一、填空题（每小题 3 分，共 15 分）

1. 答案：3

2. 答案：$f(x)=\dfrac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n^2}\cos nx \qquad x\in(-\infty,+\infty)$

3. 答案：$\dfrac{dx}{x}+\dfrac{dy}{y}.$

4. 答案：$\iiint\limits_{\Omega}\mu(x,y,z)dv$ 或者 $\iiint\limits_{\Omega}\mu(x,y,z)dxdydz.$

5. 答案：$y=C_1e^x+C_2x+C_3.$

二、选择题（每小题 3 分，共 15 分）

1. 答案：B
2. 答案：A
3. 答案：C
4. 答案：D
5. 答案：A

三、解答题（每小题 6 分，共 30 分）

1. 解：令 $x-y+1=u$，则 $\dfrac{dy}{dx}=1-\dfrac{du}{dx}$，代入原方程得

$$\frac{du}{dx}=\cos^2 u$$

分离变量并两边积分得 $\tan u=x+C$ (3 分)

将 $x-y+1=u$ 代入，得通解为

$$\tan(x-y+1)=x+C$$

将 $y|_{x=0}=1$ 代入得 $C=0$，故所求特解为 $\tan(x-y+1)=x.$ （3 分）

2. 解：因为平面过两直线，所以平面过点 $(1,0,-6)$，且其法向量 $\vec{n}$ 垂直于两直线的方向向量，

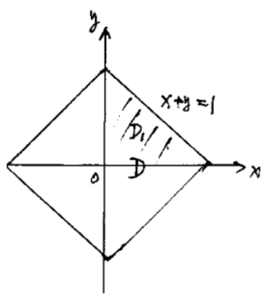
故可取 $\vec{n}=\vec{s}_1\times\vec{s}_2=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\1&0&-2\\0&1&-3\end{vmatrix}=(2,3,1)$

（4 分）

于是所求平面为 $2(x-1)+3y+(z+6)=0,$ （2 分）

即 $2x+3y+z+4=0.$

3. 解：由于积分区域 D 是一个正方形，坐标轴将 D 分成四个相



等的子区域，被积函数$|xy|$关于这四个子区域是对称的，故

$$\text{原式} = 4\iint_{D_1} |xy|\,dxdy = 4\int_0^1 x dx \int_0^{1-x} y dy$$

（3 分）

$$= \int_0^1 x\left[\frac{1}{2}y^2\right]_0^{1-x} dx = 2\int_0^1 \left(x - 2x^2 + x^3\right)dx = \frac{1}{6}$$

（3 分）

4. 证明：构造幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}x^n$，则收敛半径$R = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\frac{n+1}{1} = 1$，（2 分）

当$x \in (-1,1)$时，

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}x^n = \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x x^{n-1}dx = \int_0^x \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1}dx = \int_0^x \frac{1}{1-x}dx = -\ln(1-x)$$，则

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n2^n} = S(\frac{1}{2}) = \ln 2.$$

（4 分）

5. 解：$\frac{\partial z}{\partial x} = 2yx^{2y-1}$，$\frac{\partial z}{\partial y} = 2x^{2y}\ln x$；（2 分）

$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2y\left(2y-1\right)x^{2y-2}$，$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 4x^{2y}\ln^2 x$，（2 分）

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x} = 2x^{2y-1} + 2yx^{2y-1}\ln x\cdot 2 = 2x^{2y-1}\left(1 + 2y\ln x\right).$$

（2 分）

四、（8 分）解：过点$(1,2,3)$作平面与直线$\begin{cases} x+y-z=1 \\ 2x+z=3 \end{cases}$垂直，则直线的方向向量可作为平面的法向量

$$\vec{n} = \vec{s} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (1,-3,-2)$$

则过点$(1,2,3)$且与直线垂直的平面方程为$1(x-1)-3(y-2)-2(z-3)=0,$

即$x-3y-2z+11=0.$

（4 分）

联立直线与平面方程$\begin{cases} x+y-z=1 \\ 2x+z=3 \\ x-3y-2z+11=0 \end{cases}$ 解得直线与平面的交点为$(\frac{1}{2},\frac{5}{2},2)$

由两点间的距离公式得$d=\sqrt{(1-\frac{1}{2})^2+(2-\frac{5}{2})^2+(3-2)^2}=\frac{\sqrt{6}}{2}$ （4 分）

