Notion de fonctions récursive

1. Activité d'introduction : de l'itératif au récursif

E Un peu de maths : les suites arithmétiques

On rappelle qu'une suite (u_n) , de premier terme u_0 est dite **arithmétique** si et seulement si

$$u_{n+1} = u_n + r$$

où $r\in\mathbb{R}$.

La définition donnée ci-dessus est une définition dite par $\overline{\text{récurrence}}$, c'est-à-dire qu'on définit le terme de rang n+1 à partir du terme de rang n.



Cette suite peut-être définie par une formule explicite :

$$u_n = u_0 + n \times r$$

Exercice

Enoncé

Construire une fonction suiteArithmetique(n) qui calcule le n-ième terme de la suite arithmétique de premier terme 3 et de raison 7. Quelle formule avez-vous utilisée?

Une solution

Au vu de l'énoncé, je prends le pari que la majorité d'entre vous avez utilisé la formule explicite avec un code de la forme suivante :

```
def maSuiteArithmetique(n) :
    return 3 + n*7
```

C'est évidemment la solution la plus simple. Dans ce cas, tout comme pour les *suites géométrique*, il est inutile de compliquer le code, nous obtenons directement la solution par un simple calcul algébrique.

Encore des maths : les suites arithmético-géométriques

Une suite (u_n) , de premier terme u_0 est dite arithmético-géométrique si et seulement si

$$u_{n+1} = a \times u_n + b$$

où $a,b\in\mathbb{R}$.

Encore une fois, la définition donnée ci-dessus est une définition dite par récurrence, c'est-à-dire qu'on définit le terme de rang n+1 à partir du terme de rang n.



Enoncé

Construire une fonction maSuiteAG(n) qui calcule le n-ième terme de la suite arithmético-géométrique de premier terme 7 et définie par :

$$u_{n+1} = -2 \times u_n + 5$$

Quelle formule avez-vous utilisée ?

Une solution probable

lci nous n'avons qu'une formule - sauf pour les petits malins qui seront allé voir sur wikipedia - donc on doit utiliser un processus de répétition des opérations à partir de 7.

On peut bien sûr appliquer une boucle pour dans notre fonction :

```
def maSuiteAG(n) : u = 7 for i in range(1,n+1) : # j'utilise ce range plutôt que range(n) car le i utilisé correspond au terme du rang calculé. u = -2*u + 5 return u
```

Deux remarques:

- dans ce code, je ne vérifie pas que $n \in \mathbb{N}$, et il faudrait... ;
- dans le cas où n=0, la boucle for n'est pas effectuée.

Une telle fonction est dite itérative, car elle utilise une boucle de répétitions pour parvenir au résultat souhaité.

C'est vraiment dommage, dans le premier exercice, on utilise simplement la formule explicite, alors que dans le deuxième cas, on est obligé de réfléchir à l'algorithme. Ce serait si simple de pouvoir utiliser directement la formule récursive, comme dans le code cidessous :

```
def maSuiteAGR(n) :
    return -2*maSuiteAGR(n-1) + 5
```

Ca vaudrait peut-être le coup de tester, en prenant n=3 par exemple...

ĕ ▼ Késako ?

Quand on teste la fonction ${\tt maSuiteAGR(3)}$, python ... calcule... puis nous renvoie une erreur :

RecursionError: maximum recursion depth exceeded

Le mot important dans la phrase précédente, c'est que python CALCULE! Donc il doit a minima comprendre la fonction maSuiteAGR!

2. Principe de récursivité

Fonction récursive

Une fonction est dite récursive quand elle s'appelle elle-même, une ou plusieurs fois.

Des problèmes

Décomposons l'instruction l'appel à maSuiteAGR(3):

- maSuiteAGR(3) doit calculer -2*maSuiteAGR(2) +5, et donc doit calculer:
 - maSuiteAGR(2), qui doit calculer -2*maSuiteAGR(1) +5, et donc doit calculer:
 - maSuiteAGR(1), qui doit calculer -2*maSuiteAGR(0) +5, et donc doit calculer:
 - maSuiteAGR(0), qui doit calculer -2*maSuiteAGR(-1) +5, et donc doit calculer:
 - maSuiteAGR(-1), qui doit calculer -2*maSuiteAGR(-2) +5, et donc doit calculer:

• ..

"HELP! Mais ça s'arrête quand!" me direz-vous!

Et bien jamais, en théorie.

Mais en réalité cette instruction s'arrêtera quand python aura levé une erreur de type RecursionError, qui signifie qu'une limite aura été atteinte (nous en parlerons plus tard pour lever toute ambiguité).

Supprimer le problème : le cas d'arrêt

Pour supprimer le problème précédent, revenons aux maths : dans une définition par récurrence de suite, on signale toujours la valeur du premier terme (qui peut être u_0 , ou u_1 , ou même u_{42} selon le problème et la définition de l'indice). Or dans notre fonction maSuiteAGR, jamais nous ne précisons ce cas, c'est-à-dire que quand n=0, alors la suite vaut 7. Rajoutons-donc cette condition dans la fonction :

```
def maSuiteAGR(n) :
    if n== 0 :
        return 7
    else :
        return -2* maSuiteAGR(n-1) + 5
```

Et testons de nouveau maSuiteAGR(3) :

- maSuiteAGR(3) doit calculer -2*maSuiteAGR(2) +5, et donc doit calculer:
 - maSuiteAGR(2), qui doit calculer -2*maSuiteAGR(1) +5, et donc doit calculer:
 - maSuiteAGR(1), qui doit calculer -2*maSuiteAGR(0) +5, et donc doit calculer:
 - maSuiteAGR(0), qui maintenant renvoie 7!
 - donc maSuiteAGR(1) renvoie -2*7+5 soit -9;
 - donc maSuiteAGR(2) renvoie -2*(-9)+5 soit 23;
- donc maSuiteAGR(3) renvoie -2*23+5 soit -41.

