习 题 二

A 组

1．填空题.

（1）$\begin{vmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \cos\theta & \sin\theta \end{vmatrix}=$________.

解 $\sin 2\theta$.

（2）设$\begin{vmatrix} a & b & 0 \\ -b & a & 0 \\ 100 & 10 & -1 \end{vmatrix}=0$，则$a=$________，$b=$________.

解 0，0.

（3）当$i=$________，$k=$________时，排列$1274i56k9$为偶排列.

解 $i=8$, $k=3$.

（4）$2n$元排列$1\,3\cdots(2n-1)(2n)(2n-2)\cdots4\,2$的逆序数为________，排列$1\,3\cdots(2n-1)\,2\,4\cdots(2n-2)(2n)$的逆序数为________.

解 $n(n-1)$，$\dfrac{n(n-1)}{2}$.

（5）在五阶行列式$D=\det(a_{ij})$的展开式中，项$a_{13}a_{24}a_{32}a_{41}a_{55}$前面带________号，项$a_{15}a_{24}a_{32}a_{43}a_{51}$前面带________号.

解 负号，负号.

（6）四阶行列式$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}=$________.

解 $-4!$.

（7）若$\begin{vmatrix} x & 3 & 1 \\ y & 0 & 1 \\ z & 2 & 1 \end{vmatrix}=1$，则$\begin{vmatrix} x-3 & y-3 & z-3 \\ 5 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=$________.

解 1.

（8）$f(x)=\begin{vmatrix} 2x & x & 1 & 2 \\ 1 & x & 1 & -1 \\ 3 & 2 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x \end{vmatrix}$中 x^4 的系数为________.

解　2.

（9）已知三阶行列式$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$，$A_{ij}$ 为它的元素 a_{ij} 的代数余子式 $(i,\ j=1,2,3)$，则与

$aA_{13}+bA_{23}+cA_{33}$ 对应的三阶行列式为________.

解　$\begin{vmatrix} 1 & 2 & a \\ 4 & 5 & b \\ 7 & 8 & c \end{vmatrix}$.

（10）设齐次线性方程组$\begin{cases} \lambda x_1+\ \ x_2+x_3=0, \\ x_1+\lambda x_2+x_3=0, \\ x_1+\ \ x_2+x_3=0 \end{cases}$只有零解，则 λ 满足________.

解　$\lambda \neq 1$.

2．选择题.

（1）行列式$\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ 0 & 0 & \cdots & -a_2 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ -a_n & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}=$________.

（A）$(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_1a_2\cdots a_n$；　　（B）$(-1)^n a_1a_2\cdots a_n$；

（C）$a_1a_2\cdots a_n$；　　（D）$(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}a_1a_2\cdots a_n$.

（2）行列式$\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ a_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n & 0 \end{vmatrix}=$________.

（A）$a_1a_2\cdots a_n$；　（B）$-a_1a_2\cdots a_n$；　（C）$(-1)^{n+1}a_1a_2\cdots a_n$；　（D）$(-1)^n a_1a_2\cdots a_n$.

（3）与行列式$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$等值的行列式为________.

（A）$\begin{vmatrix} a_{13} & a_{12} & a_{11} \\ a_{23} & a_{22} & a_{21} \\ a_{33} & a_{32} & a_{31} \end{vmatrix}$；　　（B）$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$；

（C）$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{12} \\ a_{21} & a_{23} & a_{22} \\ a_{31} & a_{33} & a_{32} \end{vmatrix}$；　　（D）$\begin{vmatrix} a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$.

（4）设 $f(x)=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & x \\ 1 & 1 & 4 & x^2 \\ 1 & -1 & 8 & x^3 \end{vmatrix}$，则方程 $f(x)=0$ 的三个根为________.

（A）$1,-1,2$；　（B）$1,1,4$；　（C）$1,-1,8$；　（D）$2,4,8$.

（5）多项式 $\begin{vmatrix} a_{11}+x & a_{12}+x & a_{13}+x \\ a_{21}+x & a_{22}+x & a_{23}+x \\ a_{31}+x & a_{32}+x & a_{33}+x \end{vmatrix}$ 中 x 的次数最高可能为________.

（A）0；　（B）1；　（C）2；　（D）3.

（6）设 $f(x)=\begin{vmatrix} x-2 & x-1 & x-2 & x-3 \\ 2x-2 & 2x-1 & 2x-2 & 2x-3 \\ 3x-3 & 3x-2 & 4x-5 & 3x-5 \\ 4x & 4x-3 & 5x-7 & 4x-3 \end{vmatrix}$，则 $f(x)$ 的零点个数为________.

（A）1；　（B）2；　（C）3；　（D）4.

（7）四阶行列式 $\begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & a_2 & b_2 & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & 0 \\ b_4 & 0 & 0 & a_4 \end{vmatrix}$ 的值为________.

（A）$a_1a_2a_3a_4-b_1b_2b_3b_4$；　　（B）$a_1a_2a_3a_4+b_1b_2b_3b_4$；

（C）$(a_1a_2-b_1b_2)(a_3a_4-b_3b_4)$；　　（D）$(a_2a_3-b_2b_3)(a_1a_4-b_1b_4)$.

（8），若 $f_i(x)$ $(i=1,2,3,4)$ 均可导，则 $\dfrac{d}{dx}\begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) \\ f_3(x) & f_4(x) \end{vmatrix}=$________.