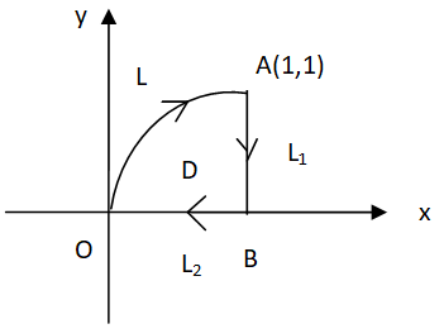
五、（8 分）解：Ω在xoy面上的投影区域为$D:\begin{cases} 0\le y\le x \\ 1\le x\le 2 \end{cases}$，而$0\le z\le y$，所以

$$I=\iint_D dxdy\int_0^y \frac{dz}{x^2+y^2}=\iint_D \frac{y}{x^2+y^2}dxdy$$ （2 分）

$$=\int_1^2 dx\int_0^x \frac{y}{x^2+y^2}dy=\frac{1}{2}\int_1^2 [\ln(x^2+y^2)]_0^x dx$$ （4 分）

$$=\frac{1}{2}\int_1^2 \ln 2dx=\ln 2.$$ （2 分）

六、（8 分）解：



如图添加两天线段$\overline{BA}$及$\overline{AO}$,分别记为L_1及L_2.

$L+L_1+L_2$构成一条顺时针闭曲线.

原式$=\left(\oint_{L+L_1+L_2}-\int_{L_1}-\int_{L_2}\right)\left[(x^2-y)dx-(x+\sin^2 y)\right]$

$\square\ I_1-I_2-I_3$ （1 分）

对于I_1，由 Green 公式有

$$I_1=-\iint_D\left[\frac{\partial(-x-\sin^2 y)}{\partial x}-\frac{\partial(x^2-y)}{\partial y}\right]dxdy=\iint_D 0dxdy=0$$ （2 分）

对于 I_2， $L_1:\begin{cases} x=1 \\ y=y \end{cases}$， $y:1\to 0$

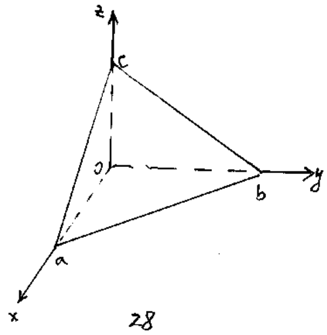
$$I_2=\int_1^0 (1-y)\,0\,dy-(1+\sin^2 y)dy=\frac{3}{2}-\frac{\sin}{4} \qquad （2 分）$$

对于 I_3， $L_2:\begin{cases} x=x \\ y=0 \end{cases}$， $x:1\to 0$

$$I_3=\int_1^0 (x^2-0)dx-(x+\sin^2 0)dx=-\frac{1}{3} \qquad （2 分）$$

$$I=I_1-I_2-I_3=\frac{\sin 2}{4}-\frac{7}{6} \qquad （1 分）$$

七、（8 分）解：所求平面在 xoy 面上的投影区域 D 为以 a 、 b 为直角边的直角三角形。



$$z=c-\frac{c}{a}x-\frac{c}{b}y,$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{c}{a},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{c}{b}$$

$$\left[1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right]^{1/2}=\left(1+\frac{c^2}{a^2}+\frac{c^2}{b^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{1}{ab}\left(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\right)^{\frac{1}{2}}. \qquad （4 分）$$

$$A=\iint_D \frac{1}{ab}\left(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\right)^{\frac{1}{2}}dxdy$$

$$=\frac{1}{ab}\left(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\right)^{\frac{1}{2}}\frac{1}{2}ab=\frac{1}{2}\left(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\right)^{\frac{1}{2}}. \qquad （4 分）$$

八、（8 分）解： $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\left|(-1)^{n+2}\dfrac{2(n+1)}{(2n+1)!}x^{2n+1}\right|}{\left|(-1)^{n+1}\dfrac{2n}{(2n-1)!}x^{2n-1}\right|}=0$，则收敛半径 $R=\infty$，

收敛域 $x\in(-\infty,+\infty)$. （4 分）

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2n}{(2n-1)!}x^{2n-1}=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)!}x^{2n}\right)'=\left(x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)!}x^{2n-1}\right)'$$

$$=\left(x\sin x\right)'=\sin x+x\cos x,\quad x\in(-\infty,+\infty). \qquad （4 分）$$