Non seulement la fonction s'arrête, mais en plus elle renvoie la bonne valeur, c'est-à-dire $u_3=-41$.

Récapitulons

Pour utiliser une **fonction récursive** correctement, il faudra distinguer :

- le ou les cas d'arrêts (ou cas de base), c'est-à-dire des cas particuliers pour lesquels la valeur (ou l'objet) renvoyé par la fonction est connu;
- le cas récursif, pour lequel la fonction s'appelle elle-même, une ou plusieurs fois.

Exemple commenté

La somme des \boldsymbol{n} premiers entiers est la somme :

$$0+1+2+3+...+n$$

Comment faire pour construire une fonction récursive sommeR(n) qui effectue la somme des n premiers entiers, avec n passé en argument.

• Quel est le cas récursif ? On a $0+1+2+3+\ldots+n=(0+1+2+3+\ldots+(n-1))+n$,

donc le cas récursif est sommeR(n) = sommeR(n-1) + n

Quel est le cas de base?
 Il y a plusieurs possibilités, soit en partant de l'indice 0 car sommeR(0)=0, soit en partant de l'indice 1, car sommeR(1) = 1.

Une implémentation récursive possible est alors :

```
def sommeR(n) :
    if n== 0 :
        return 0
    else :
        return sommeR(n-1) + n
```

3. Applications directes



Exercice : factorielle

Enoncé

On rappelle que la factorielle d'un entier naturel n est donné par :

$$\begin{cases} n! &= n \times (n-1) \times \ldots \times 3 \times 2 \times 1 \\ 1! &= 1 \\ 0! &= 1 \end{cases}$$

- 1. Ecrire une fonction itérative factorielle(n) qui renvoie la factorielle d'un entier naturel n donné, et lève une ValueError si n n'est pas entier ou est négatif.
- 2. Ecrire une fonction **récursive** factorielleR(n) qui renvoie la factorielle d'un entier naturel n donné, et lève une ValueError si n n'est pas entier ou est négatif.

Solution Itérative

```
def factorielle(n) :
       if not(isinstance(n, int)) or n<0 :</pre>
2
3
           raise valueError("n must be a positiv integer")
        for i in range(1,n+1):# On peut effectivemment partir de 2, et gagner un tour de boucle.
5
           produit =produit*i
6
        return produit
```

Solution récursive

```
def factorielleR(n) :
1
2
       if not(isinstance(n, int)) or n<0 :</pre>
            raise valueError("n must be a positiv integer")
3
        if n==0 or n==1:
4
5
           return 1
       else :
6
            return factorielleR(n-1)*n
```

? Exercice : étoiles

Enoncé

1. Implémenter une fonction **itérative** etoile(n) qui écrit dans le Shell Python un triangle formé de caractères * tels que dans l'exemple suivant :

```
>>> etoileR(5)
*
**
***
***
****
```

 $2. \ Implémenter une fonction \textbf{récursive} \ \ \texttt{etoileR(n)} \ \ \textbf{qui effectue le même travail}.$

Solution Itérative

```
def etoile(n) :
    if not(isinstance(n, int)) or n<0 :
        raise valueError("n must be a positiv integer")
for i in range(1, n+1) :
        print("*"*i)</pre>
```

Solution récursive

```
def etoileR(n) :
    if not(isinstance(n, int)) or n<=0 :
        raise valueError("n must be a non null positiv integer")
    if n == 1 :
        print("*")
    else :
        etoileR(n-1)
        print("*"*n)</pre>
```

Coefficients binomiaux et triangle de Pascal

1. Soient a et b deux réels quelconques.

Développez les expressions suivantes :

a.
$$A=(a+b)^0$$

b.
$$B = (a + b)^1$$

c.
$$C = (a + b)^2$$

d.
$$D = (a+b)^3$$

e.
$$E = (a + b)^4$$



A venir

2. Complétez deux lignes supplémentaires du tableau suivant, nommé Triangle de Pascal:

p =>	0	1	2	3	4	5
n = 0	1					
n = 1	1	1				
n = 2	1	2	1			
n = 3	1	3	3	1		
n=4	1	4	6	4	1	
n = 5	1	5	10	10	5	1

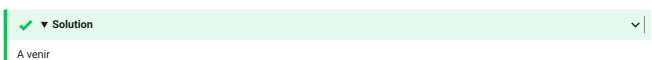


Pour construire un nombre, il suffit d'utiliser la ligne précédente, en ajoutant le nombre situé juste au dessus de lui et celui situé à la gauche de ce dernier.

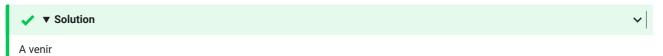
p =>	0	1	2	3	4	5	6	7
n = 0	1							
n = 1	1	1						
n=2	1	2	1					
n = 3	1	3	3	1				
n=4	1	4	6	4	1			
n=5	1	5	10	10	5	1		
n=6	1	6	15	20	15	6	1	
n = 7	1	7	21	35	35	21	7	1

3. On appelle coefficient binomial de rang p et de degré n le nombre du **Triangle de Pascal** correspondant à la n-ième ligne et à la p_ième colonne. Ce nombre est noté $\binom{n}{p}$.

Comment exprimer récursivemment ce coefficient ?



4. Implémenter une fonction binomeR(n, p) qui renvoie la valeur du coefficient binomial $\binom{n}{p}$ du triangle de Pascal.



5. *Facultatif: * Implémenter une fonction developpe(n) qui renvoie la chaîne de caractères correspondant au développement $de(a+b)^n$.

