高等数学

实验指导书

2007.10

目　录

实验一　MATLAB 基础

【实验类型】验证性

【实验学时】2 学时

【实验目的】

1．熟悉 MATLAB 的工作环境；

2．熟练掌握 MATLAB 基本语法；

3．了解 MATLAB 关于矩阵的运算；

4．掌握 MATLAB 的符号运算；

5．掌握 MATLAB 平面绘图的命令及辅助操作；

6．掌握 MATLAB 常用函数及命令；

【实验内容】

1. 熟悉 MATLAB 的工作环境；

2．MATLAB 的基本运算；

3．MATLAB 基本语法；

4．MATLAB 常用函数与命令；

5．MATLAB 符号运算；

6．MATLAB 平面绘图操作；

【实验前的预备知识】

1．MATLAB 基本命令用法；

2．线性代数中的矩阵运算；

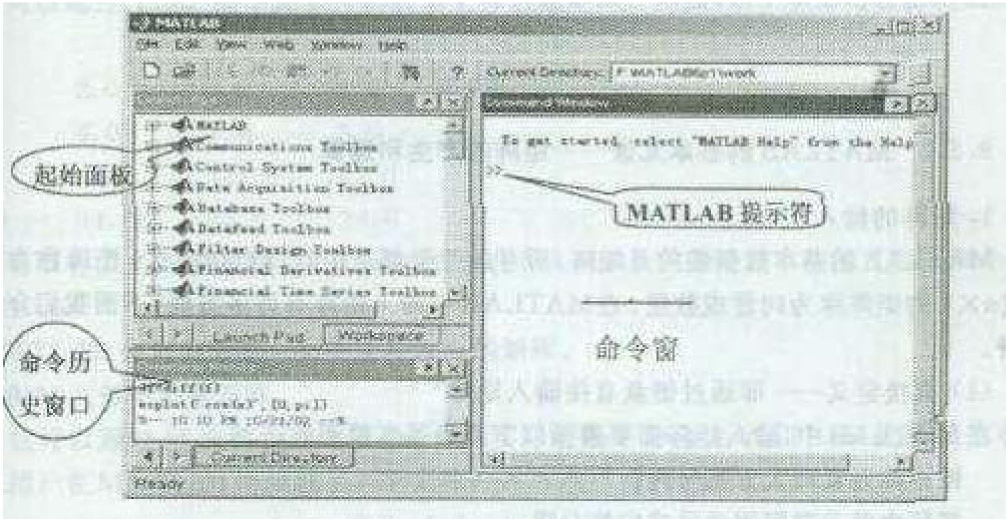
3．微积分的基本知识。

4．主要命令的用法提示：

【实验方法或步骤】

一、运行 MATLAB

为了使用 MATLAB，首先需要运行 MATLAB 的可执行文件（一般在桌面上有一个图标），启动 MATLAB 的命令窗口（Command Window）。如下图所示：



右边窗口中的“>>”是 MATLAB 的命令提示符，只要在提示符后键入要执行的命令，并按回车键“Enter”即可执行该条命令 。

如果你不知某个命令如何使用，可以通过 help 命令查询该命令的使用方法。例如：为了查询正弦函数 sin 的用法，可在 MATLAB 的命令提示符“>>”后键入“help sin”，然后按键盘上的“Enter”键执行查询，执行后显示如下结果：

```
SIN     Sine.
    SIN(X) is the sine of the elements of X.
     See also asin, sind.
    Overloaded functions or methods (ones with the same name in other directories)
       help sym/sin.m
    Reference page in Help browser
       doc sin
```

在 MATLAB 下进行基本数学运算，只需将运算式直接打入提示号（>>）之后，并按入 Enter 键即可，运算结果将被保存在你指定的变量中，如果你没有指定运算结果保存在哪个变量中，系统将自动将结果保存在默认的变量 ans 中，运算结束后其数值显示在屏幕上。例如：

输入

```
(10*19+2/4-34)/2*3    % 计算表达式的值
```

按回车执行后结果显示为

```
ans
= 234.7500
```

上式中的“%”是 MATLAB 的注释标志符，其后面同一行内的内容作为注释内容，不会被执行。

如果在上述的例子结尾加上”;”，则该命令计算结果不会显示在屏幕上，要得知计算值只须键入该变量即可。

如果你想中止正在执行中的 MATLAB 命令，可以按 Ctrl＋C（即同时按 Ctrl 及 C 二个键）。

退出 MATLAB 有三种方法：

1.exit；2.quit；3.直接关闭 MATLAB 的命令视窗（Command window）。

二、矩阵的创建与变量的赋值

MATLAB 的基本数据结构和运算单元是矩阵，所有的变量都是矩阵，1×n 或 n×1 矩阵也称为向量或数组。在 MATLAB 中创建矩阵有多种方法，我们介绍几种常用的方法。

1．直接创建—即通过键盘输入创建

创建矩阵时要遵循以下几条基本规则：

（1）将矩阵元素输入方括号内；

（2）同一行的元素用逗号或空格分隔；

（3）不同行的元素用分号分隔或直接用回车符换行后分行输入。

例如：输入如下命令

```
>> A=[16 3 2 13;5 10 11 8;9 6 7 12;4 15 14 1]
```

结果显示为：

```
A =

    16     3     2    13
     5    10    11     8
     9     6     7    12
     4    15    14     1
```

这就创建了一个 4×4 矩阵变量 A。

2．通过外部数据文件加载

我们也可以通过“Load”命令加载外部数据文件创建矩阵。例如对于全部数据都是由数据组成的文本文件：

```
1.0   2.0   3.0   4.0

5.0   6.0   7.0   8.0
```

9.0　10.0　11.0　12.0

可以将该文本文件另存为 A.mat（“.mat”是 MATLAB 专用的数据文件的后缀名），然后在 MATLAB 的命令窗口中输入如下命令：

Load A.mat

执行命令后 MATLAB 会自动创建一个变量名为 A 的矩阵。

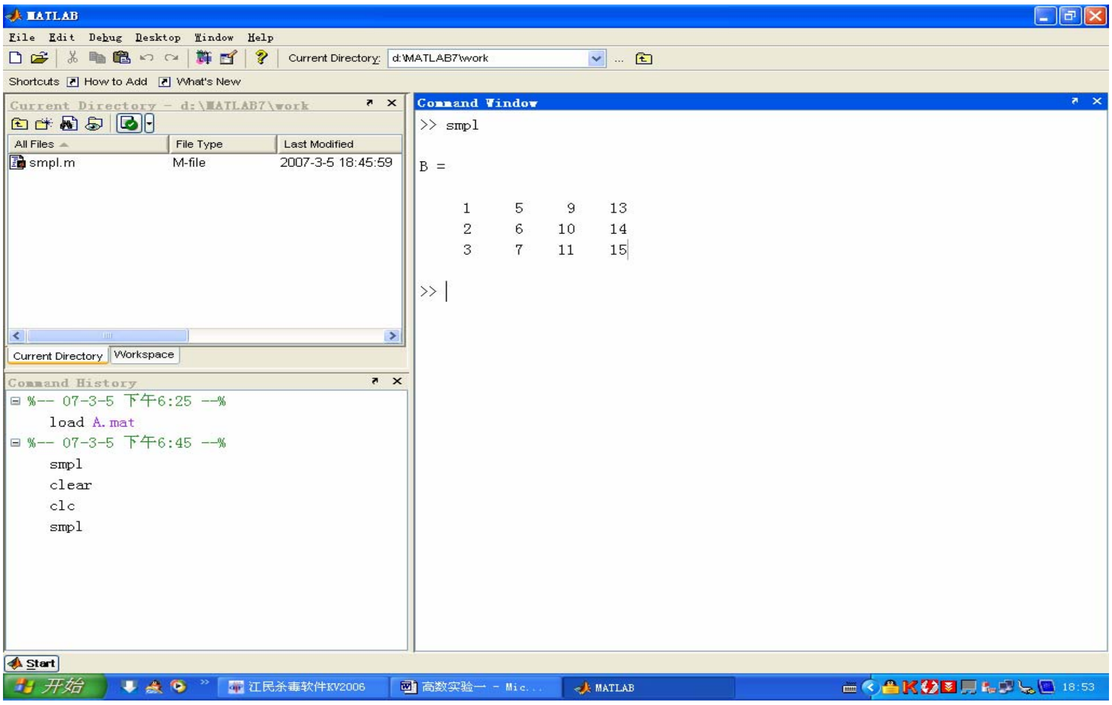
3．**在 M-文件中创建矩阵**

我们也可以通过 M-文件创建矩阵（M-文件实际上是一种包含 MATLAB 代码的文本文件）。例如在 MATLAB 中新建了一个 M-文件：

B =[1 5 9 13；2 6 10 14；3 7 11 15]

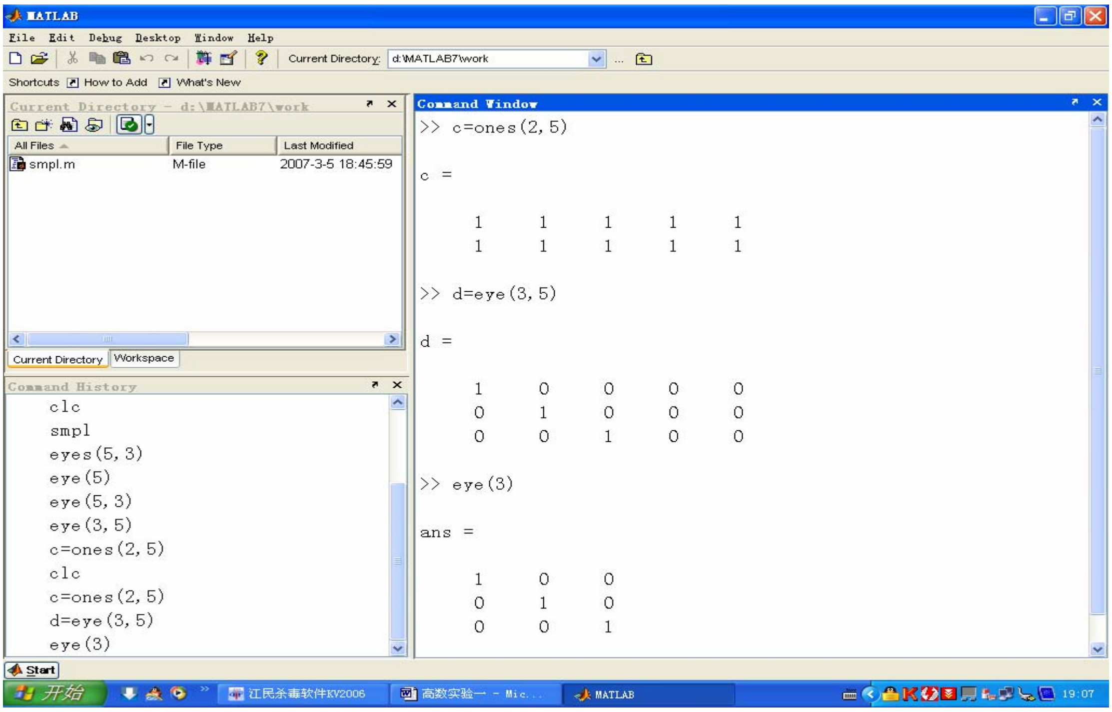
将该文件保存为 smpl.m 后，在 MATLAB 的命令窗口中输入如下命令：smpl

结果如下图



4．**通过函数生成特殊矩阵**

MATLAB 提供了一些能生成特殊矩阵的函数（有关函数见附录）。例如：函数 zeros(m,n) 生成一个 m 行 n 列的全零阵，ones(m,n) 生成一个 m 行 n 列的全 1 阵，eye(n) 生成一个 n 阶单位矩阵，eye(m,n) 生成一个主对角线元素全为 1，其余元素为 0 的 m 行 n 列矩阵，等等。



5．**通过小矩阵拼接成大矩阵**

在 MATLAB 中可以将几个小矩阵拼接起来构成一个大矩阵，拼接的时候就像直接创建矩阵一样，只要把已经存在的小矩阵作为大矩阵的元素就可以了，但要注意保证拼接成的大矩阵的各行和各列的元素个数分别相等，否则会出错。例如：利用上面创建的矩阵 A、B 可以创建下面的矩阵：

E=[A;2*B],也可以创建矩阵 F=[A ones(4) ;zeros(3,4) B]等。

三、矩阵元素的提取和引用

在 MATLAB 中可以通过指定元素的位置提取或引用矩阵的元素，如命令 A(3,5)提取的是矩阵 A 中第三行第五列的元素，通过这种方式即可以引用矩阵的元素进行计算，也可以给矩阵元素重新赋值。如：

命令 H=A+A(3,5)将矩阵 A 的每个元素加上第三行第五列的元素后创建了一个新矩阵 H。又如：命令 A(3,5)=20，将矩阵 A 的第三行第五列的元素重新赋值为 20。值得注意的是，通过此种方式还可以对矩阵进行扩充，如：输入命令 A(5,6)=1，尽管矩阵 A 中原来并没有这个元素，但是执行该命令后，矩阵 A 将被扩充为 5 行 6 列的矩阵，其原有元素的位置不变，只是第 5 行第 6 列的元素成为 1，其余位置的元素被自动赋值为 0。

