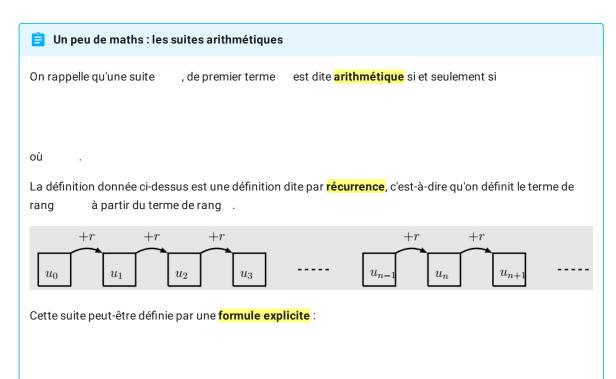
Notion de fonctions récursive

1. Activité d'introduction : de l'itératif au récursif



Exercice

Enoncé

Construire une fonction maSuiteArithmetique(n) qui calcule le -ième terme de la suite arithmétique de premier terme 3 et de raison 7. Quelle formule avez-vous utilisée?

Une solution

Au vu de l'énoncé, je prends le pari que la majorité d'entre vous avez utilisé la **formule explicite** avec un code de la forme suivante :

```
def maSuiteArithmetique(n) :
    return 3 + n*7
```

C'est évidemment la solution la plus simple. Dans ce cas, tout comme pour les *suites géométrique*, il est inutile de compliquer le code, nous obtenons directement la solution par un simple calcul algébrique.

Encore des maths : les suites arithmético-géométriques

Une suite , de premier terme est dite **arithmético-géométrique** si et seulement si

où

Encore une fois, la définition donnée ci-dessus est une définition dite par **récurrence**, c'est-à-dire qu'on définit le terme de rang à partir du terme de rang .



Exercice

Enoncé

Construire une fonction maSuiteAG(n) qui calcule le -ième terme de la suite arithmético-géométriqueq de premier terme 7 et définie par :

Quelle formule avez-vous utilisée?

Une solution probable

Ici nous n'avons qu'une formule - sauf pour les petits malins qui seront allé voir sur wikipedia - donc on doit utiliser un processus de répétition des opérations à partir de 7.

On peut bien sûr appliquer une boucle pour dans notre fonction :

```
def maSuiteAG(n) :
   u = 7
   for i in range(1,n+1) : # j'utilise ce range plutôt que range(n) car le i utilisé
correspond au terme du rang calculé.
       u = -2*u + 5
    return u
```

Deux remarques:

- dans ce code, je ne vérifie pas que , et il faudrait...;
- dans le cas où , la boucle for n'est pas effectuée.

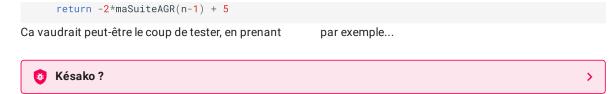
Une version plus correcte serait donc celle-ci:

```
def maSuiteAG(n) :
    if not(isinstance(n, int)) or n<0:
       raise ValueError("n must be a non negativ integer")
    for i in range(1,n+1) : # j'utilise ce range plutôt que range(n) car le i utilisé
correspond au terme du rang calculé.
       u = -2*u + 5
    return u
```

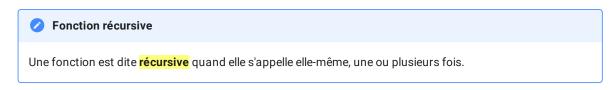
Une telle fonction est dite itérative, car elle utilise une boucle de répétitions pour parvenir au résultat souhaité.

C'est vraiment dommage, dans le premier exercice, on utilise simplement la formule explicite, alors que dans le deuxième cas, on est obligé de réfléchir à l'algorithme. Ce serait si simple de pouvoir utiliser directement la formule récursive, comme dans le code ci-dessous :

```
def maSuiteAGR(n):
```



2. Principe de récursivité



Des problèmes

Décomposons l'instruction l'appel à maSuiteAGR(3) :

- maSuiteAGR(3) doit calculer -2*maSuiteAGR(2) +5, et donc doit calculer:
 - maSuiteAGR(2), qui doit calculer -2*maSuiteAGR(1) +5, et donc doit calculer:
 - maSuiteAGR(1), qui doit calculer -2*maSuiteAGR(0) +5, et donc doit calculer:
 - maSuiteAGR(0), quidoit calculer -2*maSuiteAGR(-1) +5, et donc doit calculer:
 - maSuiteAGR(-1), qui doit calculer -2*maSuiteAGR(-2) +5, et donc doit calculer:

"HELP! Mais ça s'arrête quand!" me direz-vous!

