Notion de fonctions récursive

1. Activité d'introduction : de l'itératif au récursif

Un peu de maths : les suites arithmétiques

On rappelle qu'une suite (u_n), de premier terme u_0 est dite **arithmétique** si et seulement si

$$u_{n+1} = u_n + r$$

où $r \in \mathbb{R}$.

La définition donnée ci-dessus est une définition dite par **récurrence**, c'est-à-dire qu'on définit le terme de rang $n+1$ à partir du terme de rang n.

Cette suite peut-être définie par une **formule explicite** :

$$u_n = u_0 + n \times r$$

Exercice

Enoncé

Construire une fonction `maSuiteArithmetique(n)` qui calcule le n-ième terme de la suite arithmétique de premier terme `3` et de raison `7`. Quelle formule avez-vous utilisée ?

Une solution

Au vu de l'énoncé, je prends le pari que la majorité d'entre vous avez utilisé la **formule explicite** avec un code de la forme suivante :

```python
def maSuiteArithmetique(n) :
    return 3 + n*7
```

C'est évidemment la solution la plus simple. Dans ce cas, tout comme pour les *suites géométrique*, il est inutile de compliquer le code, nous obtenons directement la solution par un simple calcul algébrique.

Encore des maths : les suites arithmético-géométriques

Une suite (u_n), de premier terme u_0 est dite **arithmético-géométrique** si et seulement si

$$u_{n+1} = a \times u_n + b$$

où $a, b \in \mathbb{R}$.

Encore une fois, la définition donnée ci-dessus est une définition dite par **récurrence**, c'est-à-dire qu'on définit le terme de rang $n+1$ à partir du terme de rang n.

Exercice

Enoncé

Construire une fonction `maSuiteAG(n)` qui calcule le n-ième terme de la suite arithmético-géométriqueq de premier terme `7` et définie par :

$$u_{n+1} = -2 \times u_n + 5$$

Quelle formule avez-vous utilisée ?

Une solution probable

Ici nous n'avons qu'une formule - sauf pour les petits malins qui seront allé voir sur wikipedia - donc on doit utiliser un processus de répétition des opérations à partir de `7`.

On peut bien sûr appliquer une boucle `pour` dans notre fonction :

```
def maSuiteAG(n) :
    u = 7
    for i in range(1,n+1) : # j'utilise ce range plutôt que range(n) car le i utilisé correspond au terme du rang calculé.
        u = -2*u + 5
    return u
```

Deux remarques :

- dans ce code, je ne vérifie pas que $n \in \mathbb{N}$, et il faudrait... ;
- dans le cas où $n = 0$, la boucle `for` n'est pas effectuée.

Une version plus correcte serait donc celle-ci :

```
def maSuiteAG(n) :
    if not(isinstance(n, int)) or n<0 :
        raise ValueError("n must be a non negativ integer")
    u = 7
    for i in range(1,n+1) : # j'utilise ce range plutôt que range(n) car le i utilisé correspond au terme du rang calculé.
        u = -2*u + 5
    return u
```

Une telle fonction est dite **itérative**, car elle utilise une boucle de répétitions pour parvenir au résultat souhaité.

C'est vraiment dommage, dans le premier exercice, on utilise simplement **la formule explicite**, alors que dans le deuxième cas, on est obligé de réfléchir à l'algorithme. Ce serait si simple de pouvoir utiliser *directement* la **formule récursive**, comme dans le code ci-dessous :

```python
def maSuiteAGR(n) :
    return -2*maSuiteAGR(n-1) + 5
```

Ca vaudrait peut-être le coup de tester, en prenant $n = 3$ par exemple...

Késako ?

2. Principe de récursivité

Fonction récursive

Une fonction est dite **récursive** quand elle s'appelle elle-même, une ou plusieurs fois.