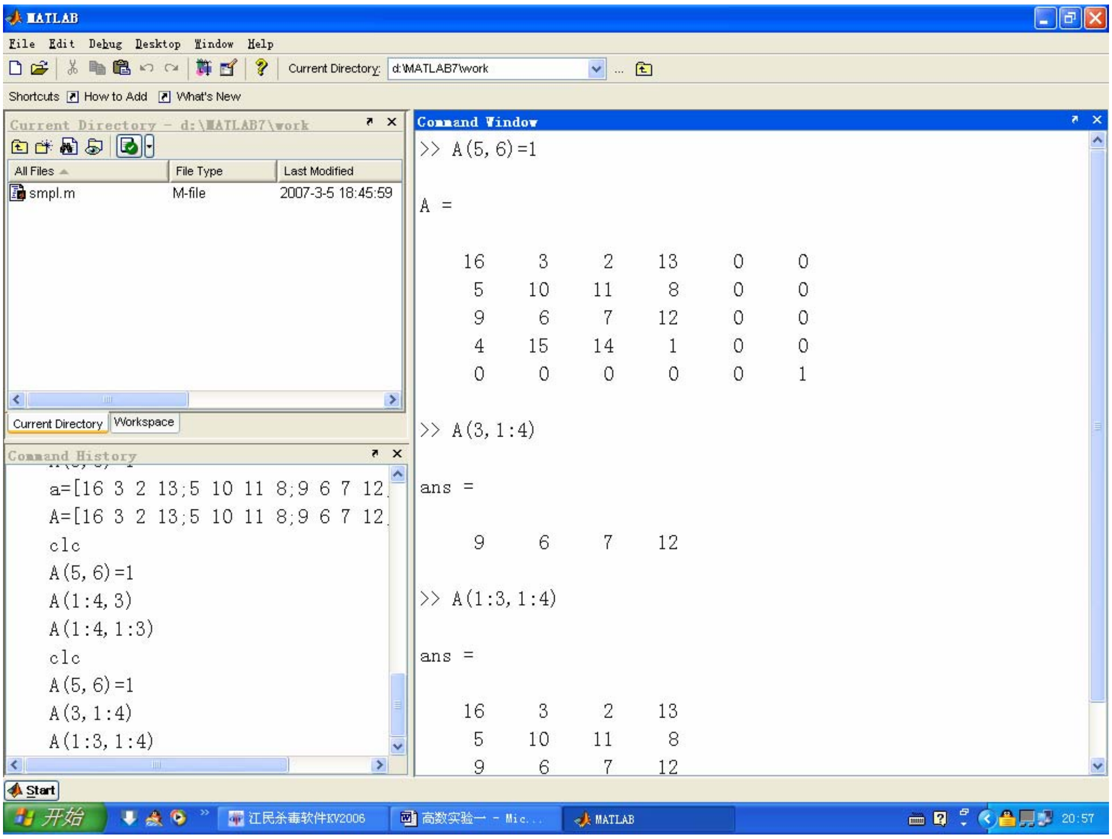
我们也可以同时提取矩阵的多个元素，此时要用到冒号"："，下面给出它的一些作用。

A(1:k,j)—提取矩阵 A 的第 j 列的前 k 行元素；

A(k,m:n)—提取矩阵 A 的第 k 行的第 n 到 m 列元素；

A(:,j)—提取矩阵 A 的第 j 列的全部元素；

A(k,:)—提取矩阵 A 的第 k 行的全部元素。



四、矩阵的运算

MATLAB 中提供了下列矩阵运算：

“+”—加法，矩阵的对应元素相加；

“-”—减法，矩阵的对应元素相减；

“.*”—标量乘法，矩阵的对应元素相乘

“*”—矩阵乘法，结果与线性代数中的结果相同；

“^”--乘幂，当指数为标量时结果与线性代数中的结果相同；

“\”—左除，“/”—右除，“’”—转置

这些运算要求满足下面的规则：

（1） 相同行数和列数的矩阵可以进行加法、减法和标量乘法；

（2） 矩阵 A 列数与 B 的行数相等时可以进行矩阵乘法 A*B；

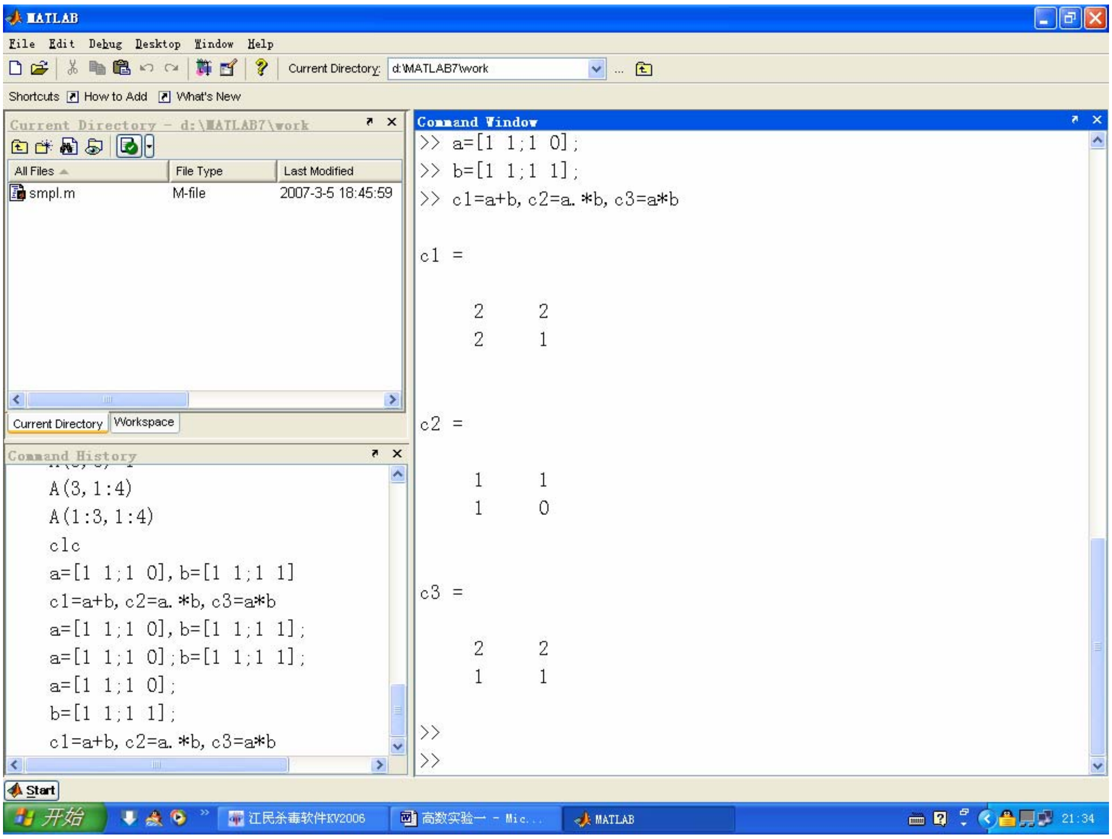
（3）一个可逆矩阵 A 和一个有相同行数的列向量 b 可以进行左除运算 A\b，其结果为线性方程组 A*x=b 的解；

（4）一个可逆矩阵 A 和一个有相同列数的行向量 b 可以进行右除运算 b/A，其结果为

线性方程组 x*A=b 的解；

（5）一个标量可以和一个矩阵做上述所有运算，但是运算结果不再是上面的结果，而是这个标量与矩阵的每一个元素都进行一次相应的加、减、乘或除法运算。

下图中的 c1、c2、c3 是分别对矩阵 a 和 b 进行了加法、标量乘法和矩阵乘法后的结果，大家要注意两种乘法的区别。



五．数组的创建和运算

MATLAB 中把行向量或列向量也成为数组，所以可以创建矩阵的方法都可以创建数组。此外，MATLAB 还提供了一些创建数组的方法。

1．用冒号“：”创建数组

例如：a=1:5　%生成从 1 到 5，公差为 1 的等差数列；

　　b=1:0.2:2　%生成从 1 到 2，公差为 0.2 的等差数列。

2．用函数生成数组

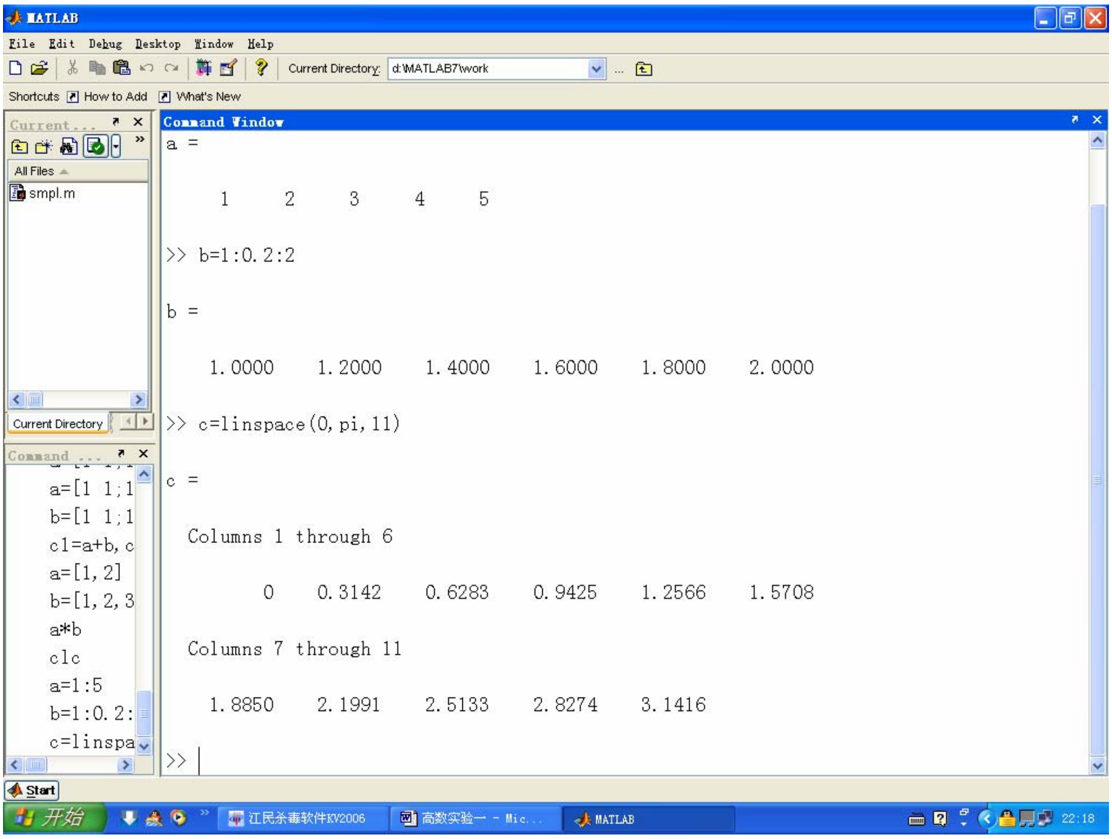
常用的函数有 linspace 和 logspace。用法如下：

linspace（a，b，n）：生成一个有 n 个元素的数组，其元素为从起始值 a 到终止值 b 的等差数列；

logspace（a，b，n生成数组元素的个数）：生成一个有n个元素的数组，其元素为从起始

值 10^a 到终止值 10^b 的等比数列。

如果在使用这两个函数时没有给出第三个参数，则系统默认为生成 100 个元素的数组。示例如下：



对于数组来说，矩阵的加、减法和标量乘法仍然可以进行，但是矩阵乘法和除法就没有意义了。由于数组也是 MATLAB 中的一个重要工具，所以 MATLAB 增加了专门针对数组的下列运算：

“*”—乘法，数组的对应元素相乘；

“/”—除法，数组的对应元素相乘；

“.^”—乘幂。

这些运算要求满足下面的规则：

（1）元素个数相同的两个数组可以进行上述三种运算，其结果是对应元素做相应的运算；

（2）标量也可以和数组做乘幂运算，其结果为：如果 a=[a1,a2,……,an]为数组，c 为标量，则

a.^c的结果为[$a1^c$,$a2^c$,……,an^c]；

c.^a的结果为[c^{a1}, c^{a2},……, c^{an}]。

值得注意的是，在 MATLAB 中，多项式是通过行向量来表示的，一个多项式表示为由其系数按降幂排列所组成的行向量（幂次为零的项系数记为零，零系数不可省略）。例如要表示多项式 $p = x^4 - 12x^3 + 25x + 3$，在 MATLAB 中只需输入:

p=[1 -12 0 25 3]。

MATLAB 也提供了很多针对多项式的函数，见附录。

六、符号运算

1．创建符号对象

在进行符号运算时，首先要定义基本的符号对象（可以是常数、变量以及表达式等），然后利用这些基本符号对象去构成新的表达式，从而进行所需的符号运算。在运算中，凡是由包含符号对象的表达式所生成的新对象也都是符号对象。可以使用 sym 和 syms 这两个函数来创建和定义基本的符号对象。

（1）创建符号变量

函数 sym 用来创建符号变量、表达式或将数值矩阵转化为符号形式，最常用的形式为：

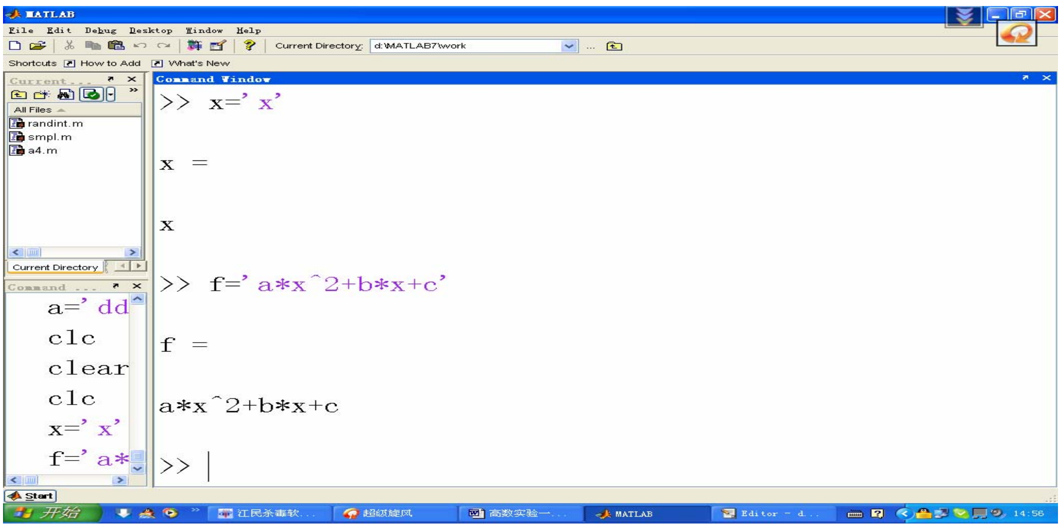
x=sym（‘字符串’）--创建单个的变量，变量的值为单引号内的字符串（也可以是数值字符），使用时注意不能丢了单引号。

函数 syms 用来同时创建多个符号变量，这些符号变量的值就是变量本身，最常用的形式为：

syms arg1 arg2 arg3 …,将 arg1 arg2 arg3 …等定义为符号变量，其作用等价于 arg1=sym(‘arg1’); arg2=sym(‘arg2’); arg3=sym(‘arg3’)…。

关于这两个函数的更多用法可以查阅 MATLAB 的帮助。

符号变量也可以通过直接赋值的方法创建，例如下图中的 x 和 f



就是通过直接赋值的方法创建的符号变量，其值分别是‘x’和‘a*x^2+b*x+c’。

（2）创建符号矩阵

MATLAB 中也有符号矩阵，即各元素均为符号表达式的矩阵。符号矩阵的创建方法和符号变量类似，例如下面的命令：

A=sym('[4+x x^2 3; 5*x x+a x^3]')

执行后将下面的创建符号矩阵 A

A =

[4+x, x^2,   3]

[5*x, x+a, x^3]

或者利用直接创建的方法如下：

syms x a

A=[4+x x^2 3; 5*x x+a x^3]

得到的结果是相同的。

（3）创建符号函数

先定义符号变量，在建立符号表达式，例如：

syms x y z

f=sin(x+y)/(x-y)

g=sqrt(x^2+y^2+z^2)

2．微积分符号运算

符号运算得到的是符号表达式的解析解，其结果仍然是符号表达式。在 MATLAB 中进行符号微积分运算时要指定自变量，如果没有明确指定自变量，系统将自动由内部函数 findsym 搜索自变量，函数 findsym 搜索自变量的规则为：如果表达式中有符号变量 x，则默认 x 为自变量；如果没有 x，则以靠近 x 的优先作为自变量，当与 x 的接近程度相同时，以后面的优先。

（1）极限运算

MATLAB 中求极限的函数为 limit，其调用格式为：

- limit(f,x,a) 求以 x 作为自变量的符号表达式 f 当 x->a 时的极限；
- limit(f,a) 求以系统默认变量为自变量的符号表达式 f 当 x->a 时的极限；
- limit(f) 求以系统默认变量为自变量的符号表达式 f 当 x->0 时的极限；
- limit(f,x,a，‘right’)或 limit(f,x,a，‘right’) 求以 x 作为自变量的符号表达式 f 当 x->a 时