（A）$\begin{vmatrix} f_1'(x) & f_2'(x) \\ f_3'(x) & f_4'(x) \end{vmatrix}$；　　（B）$\begin{vmatrix} f_1'(x) & f_2(x) \\ f_3'(x) & f_4(x) \end{vmatrix}$；

（C）$\begin{vmatrix} f_1(x) & f_2'(x) \\ f_3(x) & f_4'(x) \end{vmatrix}$；　　（D）$\begin{vmatrix} f_1'(x) & f_2(x) \\ f_3'(x) & f_4(x) \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} f_1(x) & f_2'(x) \\ f_3(x) & f_4'(x) \end{vmatrix}$.

解　（1）D；（2）C；（3）D；（4）A；（5）B；（6）B；（7）D；（8）D.

3．用对角线法则计算以下三阶行列式：

(1) $\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix}$； (2) $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 2 \\ -1 & 4 & 3 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix}$；

(3) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}$； (4) $\begin{vmatrix} x & y & x+y \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{vmatrix}$.

解

(1) 原式 $=(-1)\times(-2)\times(-1)+3\times3\times1+2\times1\times1-1\times(-2)\times2-1\times3\times(-1)-(-1)\times3\times1$

$=-2+9+2+4+3+3=19$.

(2) 原式 $=2\times4\times(-1)+(-1)\times1\times2+3\times3\times(-3)-2\times4\times3-(-3)\times(-1)\times(-1)-2\times1\times3$

$=-8-2-27-24+3-6=-64$.

(3) 原式 $=acb+bac+cab-c^3-b^3-a^3=3abc-a^3-b^3-c^3$.

(4) 原式 $=x(x+y)y+yx(x+y)+(x+y)xy-(x+y)^3-y^3-x^3=-2(x^3+y^3)$.

4．由行列式定义证明

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 \\ c_1 & c_2 & 0 & 0 & 0 \\ d_1 & d_2 & 0 & 0 & 0 \\ e_1 & e_2 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}=0.$$

证明 设 $c_k=0, d_k=0, e_k=0, (k=3,4,5)$，根据行列式的定义可得

$$\text{原行列式}=\sum(-1)^{\tau(ijlmn)}a_i b_j c_l d_m e_n,$$

其中，$i\,j\,l\,m\,n$ 是$1,2,3,4,5$的一个排列．由于l,m,n互不相等，无论它们如何取值，c_l、d_m、e_n中至少有一个为零，所以，每一乘积项$(-1)^{\tau(ijlmn)}a_i b_j c_l d_m e_n$都等于零，因此，原行列式等于零．

5．用行列式定义确定下列行列式中x^3与x^4的系数．

$$\begin{vmatrix} x-1 & 4 & 3 & 1 \\ 2 & x-2 & 3 & 1 \\ 7 & 9 & x & 0 \\ 5 & 3 & 1 & x+1 \end{vmatrix}.$$

解 x^4与x^3只在乘积项$(x-1)(x-2)x(x+1)$中产生，故x^4的系数为1．上述乘积项展开后含x^3的系数分别是$-1,-2,1$，所以x^3的系数为-2．

6．已知 1326，2743，5005，3874 都能被 13 整除，不计算行列式的值，证明下列行列式能被 13 整除．

$$D=\begin{vmatrix}1&3&2&6\\2&7&4&3\\5&0&0&5\\3&8&7&4\end{vmatrix}.$$

证明 将第 1 列的 1000 倍、第 2 列的 100 倍、第 3 列的 10 倍都加到第 4 列上，并提出公因子可得

$$D=\begin{vmatrix}1&3&2&1326\\2&7&4&2743\\5&0&0&5005\\3&8&7&3874\end{vmatrix}=13\begin{vmatrix}1&3&2&k_1\\2&7&4&k_2\\5&0&0&k_3\\3&8&7&k_4\end{vmatrix},$$

其中，k_1,k_2,k_3,k_4均为整数．显然，D能被 13 整除．

7．计算下列各行列式：

（1）$\begin{vmatrix}103&100&204&100\\199&200&395&200\\301&300&600&300\\402&400&799&401\end{vmatrix}$；　　（2）$\begin{vmatrix}2&1&4&1\\3&-1&2&1\\1&2&3&2\\5&0&6&2\end{vmatrix}$；

（3）$\begin{vmatrix}-ab&ac&ae\\bd&-cd&de\\bf&cf&-ef\end{vmatrix}$；　　（4）$\begin{vmatrix}a&1&0&0\\-1&b&1&0\\0&-1&c&1\\0&0&-1&d\end{vmatrix}$．

解

（1）首先将第 2 列的-1倍、-2倍、-1倍分别加到第 1 列、第 3 列、第 4 列上，再利用行列式性质和展开法则可得

$$原式=\begin{vmatrix}3&100&4&0\\-1&200&-5&0\\1&300&0&0\\2&400&-1&1\end{vmatrix}=100\begin{vmatrix}3&1&4\\-1&2&-5\\1&3&0\end{vmatrix}=100\begin{vmatrix}3&-8&4\\-1&5&-5\\1&0&0\end{vmatrix}=100\begin{vmatrix}-8&4\\5&-5\end{vmatrix}=2000.$$

