une efficacité comparable au tri rapide, mais elle n'opère pas en place : une zone temporaire de données supplémentaire de taille égale à celle de l'entrée est nécessaire (des versions plus complexes peuvent être effectuées sur place mais sont moins rapides). La complexité en temps est en $\mathbb{O}(nlog(n))$ dans tous les cas, et la complexité en espace est en général en $\mathbb{O}(n)$.

3. Plus vite ! QuickSort ! (Hors programme)

Principe du QuickSort