的右极限或左极限；

例如：

syms x h

limit((sin(x+h)-sin(x))/h,h,0) %求当 h->0 时的极限

结果为：

ans=

cos(x)

又如：limit(（x-2）/(x^2-4),2) %求默认变量 x->0 时的极限

结果为

ans=

1/4

（2）符号微分与符号积分

在 MATLAB 中，求符号表达式的导数和微分由函数 diff 来完成，其调用格式为：

- diff(f,x,n) 求以 x 作为自变量的符号表达式 f 的 n 阶微分；
- diff(f,n) 求以系统默认变量为自变量的符号表达式 f 的 n 阶微分；
- diff(f,a) 求以 a 为自变量的符号表达式 f 的微分；
- diff(f) 求以系统默认变量为自变量的符号表达式 f 的 n 阶微分；

求符号表达式的积分由函数 int 来完成，其调用格式为：

- int(s) 求符号表达式 f 对系统默认变量的不定积分；
- int(s,v) 求符号表达式 f 对指定的自变量 v 的不定积分；
- int(s,a,b) 求符号表达式 f 对系统默认变量在区间[a,b]上的定积分，这里 a,b 可以是标量或符号变量；
- int(s,v,a,b) 求符号表达式 f 对指定变量 v 在区间[a,b]上的定积分，这里 a,b 可以是标量或符号变量；

例如：

```
>>syms a b c x;
>> f=x^3+c*sin(x)
>> diff(f)
 ans =
 3*x^2+c*cos(x)
```

```
>> diff(f,c)
 ans =
 sin(x)
>> int(f)
 ans =
 1/4*x^4-c*cos(x)
 >> int(f,c,a,b)
 ans =
 x^3*(b-a)+1/2*sin(x)*(b^2-a^2)
```

(3)符号求和

当符号变量的和存在时，可以用函数 symsum 进行符号求和，其调用格式为：

- symsum(s) 将符号表达式 s 作为一般项对系统默认变量求不定和；
- symsum(s,v) 将符号表达式 s 作为一般项对指定变量求无穷和；
- symsum(s,v，a,b) 或 symsum(s,v，a,b) 将符号表达式 s 作为一般项对指定变量或默认变量在区间[a,b]上取值时求和。

例如：

```
>> syms k n
>> simple(symsum(k^2,0,n))
ans =
 1/6*n*(n+1)*(2*n+1)
>> symsum(1/k^2,1,inf)
 ans =
 1/6*pi^2
```

上面的 simple 函数的作用是将求和得到的表达式进行化简。

七、平面作图命令 plot，调用格式：

（1）plot(y),以向量 y 的值为纵坐标，横坐标从 1 开始自动赋值绘制一条平面曲线；

（2）plot(x,y), x 和 y 为长度相同的向量，以 x 的值为横坐标和 y 的值为纵坐标绘制一条平面曲线；

（3）plot(x,y，s),这里 s 是作图控制参数，用来控制线条的颜色、线型等，用一个单引号括起来的字符串表示，所绘制的曲线与第二种格式相同（控制参数字符见下表，可以组合使用)；

plot 绘图函数的参数				
	控制字符	颜色	控制字符	图线型态
	y	黄色	.	点
	k	黑色	o	圆
	w	白色	x	x
	b	蓝色	+	+
	g	绿色	*	*
	r	红色	-	实线
	c	亮青色	:	点线
	m	锰紫色	-.	点虚线
			--	虚线

plot 是绘制一维曲线的基本函数，但在使用此函数之前，我们需先定义曲线上每一点的 x 及 y 座标。下例可画出一条正弦曲线：

x=linspace(0,2*pi,100); % 100 个点的 x 座标

y=sin(x); % 对应的 y 座标

plot(x,y);

这就画出了正弦函数在[0，2π]上的图形

若要画出多条曲线，只需将座标对依次放入 plot 函数即可：

plot(x, sin(x), x, cos(x))；

该命令在同一坐标系中画出了正弦和余弦函数的图形。

八、程序设计语言

MATLAB 命令也可以像 c 语言一样进行程序设计，下面简单介绍一些与程序设计基础知识。

1．变量的命名规则

（1）MATLAB 对变量名的大小写是加以区分的。

（2）变量名的第一个字符必须为英文字母，可以包含下划线、数字，但不能为空格符、标点。

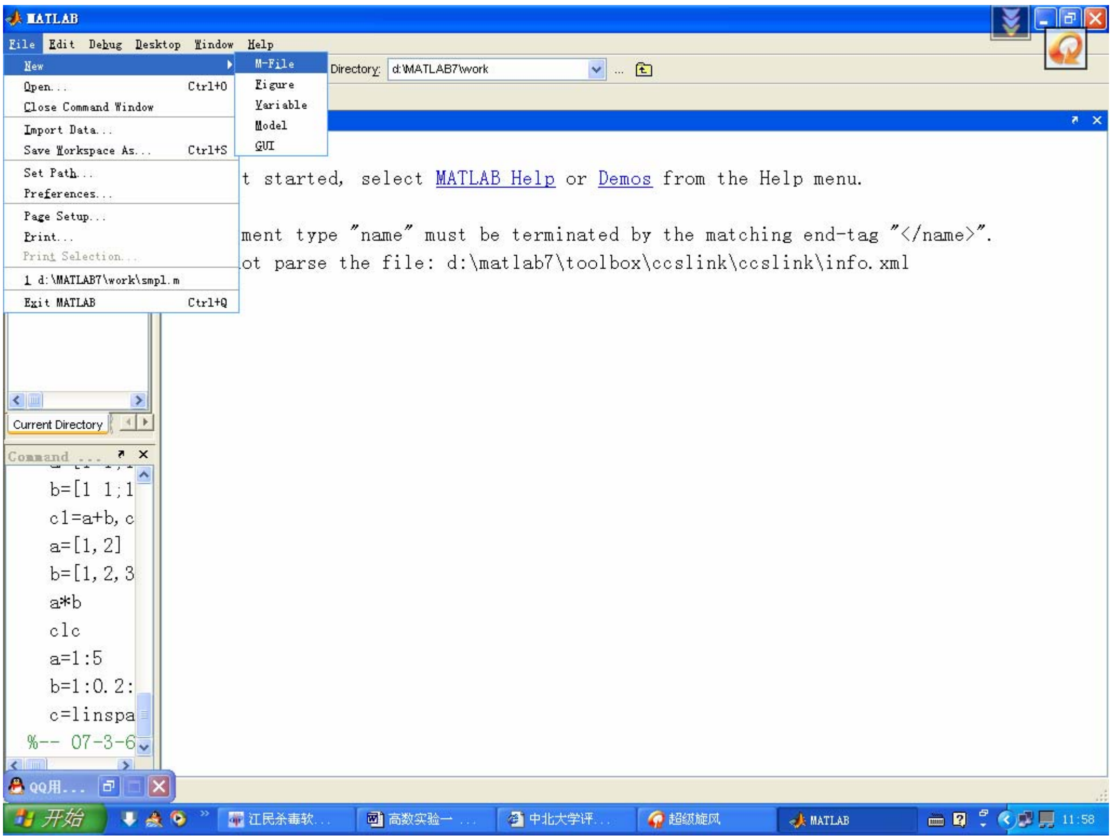
为了使用上的方便，MATLAB 系统预定义了一些永久变量：

ans	预设的计算结果的变量名
eps	MATLAB 定义的正的极小值=2.2204e-16
pi	内建的 π 值
inf	∞值，无限大（1/0）
NaN	无法定义一个数目（0/0）
i 或 j	虚数单位 i=j=(-1)^(1/2)

当变量不再需要时，可以键入 clear 命令清除所有定义过的变量。

2．M-文件

由 MATLAB 语言代码组成的文件成为 M-文件，它有两种类型：脚本文件和函数文件，其后缀名均为.m。为了建立 M-文件，可以在 File 菜单下选择 New，然后选择 M-file（见下图），MATLAB 将打开一个文本编辑窗口，在这里就可以输入 MATLAB 命令和数据编辑 M-文件了。



（1）脚本文件

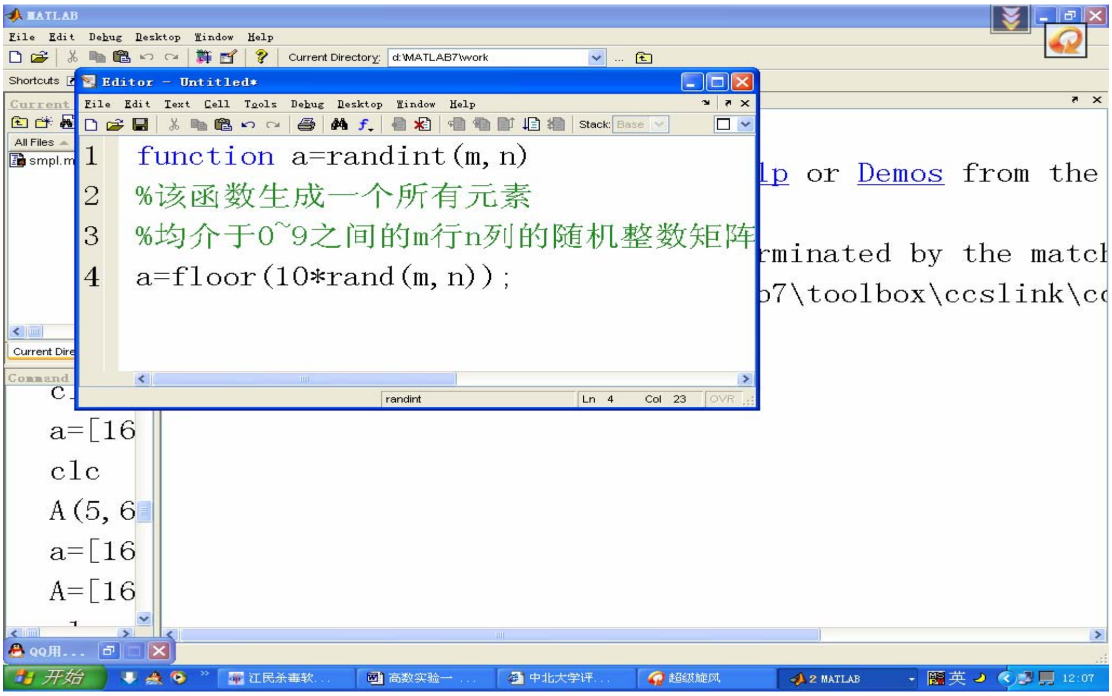
脚本文件是一系列 MATLAB 命令的简单组合，没有输入和输出参数，相当于将一批命令一次性执行，可以通过调用文件名在 MATLAB 命令窗口中直接运行。

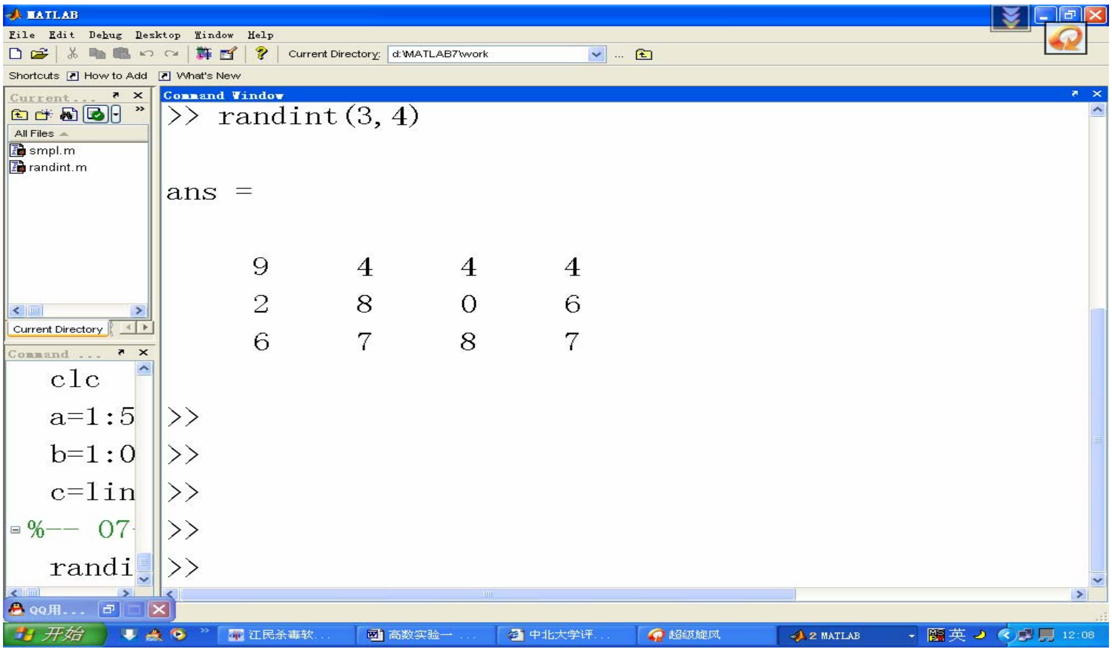
（2）函数文件

函数文件是 M-文件 MATLAB 的主要形式，MATLAB 的所有函数（包括系统自己的库函数）都是用 M-文件定义或说明的。函数文件极大的扩展了 MATLAB 的能力。对于特殊的问题，我们可以像 C 语言一样完全类似的建立自己的函数文件。

需要注意的是函数 M-文件的保存文件名必须和它所定义的函数名相同。函数 M-文件的第一行说明了函数名和输入、输出参数。如果没有这一行，则该 M-文件就是一个脚本文件。

下图中给出了一个函数文件的建立和使用的例子。





3. ***关系与逻辑运算***

在执行关系及逻辑运算时，MATLAB 将输入的非零的数值都视为真 (True)而为零的数值则视为假 (False)。 运算的输出值将判断为真者以 1 表示而判断为假者以 0 表示。各个运算符须用在二个大小相同的阵列或是矩阵中比较。下面的两个表中分别给出了 MATLAB 的关系及逻辑运算所用的符号及其含义。

关系运算

指令	含义
<	小于
<=	小于等于
>	大于
>=	大于等于
==	等于
～=	不等于

逻辑运算

指令	含义
&	逻辑 and
|	逻辑 or
～	逻辑 not

为了使用的方便，MATLAB 还提供了一些逻辑关系函数（见附录）

4．程序流程控制

MATLAB 与其它大部分高级语言一样,有它自己的控制流语句.控制流极其重要，因为它使过去的计算影响将来的运算。MATLAB 提供如下几种控制流结构：For 循环，While 循环,If-Else-End 结构和 switch-case-end 结构。由于这些结构经常包含大量的 MATLAB 命令，故经常出现在 M 文件中。MATLAB 支持的控制流语句和 C 语言支持的控制流语句在调用格式上非常相似.

(I) For 循环

For 循环允许一条语句或一组语句被重复执行预先指定的次数。For 循环的一般形式是：

```
for x =array
    语句
end
```

在 for 和 end 之间的语句按数组中的每一列执行一次。在每一次迭代中，x 被指定为数组的下一列，即在第 n 次循环中，x=array(:, n)。例如，下面的程序

```
for n=1:10
    x(n)=sin(n*pi/10);
end
x
```

执行结果为

x =

0.3090 0.5878 0.8090 0.9511 1.0000 0.9511 0.8090 0.5878 0.3090 0.000
0

换句话，第一语句是说：对 n 等于 1 到 10，执行所有语句，直至下一个 end 语句。第一次通过 For 循环 n=1，第二次，n=2，如此继续，直至 n=10。在 n=10 以后，For 循环结束，然后执行 end 语句后面的任何命令.注意,该循环结束后,n=10.

