C01-01: Ensembles de Nombres

La version pdf de ce cours est téléchargeable ici. (version 2021-2022)

1. Activité : Classer des nombres

- 1. Dans la liste ci-dessus, deux écritures sont interdites. Lesquelles et pourquoi?
- 2. Classer les nombres restants en cinq groupes, en justifiant vos choix.

i Différence entres propriétés et écritures

Un nombre peut être écrit de différentes manières, plus ou moins compliquées. Par exemple :

 $[2 = \footnote{10}{3} = 20 \times 10^{-1} = \footnote{10}{-1} = \foot$

Pour autant, ce qui nous intéresse en mathématiques c'est d'étudier les **propriétés** de ce nombre, qui elles sont indépendantes de l'écriture de ce nombre.

2. Nombres entiers naturels et relatifs

b Définitions

- L'ensemble des **entiers naturels**, noté \(\mathbb{N}\), est l'ensemble des nombres permettant de dénombrer une collection d'objets, de personnes, etc, c'est-à-dire la suite naturelle \(0~;~1~;~2~;~3~;~...\)
- L'ensemble des entiers relatifs, noté \(\mathbb{Z}\\), est l'ensemble des entiers naturels et leurs opposés, c'est-à-dire la suite \(...~;~-3~;~-2~;~-1~;~0~;~1~;~2~;~3~;~...\)

1 Info

- L'ensemble $\(\mathbb{N}\)$ possède un plus petit élément, c'est $\(0\)$.
- Les nombres entiers naturels sont tous positifs ou nuls.
- Tous les entiers naturels sont aussi des entiers relatifs.

6 Vocabulaire et notations

- Appartenance: On dit que \(5\) appartient à \(\mathbb{N}\), et on note \(5 \in \mathbb{N}\). De même \(-2\) n'appartient pas à \(\mathbb{N}\), et on note \(-12 \notin \mathbb{N}\).
- Inclusion: Tous les éléments de \(\mathbb{N}\) sont aussi des éléments de \(\mathbb{Z}\). On dit alors que \(\mathbb{N}\) est un sous-ensemble de \(\mathbb{Z}\) et on note alors \(\mathbb{N}\) subset \mathbb{Z}\) (qui se lit \(\mathbb{N}\) est inclus dans \(\mathbb{Z}\)).



3. Nombres décimaux

définition : Nombres décimaux

Un nombre décimal est un nombre pouvant s'écrire sous la forme d'une fraction décimale, c'est à dire sous la forme \$\$ \dfrac{a} $\{10^n\}$ \$\$ avec \(a\in \mathbb{Z}\) et \(n\in \mathbb{N}\).

L'ensemble des décimaux est noté \(\mathbb{D}\\).

```
Application : Nombres décimaux et puissances de 10
  Exercice
Pour chacun des nombres suivants, déterminer si possible une écriture de la forme \(\dfrac{k}{10^n}\).
\(4,37\)
\(0,002\)
\(-12\)
\(\dfrac{1}{3}\)
\(\dfrac{2}{5}\)
\(\sqrt{0,16}\)
\(10^3\)
\(10^{-5}\)
\(-10^5\)
\(\dfrac{3.10^5}{10^7}\)
\(\dfrac{10^7}{3.10^5}\)
  Solution
Pour chacun des nombres suivants, déterminer si possible une écriture de la forme \(\dfrac{k}{10^n}\).
(4,37 = \frac{437}{100} = \frac{437}{10^{2}})
(0,002 = \frac{2}{1\sim000} = \frac{2}{10^{3}})
(-12 = \frac{-12}{1} = \frac{-12}{10^0}) ( car (a^0 = 1) pour tout nombre (a \neq 0)).
\(\dfrac{1}{3} \notin \mathbb{D}\) car \(\dfrac{1}{3} \simeq 0,333...\) (La démonstration réelle sera donnée plus tard dans l'année)
\(\dfrac{2}{5} = \dfrac{4}{10} = \dfrac{4}{10^1}\)
(\sqrt{0,16} = 0,4 = \frac{4}{10} = \frac{4}{10^1})
(10^3 = \frac{1\sim00}{1} = \frac{1\sim00}{10^{0}})
(10^{-5} = \frac{1}{10^5}) (par définition des exposants négatifs (a^{-n} = \frac{1}{a^n}) pour tout (n \in \mathbb{Z}) si (a \neq 0)
(-10^5 = -100 \sim 000 = \frac{-100 \sim 000}{1} = \frac{-100 \sim 000}{10^{0}})
\(3.10^5)_{10^7} = \frac{3}{10^2}\) par division des puissances (\(\dfrac\{a^m}_{a^n} = a^{m-n}\) pour tout \(m,n \in \Z\))
```

