离散数学
Discrete Mathematics

第2讲 命题逻辑 Propositional Logic（2）

2.4 范式

需求

- 命题公式规范化？
- AI （自动推理，Rough集数
- 电路设计(只根据真值表即

可行

联接词功能完备集：

{¬， ∧， ∨}

ELSEVIER

Discrete Applied Mathematics 107 (2000) 1–26

DISCRETE APPLIED MATHEMATICS

Disjunctive and conjunctive normal forms of pseudo-Boolean functions

Stephan Foldes, Peter L. Hammer *

Rutgers University, RUTCOR, 640 Bartholomew Road, Piscataway, NJ 08844-8003, USA

Received 15 February 2000; revised 2 June 2000; accepted 23 June 2000

Pseudo-Boolean functions (pBf's) appear in numerous areas of discrete optimization, computer science, reliability theory, data analysis, graph theory, as well as in many interdisciplinary models of electronic circuit design, physics, telecommunications, etc.

to the vertices of the n-cube.

* Corresponding author.
E-mail address: hammer@rutcor.rutgers.edu (P.L. Hammer).

PII: S0166-218X(00)00276-6

何为命题公式规范形式？

- 文字 P，¬P（P与¬P称为互补对）
- 质合取/析取式

  P，¬P，¬P∧Q，P∧¬Q∧R

  P，¬P，P∨Q，¬P∨Q∨¬R
- 析取/合取范式
- 主析取/合取范式

2.4 范式

析取范式（Disjunctive Normal Form）

$\alpha_1 \vee \alpha_2 \vee \ldots \vee \alpha_n$

$(P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$

合取范式（Conjunctive Normal Form）

$\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \ldots \wedge \alpha_n$

$(P \vee R) \wedge (P \vee Q \vee \neg R) \wedge (\neg P \vee \neg R)$

2.4 范式

示例2.4 阅读教材P14例1.12

应用 教材P15定理1.7；公式等价？

练习 求命题公式的析取范式和合取范式

(1).求$(\neg P \rightarrow Q) \wedge (P \rightarrow R)$的析取范式和合取范式

(2).求$(P \rightarrow Q) \vee (P \wedge R)$的析取范式和合取范式

2.4 范式

解 (1)求$(\neg P\rightarrow Q)\wedge(P\rightarrow R)$的析取范式：

$(\neg P\rightarrow Q)\wedge(P\rightarrow R)$

$\Leftrightarrow(\neg\neg P\vee Q)\wedge(\neg P\vee R)$ // 蕴涵等值式

$\Leftrightarrow(P\vee Q)\wedge(\neg P\vee R)$ // 双否律

$\Leftrightarrow(P\neg\wedge P)\vee(P\wedge R)\vee(Q\neg\wedge P)\vee(Q\wedge R)$ //分配律

$\Leftrightarrow(P\wedge R)\vee(Q\neg\wedge P)\vee(Q\wedge R)$ //$(P\neg\wedge P)$是矛盾式

显然$(\neg P\rightarrow Q)\wedge(P\rightarrow R)$的合取范式为$(P\vee Q)\wedge(\neg P\vee R)$。

(2)求$(P\rightarrow Q)\vee(P\wedge R)$的合取范式：

$(P\rightarrow Q)\vee(P\wedge R)\Leftrightarrow(\neg P\vee Q)\vee(P\wedge R)\Leftrightarrow(\neg P\vee Q\vee P)\wedge(\neg P\vee Q\vee R)$

显然$(P\rightarrow Q)\vee(P\wedge R)$的析取范式为$(\neg P)\vee Q\vee(P\wedge R)$。

2.4 范式

注意到：

一个命题公式的合取范式和析取范式不具有唯一性。

- **主析取/合取范式**

  （Full Disjunctive/Conjunctive Normal Form）

  如何构造？

  极小项、极大项

  1 真值表法

  2 等值演算

2.4 范式

P	Q	f	$(P\wedge Q)\vee(\neg P\wedge Q)\vee(P\wedge\neg Q)\vee(\neg P\wedge\neg Q)$?			
			$P\wedge Q$	$\neg P\wedge Q$	$P\wedge\neg Q$	$\neg P\wedge\neg Q$
0	0	1	0	0	0	1
0	1	0	0	1	0	0
1	0	0	0	0	1	0
1	1	1	1	0	0	0

2.4 范式

P	Q	f	$(P\wedge Q)\vee(\neg P\wedge Q)\vee(P\wedge\neg Q)\vee(\neg P\wedge\neg Q)$?			
			$P\wedge Q$	$\neg P\wedge Q$	$P\wedge\neg Q$	$\neg P\wedge\neg Q$
0	0	1	0	0	0	1
0	1	0	0	1	0	0
1	0	0	0	0	1	0
1	1	1	1	0	0	0

P	Q	f	$(P\wedge Q)\vee(\neg P\wedge Q)\vee(P\wedge\neg Q)\vee(\neg P\wedge\neg Q)$?			
			$P\wedge Q$	$\neg P\wedge Q$	$P\wedge\neg Q$	$\neg P\wedge\neg Q$
0	0	1	0	0	0	1
0	1	0	0	1	0	0
1	0	0	0	0	1	0
1	1	1	1	0	0	0