（2）将第 4 列化出三个零，再利用行列式性质可得

$$原式=\begin{vmatrix}2&1&4&1\\1&-2&-2&0\\-3&0&-5&0\\1&-2&-2&0\end{vmatrix}=0\,.$$

（3）先提出各列的公因子，再利用展开法则得到

$$原式=bce\begin{vmatrix}-a&a&a\\d&-d&d\\f&f&-f\end{vmatrix}=bce\begin{vmatrix}0&a&a\\0&-d&d\\2f&f&-f\end{vmatrix}=2bcef\begin{vmatrix}a&a\\-d&d\end{vmatrix}=4abcdef\,.$$

（4）将第 2 行的a倍加到第 1 行，再利用展开法则得

$$原式=\begin{vmatrix}0&ab+1&a&0\\-1&b&1&0\\0&-1&c&1\\0&0&-1&d\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}ab+1&a&0\\-1&c&1\\0&-1&d\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}ab+1&a&ad\\-1&c&cd+1\\0&-1&0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}ab+1&ad\\-1&cd+1\end{vmatrix}$$

$$=abcd+ab+cd+ad+1.$$

8．已知$\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 2t \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & b & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -1$，求$\begin{vmatrix} a+1 & 0 & 0 & t+1 \\ 0 & -2 & -b & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$.

解　先将第 2 行与第 3 行互换、第 1 行减去第 4 行，再将第 4 列乘 2、第三行提出(-1)，得到

$$\begin{vmatrix} a+1 & 0 & 0 & t+1 \\ 0 & -2 & -b & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & t \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -b & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 2t \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & b & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}.$$

9．证明：

（1）$\begin{vmatrix} a^2 & ab & b^2 \\ 2a & a+b & 2b \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (a-b)^3$；

（2）$\begin{vmatrix} ax+by & ay+bz & az+bx \\ ay+bz & az+bx & ax+by \\ az+bx & ax+by & ay+bz \end{vmatrix} = (a^3+b^3)\begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix}$；

（3）若$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & x_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & x_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & x_3 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & x_4 \end{vmatrix} = 3$，$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & y_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & y_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & y_3 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & y_4 \end{vmatrix} = 1$，则

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & 2a_{12} & 3a_{13} & 4x_1-3y_1 \\ a_{21} & 2a_{22} & 3a_{23} & 4x_2-3y_2 \\ a_{31} & 2a_{32} & 3a_{33} & 4x_3-3y_3 \\ a_{41} & 2a_{42} & 3a_{43} & 4x_4-3y_4 \end{vmatrix} = 54.$$

证明

（1）将第 3 行化出两个零，再利用展开法则得到

$$原式左边 = \begin{vmatrix} a^2 & ab-a^2 & b^2-a^2 \\ 2a & b-a & 2(b-a) \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (b-a)^2\begin{vmatrix} a & b+a \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = (a-b)^3.$$

（2）首先将左边行列式按第 1 列拆分成两个行列式之和，然后多次利用行列式的性质，可得

$$原式左边 = a\begin{vmatrix} x & ay+bz & az+bx \\ y & az+bx & ax+by \\ z & ax+by & ay+bz \end{vmatrix} + b\begin{vmatrix} y & ay+bz & az+bx \\ z & az+bx & ax+by \\ x & ax+by & ay+bz \end{vmatrix}$$

$$= a\begin{vmatrix} x & ay+bz & az \\ y & az+bx & ax \\ z & ax+by & ay \end{vmatrix} + b\begin{vmatrix} y & bz & az+bx \\ z & bx & ax+by \\ x & by & ay+bz \end{vmatrix}$$

$$= a^2\begin{vmatrix} x & ay & z \\ y & az & x \\ z & ax & y \end{vmatrix} + b^2\begin{vmatrix} y & z & bx \\ z & x & by \\ x & y & bz \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} x & y & z \end{vmatrix}$$

（3）将D按最后一列拆分成两个行列式，再利用行列式性质和假设，可得

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & 2a_{12} & 3a_{13} & 4x_1 \\ a_{21} & 2a_{22} & 3a_{23} & 4x_2 \\ a_{31} & 2a_{32} & 3a_{33} & 4x_3 \\ a_{41} & 2a_{42} & 3a_{43} & 4x_4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & 2a_{12} & 3a_{13} & -3y_1 \\ a_{21} & 2a_{22} & 3a_{23} & -3y_2 \\ a_{31} & 2a_{32} & 3a_{33} & -3y_3 \\ a_{41} & 2a_{42} & 3a_{43} & -3y_4 \end{vmatrix}$$

$$= 24\times\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & x_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & x_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & x_3 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & x_4 \end{vmatrix} - 18\times\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & y_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 6y_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & y_3 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & y_4 \end{vmatrix} = 54.$$

10．计算下列行列式：

（1）$D_n=\begin{vmatrix} a_1-b_1 & a_1-b_2 & \cdots & a_1-b_n \\ a_2-b_1 & a_2-b_2 & \cdots & a_2-b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n-b_1 & a_n-b_2 & \cdots & a_n-b_n \end{vmatrix}$；

（2）$D_n=\begin{vmatrix} x & y & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & y & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & y \\ y & 0 & 0 & \cdots & 0 & x \end{vmatrix}$；

（3）$D_n=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 2 & 2 & 3 & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & n \end{vmatrix}$；