Remarques

- Les entiers relatifs sont des décimaux, car si \(k \in \mathbb{Z}\), on peut aussi écrire \(k=\dfrac{k}{1}=\dfrac{k}{10^0}\). On a donc la propriété \(\mathbb{Z}\) \subset \mathbb{D}\).
- Un nombre décimal possède une écriture décimale finie.

4. Nombres rationnels



Un nombre rationnel est un nombre pouvant s'écrire sous la forme $\(\dfrac{a}{b}\)$ avec $\(a\in \mathbb{Z}\)$ et $\(b\in \mathbb{N}^{*}\)$ (c'est-à-dire $\(\mathbb{N}\)$ privé de $\(0\)$).

L'ensemble des nombres rationnels est noté \(\mathbb{Q}\\).

Remarque

Un nombre décimal est par définition un nombre rationnel.

Par définition de (\mathbb{Q}) et (\mathbb{Q}) , on a la propriété (\mathbb{Q}) subset \mathbb{Q}

b Propriété : Caractérisation des rationnels non décimaux

Tous les nombres rationnels ne possèdent pas d'écriture décimale finie. En particulier, \(\dfrac{1}{3}\) n'est pas décimal.

Preuve

La démonstration de cette propriété sera faite plus tard dans l'année, dans le chapitre arithmétique.

Remarques

- Les nombres rationnels non décimaux possèdent une écriture décimale infinie périodique, c'est-à-dire avec une série de chiffres qui se répètent à l'infini. Par exemple \(\\dfrac{1}{7} = 0,14285714285714...\) (on constate la répétition de la séquence 142857}).
- Réciproquement, si un nombre possède une écriture décimale infinie périodique, alors c'est un rationnel.

E Méthode : Déterminer une fraction égale à une écriture décimale infinie périodique

On considère le nombre \(a\) dont l'écriture décimale est infinie périodique \(a = 2,71347134...\). Démontrons que ce nombre est rationnel.



On constate que la partie répétitive des chiffres de \(a\) est \(7134\), donc de taille 4.

Donc $(10^4 \times a = 10 \sim 000 \times a = 27134,71347134...)$

D'où \(10~000\times a - a = 27134,71347134... - 2,71347134... = 27134 - 2 = 27~132\).

Or $(10\sim000\times a - a = 9\sim999\times a)$.

D'après les deux lignes précédentes, on a alors $(9\sim99)\times a = 27132$) soit $(a = \frac{27\sim132}{9\sim99} = \frac{9\sim94}{3\sim333}$).

Donc \(a\) est bien un nombre rationnel puisqu'il s'écrit sous la forme d'une fraction.