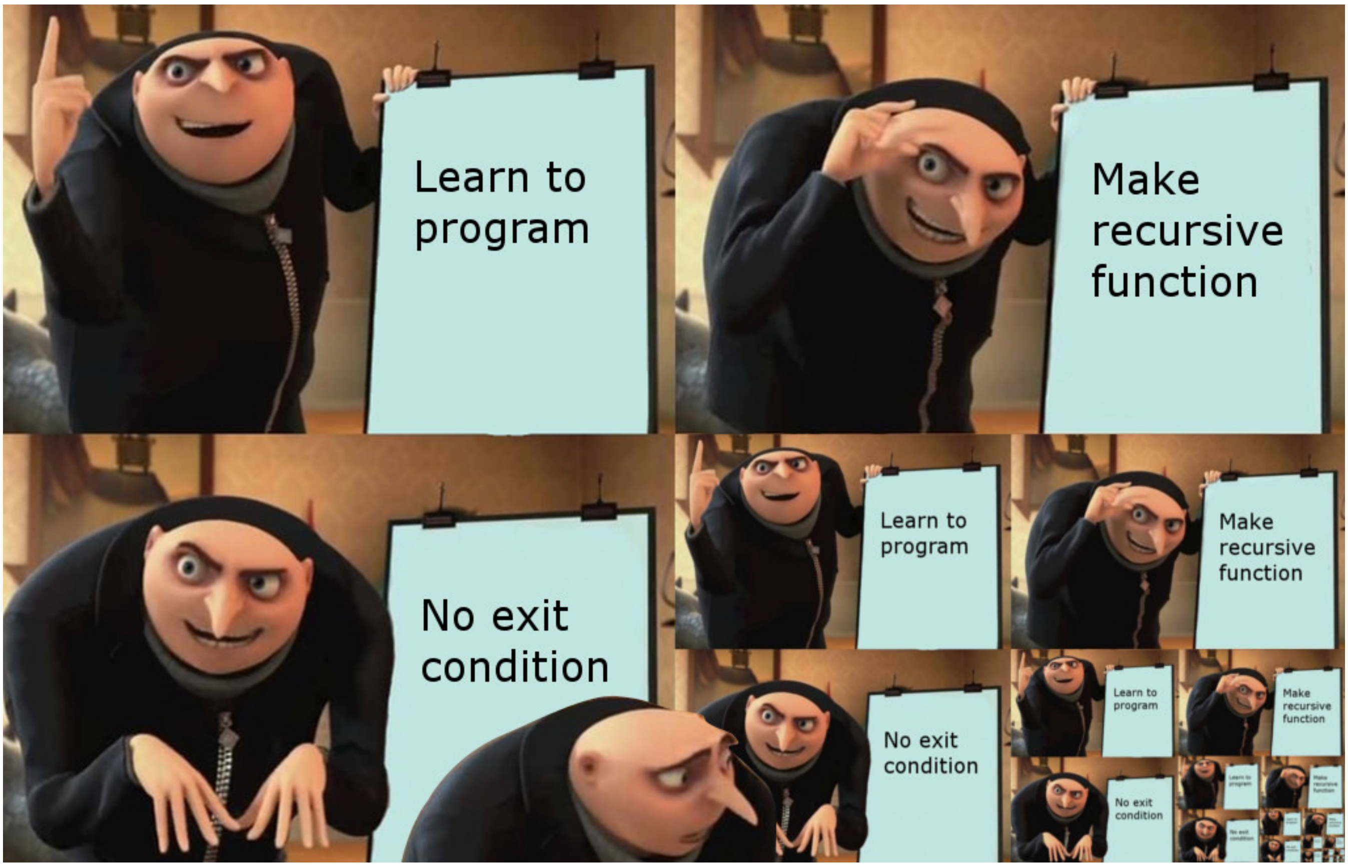
Des problèmes

Décomposons l'instruction l'appel à `maSuiteAGR(3)` :

- `maSuiteAGR(3)` doit calculer `-2*maSuiteAGR(2) +5`, et donc doit calculer :
  - `maSuiteAGR(2)`, qui doit calculer `-2*maSuiteAGR(1) +5`, et donc doit calculer :
    - `maSuiteAGR(1)`, qui doit calculer `-2*maSuiteAGR(0) +5`, et donc doit calculer :
      - `maSuiteAGR(0)`, qui doit calculer `-2*maSuiteAGR(-1) +5`, et donc doit calculer :
        - `maSuiteAGR(-1)`, qui doit calculer `-2*maSuiteAGR(-2) +5`, et donc doit calculer :
          - ...

"HELP ! Mais ça s'arrête quand !" me direz-vous !

Et bien jamais, en théorie, car nous n'avons pas **précisé de condition d'arrêt**.



Mais en réalité cette instruction s'arrêtera quand python aura levé une erreur de type `RecursionError`, qui signifie qu'une limite aura été atteinte (nous en parlerons plus tard pour lever toute ambiguïté).

Supprimer le problème : le cas d'arrêt

Pour supprimer le problème précédent, revenons aux maths : dans une définition par récurrence de suite, on signale toujours la valeur du premier terme (qui peut être u_0, ou u_1, ou même u_{42} selon le problème et la définition de l'indice). Or dans notre fonction `maSuiteAGR`, jamais nous ne précisons ce cas, c'est-à-dire que quand $n = 0$, alors la suite vaut 7. Rajoutons-donc cette condition dans la fonction :

```python
def maSuiteAGR(n) :
    if n== 0 :
        return 7
    else :
        return -2* maSuiteAGR(n-1) + 5
```

Et testons de nouveau `maSuiteAGR(3)` :

- `maSuiteAGR(3)` doit calculer `-2*maSuiteAGR(2) +5`, et donc doit calculer :
    - `maSuiteAGR(2)`, qui doit calculer `-2*maSuiteAGR(1) +5`, et donc doit calculer :
        - `maSuiteAGR(1)`, qui doit calculer `-2*maSuiteAGR(0) +5`, et donc doit calculer :
            - `maSuiteAGR(0)`, qui **maintenant renvoie 7** !
        - donc `maSuiteAGR(1)` renvoie `-2*7+5` soit `-9` ;
    - donc `maSuiteAGR(2)` renvoie `-2*(-9)+5` soit `23` ;
- donc `maSuiteAGR(3)` renvoie `-2*23+5` soit `-41`.