2.4 范式

P	Q	f	$(P\wedge Q)\vee(\neg P\wedge Q)\vee(P\wedge\neg Q)\vee(\neg P\wedge\neg Q)$			
			$P\wedge Q$	$\neg P\wedge Q$	$P\wedge\neg Q$	$\neg P\wedge\neg Q$
0	0	1	0	0	0	1
0	1	0	0	1	0	0
1	0	0	0	0	1	0
1	1	1	1	0	0	0

记： $f=(P\wedge Q)\vee((\neg P\wedge\neg Q)=m_{11}\vee m_{00}$

试问： $\neg f=?$

2.4 范式

P	Q	f	$(P\vee Q)\wedge(\neg P\vee Q)\wedge(P\vee\neg Q)\wedge(\neg P\vee\neg Q)$?			
			$P\vee Q$	$\neg P\vee Q$	$P\vee\neg Q$	$\neg P\vee\neg Q$
0	0	1	0	1	1	1
0	1	0	1	1	0	1
1	0	0	1	0	1	1
1	1	1	1	1	1	0

2.4 范式

P	Q	f	$(P\vee Q)\wedge(\neg P\vee Q)\wedge(P\vee\neg Q)\wedge(\neg P\vee\neg Q)$			
			$P\vee Q$	$\neg P\vee Q$	$P\vee\neg Q$	$\neg P\vee\neg Q$
0	0	1	0	1	1	1
0	1	0	1	1	0	1
1	0	0	1	0	1	1
1	1	1	1	1	1	0

记： $f=(\neg P\vee Q)\wedge(P\vee\neg Q) = M_{10}\wedge M_{01}$

试问： $\neg f=?$

2.4 范式

示例 教材P17例1.16

应用 教材P18例1.17

真值表方法
等值演算方法

示例 教材P17例1.16

求公式$(\neg P \rightarrow R) \wedge (P \leftrightarrow Q)$的主合取范式。

解 $(\neg P \rightarrow R) \wedge (P \leftrightarrow Q)$

$\Leftrightarrow (P \vee R) \wedge (\neg P \vee Q) \wedge (P \vee \neg Q)$

$\Leftrightarrow (P \vee (Q \wedge \neg Q) \vee R) \wedge (\neg P \vee Q \vee (R \wedge \neg R)) \wedge (P \vee \neg Q \vee (R \wedge \neg R))$

$\Leftrightarrow (P \vee Q \vee R) \wedge (P \vee \neg Q \vee R) \wedge (\neg P \vee Q \vee R) \wedge (\neg P \vee Q \vee \neg R) \wedge (P \vee \neg Q \vee R) \wedge (P \vee \neg Q \vee \neg R)$

$\Leftrightarrow (P \vee Q \vee R) \wedge (P \vee \neg Q \vee R) \wedge (P \vee \neg Q \vee \neg R) \wedge (\neg P \vee Q \vee R) \wedge (\neg P \vee Q \vee \neg R)$

$\Leftrightarrow M_0 \wedge M_2 \wedge M_3 \wedge M_4 \wedge M_5$

此即所求的主合取范式

练习 求命题公式的主范式

(1). 求 $(\neg P \to Q) \wedge (P \to R)$ 的主析取范式和主合取范式

(2). 求 $(P \to Q) \vee (P \wedge R)$ 的主析取范式和主合取范式

2.4 范式

(1)根据前例知$(\neg P \to Q) \wedge (P \to R)$的一个析取范式是

$(P \wedge R) \vee (Q \wedge \neg P) \vee (Q \wedge R)$，现在将其中的每个简单合取式展开为含有所有命题变元的极小项的析取：

$(P \wedge R)$展开为$(P \wedge Q \wedge R) \vee (P \wedge \neg Q \wedge R)$，$(Q \wedge \neg P)$展开为$(\neg P \wedge Q \wedge R) \vee (\neg P \wedge Q \wedge \neg R)$，$(Q \wedge R)$展开为$(P \wedge Q \wedge R) \vee (\neg P \wedge Q \wedge R)$

因此$(\neg P \to Q) \wedge (P \to R)$的主析取范式为

$(P \wedge Q \wedge R) \vee (P \wedge \neg Q \wedge R) \vee (\neg P \wedge Q \wedge R) \vee (\neg P \wedge Q \wedge \neg R)$，

按极小项所对应的二进制数的大小重新排列为

$(\neg P \wedge Q \wedge \neg R) \vee (\neg P \wedge Q \wedge R) \vee (P \wedge \neg Q \wedge R) \vee (P \wedge Q \wedge R)$，

可记为$m_2 \vee m_3 \vee m_5 \vee m_7$。

讨论

- 范式一定存在，但主范式不一定存在？
- 如果命题公式数是矛盾式（永真式），则其无主析取范式（合取范式）？
- 两个命题公式若具有相同的主析取范式（或主合取范式），则这两个命题公式逻辑等价.
- 如果命题公式存在主范式，则是唯一存在的？
- 如果已经求得某命题公式的主析取范式，则可以根据主析取范式求得该命题公式的主合取范式.
- 只要给定真值表，则可以求出相应真值函数的主范式？
- n个变元可构成多少个不同的主析取范式？

小结

主范式求解方法：

1 真值表

2 等值演算