09/01/2023 Application : Calculs avec les rationnels **Exercice** Dans chacun des cas suivants, calculer à la main chacune des expressions suivantes : $\A = \left(5\right)^{-} \cdot \left(3\right)^{1}$ $\B = -\dfrac \{4\}\{3\} + \dfrac\{7\}\{8\}\)$ $(C = \frac{3}{8} - \frac{5}{12})$ $\D = \frac{-6}{7} \times \frac{8}{9}$ $\E = \frac{3}{2} \times \left(-\frac{7}{3}\right)$ $\F = \frac{48}{35} \times \frac{25}{64}$ $G = \frac{4}{7} \left(G = \frac{4}{7} \right)$ $\H = \left(-\infty \left(3\right) \left(4\right) -\infty \right) \$ $(I = \frac{-7}{\sqrt{5}}{3})$ $\J = \frac{7}{5} \sim {3}\$

Solution

 $(A = \frac{5}{7} - \frac{5}{7} - \frac{5}{77} - \frac{5}{77} - \frac{1}{77} = \frac{5}{77} - \frac{1}{77} = \frac{5}{77} - \frac{1}{77} = \frac{5}{77} = \frac{5}{7$ \dfrac{34}{77}\)

 $\B = -\frac{4}{3} + \frac{4}{3} + \frac{4}{3} + \frac{4}{4} = -\frac{4}{4} = 8}{3 \times 8} + \frac{4}{3} + \frac{3}{4} + \frac{4}{4} = -\frac{4}{4} = -\frac{4}{4}$ \dfrac {11}{24}\)

\dfrac{1}{24}\)

 $\label{eq:continuous} $$ D = \frac{-6}{7} \times 3 \times 3 = -\frac{16}{7} \times 3 =$ {21}\) N'oubliez pas de simplifier!

 $\label{eq:lem:condition} $$ (E = \frac{3}{2} \times \left(\frac{7}{3}\right) = -\left(\frac{3 \times 7}{2 \times 7}\right) = -\left(\frac{7}{2}\right) =$

 $\{F = \frac{48}{35} \times \frac{48}{35} \times$ $\times 2 \times 4 \times 8 = \frac{15}{28}$

 $\G = \frac{4}{7} \times \frac{4}{7} \cdot \frac{4}{7} \cdot$ $\times 2 \times 4 = \frac{3}{2}$

 $\H = \frac{3}{4}\sim \frac{3}{4}\sim \frac{18}{20} = \frac{18}{20} = \frac{3}{4}\cdots \frac{18}{20} = \frac{20}{18} = \frac{3}{18}$ 5{ 4 \times 3 \times 6} = \dfrac{5}{6}\).

 $(I = \frac{5}{3}) = 7 \cdot \frac{5}{3} = 7 \cdot \frac{5}{3} = 7 \cdot \frac{3}{5} = \frac{21}{5}$

5. Nombres réels



Définition: Nombres réels

Un {==nombre réel est un nombre exprimant une longueur, ou l'opposé d'un nombre exprimant une longueur.

L'ensemble des nombres rationnels est noté \(\mathbb{R}\\).

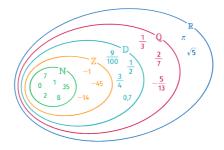
Remarques

- Un nombre réel est un nombre dont le carré est positif ou nul .
- Par définition, tous les nombres rationnels sont des réels. On a alors \(\mathbb{Q}\\subset \mathbb{R}\\).
- Certains nombres réels ne sont pas rationnels. Par exemple \(\pi\) n'est pas rationnel, tout comme \(\sqrt{2}\) (on le montrera en exercice). Ces nombres sont dits irrationnels.

6 Propriété : Ensembles de nombres

Des remarques précédentes, on à la propriété :

 $\M \M \simeq \mathbb{Q} \simeq \mathbb{Q} \$



6 Propriété : Droite des réels

Tout nombre réel est représenté par l'abscisse d'un point sur la droite numérique (appelée aussi droite des réels).

Application : Représenter sur la droite des réels

1. Déterminer l'abscisse de chacun des points de la droite ci-dessous :



1. Représenter la droite des réels (unité : 5) et y placer le plus précisément possible les nombres suivants :

\[3 ~;~ -0,75 ~;~ \dfrac{5}{4} ~;~\dfrac{-2}{5} ~;~ \dfrac{7}{3} ~;~ \sqrt{2} \]