Et bien jamais, en théorie, car nous n'avons pas précisé de condition d'arrêt.



Mais en réalité cette instruction s'arrêtera quand python aura levé une erreur de type RecursionError, qui signifie qu'une limite aura été atteinte (nous en parlerons plus tard pour lever toute ambiguité).



Supprimer le problème : le cas d'arrêt

Pour supprimer le problème précédent, revenons aux maths : dans une définition par récurrence de suite, on signale toujours la valeur du premier terme (qui peut être , ou , ou même selon le problème et la définition de l'indice). Or dans notre fonction maSuiteAGR, jamais nous ne précisons ce cas, c'est-à-dire que quand , alors la suite vaut . Rajoutons-donc cette condition dans la fonction :

```
def maSuiteAGR(n) :
   if n== 0 :
        return 7
    else:
        return -2* maSuiteAGR(n-1) + 5
```

Et testons de nouveau maSuiteAGR(3):

- maSuiteAGR(3) doit calculer -2*maSuiteAGR(2) +5, et donc doit calculer:
 - maSuiteAGR(2), qui doit calculer -2*maSuiteAGR(1) +5, et donc doit calculer:
 - maSuiteAGR(1), qui doit calculer -2*maSuiteAGR(0) +5, et donc doit calculer:
 - maSuiteAGR(0), qui maintenant renvoie 7!
 - donc maSuiteAGR(1) renvoie -2*7+5 soit -9;
 - donc maSuiteAGR(2) renvoie -2*(-9)+5 soit 23;
- donc maSuiteAGR(3) renvoie -2*23+5 soit -41.

Non seulement la fonction s'arrête, mais en plus elle renvoie la bonne valeur, c'est-à-dire



Récapitulons

Pour utiliser une fonction récursive correctement, il faudra distinguer :

- le ou les cas d'arrêts (ou cas de base), c'est-à-dire des cas particuliers pour lesquels la valeur (ou l'objet) renvoyé par la fonction est connu;
- le cas récursif, pour lequel la fonction s'appelle elle-même, une ou plusieurs fois.

```
Exemple commenté
La somme des premiers entiers est la somme :
Comment faire pour construire une fonction récursive sommeR(n) qui effectue la somme des premiers
entiers, avec passé en argument.
 • Quel est le cas récursif?
   On a
   donc le cas récursif est sommeR(n) = sommeR(n-1) + n
 • Quel est le cas de base?
   Il y a plusieurs possibilités, soit en partant de l'indice 0 car sommeR(0)=0, soit en partant de l'indice 1, car
    sommeR(1) = 1.
Une implémentation récursive possible est alors :
 def sommeR(n):
      if n==0:
          return 0
      else :
         return sommeR(n-1) + n
```

3. Applications directes



Exercice : factorielle

Enoncé

On rappelle que la factorielle d'un entier naturel est donné par :

- 1. Ecrire une fonction itérative factorielle (n) qui renvoie la factorielle d'un entier naturel donné, et lève une ValueError si n'est pas entier ou est négatif.
- 2. Ecrire une fonction récursive factorielle R(n) qui renvoie la factorielle d'un entier naturel donné, et lève une ValueError si n'est pas entier ou est négatif.

Solution Itérative

```
def factorielle(n) :
2
       if not(isinstance(n, int)) or n<0 :</pre>
3
           raise valueError("n must be a positiv integer")
5
        for i in range(1,n+1) :# On peut effectivemment partir de 2, et gagner un tour de
6 boucle.
            produit =produit*i
7
        return produit
```

Solution récursive

```
def factorielleR(n) :
1
2
       if not(isinstance(n, int)) or n<0:
3
           raise valueError("n must be a positiv integer")
       if n==0 or n==1 :
4
5
          return 1
6
       else :
7
           return factorielleR(n-1)*n
```



Exercice : étoiles

Enoncé

1. Implémenter une fonction **itérative** etoile(n) qui écrit dans le Shell Python un triangle formé de caractères * tels que dans l'exemple suivant :

```
>>> etoileR(5)
**
***
```

 $2. \ Implémenter une fonction \textbf{récursive} \ \ \texttt{etoileR(n)} \ \ \textbf{qui effectue le même travail}.$

Solution Itérative

```
def etoile(n) :
2
      if not(isinstance(n, int)) or n <= 0:
3
           raise valueError("n must be a positiv integer")
4
       for i in range(1, n+1) :
           print("*"*i)
5
```

Solution récursive

```
def etoileR(n) :
2
       if not(isinstance(n, int)) or n <= 0:
3
           raise valueError("n must be a non null positiv integer")
       if n == 1 :
4
          print("*")
5
6
      else :
7
           etoileR(n-1)
           print("*"*n)
8
```