（4）$D_{n+1}=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & y_1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & y_2 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & y_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & y_n \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n & 0 \end{vmatrix}$；

（5）$D_n=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2-n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 & 1-n \end{vmatrix}$；

（6）$D_n=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1+1 & x_2+1 & \cdots & x_n+1 \\ x_1^2+x_1 & x_2^2+x_2 & \cdots & x_n^2+x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1}+x_1^{n-2} & x_2^{n-1}+x_2^{n-2} & \cdots & x_n^{n-1}+x_n^{n-2} \end{vmatrix}$；

（7）$D_n=\begin{vmatrix} x & a & \cdots & a \\ a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a & a & \cdots & x \end{vmatrix}$；

（8）$D_n=\begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix}$，（ $a_1a_2\cdots a_n\neq 0$）；

（9）$D_n=\begin{vmatrix} x_1-m & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1 & x_2-m & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1 & x_2 & x_3-m & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n-m \end{vmatrix}$；

（10）$D_n=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 2 & 1 & 2 & \cdots & n-1 \\ 3 & 2 & 1 & \cdots & n-2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n & n-1 & n-2 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$.

解 （1）当$n=1$时，$D_1=a_1-b_1$．当$n=2$时，

$$D_2=\begin{vmatrix} a_1-b_1 & a_1-b_2 \\ a_2-b_1 & a_2-b_2 \end{vmatrix}=(a_2-a_1)(b_2-b_1).$$

当$n\geq 3$时，从第 2 列起，各列减第 1 列，得到

$$D_n=\begin{vmatrix} a_1-b_1 & b_1-b_2 & \cdots & b_1-b_n \\ a_2-b_1 & b_1-b_2 & \cdots & b_1-b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n-b_1 & b_1-b_2 & \cdots & b_1-b_n \end{vmatrix}=0.$$

（2）按最后一行展开行列式，得到

$$D_n=(-1)^{2n}x\begin{vmatrix} x & y & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & y & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & y \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & x \end{vmatrix}+(-1)^{n+1}y\begin{vmatrix} y & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ x & y & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & y \end{vmatrix}$$

$$=x^n+(-1)^{n+1}y^n.$$

（3）从第 2 行开始，各行都减第 1 行，得到

$$D_n=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & n-2 \end{vmatrix}.$$

再按第二列展开得到

$$D_n=(-2)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & n-2 \end{vmatrix}=(-2)(n-2)!.$$

（4）将第 i 行的 $(-x_i)$ 倍加到第 $n+1$ 行 $(i=1,2,\cdots,n)$，得到

$$D_{n+1}=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & y_1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & y_2 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & y_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & y_n \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -\sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i \end{vmatrix}=-\sum_{i=1}^{n} x_i y_i .$$

（5）第 2 列至第 n 列都加到第 1 列，得到

$$D_n=\begin{vmatrix} \frac{n(n+1)}{2} & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2-n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 & 1-n \end{vmatrix}.$$

再按第 1 列展开，有

$$D_n=\frac{n(n+1)}{2}\begin{vmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 2 & -2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 2-n & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & n-1 & 1-n \end{vmatrix}=(-1)^{n-1}\frac{1}{2}(n+1)!.$$

（6）依次将前一行的 (-1) 倍加到后一行，得到

$$D_n=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}=\prod_{1\le j<i\le n}(x_i-x_j).$$

（7）将第 2 行、3 行、$\cdots$、n 行加到第 1 行，得到

$$D_n=\big(x+(n-1)a\big)\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a & a & \cdots & x \end{vmatrix}=\big(x+(n-1)a\big)\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & x-a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x-a \end{vmatrix}$$

$$=\big(x+(n-1)a\big)(x-a)^{n-1}.$$

（8）将第 2 行、第 3 行、$\cdots$、第 n 行都减去第 1 行，得到

$$D_n=\begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -a_1 & a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ -a_1 & 0 & a_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \end{vmatrix}=\left(\prod_{i=1}^{n} a_i\right)\begin{vmatrix} 1+\frac{1}{a_1} & \frac{1}{a_2} & \frac{1}{a_3} & \cdots & \frac{1}{a_n} \\ -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \end{vmatrix}$$

$$=\left(\prod_{i=1}^{n}a_i\right)\begin{vmatrix}1+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i} & \frac{1}{a_2} & \frac{1}{a_3} & \cdots & \frac{1}{a_n}\\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1\end{vmatrix}=\left(\prod_{i=1}^{n}a_i\right)\left(1+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\right).$$

（9）第 2 列至第 n 列都加到第 1 列，得到

$$D_n=\left(\sum_{i=1}^{n}x_i-m\right)\begin{vmatrix}1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n\\ 1 & x_2-m & x_3 & \cdots & x_n\\ 1 & x_2 & x_3-m & \cdots & x_n\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n-m\end{vmatrix}.$$

从第 2 列开始至第 n 列，第 i 列减去第 1 列的 x_i 倍，得到

$$D_n=\left(\sum_{i=1}^{n}x_i-m\right)\begin{vmatrix}1 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 1 & -m & 0 & \cdots & 0\\ 1 & 0 & -m & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & 0 & 0 & \cdots & -m\end{vmatrix}=(-1)^n\ \left(m-\sum_{i=1}^{n}x_i\right)\ m^{n-1}.$$

