Algorithmes Gloutons

D'après pixees.fr

1. Problèmes d'optimisations

1.1. Le problème du sac à dos

Le problème du sac à dos (`KP` ou *Knapsack Problem*)

Un cambrioleur possède un sac à dos d'une contenance maximum de 30 Kg. Au cours d'un de ses cambriolages, il a la possibilité de dérober 4 objets A, B, C et D. Voici un tableau qui résume les caractéristiques de ces objets :

Objet	A	B	C	D
Masse	13 Kg	22 Kg	8 Kg	10 Kg
Valeur	700 €	400 €	300 €	300 €

1. Déterminez les objets que le cambrioleur aura intérêt à dérober, sachant que :
    - tous les objets dérobés devront tenir dans le sac à dos (30 Kg maxi) ;
    - le cambrioleur cherche à obtenir un gain maximum.
2. Existe-t-il d'autres solutions ?

Optimisation

Ce genre de problème est un grand classique en informatique, on parle de **problèmes d'optimisation**.En effet on cherche une **solution dite optimale** (dans notre exemple on cherche le plus grand gain possible). Souvent, dans les problèmes d'optimisation, il n'existe pas une solution optimale, mais plusieurs solutions optimales, et résoudre un problème d'optimisation c'est donc trouver une de ces solutions.

Solution naïve

Coder la solution naïve

Comment faire pour tester toutes les solutions possibles, sachant que la liste des objets est donnée sous la forme d'un dictionnaire (ou d'une liste de dictionnaire), où chaque objet est représenté par deux clés `masse` et `valeur` ?

La solution est de créer une liste de tous les sous-ensembles possibles à partir d'une donnée d'objets, puis de calculer pour chacun de ces sous-ensemble la masse et la valeur totale...

Une idée est, pour une liste d'objets donnée de taille , de comprendre que tous les nombres entiers entre et sont associés à un unique sous-ensemble de cette liste.

Par exemple, considérons la liste `[A, B, C]`.

- pour le sous-ensemble `[A, C]`, on va considérer le nombre binaire `101`, où le premier `1` (celui de poids faible, donc à droite) représente la présence de `A` dans cet ensemble, le `0` représente l'absence de `B`, et le dernier `1` représente la présence de `C`.
- de même pour le sous-ensemble `[A, B]`, on associe le nombre binaire `011` ;
- de même pour le sous-ensemble `[C]`, on associe le nombre binaire `100` ;
- et pour `[A,B,C]` on associe le nombre binaire `111`, qui est donc le plus grand nombre binaire pouvant représenter un sous-ensemble de `[A, B, C]`. Or .

Donc, pour essayer toutes les possibilités (algorithme en **force brute**), on doit :

- Faire une boucle pour `i` allant de à ;
- pour chaque valeur de `i`, déterminer le nombre binaire correspondant et utiliser cette décomposition pour trouver quels objets font partie de ce sous-ensemble ;
- déterminer ensuite la masse totale de ce sous-ensemble ;
- si cette masse est inférieure au seuil de masse fixé, on calcule la valeur totale des objets de ce sous-ensemble;
- si cette valeur totale est supérieure à la valeur maximale jusqu'alors traitée, ce sous-ensemble devient la meilleure solution pour l'instant.

Une fois la boucle terminée, on est assuré d'avoir la solution optimale au problème du sac à dos.

Une solution hors programme

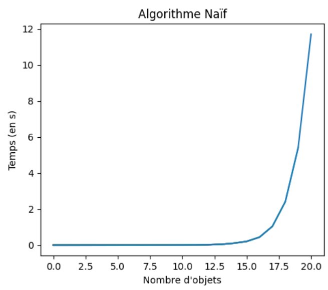
```python
def make_obj_sub_list_from_list_and_int(obj_list : list, nb : int) :
    """ return a sublist created with a number between
        0 and 2**n where n is len(obj_list)"""
    i = 0
    return_list = []
    while nb != 0 :
        if nb%2 == 1 :
            return_list.append(obj_list[i])
        i += 1
        nb = nb//2
    return return_list
```

```python
def sacADosNaif(listeObj : dict, masseMax : int) -> list :
    """ Calcule la solution optimale pour le problème du sac à dos"""
    optimale = []
    valeurOptimale = 0
    n = len(listeObj)
    for nb in range(2**n) :
        se = make_obj_sub_list_from_list_and_int(list(listeObj.keys()), nb)
        masseLocale = sum([listeObj[nom]['masse'] for nom in se])
        valeurLocale = sum([listeObj[nom]['valeur'] for nom in se])
        if valeurLocale >valeurOptimale  and masseLocale<=masseMax :
            valeurOptimale = valeurLocale
            optimale = se
    return optimale, valeurOptimale
```

Temps de calcul

Dans notre cas précis, avec seulement 4 objets, il est tout à fait possible de tester toutes les solutions pour trouver celle optimale.Mais avec un plus grand nombre d'objets, le temps de calcul, même pour un ordinateur très puissant, deviend très rapidement trop important. En effet l'algorithme qui testerait toutes les combinaisons possibles aurait une complexité en temps en avec une constante et le nombre d'objets (vaut au moins , car il faut explorer les sous-ensembles).

On parle dans ce cas d'une **complexité exponentielle** (en temps), ce qu'on peut voir dans le graphique suivant (exécuté sur mon ordinateur personnel).



Les algorithmes à complexité exponentielle ne sont pas efficaces pour résoudre des problèmes, le temps de calcul devenant beaucoup trop important quand devient grand.