Non seulement la fonction s'arrête, mais en plus elle renvoie la bonne valeur, c'est-à-dire $u_3 = -41$.

Récapitulons

Pour utiliser une **fonction récursive** correctement, il faudra distinguer :

- le ou les **cas d'arrêts** (ou **cas de base**), c'est-à-dire des cas particuliers pour lesquels la valeur (ou l'objet) renvoyé par la fonction est connu ;
- le **cas récursif**, pour lequel la fonction s'appelle elle-même, une ou plusieurs fois.

Exemple commenté

La somme des n premiers entiers est la somme :

$$0 + 1 + 2 + 3 + ... + n$$

Comment faire pour construire une fonction récursive `sommeR(n)` qui effectue la somme des n premiers entiers, avec n passé en argument.

- Quel est le **cas récursif** ?
  On a $0 + 1 + 2 + 3 + ... + n = (0 + 1 + 2 + 3 + ... + (n-1)) + n$,
  donc le cas récursif est `sommeR(n) = sommeR(n-1) + n`
- Quel est le cas de base ?
  Il y a plusieurs possibilités, soit en partant de l'indice 0 car `sommeR(0)=0`, soit en partant de l'indice 1, car `sommeR(1) = 1`.

Une implémentation récursive possible est alors :

```
def sommeR(n) :
    if n== 0 :
        return 0
    else :
        return sommeR(n-1) + n
```

3. Applications directes

Exercice : factorielle

Enoncé

On rappelle que la factorielle d'un entier naturel n est donné par :

$$\begin{cases} n! & = & n \times (n-1) \times \ldots \times 3 \times 2 \times 1 \\ 1! & = & 1 \\ 0! & = & 1 \end{cases}$$

1. Ecrire une fonction **itérative** `factorielle(n)` qui renvoie la factorielle d'un entier naturel n donné, et lève une `ValueError` si n n'est pas entier ou est négatif.
2. Ecrire une fonction **récursive** `factorielleR(n)` qui renvoie la factorielle d'un entier naturel n donné, et lève une `ValueError` si n n'est pas entier ou est négatif.

Solution Itérative

```python
def factorielle(n) :
    if not(isinstance(n, int)) or n<0 :
        raise valueError("n must be a positiv integer")
    produit = 1
    for i in range(1,n+1) :# On peut effectivement partir de 2, et gagner un tour de boucle.
        produit =produit*i
    return produit
```

Solution récursive

```python
def factorielleR(n) :
    if not(isinstance(n, int)) or n<0 :
        raise valueError("n must be a positiv integer")
    if n==0 or n==1 :
        return 1
    else :
        return factorielleR(n-1)*n
```

Exercice : étoiles

Enoncé

1. Implémenter une fonction **itérative** `etoile(n)` qui écrit dans le Shell Python un triangle formé de caractères `*` tels que dans l'exemple suivant :

```
>>> etoileR(5)
*
**
***
****
*****
```

2. Implémenter une fonction **récursive** `etoileR(n)` qui effectue le même travail.

Solution Itérative

```python
def etoile(n) :
    if not(isinstance(n, int)) or n<=0 :
        raise valueError("n must be a positiv integer")
    for i in range(1, n+1) :
        print("*"*i)
```

Solution récursive

```python
def etoileR(n) :
    if not(isinstance(n, int)) or n<=0 :
        raise valueError("n must be a non null positiv integer")
    if n == 1 :
        print("*")
    else :
        etoileR(n-1)
        print("*"*n)
```

Coefficients binomiaux et triangle de Pascal

1. Soient a et b deux réels quelconques.

   Développez les expressions suivantes :

   a. $A = (a+b)^0$
   b. $B = (a+b)^1$
   c. $C = (a+b)^2$
   d. $D = (a+b)^3$
   e. $E = (a+b)^4$

   Solution

2. Complétez deux lignes supplémentaires du tableau suivant, nommé **Triangle de Pascal**:

$p =>$	0	1	2	3	4	5
$n=0$	1					
$n=1$	1	1				
$n=2$	1	2	1			
$n=3$	1	3	3	1		
$n=4$	1	4	6	4	1	
$n=5$	1	5	10	10	5	1

   Solution

3. On appelle coefficient binomial de rang p et de degré n le nombre du **Triangle de Pascal** correspondant à la n-ième ligne et à la p_ième colonne. Ce nombre est noté $\binom{n}{p}$.

   Comment exprimer récursivement ce coefficient ?

   Solution

4. Implémenter une fonction `binomeR(n, p)` qui renvoie la valeur du coefficient binomial $\binom{n}{p}$ du triangle de Pascal.

   Solution

5. *Facultatif :* Implémenter une fonction `developpe(n)` qui renvoie la chaîne de caractères correspondant au développement de $(a+b)^n$.

   Solution