（10）首先，从第 n 行开始依次将下行减上行；然后，从第 1 行开始依次将上行减下行；最后，利用展开法则，得到

$$D_n=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n\\ 1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & -1\\ 1 & 1 & -1 & \cdots & -1 & -1\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 1 & 1 & 1 & \cdots & -1 & -1\\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & -1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0 & 3 & 4 & \cdots & n & n+1\\ 0 & -2 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 0 & -2 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -2 & 0\\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & -1\end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{n+1}\begin{vmatrix}3 & 4 & \cdots & n & n+1\\ -2 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & -2 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & -2 & 0\end{vmatrix}=(-1)^{n+1}(n+1)(-1)^{1+(n-1)}\begin{vmatrix}-2 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & -2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & -2\end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{n-1}(n+1)2^{n-2}.$$

11．用递推法或数学归纳法证明：

（1）$D_n=\begin{vmatrix}2&1&0&\cdots&0&0\\1&2&1&\cdots&0&0\\0&1&2&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&2&1\\0&0&0&\cdots&1&2\end{vmatrix}=n+1$；

（2）$D_n=\begin{vmatrix}\cos\alpha&1&\cdots&0&0\\1&2\cos\alpha&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&2\cos\alpha&1\\0&0&\cdots&1&2\cos\alpha\end{vmatrix}=\cos n\alpha$.

证明 （1）先按第 1 列展开，再对其中第 2 个行列式按第1行展开，得到

$$D_n=2D_{n-1}-\begin{vmatrix}1&0&0&\cdots&0&0\\1&2&1&\cdots&0&0\\0&1&2&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&2&1\\0&0&0&\cdots&1&2\end{vmatrix}=2D_{n-1}-D_{n-2},$$

所以，

$$D_n-D_{n-1}=D_{n-1}-D_{n-2}=\cdots=D_2-D_1=3-2=1.$$

故

$$D_n=D_{n-1}+1=D_{n-2}+2=\cdots=D_1+n-1=n+1.$$

（2）用数学归纳法证明．当 $n=1$ 时，$D_1=\cos\alpha$．当 $n=2$ 时，

$$D_2=\begin{vmatrix}\cos\alpha&1\\1&2\cos\alpha\end{vmatrix}=\cos 2\alpha.$$

即 $n=1,2$ 时，所证等式成立．

假设所证等式对于小于或等于 $n-1$ 阶情形成立，下面考虑 n 阶的情形．按 D_n 的最后一行展开，得到

$$D_n=2\cos\alpha\ \ D_{n-1}-D_{n-2}=2\cos\alpha\cos(n-1)\alpha-\cos(n-2)\alpha=\cos n\alpha.$$

即对于 n 阶情形所证等式亦成立．

综上所述，$D_n=\cos n\alpha$.

12．用 Cramer 法则求解下列方程

（1）$\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 2, \\ x_1 + 2x_2 + 6x_4 = 13, \\ x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 8, \\ 4x_1 - 3x_2 + 5x_3 + x_4 = 1; \end{cases}$　　（2）$\begin{cases} 5x_1 + 6x_2 = 1, \\ x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 0, \\ x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 0, \\ x_3 + 5x_4 + 6x_5 = 0, \\ x_4 + 5x_5 = 1. \end{cases}$

解　（1）系数行列式为

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 4 & -3 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 55 \neq 0,$$

方程组有惟一解．而

$$D_1 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 & 2 \\ 13 & 2 & 0 & 6 \\ 8 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & -3 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 55, \quad D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 13 & 0 & 6 \\ 0 & 8 & -2 & 3 \\ 4 & 1 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 13 & 6 \\ 0 & 1 & 8 & 3 \\ 4 & -3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -55, \quad D_4 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 13 \\ 0 & 1 & -2 & 8 \\ 4 & -3 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 110.$$

因此，$x_1 = 1$，$x_2 = 0$，$x_3 = -1$，$x_4 = 2$．

（2）系数行列式为

$$D = \begin{vmatrix} 5 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 665 \neq 0,$$

方程组有惟一解．而

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 6 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 1507, \quad D_2 = \begin{vmatrix} 5 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 5 \end{vmatrix} = -1145,$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 5 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 703, \quad D_4 = \begin{vmatrix} 5 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{vmatrix} = -395,$$

$$D_5=\begin{vmatrix}5&6&0&0&1\\1&5&6&0&0\\0&1&5&6&0\\0&0&1&5&0\\0&0&0&1&1\end{vmatrix}=212.$$

因此，

$$x_1=\frac{1507}{665},\ x_2=\frac{-1145}{665},\ x_3=\frac{703}{665},\ x_4=\frac{-395}{665},\ x_5=\frac{212}{665}.$$

13．问 λ, μ 取何值时，齐次线性方程组

$$\begin{cases}\lambda x_1+x_2+x_3=0,\\ x_1+\mu x_2+x_3=0,\\ x_1+2\mu x_2+x_3=0\end{cases}$$

有非零解？

解 方程组的系数行列式为

$$D=\begin{vmatrix}\lambda&1&1\\1&\mu&1\\1&2\mu&1\end{vmatrix}=\mu(1-\lambda),$$

要求 $D=0$，得 $\mu=0$ 或 $\lambda=1$．

容易验证，$\mu=0$ 或 $\lambda=1$ 时，方程组确实有非零解.