1.2. Une solution gloutonne

Solution « Gloutonne »

La résolution d'un problème d'optimisation se fait généralement par étapes : à chaque étape on doit **faire un choix**. Par exemple, dans le problème du sac à dos, nous ajoutons les objets un par un, chaque ajout d'un objet constitue une étape : à chaque étape on doit **choisir** un objet à mettre dans le sac.

Le principe de la méthode **gloutonne**(*greedy* en anglais) est, à chaque étape de la résolution du problème, de faire le choix qui semble **le plus pertinent** sur le moment, avec l'espoir qu'au bout du compte, cela nous conduira vers une solution optimale du problème à résoudre. Autrement dit, on fait des **choix localement optimaux**, ce qui signifie faire le choix qui semble le plus pertinent ponctuellement. Par contre, **rien ne garantit que la solution obtenue soit optimale**, elle sera simplement «*assez bonne*».

Méthode gloutonne

Enoncé

Comme on cherche à optimiser au maximum le gain, on va s'intéresser à la « valeur massique » de chaque objet.

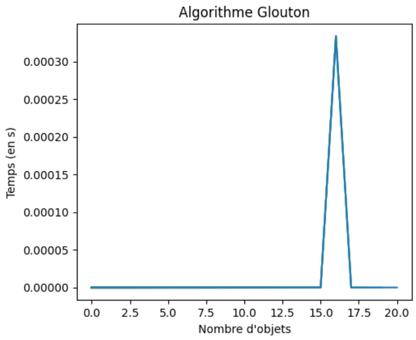
1. Compléter le tableau suivant :

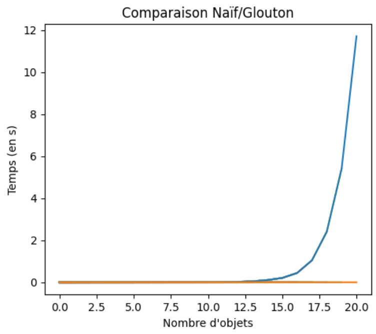
Objet	A	B	C	D
Valeur Massique (en €/Kg)				

2. Trier le tableau par valeur décroissante de la valeur massique.
3. Enfin, on remplit le sac en prenant les objets dans l'ordre et en s'arrêtant dès que la masse limite est atteinte.
    a. Quelle est la composition du sac ?
    b. Est-elle optimale ?

Comparaison des temps d'exécution entre algorithme naïf et algorithme glouton

Sur les mêmes valeurs, voici une comparaison entre les temps d'éxécution des deux algorithmes :





ATTENTION Il faut bien comprendre que l'algorithme glouton ne donne pas forcément la même réponse que l'algorithme naïf, c'est-à-dire la solution optimale ! Cependant les différences de temps d'exécution lorsque est suffisamment grand sont telles que la solution approchée donnée par une méthode gloutonne est bien souvent acceptable.

Code en Python

Enoncé

La liste des objets et leur masse est donné par un dictionnaire nom : (masse; valeur).

```
objets = {
"A" : {'masse' : 13, 'valeur' : 700},
"B" : {'masse' : 12, 'valeur' : 400},
"C" : {'masse' : 8, 'valeur' : 300},
"D" : {'masse' : 10, 'valeur' : 300},
        }
```

1. Ecrire une fonction Python qui renvoie un tableau de tuples `(nom ; valeur_massique)` à partir du dictionnaire passé en argument.
2. Trier ce tableau par ordre décroissant des valeurs massiques.
3. Ecrire une fonction Python qui finalise l'algorithme glouton.

2. Problème du rendu de monnaie

2.1. La situation

Le problème du rendu de monnaie

Nous sommes des commerçants, nous avons à notre disposition un nombre illimité de pièces de :

- 1 centime
- 2 centimes
- 5 centimes
- 10 centimes
- 20 centimes
- 50 centimes
- 1 euro
- 2 euros

Nous devons rendre la monnaie à un client à l'aide de ces pièces. La contrainte est d'utiliser **le moins de pièces possible**.

L'algorithme

Enoncé

1. Trouvez une méthode gloutonne permettant d'effectuer un rendu de monnaie (en utilisant le moins possible de pièces).
2. Vous devez rendre la somme de 2,63 €.
    a. Appliquez la méthode que vous venez de mettre au point.
    b. Combien de pièces avez-vous utilisées ?
    c. La solution trouvée est-elle optimale ?
3. Vous devez rendre la somme de 4,05 €.
    a. Appliquez la méthode que vous venez de mettre au point.
    b. Combien de pièces avez-vous utilisées ?
    c. La solution trouvée est-elle optimale ?

2.2. Le code

À partir de la méthode gloutonne que vous avez élaborée ci-dessus, écrivez un algorithme glouton qui permettra de déterminer le nombre minimal de pièces à utiliser pour une somme donnée. Vous proposerez ensuite une implémentation en Python de votre algorithme. Vous testerez votre programme avec une somme à rendre de 2 euros et 63 centimes.

Autres systèmes de monnaie

Le problème du rendu de monnaie est **NP-complet** dans le cas général, c'est-à-dire très difficile à résoudre. Cependant pour certains systèmes de monnaie dits **canoniques**, l'algorithme glouton est optimal, c'est-à-dire qu'il suffit de rendre systématiquement la pièce ou le billet de valeur maximale — ce tant qu'il reste quelque chose à rendre. C'est la méthode employée en pratique, ce qui se justifie car la quasi-totalité des systèmes ayant cours dans le monde sont canoniques.

Dans un système de monnaie non-canonique ne possédant que 3 pièces de valeurs 1, 3 et 4, quelle est la solution optimale du problème du rendu de monnaie pourt une valeur de 6 ? Que donne l'algorithme glouton ?

Pour les cracks