For 循环的其它重要方面是：

(1)For 循环不能用 For 循环内重新赋值循环变量 n 来终止。

```
forn=1:10
    x(n)=sin(n*pi/10);
    n=9;
end
```

x

x =

0.3090 0.5878 0.8090 0.9511 1.0000 0.9511 0.8090 0.5878 0.3090 0.000
0

n

n=

9

执行过程是这样的:

n=1,

x(1)=sin(pi/10),

n=9,

n=2,

x(2)=sin(2*pi/10),

n=9,

n=3,

...,

n=10,

x(10)=sin(10*pi/10),

n=9.

循环结束后,n=9.

(2)在 For 循环内接受任何有效的 MATLAB 数组。

```
data=[3 9 45 6; 7 16 -1 5]
data =
3    9    45    6
7    16   -1    5
forn=data
x=n(1)-n(2)
end
x =
-4
```

```
x =
-7
x =
46
x =
1
```

(3)For 循环可按需要嵌套。

```
forn=1:5
for m=1:5
A(n,m)=n^2+m^2;
end
disp(n)
end
1
2
3
4
5
A
A =
2     5     10     17     26
5     8     13     20     29
10    13     18     25     34
17    20     25     32     41
26    29     34     41     50
```

(4)当有一个等效的数组方法来解给定的问题时，应避免用 For 循环。例如，上面的第一个例子可被重写为

```
n=1:10;
x=sin(n*pi/10)
x =
```

0.3090 0.5878 0.8090 0.9511 1.0000 0.9511 0.8090 0.5878 0.3090 0.000
0

两种方法得出同样的结果，而后者执行更快，更直观，要求较少的输入。

(5)为了得到最大的速度，在 For 循环(While 循环)被执行之前，应预先分配数组。例如，前面所考虑的第一种情况，在 For 循环内每执行一次命令，变量 x 的大小增加 1。迫使 MATLAB 每通过一次循环要花费时间对 x 分配更多的内存。为了消去这个步骤，For 循环的例子应重写为

```
x=zeros(1,10);
forn=1:10
x(n)=sin(n*pi/10);
end
```

现在，只有 x(n)的值需要改变。

例 1 相传古代印度国王要褒奖他的聪明能干的宰相达依尔（国际象棋发明者），问他要什么？达依尔回答：“陛下只要在国际象棋棋盘的第一个格子上放一粒麦子，第二个格子上放二粒麦子，以后每个格子的麦子数都按前一格的两倍计算。如果陛下按此法给我 64 格的麦子，就感激不尽，其他什么也不要了。”国王想：“这还不容易！”让人扛了一袋麦子，但很快用光了，再扛出一袋还不够，请你为国王算一下共要给达依尔多少小麦？（1m^3小麦约 1.4×10^8颗）

解 麦粒总数为

$$1+2+2^2+2^3+2^4+\cdots+2^{63}$$

程序如下：

```
a=1;
s=0
for i=1:64
   s=s+a;
   a=2*a;
end
s=s/1.4/10^8
```

运行后得：

```
s=
  1.3176e+011
```

例 2 公元前五世纪我国古代数学家张丘建在《算经》一书中提出了"百鸡问题"：鸡翁一值钱五，鸡母一值钱三，鸡雏三值钱一。百钱买百鸡，问鸡翁、母、雏各几何？

解 设 x:鸡翁数，则 x 的范围：0～19

y:鸡母数，则 y 的范围：0～33

z:鸡雏数，则 z 的范围：0～100

则：

$$x+y+z=100$$

$$5x+3y+z/3=100$$

这是一个不定方程。

```
for x=0:19
   for y=0:33
      for z=0:100
         if (x+y+z==100)&(5*x+3*y+z/3==100)
            d=[x,y,z]
         end
      end
   end
end
```

运行后得结果：

```
d =
    0    25    75
d =
    4    18    78
d =
    8    11    81
d =
   12     4    84
```

(II) While　循环

与 For 循环以固定次数求一组命令的值相反，While 循环以不定的次数重复执行一组语句。While 循环的一般形式是：

while 表达式 1

语句 1

end

只要表达式 1 里的所有元素为真，就执行 while 和 end 之间的语句 1,否则，就结束循环。通常，表达式的值给出一个标量值，但数组值也同样有效。在数组情况下，当数组的所有元素为真（值不等零）时，就执行语句 1，数组中有一个元素为假（值为零），就结束循环。

例 3 按下面的公式计算：

$$e=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\cdots$$

使误差小于给定的ε.

解：把$\frac{1}{(n+1)!}$作为误差，程序如下：

```
error=input('请输入误差：');
x=1;
y=0;
n=1;
while x>error
   y=y+1;
   x=x/n;
   n=n+1;
end
e=y
```

运行如下：

```
请输入误差：0.001
e =
   2.7181
```

(III) IF-ELSE-END 结构

很多情况下，命令的序列必须根据关系的检验有条件地执行。在编程语言里，这种逻辑由某种 If-Else-End 结构来提供。最简单的 If-Else-End 结构是：

```
if 表达式 1
语句 1
end
```

如果在表达式 1 中的所有元素为真(非零)，那么就执行 if 和 end 语言之间的 语句 1。

假如有两个选择，If-Else-End 结构是：

```
if  表达式 1
    语句 1
 else
    语句 2
 end
```

在这里，如果表达式 1 为真，则执行语句 1；如果表达式是假，则执行语句 2。

当有三个或更多的选择时，If-Else-End 结构采用形式

```
 if 表达式 1
    语句 1
 elseif 表达式 2
    语句 2
 elseif 表达式 3
    语句 3
 elseif 表达式 4
    语句 4
 elseif ……
        .
        .
        .
 else
     语句
 end
```

如果表达式 1 为真，则执行语句 1，结束循环；如果表达式 1 为假，则检验表达式 2，如果表达式 2 为真，则执行语句 2，结束循环；如果表达式 2 为假，则检验表达式 3，如此下去，如果所有表达式都为假时，则执行最后的语句。即只执行第一个真值表达式相关的语句；接下来的表达式不检验，跳过其余的 If-Else-End 结构。而且，最后的 else 命令可有可无。

(IV) switch-case-end 结构

如果在一个程序中，必须针对某个变量不同取值情况进行相应操作，switch 语句比 if else 语句更方便。switch 语句的一般形式为：

```
switch  分支条件（数值或字符串）
case   数值（或字符串）条件 1
        语句 1
case   数值（或字符串）条件 2
        语句 2
case   数值（或字符串）条件 3
        语句 3
case   ...
        ...
otherwise
        语句
end
```

其中分支条件可以是一个函数、变量或者表达式.如果条件 1 与分支条件匹配就执行语句 1，退出循环；否则，检验条件 2，如果条件 2 与分支条件匹配执行语句 2，退出循环；否则，检验条件 3，...，当所有条件都不与分支条件匹配时就执行最后的语句。注意 otherwise 是可以省略的。

【实验练习】

已知矩阵 A、B、b 如下：

$$A=\begin{bmatrix} 3 & 4 & -1 & 1 & -9 & 10 \\ 6 & 5 & 0 & 7 & 4 & -16 \\ 1 & -4 & 7 & -1 & 6 & -8 \\ 2 & -4 & 5 & -6 & 12 & -8 \\ -3 & 6 & -7 & 8 & -1 & 1 \\ 8 & -4 & 9 & 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}，\quad B=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 6 & -3 & 2 \\ 7 & 9 & 16 & -5 & 8 & -7 \\ 8 & 11 & 20 & 1 & 5 & 5 \\ 10 & 15 & 28 & 13 & -1 & 9 \\ 12 & 19 & 36 & 25 & -7 & 23 \\ 2 & 4 & 6 & -3 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

$b=[1 \quad 3 \quad 5 \quad 7 \quad 9 \quad 11]$。在 MATLAB 中输入上述矩阵并完成以下运算：

1.作X21=A’,X22=A+B,X23=A-B, X31=|A|,X32=|B|,X41=R(A),X42=R(B) ,X5=A^{-1}，X6=$B^2(A^{-1})^2$；

2.分别求矩阵 A 与 B 的矩阵乘积 C1 和 A 与 B 的对应元素的乘积组成的矩阵 C2；

3．求满足方程组 AX=b 的解向量 X7；

4.作 A 的行向量组 a1,a2,a3,a4,a5,a6 和 B 行向量组 b1,b2,b3,b4,b5,b6，并求 a1 与 a2 的内积 a7；

5．作矩阵 A3，其元素为矩阵 A 的 1，3，5 行与 2，3，4 列交叉点处的元素；

6．作一个 12 阶矩阵 A4，其分块形式为 $A4=\begin{pmatrix} A & E \\ 0 & B \end{pmatrix}$（E 为单位阵）；

7.求和 $\mathrm{Y2}=1+4+4^2+4^3+\cdots+4^{40}$；

8．求定积分 $\mathrm{Y3}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-2\sin 2x}dx$ 。

实验二　函数与极限

【实验类型】验证性

【实验学时】2 学时

【实验目的】

1．掌握用 MATLAB 研究函数性质的基本方法；

2．掌握用 MATLAB 求极限的基本方法；

3．以可视化的方法理解函数极限概念；

4．掌握用 MATLAB 研究函数连续性的基本方法。

【实验内容】

1．利用 MATLAB 研究函数性质；

2．利用 MATLAB 求函数极限；

3．理解函数极限的概念；

4．利用 MATLAB 研究函数连续性；

【实验前的预备知识】

1．熟悉函数的各种性质；

2．理解拉格朗日中值定理的内容；

3．MATLAB 中创建符号变量的方法和符号运算命令的用法；

4．MATLAB 中平面图形的作图方法。

【实验方法或步骤】

一、实验基本理论与方法

1．数列极限的定义；

2．函数极限的定义；

3．无穷大量与无界函数；

4．极限 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ 存在当且仅当极限 $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$ 和极限 $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$ 都存在并且相等；

5．极限 $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$ 存在当且仅当极限 $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ 和极限 $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ 都存在并且相等；

6．函数 $f(x)$ 在点 x_0 连续的定义；

7．函数的间断点及其分类；

二、实验使用的 MATLAB 函数

1．limit(f,x, x_0)：求 $x \to x_0$ 时 $f(x)$ 的极限。

2．limit(f,x, x_0,’left’)：求 $x \to x_0$ 时 $f(x)$ 的左极限。

3．limit(f,x, x_0,’right’)：求 $x \to x_0$ 时 $f(x)$ 的右极限。

4．limit(f,x,+inf)：求 $x \to +\infty$ 时 $f(x)$ 的极限。

5．limit(f,x,-inf)：求 $x \to -\infty$ 时 $f(x)$ 的极限。

6．limit(f,n,inf)：求数列 $f(n)$ 的极限。

7．plot 及 plot3 命令是最为常见的二维图形和三维图形的绘制命令，它们一般采用等步长绘制图形。

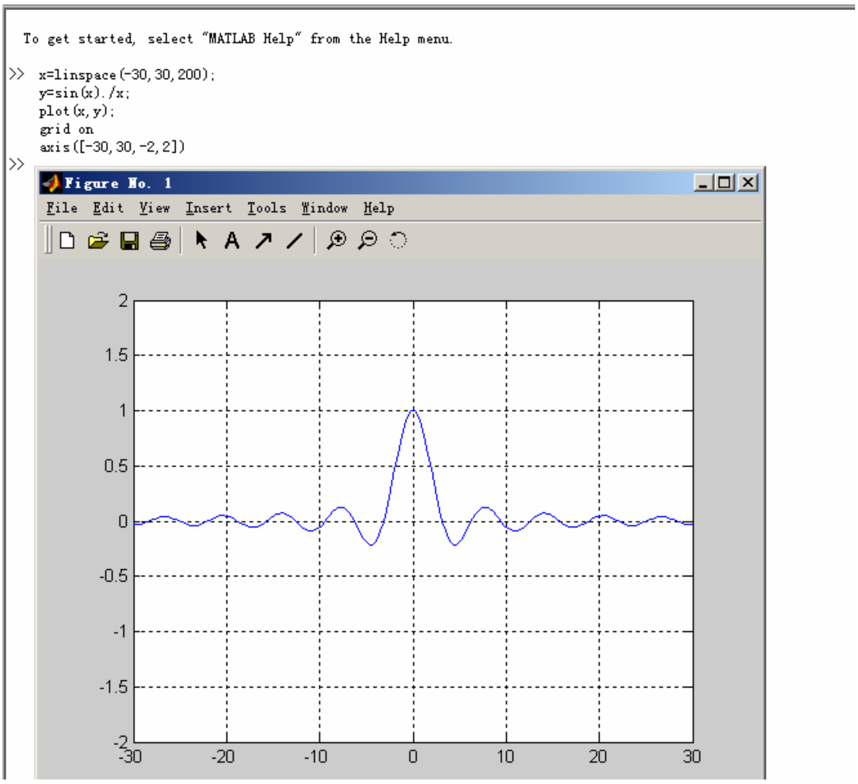
注：fplot(fun,lims,str,tol)：画函数 $y = fun(x)$ 的图形。其中，若 lims 只包含两个元素则表示 x 轴的范围：[xmin,xmax]。若 lims 包含四个元素则前两个元素表示 x 轴的范围：[xmin,xmax]，后两个元素表示 y 轴的范围：[ymin,ymax]；str 可以指定图形的线型和颜色；tol 的值小于 1，代表相对误差，默认值为 0.002，即 0.2%。该命令中 str 和 tol 都是可选项。

三、实验指导

例 1.画出 $y = \dfrac{\sin x}{x}$ 的图象，研究当 $x \to 0, x \to \infty$ 时的极限。

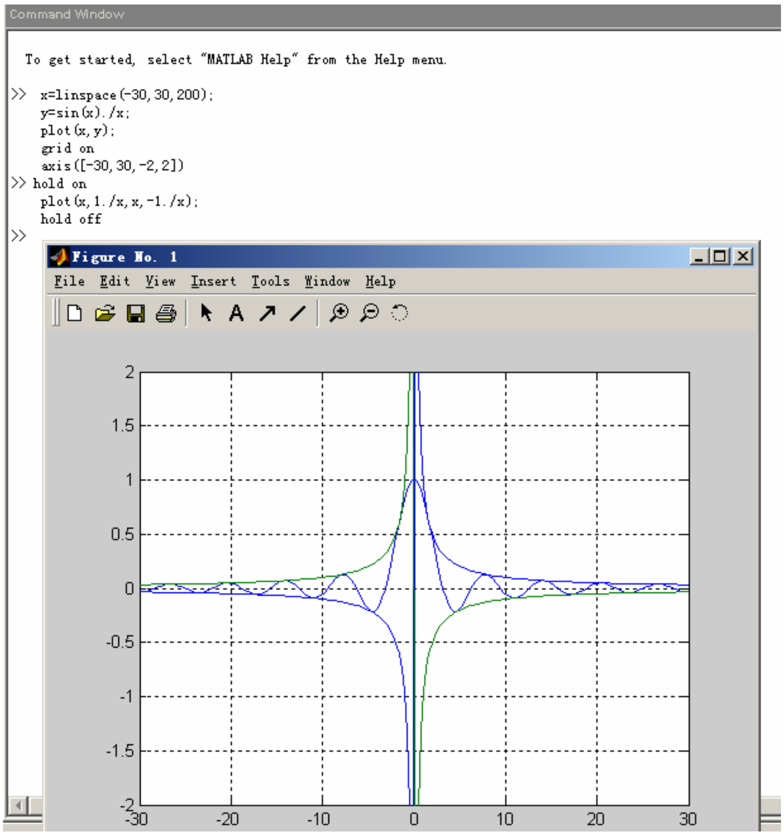
输入命令:

```
>>x=linspace(-30,30,200);
>> y=sin(x)./x;
>> plot(x,y);
>> grid on
>>axis([-30,30,-2,2])
```