B　组

1．计算以下行列式．

（1）$D_n=\begin{vmatrix} a_1+\lambda_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2+\lambda_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n+\lambda_n \end{vmatrix}$，　$\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n\neq 0$；

（2）$D_n=\begin{vmatrix} x & y & y & \cdots & y & y \\ z & x & y & \cdots & y & y \\ z & z & x & \cdots & y & y \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ z & z & z & \cdots & x & y \\ z & z & z & \cdots & z & x \end{vmatrix}$，　$(y\neq z)$；

（3）$D_n=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-2} & x_2^{n-2} & x_3^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2} \\ x_1^n & x_2^n & x_3^n & \cdots & x_n^n \end{vmatrix}$；

（4）$D_n=\begin{vmatrix} \lambda & a & a & a & \cdots & a \\ b & \alpha & \beta & \beta & \cdots & \beta \\ b & \beta & \alpha & \beta & \cdots & \beta \\ b & \beta & \beta & \alpha & \cdots & \beta \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & \beta & \beta & \beta & \cdots & \alpha \end{vmatrix}$；

（5）$D_n=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n & 1 \\ 3 & 4 & 5 & \cdots & 1 & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ n-1 & n & 1 & \cdots & n-3 & n-2 \\ n & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 \end{vmatrix}$；

（6）$D_n=\begin{vmatrix} a_1 & x & x & \cdots & x \\ x & a_2 & x & \cdots & x \\ x & x & a_3 & \cdots & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x & x & x & \cdots & a_n \end{vmatrix}$．

解　（1）作一个$n+1$阶行列式

$$A_{n+1}=\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ 0 & a_1+\lambda_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ 0 & a_1 & a_2+\lambda_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1}+\lambda_{n-1} & a_n \\ 0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n+\lambda_n \end{vmatrix}.$$

显然，$A_{n+1}=D_n$．另一方面，将A_{n+1}的第 2 行至第$n+1$行都减去第 1 行，得到

$$A_{n+1}=\begin{vmatrix}1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n\\ -1 & \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ -1 & 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ -1 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_{n-1} & 0\\ -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_n\end{vmatrix}.$$

从第 2 列至第 $n+1$ 列提出公因子 λ_i，$(i=1,2,\cdots,n)$，再将各列加到第 1 列上，有

$$A_{n+1}=\prod_{i=1}^{n}\lambda_i\begin{vmatrix}1+\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{a_i}{\lambda_i} & \dfrac{a_1}{\lambda_1} & \dfrac{a_2}{\lambda_2} & \cdots & \dfrac{a_{n-1}}{\lambda_{n-1}} & \dfrac{a_n}{\lambda_n}\\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1\end{vmatrix}=\prod_{i=1}^{n}\lambda_i\left(1+\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{\lambda_i}\right).$$

因此，$D_n=\prod\limits_{i=1}^{n}\lambda_i\left(1+\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{a_i}{\lambda_i}\right)$.

（2）按最后一行将行列式分解成两个行列式之和，再利用展开法则，得到

$$D_n=\begin{vmatrix}x & y & y & \cdots & y & y\\ z & x & y & \cdots & y & y\\ z & z & x & \cdots & y & y\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ z & z & z & \cdots & x & y\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & x-z\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}x & y & y & \cdots & y & y\\ z & x & y & \cdots & y & y\\ z & z & x & \cdots & y & y\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ z & z & z & \cdots & x & y\\ z & z & z & \cdots & z & z\end{vmatrix}=(x-z)D_{n-1}+z(x-y)^{n-1}.$$

由 $D_n=D_n^{\mathrm{T}}$ 得到

$$D_n=(x-y)D_{n-1}+y(x-z)^{n-1}.$$

联立解之，得

$$D_n=\frac{y(x-z)^n-z(x-y)^n}{y-z}.$$

（3）令

$$f(y)=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1\\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n & y\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ x_1^{n-2} & x_2^{n-2} & x_3^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2} & y^{n-2}\\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} & y^{n-1}\\ x_1^{n} & x_2^{n} & x_3^{n} & \cdots & x_n^{n} & y^{n}\end{vmatrix}.$$

利用 Vandermonde 行列式的结论，得到

$$f(y)=\prod_{i=1}^{n}(y-x_i)\prod_{1\le i<j\le n}(x_j-x_i).$$

于是，$f(y)$ 中 y^{n-1} 的系数是 $-(x_1+x_2+\cdots+x_n)\prod_{1\le i<j\le n}(x_j-x_i)$.

另一方面，$f(y)$ 的定义式中 y^{n-1} 的系数为

$$(-1)^{n+(n+1)}M_{n(n+1)}=-D_n.$$

两者相等，即 $D_n=\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)\prod_{1\le i<j\le n}(x_j-x_i)$.

（4）第 2 行至第 $n-1$ 行都减去最后一行，得到

$$D_n=\begin{vmatrix}\lambda & a & a & a & \cdots & a & a\\ 0 & \alpha-\beta & 0 & 0 & \cdots & 0 & \beta-\alpha\\ 0 & 0 & \alpha-\beta & 0 & \cdots & 0 & \beta-\alpha\\ 0 & 0 & 0 & \alpha-\beta & \cdots & 0 & \beta-\alpha\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha-\beta & \beta-\alpha\\ b & \beta & \beta & \beta & \cdots & \beta & \alpha\end{vmatrix}.$$

再将第 2 列至第 $n-1$ 列加到最后一列，得到

$$D_n=\begin{vmatrix}\lambda & a & a & a & \cdots & a & (n-1)a\\ 0 & \alpha-\beta & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 0 & \alpha-\beta & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \alpha-\beta & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha-\beta & 0\\ b & \beta & \beta & \beta & \cdots & \beta & \alpha+(n-2)\beta\end{vmatrix}$$

按第 1 列展开，得到

$$D_n=\lambda\begin{vmatrix}\alpha-\beta & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & \alpha-\beta & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \alpha-\beta & 0\\ \beta & \beta & \cdots & \beta & \alpha+(n-2)\beta\end{vmatrix}+(-1)^{n+1}b\begin{vmatrix}a & a & \cdots & a & (n-1)a\\ \alpha-\beta & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & \alpha-\beta & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \alpha-\beta & 0\end{vmatrix}$$
$$=(\alpha-\beta)^{n-2}\left[\lambda\alpha+(n-2)\lambda\beta-(n-1)ab\right].$$

（5）从第 n 行开始，后行减前行，得到

$$D_n=\begin{vmatrix}1&2&3&\cdots&n-1&n\\1&1&1&\cdots&1&1-n\\1&1&1&\cdots&1-n&1\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\1&1&1-n&\cdots&1&1\\1&1-n&1&\cdots&1&1\end{vmatrix}.$$

第 2 列至第 n 列都加到第 1 列，并利用展开法则，有

$$D_n=\begin{vmatrix}\frac{n(n+1)}{2}&2&3&\cdots&n-1&n\\0&1&1&\cdots&1&1-n\\0&1&1&\cdots&1-n&1\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&1&1-n&\cdots&1&1\\0&1-n&1&\cdots&1&1\end{vmatrix}=\frac{n(n+1)}{2}\begin{vmatrix}1&1&1&\cdots&1-n\\1&1&1&\cdots&1\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\1&1-n&1&\cdots&1\\1-n&1&1&\cdots&1\end{vmatrix}.$$

第 2 行至第 $n-1$ 行都减去第 1 行，有

$$D_n=\frac{n(n+1)}{2}\begin{vmatrix}1&1&\cdots&1&1-n\\0&0&\cdots&-n&n\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&-n&\cdots&0&n\\-n&0&\cdots&0&n\end{vmatrix}$$

再将第 1 列至第 $n-2$ 列都加到第 $n-1$ 列，有

$$D_n=\frac{n(n+1)}{2}\begin{vmatrix}1&1&\cdots&1&-1\\0&0&\cdots&-n&0\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&-n&\cdots&0&0\\-n&0&\cdots&0&0\end{vmatrix}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\frac{n+1}{2}n^{n-1}.$$

（6）当 $x=0$ 时，显然有 $D_n=a_1a_2\cdots a_n$.

当 $x=a_i\neq 0\ (i=1,2,\cdots,n)$ 时，

$$D_n=\begin{vmatrix}a_1&a_i&a_i&\cdots&a_i&a_i\\a_i&a_2&a_i&\cdots&a_i&a_i\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\a_i&a_i&a_i&\cdots&a_i&a_i\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\a_i&a_i&a_i&\cdots&a_i&a_n\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_1-a_i&0&0&\cdots&0&0&0\\0&a_2-a_i&0&\cdots&0&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots&\vdots\\a_i&a_i&a_i&\cdots&a_i&a_i&a_i\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&0&a_{n-1}-a_i&0\\0&0&0&\cdots&0&0&a_n-a_i\end{vmatrix}$$

$$=a_i(-1)^{i+i}\prod_{j\neq i}(a_j-a_i)=a_i\prod_{j\neq i}(a_j-a_i).$$

当 $x\neq 0, a_i\ (i=1,2,\cdots,n)$ 时，先提出公因子，

$$D_n = x^n \begin{vmatrix} \frac{a_1}{x} & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \frac{a_1}{x} & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & \frac{a_1}{x} \end{vmatrix}.$$

然后，第 2 列到第 n 列均减去第一列，得到

$$D_n = x^n \begin{vmatrix} \frac{a_1}{x} & 1-\frac{a_1}{x} & 1-\frac{a_1}{x} & \cdots & 1-\frac{a_1}{x} \\ 1 & \frac{a_2}{x}-1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & \frac{a_3}{x}-1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & \frac{a_n}{x}-1 \end{vmatrix} = x^n \prod_{i=2}^{n}\left(\frac{a_i}{x}-1\right) \begin{vmatrix} \frac{a_1}{x} & \frac{x-a_1}{a_2-x} & \frac{x-a_1}{a_3-x} & \cdots & \frac{x-a_1}{a_n-x} \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}.$$

再将第一列减去其余各列

$$D_n = x\prod_{i=2}^{n}(a_i-x) \begin{vmatrix} \frac{a_1}{x}-\sum_{i=2}^{n}\frac{x-a_1}{a_i-x} & \frac{x-a_1}{a_2-x} & \cdots & \frac{x-a_1}{a_n-x} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = x\prod_{i=1}^{n}(a_i-x)\left(\frac{1}{x}+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i-x}\right).$$

2．证明：

（1）$$D_n = \begin{vmatrix} a+b & ab & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & a+b & ab & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a+b & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a+b & ab \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & a+b \end{vmatrix} = \begin{cases} \dfrac{a^{n+1}-b^{n+1}}{a-b}, & a \neq b, \\ (n+1)a^n, & a=b; \end{cases}$$

（2）$$D_n = \begin{vmatrix} a_1+x_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ -x_1 & x_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -x_2 & x_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -x_{n-1} & x_n \end{vmatrix} = \prod_{k=1}^{n} x_k \left(1+\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{x_k}\right).$$

证明 （1）按第一行展开有

.