从图上看，当 $x \to 0$ 时，$\dfrac{\sin x}{x} \to 1$，当 $x \to \infty$ 时，$\dfrac{\sin x}{x} \to 0$。$y = \dfrac{\sin x}{x}$ 的“振幅”是 $y = \dfrac{1}{x}$；画出 $y = \pm\dfrac{1}{x}$ 的图象。

>> hold on;plot(x,1./x,x,-1./x);hold off



例 2．求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{n^2+n}}{n+2}$。

可执行以下命令：

>>syms n

>>f=(n^2+n)^(1/3)/(n+2);

>>fn=limit(f,n,inf)

命令的执行结果为：

fn =0

例 3．求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}$。

可执行以下命令：

>>syms x

>>f=(tan(x)-sin(x))/x^3;

>>limit(f,x,0)

命令的执行结果为：

ans =1/2

例 4．研究极限 $\lim\limits_{x\to 0} e^{\frac{1}{x}}$ 。

可执行以下命令：

>>syms x

>>f=exp(1/x);

>>limit(f,x,0)

命令的执行结果为：

ans =NaN

事实上极限 $\lim\limits_{x\to 0} e^{\frac{1}{x}}$ 不存在。下面我们考察左、右极限。

>>syms x

>>f=exp(1/x);

>>limit(f,x,0,'left')

ans =0

>>syms x

>>f=exp(1/x);

>>limit(f,x,0,'right')

ans =inf

左、右极限分别为 0，∞，从而极限不存在。

例 5．求极限 $\lim\limits_{x\to 0} x^{\sin x}$ 。

可执行以下命令：

>>syms x

>>f=x^(sin(x));

>>fx=limit(f,x,0)

命令的执行结果为：

fx =1

例 6．求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{a_1^x+a_2^x+a_3^x}{3}\right)^{\frac{1}{x}}$，其中 a_1，a_2，a_3 为常数。

可执行以下命令：

>>syms a1 a2 a3 x

>>f=((a1^x+a2^x+a3^x)/3)^(1/x);

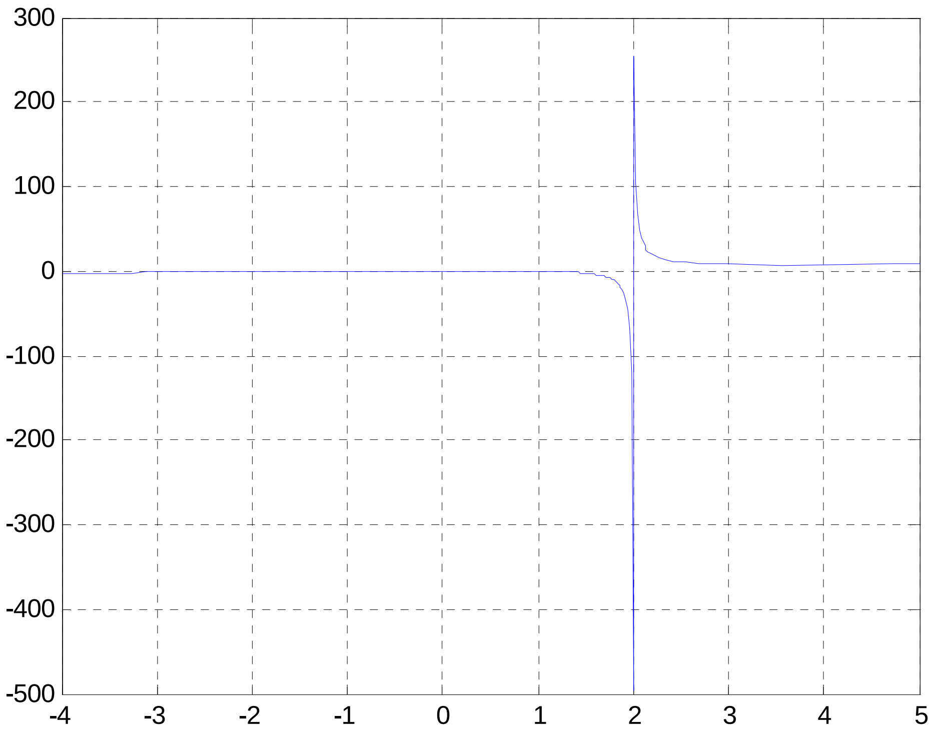
>>fx=limit(f,x,0)

命令的执行结果为：

fx =a1^(1/3)*a2^(1/3)*a3^(1/3)

例 7．研究函数 $\dfrac{x^3+3x^2-x-3}{x^2+x-6}$ 的连续性并画出函数的图形。

>>fplot('(x^3+3*x^2-x-3)/(x^2+x-6)',[-4,5])



由图可知：$x=-3$ 是函数的可去间断点，$x=2$ 是函数的无穷间断点。

>>limit((x^3+3*x^2-x-3)/(x^2+x-6),x,-3)

ans =-8/5

>>limit((x^3+3*x^2-x-3)/(x^2+x-6),x,2)

ans =NaN

【实验练习】

练习 1、求下列极限

（1）$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}$；（2）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}$；（3）$\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{1}{x})^x$；

（4）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{(e^x-1)\ln(1+x)}$；（5）$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\ln\sin x}{(\pi-2x)^2}$。

练习 2、设 $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{x}$，

（1）画出函数 $y=f(x)$ 的图形；（2）求 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$，$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$，$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$。

练习 3、讨论函数 $f(x)=\begin{cases}\left(\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}\right)^{\frac{1}{x}}, & x>0\\ e^{-\frac{1}{2}}, & x\le 0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处的连续性。

练习 4、设 $f(x)=\begin{cases}e^{\frac{1}{x-1}}, & x>0\\ \ln(1+x), & -1<x\le 0\end{cases}$，求 $f(x)$ 的间断点并说明间断点的类型，画出函数图形验证你所得出的结论。

实验三　导数与微分中值定理及应用

【实验类型】验证性

【实验学时】2 学时

【实验目的】

1．掌握用 MATLAB 求函数的导数与微分的方法；

2．学会用 MATLAB 求各种形式函数的微分、导数及高阶导数；

3．进一步理解导数概念及其几何意义；

4．理解中值定理的条件和结论；

【实验内容】

1．熟悉 MATLAB 求函数的导数与微分的命令；

2．理解导数概念及其几何意义；

3．理解中值定理的条件和结论；

【实验前的预备知识】

1．熟悉导数的概念和各种函数的基本求导方法；

2．知道拉格朗日中值定理的内容；

3．MATLAB 中创建符号变量的方法和符号运算命令的用法；

4．MATLAB 中平面图形的作图方法。

【实验方法或步骤】

一、实验的基本理论与方法

1. 导数的定义：若函数 $f(x)$ 在 x_0 点可导，则 $f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ 。

2. 函数的微分：若函数 $f(x)$ 可微分，则 $dy=f'(x)dx$ 。

3. 参数方程的导数：若 $\varphi(t)$, $\psi(t)$ 二阶可导，并且 $\varphi'(t)\neq 0$ ，则由方程 $\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases}$ 所确定的隐函数 $y=y(x)$ 二阶可导，且 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$ 　　$\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)}{\dfrac{dx}{dt}}$

4. 由方程所确定的隐函数的求导方法。

二、实验使用的 MATLAB 函数

1. diff(函数 f(x)) ， 求 $f(x)$ 的一阶导数 $f'(x)$；

2. diff(函数 f(x)，n) ， 求 $f(x)$ 的 n 阶导数 $f^{(n)}(x)$ （n 是具体整数)；

3. diff(函数 f(x,y)，变量名 x)，求 $f(x,y)$ 对 x 的偏导数 $\frac{\partial f}{\partial x}$；

4. diff(函数 f(x,y)，变量名 x，n) ，求 $f(x,y)$ 对 x 的 n 阶偏导数 $\frac{\partial^n f}{\partial x^n}$；

5. solve（方程,变量）：求解方程或方程组。

三、实验指导

例 1.设 $f(x)=\mathrm{e}^x$，用定义计算 $f'(0)$.

解: $f(x)$ 在某一点 x_0 的导数定义为极限:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

我们记 $h=\Delta x$，输入命令:

```
>>syms h;
>>limit((exp(0+h)-exp(0))/h,h,0)
```

得结果:

```
ans=
      1 .
```

因此 $f'(0)=1$。

例 2.画出 $f(x)=\mathrm{e}^x$ 在 $x=0$ 处 $P(0,1)$ 的切线及若干条割线，观察割线的变化趋势。

解:在曲线 $f(x)=\mathrm{e}^x$ 上另取一点 $M(h,\mathrm{e}^h)$，则 PM 的方程是:

$$y=\frac{\mathrm{e}^h-1}{h}x+1$$

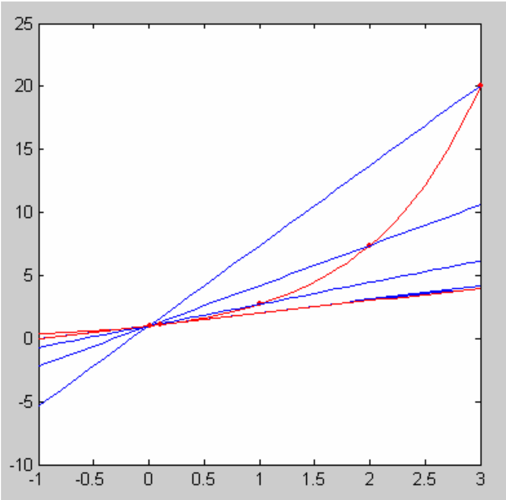
取 h=3,2,1,0.1,0.01，分别作出几条割线，参考程序如下：

```
>>h=[3,2,1,0.1,0.01],a=(exp(h)-1)./h,x=-1:0.1:3,
>>plot(x,exp(x),'r');hold on
>>for i=1:5;
>>plot(h(i),exp(h(i)),'r.')
>>plot(x,a(i)*x+1)
```

>>end

>>axis square

>>plot(x,x+1,'r')　% 作出 $f(x)=e^x$ 在 $x=0$ 处的切线 $y=x+1$



从图上看，随着 M 与 F 越来越接近，割线 PM 越来越接近曲线的切线。

例 3、设 $f(x)=\sin ax\cos bx$，求 $f'(x)$ 及 $f'(\frac{1}{a+b})$，并求 $f''(x)$。

可执行以下命令：

>>syms x a b

>>f=sin(a*x)*cos(b*x);

>>diff(f)

命令的执行结果为：

>>ans =

cos(a*x)*a*cos(b*x)-sin(a*x)*sin(b*x)*b

可执行以下命令：

>>x=1/(a+b);

命令的执行结果为：

>>ans =

cos(a/(a+b))*a*cos(b/(a+b))-sin(a/(a+b))*sin(b/(a+b))*b

可执行以下命令：

>>diff(f,2)

命令的执行结果为：

```
>>ans =
     -sin(a*x)*a^2*cos(b*x)-2*cos(a*x)*a*sin(b*x)*b-sin(a*x)*cos(b*x)*b^2
```

例 4、求 $y=(1+x^2)\arctan x$ 的微分及一阶、二阶导数。

可执行以下命令：

```
>>syms x
>>y=(1+x^2)*atan(x);
>>diff(y)
```

命令的执行结果为：

```
>>ans =
     2*x*atan(x)+1
```

可执行以下命令：

```
>>diff(y,2)
```

命令的执行结果为：

```
>>ans =
     2*atan(x)+2*x/(1+x^2)
```

例 5、求 $y=e^x\cos 2x$ 的 3 阶及 10 阶导数。

可执行以下命令：

```
>>syms x
>>y=exp(x)*cos(2*x);
>>diff(y,3)
```

命令的执行结果为：

```
>>ans =
     -11*exp(x)*cos(2*x)+2*exp(x)*sin(2*x)
```

可执行以下命令：

```
>>diff(y,10)
```

命令的执行结果为：

```
>>ans =
     237*exp(x)*cos(2*x)+3116*exp(x)*sin(2*x)
```

例 4、设$\begin{cases} x = a(t-\sin t) \\ y = a(1-\cos t) \end{cases}$，求$\dfrac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x}$.