所以，

$$D_n = (a+b)D_{n-1} - ab \begin{vmatrix} 1 & ab & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a+b & ab & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a+b & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a+b & ab \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & a+b \end{vmatrix} = (a+b)D_{n-1} - abD_{n-2}$$

$$D_n - aD_{n-1} = b\left(D_{n-1} - aD_{n-2}\right) = \cdots = b^{n-2}(D_2 - aD_1) = b^n .$$

根据对称性，$D_n - bD_{n-1} = a^n$.

当$a = b$时，由上面的递推公式可得$D_n = (n+1)a^n$.

当$a \neq b$时，联立上面两个公式解得$D_n = \dfrac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a-b}$.

（2）用数学归纳法证明．当$n = 2$时，

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_1 + x_1 & a_2 \\ -x_1 & x_2 \end{vmatrix} = x_1 x_2\left(1 + \frac{a_1}{x_1} + \frac{a_2}{x_2}\right).$$

即$n = 2$时，等式成立．假设等式对于$n-1$阶情形成立，下面考虑n阶的情形．按最后一列展开，得到

$$D_n = x_n D_{n-1} + (-1)^{n+1} a_n \prod_{k=1}^{n-1}(-x_k) = \prod_{k=1}^{n} x_k \left(1 + \sum_{k=1}^{n-1}\frac{a_k}{x_k}\right) + a_n \prod_{k=1}^{n-1} x_k = \prod_{k=1}^{n} x_k \left(1 + \sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{x_k}\right).$$

综上所述，

$$D_n = \prod_{k=1}^{n} x_k \left(1 + \sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{x_k}\right).$$

3．设A_{ij}是n阶行列式$D = \det(a_{ij})$的元素a_{ij}的代数余子式，证明：

（1）$\begin{vmatrix} a_{11}+x & a_{12}+x & \cdots & a_{1n}+x \\ a_{21}+x & a_{22}+x & \cdots & a_{2n}+x \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}+x & a_{n2}+x & \cdots & a_{nn}+x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + x\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} A_{ij}$；

（2）$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} A_{ij} = \begin{vmatrix} a_{11}-a_{12} & a_{12}-a_{13} & \cdots & a_{1(n-1)}-a_{1n} & 1 \\ a_{21}-a_{22} & a_{22}-a_{23} & \cdots & a_{2(n-1)}-a_{2n} & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1}-a_{n2} & a_{n2}-a_{n3} & \cdots & a_{n(n-1)}-a_{nn} & 1 \end{vmatrix}$.

证明　（1）将原来矩阵增加一行一列，再利用行列式性质和展开法则可得

$$\text{左边} = \begin{vmatrix} 1 & x & x & \cdots & x \\ 0 & a_{11}+x & a_{12}+x & \cdots & a_{1n}+x \\ 0 & a_{21}+x & a_{22}+x & \cdots & a_{2n}+x \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{n1}+x & a_{n2}+x & \cdots & a_{nn}+x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x & x & \cdots & x \\ -1 & a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ -1 & a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + x(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} -1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ -1 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + x(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} -1 & a_{11} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ -1 & a_{21} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & a_{n1} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$+ \cdots + x(-1)^{1+n+1}\begin{vmatrix} -1 & a_{11} & \cdots & a_{1(n-1)} \\ -1 & a_{21} & \cdots & a_{2(n-1)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & a_{n1} & \cdots & a_{n(n-1)} \end{vmatrix}$$

设上式右边第一个行列式为D，从D的第二列开始依次前列减后列，然后按第一列展开，最后，按最后一列拆分成两个行列式，得到

$$D = \begin{vmatrix} a_{11}-a_{12} & a_{12}-a_{13} & \cdots & a_{1(n-1)}-a_{1n} & a_{1n} \\ a_{21}-a_{22} & a_{22}-a_{23} & \cdots & a_{2(n-1)}-a_{2n} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1}-a_{n2} & a_{n2}-a_{n3} & \cdots & a_{n(n-1)}-a_{nn} & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11}-a_{12} & a_{12}-a_{13} & \cdots & a_{1(n-1)}-a_{1n} & 1 \\ a_{21}-a_{22} & a_{22}-a_{23} & \cdots & a_{2(n-1)}-a_{2n} & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1}-a_{n2} & a_{n2}-a_{n3} & \cdots & a_{n(n-1)}-a_{nn} & 1 \end{vmatrix}$$

将上式代入前一式，即得所要求证的等式．

（2）由前面的结果，令$x = 1$得到

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} A_{ij} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & a_{11}+1 & a_{12}+1 & \cdots & a_{1n}+1 \\ 0 & a_{21}+1 & a_{22}+1 & \cdots & a_{2n}+1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{n1}+1 & a_{n2}+1 & \cdots & a_{nn}+1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$