解: 输入命令:

```
>>syms t
>>dx_dt=diff(a*(t-sin(t)));
>>dy_dt=diff(a*(1-cos(t)));
>>dy_dx=dy_dt/dx_dt
```

得结果:

```
>>dy_dx =
     -1/(t-sin(t))*(-1+cos(t))
```

例 7、求幂指函数 $y = x^{\sin x}$ （$x > 0$）的导数。

可执行以下命令：

```
>>syms x
>>y=x^sin(x);
>>diff(y)
```

命令的执行结果为：

```
>>ans =
  x^sin(x)*(cos(x)*log(x)+sin(x)/x)
```

【实验练习】

练习 1、求下列函数的导数或微分。

（1） $y = \ln[\sin\sqrt{x^2+1}]$，求 y' , $y'(0)$；

（2） $y = e^{\arctan\frac{1}{x}}$，求 dy , $y''(x)$；

（3）设 $\arctan\dfrac{y}{x} = \ln\sqrt{x^2+y^2}$ ，求 $\dfrac{dy}{dx}, \dfrac{d^2y}{dx^2}$；

（4）设$\begin{cases} x = \dfrac{1}{1+t} \\ y = \left(\dfrac{t}{1+t}\right)^2 \end{cases}$，求 $\dfrac{dy}{dx}, \dfrac{d^2y}{dx^2}$；

（5）设 $y = \sqrt[m]{1+x}$ ，求 $y^{(5)}(x)$；（6）设 $y = \sqrt[x]{x}$ ，求 $y'(x)$ 。

练习 2、求曲线$\begin{cases} x = 2e^t \\ y = e^{-t} \end{cases}$相应于$t = 0$处的切线与法线方程，并画出图形观察所求结果是否正确。

练习 3、求椭圆$\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{9} = 1$在点$(2, \dfrac{3}{2}\sqrt{3})$处的切线方程，并画出图形。

练习 4、讨论函数$y = \begin{cases} x^2 \sin\dfrac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$在$x = 0$处的连续性与可导性。

实验四　不定积分、定积分及其应用

【实验类型】验证性

【实验学时】2 学时

【实验目的】

1．掌握用 MATLAB 求函数不定积分、定积分的方法；

2．理解定积分的概念及几何意义；

3．掌握定积分的应用；

【实验内容】

1．熟悉利用 MATLAB 计算不定积分的命令、方法；

2．通过几何与数值相结合的方法演示定积分的概念和定积分的几何意义；

【实验目的】

1．掌握利用 MATLAB 计算不定积分的命令、方法；

2．通过几何与数值相结合的方法演示定积分的概念和定积分的几何意义；

3．掌握利用 MATLAB 计算定积分、广义积分的命令、方法；

4．掌握利用 MATLAB 计算有关定积分应用的各种题型，包括平面图形的面积、旋转体的体积、平面曲线的弧长等；

【实验前的预备知识】

1．原函数与不定积分的概念；

2．不定积分的换元法和分部积分法；

3．定积分的概念；

4．微积分基本公式；

5．广义积分的敛散性及计算方法；

6．利用定积分计算平面图形的面积；

7．利用定积分计算旋转体的体积；

8．利用定积分计算平面曲线的弧长；

【实验方法或步骤】

一、实验使用的 MATLAB 函数

1．int($f(x)$, x)；　求 $f(x)$ 的不定积分；

2．int($f(x)$, x , a , b)；求 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的定积分；

3．int($f(x)$, x , -inf, inf)；计算广义积分 $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$；

4．solve('eqn1','eqn2',...,'eqnN','var1,var2,...,varN')；求解 n 元方程组；

二、实验指导

例 1 计算不定积分 $\int e^x \cos 2x dx$。

```
syms x;
int(exp(x)*cos(2*x),x)
 ans =
    1/5*exp(x)*cos(2*x)+2/5*exp(x)*sin(2*x)
```

例 2 计算不定积分 $\int \frac{1}{x^4\sqrt{1+x^2}}dx$。

```
syms x;
int(1/(x^4*sqrt(1+x^2)))
 ans =
     -1/3/x^3*(1+x^2)^(1/2)+2/3/x*(1+x^2)^(1/2)
```

例 3 以几何图形方式演示、理解定积分 $\int_a^b f(x)dx$ 概念，并计算近似值。

先将区间 $[a,b]$ 任意分割成 n 份，为保证分割加细时，各小区间的长度趋于 0，在取分点时，让相邻两分点的距离小于 $2(b-a)/n$，分点取为 $x_i = a+(i+u_i)(b-a)/n$（$u_i \in [0,1]$ 为随机数），在每一区间上任取一点 $c_i = x_i + v_i(x_{i+1}-x_i)$（$v_i \in [0,1]$ 为随机数）作积分和进行计算，程序如下：

```
function juxs(fname,a,b,n)   % 定积分概念演示，随机分割、 随机取近似，并求近似值
  xi(1)=a; xi(n+1)=b;
  for i=1:n-1
     xi(i+1)=a+(i+rand(1))*(b-a)/n;
  end
  I=0;
  hold on;
  for i=1:length(xi)-1
      sxi=xi(i)+rand(1)*(xi(i+1)-xi(i));
```

```
    syi=feval(fname,sxi);
    I=I+syi*(xi(i+1)-xi(i));
    xii=[xi(i) xi(i) xi(i+1) xi(i+1) xi(i)];
    yii=[0 syi syi 0 0];
    fill(xii,yii,'c');
end
x=a:(b-a)/100:b;
y=feval(fname,x);
plot(x,y,'r','markersize',20);
hold off;
fprintf('n=%6d,    I=%12.5f\n',n,I);
function y=fex(x)
    y=x.^2+1;
```

以积分$\int_{-2}^{2}(x^2+1)dx$为例，调用上述函数，观察如下：

（1）几何上

我们知道，当$f(x)\geq 0$时，定积分的值表示由$x=a,x=b,y=0,y=f(x)$所围成的曲边梯形的面积，从图形 3.1 上可以看出，用小矩形面积和逼近曲边梯形面积的过程。

值得注意的是，虽然每次运行后的图形可能有所差异（相同的参数下），但总的趋势是，分点个数越多，小矩形的面积之和越逼近曲边梯形的面积，即积分和越逼近积分值。

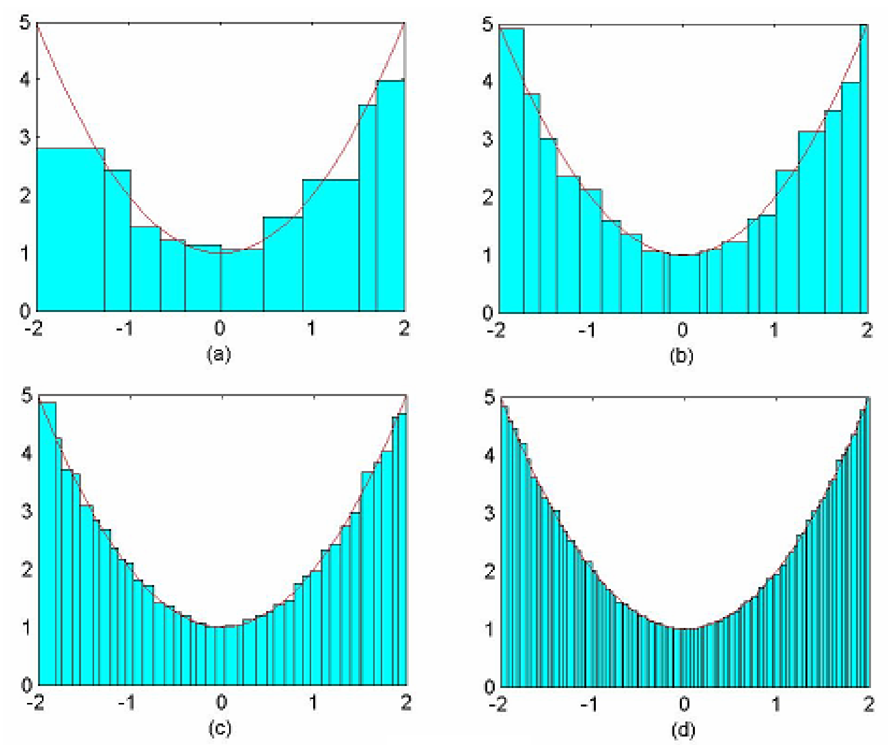


图 3.1

（2） 数值上

当对区间逐步进行细分时，反复调用上述程序，可得一系列积分近似值（运行结果可能有差异），可以看到，随着区间数的增大，近似值越来越接近精确值（精确值为 28/3）。

n= 20,　　I= 9.12818

n= 40,　　I= 9.38262

n= 160,　　I= 9.34459

n= 320,　　I= 9.33352

n= 640,　　I= 9.33158

n= 1280,　I= 9.33324

n= 2480,　I= 9.33364

例 4　计算定积分 $\int_0^{2\pi}\frac{1}{5+3\sin x}dx$。

```
syms x;
int(1/(5+3*sin(x)),x,0,2*pi)
  ans =
    1/2*pi
```

例 5　计算定积分 $\int_0^{a}x^2\sqrt{a^2-x^2}dx$。

```
syms x;
int(x^2*sqrt(a^2-x^2),x,0,a)
  ans =
    1/16*a^5*(1/a^2)^(1/2)*pi
```

例 6　计算广义积分 $\int_0^{\infty}\frac{1}{x^2+2x+2}dx$。

```
syms x;
int(1/(x^2+2*x+2),x,-inf,inf)
  ans =
     1/4*pi
```

例 7 判别广义积分 $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$ 的敛散性。

```
syms x;
int(1/sqrt(1-x^2),x,0,1)
 ans =
        1/2*pi
```

所以原积分收敛。

例 8 求由抛物线 $y^2 = 2x$ 和直线 $y = -x + 4$ 所围图形的面积。

首先画出函数图形，如图 3.2 所示。

```
x=0:0.1:9;
plot(x,-x+4,'b',x,sqrt(2*x),'r',x,-sqrt(2*x),'r')
```

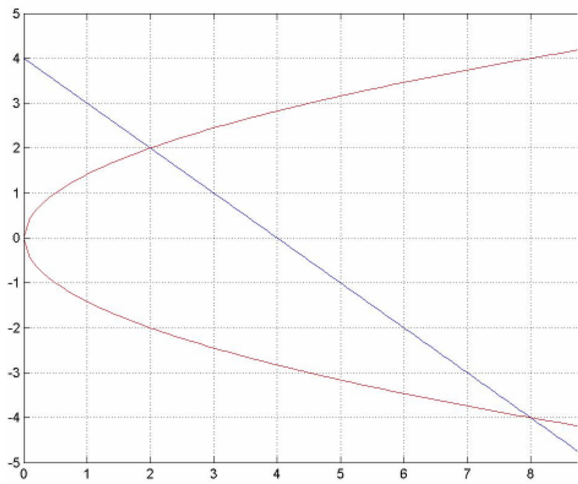


图 3.2

求解方程组，得到两曲线交点

```
[x,y]=solve('y^2-2*x=0','y+x-4=0');
```

x = [8 2] , y = [-4 2]

以 y 为积分变量求面积

```
int(-y+4-y^2/2,y,-4,2)
 ans =
        18
```

例 9 求由圆 $r = 3\cos\theta$ 和双纽线 $r = 1 + \cos\theta$ 所围图形的面积。

首先在极坐标系下画出两曲线的图形，如图 3.3：

```
th=0:0.05:2*pi;
r1=3*cos(th); r2=1+cos(th);
polar(th,r1,'b');
hold on;   polar(th,r2,'r') ;    hold off;
```

由对称性，求得交点 $(\pi/3, 3/2)$：

```
s1=int(1/2*r2^2,th,0,pi/3);
s2=int(1/2*r1^2,th,pi/3,pi/2);
S=2*(s1+s2)
 S=
```

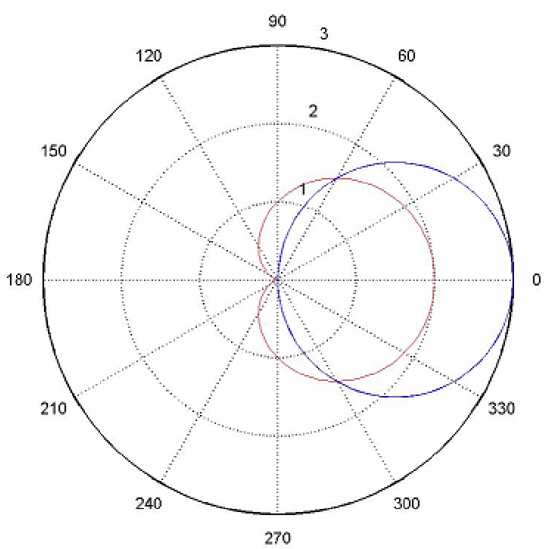


图 3.3

5/4*pi

例 10 求曲线$\begin{cases} x=\arctan t \\ y=\dfrac{1}{2}\ln(1+t^2) \end{cases}$上相应于从$t=0$到$t=1$的一段弧长。

首先画出曲线的图形，如图 3.4，求积分：

```
syms t;
x=atan(t);    y=log(1+t^2)/2;
dx=diff(x);    dy=diff(y);
s=int(sqrt(dx^2+dy^2),t,0,1)
s =
  -log(2^(1/2)-1)
```

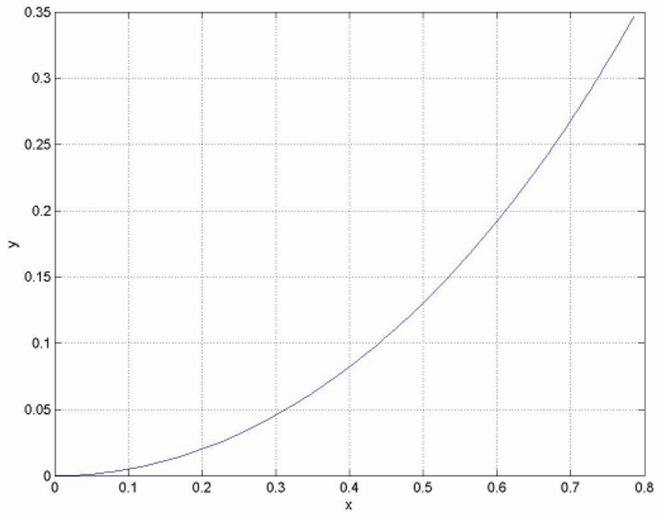


图 3.4

例 11 将星形线$x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$所围成的图形绕x轴旋转一周，计算所得旋转体的体积。

星形线的参数方程为

$$\begin{cases} x=a\cos^3 t \\ y=a\sin^3 t \end{cases} \quad (0\le t\le 2\pi)$$

取$a=1$，画出星形线的图形，如图 3.5，计算旋转体体积：

```
syms a real;
syms t;
x=a*cos(t)^3;y=a*sin(t)^3;
dx=diff(x);
V=2*int(pi*y^2*dx,t,0,pi/2)
 V=
   -32/105*pi*a^3
```

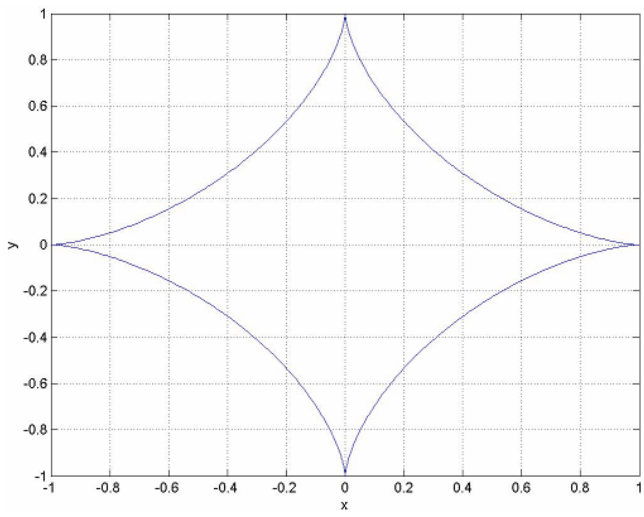


图 3.5

【实验练习】

1．用 MATLAB 计算下列不定积分。

（1）$\int \frac{\sqrt{x^2+1}}{x^2}dx$　（2）$\int a^x \sin x \cos^2 x dx$

2．设 $f(x)=x^3-3x^2+x+5\ \ (x\in[-1,3])$，根据定积分定义编写一段程序，从几何上演示用小矩形面积和逼近曲边梯形面积的过程。

3．用 MATLAB 求解下列各积分。

（1）$\int_0^{2\pi} e^{2x}\cos x dx$　（2）$\int_0^{\infty} e^{-t}\sin 2t dt$

（3）设 $f(x)=\begin{cases} x^2 & 0\le x\le 1 \\ x & 1<x\le 2 \end{cases}$，求 $\int_0^2 f(x)dx$。

4．求由曲线 $x^2+(y-5)^2=16$ 绕 x 轴旋转所产生的旋转体的体积。

5．求下列曲线与所围成图形的面积：

（1）$y=\frac{1}{2}x^2$ 与 $x^2+y^2=8$（两部分都要计算）；

（2）$r=\sqrt{2}\sin\theta$ 与 $r^2=\cos 2\theta$

6．计算半立方抛物线 $y^2=\frac{2}{3}(x-1)^3$ 被抛物线 $y^2=\frac{x}{3}$ 截得的一段弧的长度。

7．试找出几个由 MATLAB 不能求解的积分题。

实验五　空间曲面及其在坐标面上的投影

【实验类型】验证性

【实验学时】2 学时

【实验目的】

掌握用 MATLAB 绘制空间曲面及其在坐标面上的投影的方法；

【实验内容】

1．熟悉 MATLAB 绘制三维图形的基本命令和方法；

2．通过 MATLAB 演示常见的空间曲面、空间曲线；

【实验方法与步骤】

一、实验的基本理论与方法

1、 描绘空间图形的截痕法（略）。

2、 空间曲线在坐标面上的投影：设曲线 L 的方程为 $\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$，消去 z，得 $H(x,y,z)=0$，则曲线 L 在 XOY 平面上的投影曲线为 $\begin{cases} H(x,y)=0 \\ z=0 \end{cases}$。

二、实验使用的 MATLAB 函数

1、已知二元函数 $z=f(x,y)$，绘制其三维曲面图的 MATLAB 命令调用格式为：

[x,y]=meshgrid(v1,v2);　　生成网格数据

z=….；如 z=x.*y　　　　　计算二元函数的 z 矩阵

surf(x,y,z)或 mesh(x,y,z)　mesh()绘制网格图，surf()绘制表面图

其中，v1, v2 为 x 轴和 y 轴的分隔方式。

3、 已知空间曲面的参数方程：$\begin{cases} x=x(s,t) \\ y=y(s,t) \quad (a<s<b, c<t<d) \\ z=z(s,t) \end{cases}$，绘制其图形的命令格式为：　ezsurf('x(s,t)','y(s,t)','z(s,t)',[a,b,c,d])

三、实验指导

例 1 画出椭球面 $\dfrac{x^2}{3^2}+\dfrac{y^2}{5^2}+\dfrac{z^2}{2^2}=1$的图形。

椭球面的参数方程为$\begin{cases} x = 3\cos t \sin s \\ y = 5\sin t \sin s \ \ (0 \le t \le 2\pi, 0 \le t \le \pi) \\ z = 2\cos s \end{cases}$

画出椭球面的图形，如图 7-1 所示。

```
ezsurf('3*cos(t).*sin(s)','5*sin(t).*sin(s)','2*cos(s)',[0,2*pi,0,pi])
```

例 2 画出莫比乌斯（Mobius）带的图形。莫比乌斯带的参数方程为：

$$\begin{cases} x = r\cos t \\ y = r\sin t \qquad (0 \le t \le 2\pi, -1 \le v \le 1) \\ z = 2v\sin {t}/{2} \end{cases}$$ 其中$r = 4 + v\cos\dfrac{t}{2}$是辅助函数。

画出莫比乌斯带的图形，如图 7-2 所示。

```
ezsurf('(4+v.*cos(t./2)).*cos(t)','(4+v.*cos(t./2)).*sin(t)','2*v.*sin(t./2)',[
0,2*pi,-1,1])
```

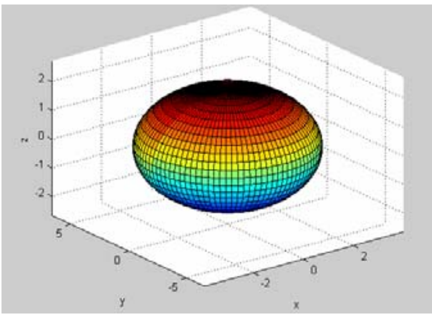


图 7-1

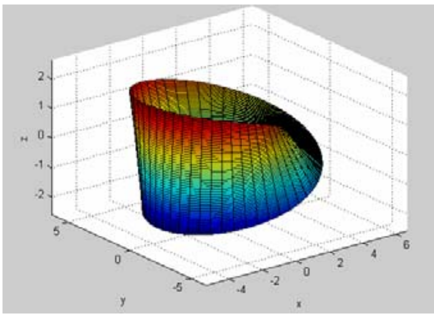


图 7-2

例 3 画出双曲抛物面$z = -\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9}$的图形。

```
[x,y]=meshgrid(-10:10);
z=-x.^2/4+y.^2/9;
surf(x,y,z)
```

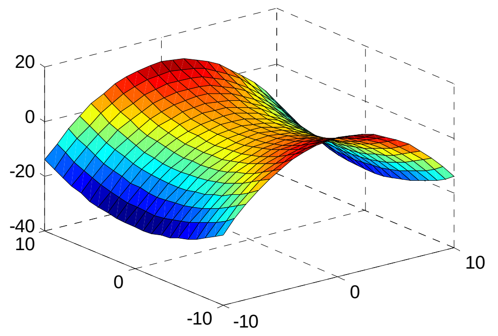


图 7-3

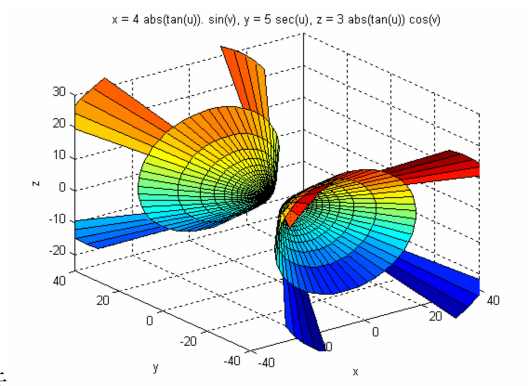
例 4、画出双叶双曲面 $\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{25}+\dfrac{z^2}{9}=-1$ 的图形。

双叶双曲面 $\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{25}+\dfrac{z^2}{9}=-1$ 的参数方程为：$\begin{cases} x=4|\tan u|\sin v \\ y=5\sec u \\ z=3|\tan u|\cos v \end{cases} \quad (0\le u\le \pi, 0\le v\le 2\pi)$

ezsurf('4*abs(tan(u)).*sin(v)','5*sec(u)','3*abs(tan(u))*cos(v)',[0,pi,0,2*pi])

axis([-40 40 -40 40 -25 30])

图形如下图 7-4 所示



例 5、画出椭圆抛物面 $z=\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}$ 的图形，并观察其在各坐标面上的投影。

椭圆抛物面的参数方程为：$\begin{cases} x=2u\sin v \\ y=3u\cos v \\ z=u^2 \end{cases} \quad (0\le u\le 5, 0\le v\le 2\pi)$ 。

画出椭圆抛物面的图形，如图 7-5 所示

ezsurf('2*u.*sin(v)','3*u.*cos(v)','u.^2',[0,5,0,2*pi])

画出曲面在平面 x=0 上的投影，如图 7-6 所示

```
ezsurf('0','3*u.*cos(v)','u.^2',[0,5,0,2*pi])
```

画出曲面在平面 y=0 上的投影，如图 7-7 所示

```
ezsurf('2*u.*sin(v)','0','u.^2',[0,5,0,2*pi])
```

画出曲面在平面 z=0 上的投影，如图 7-8 所示

```
ezsurf('2*u.*sin(v)','3*u.*cos(v)','0',[0,5,0,2*pi])
```

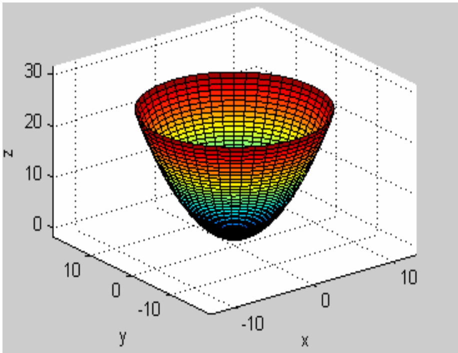


图 7-5

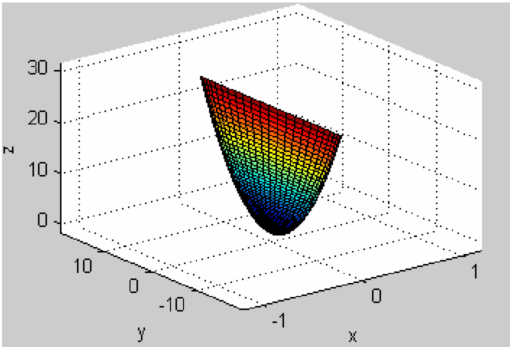


图 7-6

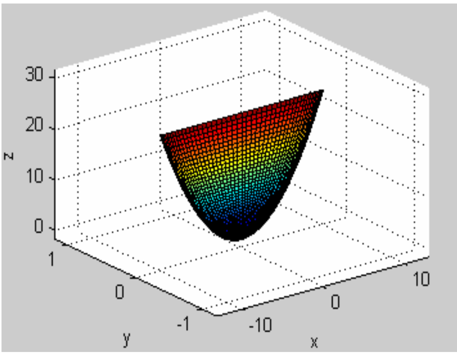


图 7-7

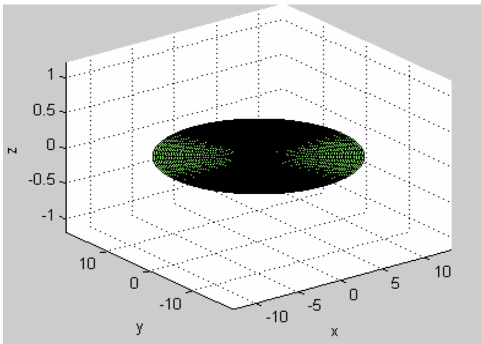


图 7-8

例 6 画出单叶双曲面 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}-\dfrac{z^2}{4}=1$ 的图形，并观察它与平行于坐标面的平面的交线及其在各坐标面上的投影。

单叶双曲面 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}-\dfrac{z^2}{4}=1$ 的参数方程为：

$$\begin{cases} x = 2\sec u \sin v \\ y = 3\sec u \cos v \ (-\dfrac{\pi}{3} \le u \le \dfrac{\pi}{3}, 0 \le v \le 2\pi) \\ z = 2\tan u \end{cases}$$

（1） 画曲面图形，如图 7-9 所示

```
ezsurf('2*sec(u).*sin(v)','3*sec(u).*cos(v)','2*tan(u)',[-pi/3,pi/3,0,2*pi])
```

（2） 先观察曲面与平行于各坐标面的平面的交线：

观察曲面与平面 x=2 的交线，如图 7-10 所示

```
hold off
ezsurf('2*sec(u).*sin(v)','3*sec(u).*cos(v)','2*tan(u)',[-pi/3,pi/3,0,2*pi])
hold on
ezsurf('2','3*sec(u).*cos(v)','2*tan(u)',[-pi/3,pi/3,0,2*pi])
axis([-5 5 -6 6 -5 5])
```

观察曲面与平面 y=2 的交线，如图 7-11 所示

```
hold off
ezsurf('2*sec(u).*sin(v)','3*sec(u).*cos(v)','2*tan(u)',[-pi/3,pi/3,0,2*pi])
hold on
ezsurf('2*sec(u).*sin(v)','2','2*tan(u)',[-pi/3,pi/3,0,2*pi])
axis([-5 5 -6 6 -5 5])
```

观察曲面与平面 z=2 的交线，如图 7-12 所示

```
hold off
ezsurf('2*sec(u).*sin(v)','3*sec(u).*cos(v)','2*tan(u)',[-pi/3,pi/3,0,2*pi])
hold on
ezsurf('2*sec(u).*sin(v)','3*sec(u).*cos(v)','-2',[-pi/3,pi/3,0,2*pi])
axis([-5 5 -6 6 -5 5])
```

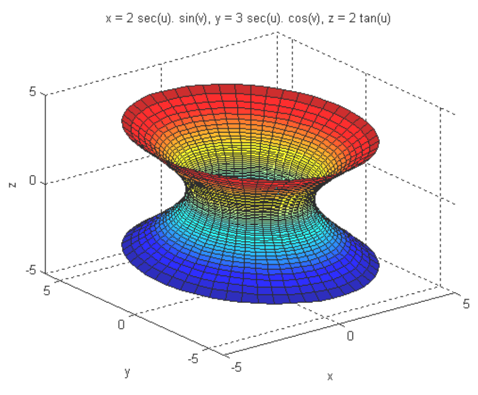


图 7-9

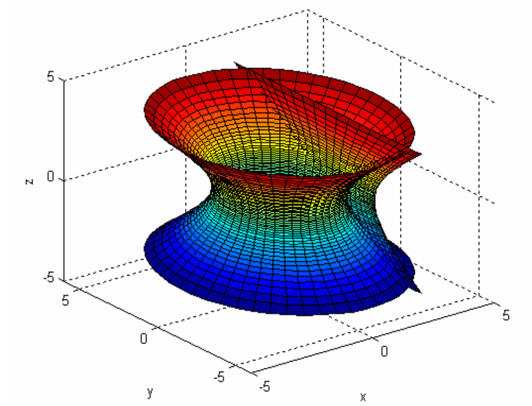


图 7-10

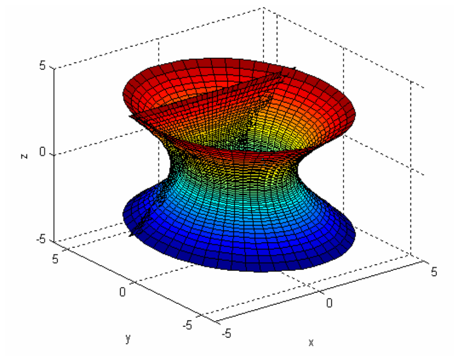


图 7-11

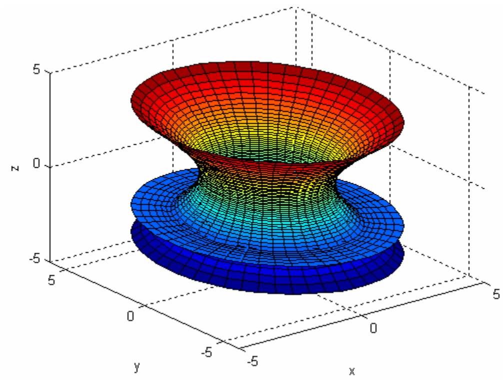


图 7-12

（3） 再观察曲面在各坐标面上的投影

```
ezsurf('2*sec(u).*sin(v)','3*sec(u).*cos(v)','2*tan(u)',[-pi/3,pi/3,0,2*pi])
hold on
ezsurf('-4','3*sec(u).*cos(v)','2*tan(u)',[-pi/3,pi/3,0,2*pi])
hold on
ezsurf('2*sec(u).*sin(v)','6','2*tan(u)',[-pi/3,pi/3,0,2*pi])
hold on
ezsurf('2*sec(u).*sin(v)','3*sec(u).*cos(v)','-3.5',[-pi/3,pi/3,0,2*pi])
hold off
axis([-5 5 -6 6 -5 5])
```

如图 7-13 所示

```
ezsurf('-4','3*sec(u).*cos(v)','2*tan(u)',[-pi/3,pi/3,0,2*pi])
hold on
ezsurf('2*sec(u).*sin(v)','6','2*tan(u)',[-pi/3,pi/3,0,2*pi])
hold on
ezsurf('2*sec(u).*sin(v)','3*sec(u).*cos(v)','-3.5',[-pi/3,pi/3,0,2*pi])
hold off
axis([-5 5 -6 6 -5 5])
```

如图 7-14 所示

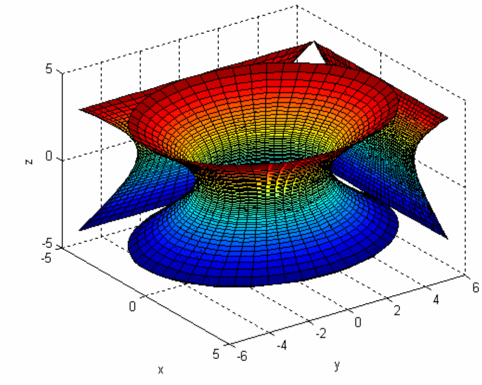


图 7-13

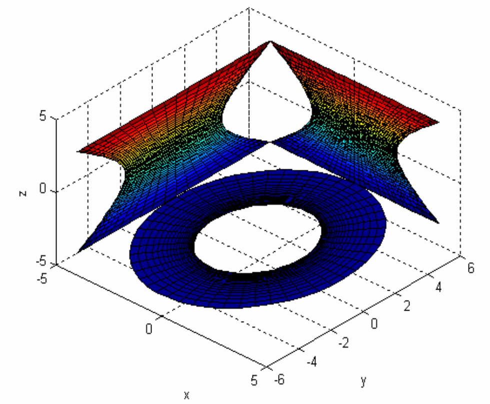


图 7-14

例 7、画出圆锥面 $z^2 = x^2 + y^2$ 的图形，并观察不同平面与圆锥面的交线的形状。

圆锥面 $z^2 = x^2 + y^2$ 的参数方程为 $\begin{cases} x = u\sin v \\ y = u\cos v \ (-3 \le u \le 3, 0 \le v \le 2\pi) \\ z = u \end{cases}$

（1）画圆锥面的图形，如图 7-15 所示

```
ezsurf('u.*sin(v)','u.*cos(v)','u',[-3,3,0,2*pi])
```

（2）观察圆锥面与平面 x=1 的交线，如图 7-16 所示

```
ezsurf('u.*sin(v)','u.*cos(v)','u',[-3,3,0,2*pi])

hold on

ezsurf('1','u.*cos(v)','u',[-3,3,0,2*pi])

hold off

axis([-3 3 -3 3 -3 3])
```

（3）观察圆锥面与平面 z=2 的交线，如图 7-17 所示

```
ezsurf('u.*sin(v)','u.*cos(v)','u',[-3,3,0,2*pi])

hold on

ezsurf('u.*sin(v)','u.*cos(v)','-2',[-3,3,0,2*pi])

hold off

axis([-3 3 -3 3 -3 3])
```

（4）观察圆锥面与平面 $z = -2 - x$ 的交线，如图 7-18 所示

```
ezsurf('u.*sin(v)','u.*cos(v)','u',[-3,3,0,2*pi])
```

```
hold on
ezsurf('x','y','-2-x',[-3,3,-3 3])
hold off
axis([-4 4 -4 4 -4 4])
view(-15,45)
```

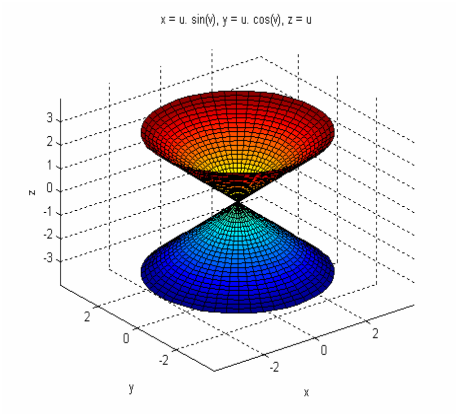


图 7-15

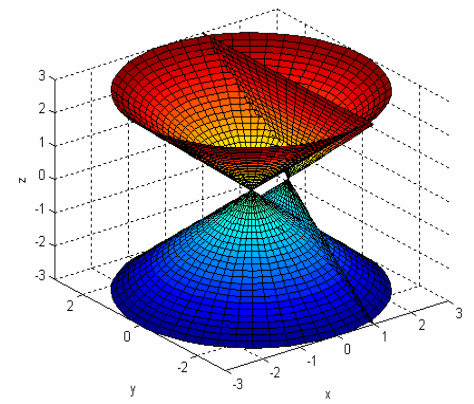


图 7-16

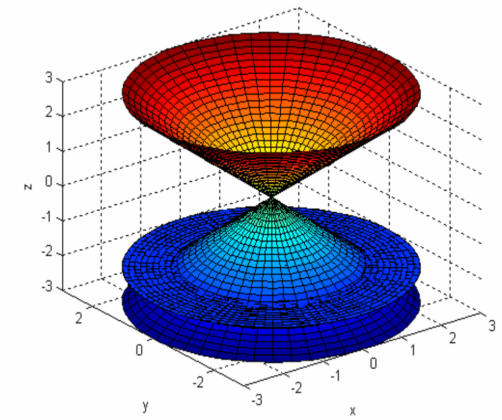


图 7-17

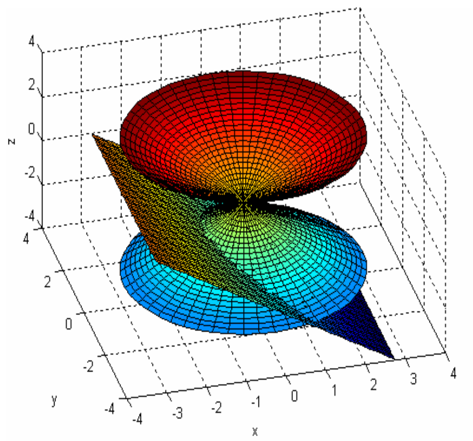


图 7-18

例 8、描绘上半球面 $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$ 与锥面 $z+2=\sqrt{x^2+y^2}$ 所围成的立体，并观察它再 XOY 面上的投影。

（1）画立体的图形，如图 7-19 所示

```
ezsurf('2*cos(t)*sin(s)','2*sin(t)*sin(s)','2*cos(s)',[0,pi/2,0,2*pi])
hold on
ezsurf('u.*sin(v)','u.*cos(v)','u-2',[0,2,0,2*pi])
hold off
axis([-2 2 -2 2 -2 2])
```

（2）画立体在平面 x=2 上的投影，如图 7-20 所示

```
ezsurf('2*cos(t)*sin(s)','2*sin(t)*sin(s)','2*cos(s)',[0,pi/2,0,2*pi])
hold on
ezsurf('u.*sin(v)','u.*cos(v)','u-2',[0,2,0,2*pi])
hold on
ezsurf('-2','2*sin(t)*sin(s)','2*cos(s)',[0,pi/2,0,2*pi])
hold on
ezsurf('-2','u.*cos(v)','u-2',[0,2,0,2*pi])
hold off
axis([-2 2 -2 2 -2 2])
```

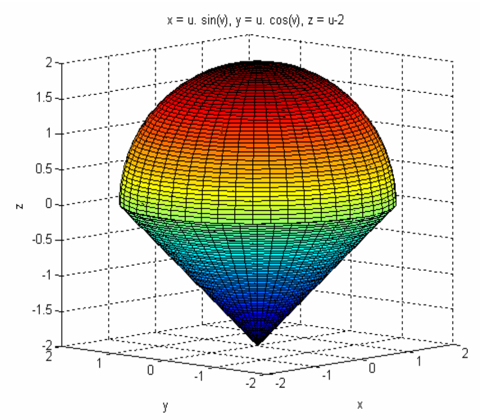


图 7-19

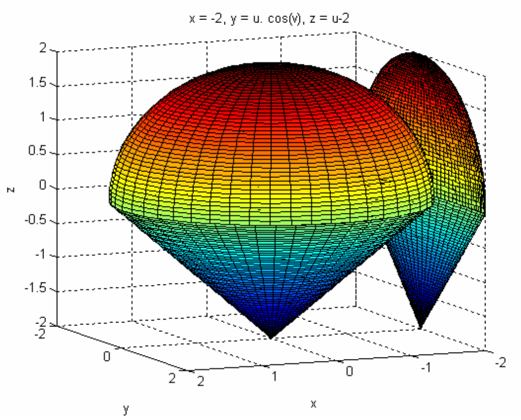


图 7-20

【实验练习】

练习 1　利用计算机画出曲面 $z = 2-(x^2+y^2)$　$(0 \le z \le 2)$ 的图形及其在三个坐标面上的投影。

练习 2　画出由方程 $16x^2+4y^2-z^2=0$ 所表示的曲面。

练习 3　画出曲面 $x^2+4y^2+9z^2=36$ 以及曲面在三个坐标面上的投影。

练习 4 求曲面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与 $z^2=2x$ 围成的立体在三个坐标面上的投影。

实验六　重积分及其应用

【实验类型】验证性

【实验学时】1 学时

【实验目的】

1.通过使用 Matlab 的一些基本功能（主要是计算功能），理解和掌握重积分的相关基本概念及其相应的计算方法；

2.会用 Matlab 计算立体的体积、曲面的面积等应用问题。

【实验内容】

1. 使用 Matlab 掌握二重积分的直角坐标、极坐标的计算方法；

2. 使用 Matlab 掌握三重积分的直角坐标、柱面坐标、球面坐标的计算方法；

3. 使用 Matlab 掌握曲面柱体体积的计算方法；

4. 使用 Matlab 掌握空间曲面面积的计算方法；

5. 使用 Matlab 掌握平面薄片质量和重心坐标的计算方法；

【实验方法与步骤】（对于必须编写计算机程序的实验，要附上学生自己编写的程序）

一、实验的基本理论与方法

1、 二重积分的直角坐标计算方法：

（1）若 $D=\{(x,y)\,|\,a\le x\le b, y_1(x)\le y\le y_2(x)\}$，则

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_a^b \mathrm{d}x\int_{y_{1(x)}}^{y_2(x)} f(x,y)\mathrm{d}y$$

（2）若 $D=\{(x,y)\,|\,c\le y\le d, x_1(y)\le x\le x_2(y)\}$，则

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_c^d \mathrm{d}y\int_{x_{1(y)}}^{x_2(y)} f(x,y)\mathrm{d}x$$

2、 二重积分的极坐标计算方法：若 $D=\{(r,\theta)\,|\,\theta_1\le\theta\le\theta_2, r_1(\theta)\le r\le r_2(\theta)\}$，则

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_D f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta=\int_{\theta_1}^{\theta_2}\mathrm{d}\theta\int_{r_{1(\theta)}}^{r_2(\theta)} f(r\cos\theta,r\sin\theta)\mathrm{d}r$$

3、 曲面柱体的体积：一曲面 $z=f(x,y)\ge 0$ 为顶，为 D 底的曲顶柱体的体积：

$$V=\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

4、 曲面的面积：设曲面 S 由 $z=f(x,y)$ 给出，D 为曲面 S 在 XOY 面上的投影区域，则

曲面S的面积

$$S=\iint_D \sqrt{1+f_x^2(x,y)+f_y^2(x,y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

5、 球面坐标、柱面坐标和直角坐标系的关系：

直角坐标与柱面坐标的关系：$\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \\ z=z \end{cases} \qquad (0\le\theta\le 2\pi,-\infty\le z\le +\infty)$

直角坐标与球面坐标的关系：$\begin{cases} x=r\sin\varphi\cos\theta \\ y=r\sin\varphi\sin\theta \\ z=r\cos\varphi \end{cases} \qquad (0\le\theta\le 2\pi,0\le\varphi\le\pi)$

二、实验使用的 Matlab 函数

1. plot函数：绘制二维曲线的最基本函数

plot函数的基本调用格式为：plot(x,y)，其中x和y为长度相同的向量，分别用于存储x坐标和y坐标数据。

2. 双纵坐标函数plotyy：绘制二维曲线的最基本函数

它能把函数值具有不同量纲、不同数量级的两个函数绘制在同一坐标中。

调用格式为：plotyy(x1,y1,x2,y2)，其中x1—y1对应一条曲线，x2—y2对应另一条曲线。横坐标的标度相同，纵坐标有两个，左纵坐标用于x1—y1数据对，右纵坐标用于x2—y2数据对。

3. **绘制图形的辅助操作---**图形标注

有关图形标注函数的调用格式为：

title(图形名称)

xlabel(x轴说明)

ylabel(y轴说明)

text(x,y,图形说明)

legend(图例1,图例2,…)

4.绘制三维曲线的最基本函数

plot3函数与plot函数用法十分相似，其调用格式为：

plot3(x1,y1,z1,选项1,x2,y2,z2,选项2,…,xn,yn,zn,选项n)

5. 绘制三维曲面的函数

surf函数和mesh函数的调用格式为：

mesh(x,y,z,c)

surf(x,y,z,c)

6. 计算累次积分：

int(int(f,x,a,b),y,c,d),其中f=f(x,y), $x\in(a,b)$， $y\in(c,d)$；

int(int（int(f,x,a,b),y,c,d),z,e,f）(其中 f=f(x,y,z), $x\in(a,b)$， $y\in(c,d)$，

$z\in(e,f)$.

三、实验指导

例 1 求$\int_1^2\mathrm{d}x\int_{2-x}^{\sqrt{2x-x^2}}xy\mathrm{d}y$。

```
>> syms x y;
>> f=x*y;
>> int(int(f,y,2-x,sqrt(2*x-x^2)),x,1,2)
  ans = 1/4
```

例 2 求$\iint\limits_D\frac{x^2}{y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中$D$由直线$x=2$、$y=x$及曲线$xy=1$所围成的闭区域。

首先求出闭区域D的边界曲线的交点：

```
>>[x,y]=solve('x-2=0','y-x=0')
x =2
y =2
>>[x,y]=solve('x-2=0','y*x-1=0')
x =2
y =1/2
>>[x,y]=solve('y-x=0',' y*x-1=0')
x =
   1
  -1
y =
   1
  -1
```

最后计算积分：

```
>> syms x  y
>> int(int(x^2/y^2,y,1./x,x),x,1,2)
ans = 9/4
```

例 3 利用极坐标计算二次积分 $\int_0^1 \mathrm{d}x\int_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}}(x^2+y^2)\mathrm{d}y$ 。

积分区域 $D=\{(x,y)\,|\,0\le x\le 1, 1-x\le y\le\sqrt{1-x^2}\}$ 。

利用极坐标计算积分;

```
>>syms r t;
>>ans=int(int(r^3,r,1/(cos(t)+sin(t)),1),t,0,pi/2)
>>ans= -1/6+1/8*pi
```

例 4 求由曲面 $z=x^2+2y^2$ 及 $z=6-2x^2-y^2$ 所围成的立体的体积。

立体关于 XOY 平面坐标面的投影柱面为： $x^2+y^2=2$，投影区域为：

$D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 2\}$

计算立体的体积：

```
>>syms x y z1 z2 r t；
>>x=r*cos(t); y=r*sin(t);
>>z1=x^2+2*y^2; z2=6-2*x^2-y^2;
>>ans=int(int((z2-z1)*r,t,0,2*pi),r,0,sqrt(2));
ans=6π
```

例 5 求球面 $x^2+y^2+z^2=4$ 含在圆柱面 $x^2+y^2=2x$ 内的那部分的曲面面积。

立体关于 XOY 面的投影柱面为 $x^2+y^2=2x$ 。

计算曲面面积

```
>> syms x y z r t ds u v m
>> z=sqrt(4-x^2-y^2)；
>> ds=sqrt(1+diff(z,x)^2+diff(z,y)^2);
>> u=r*cos(t); v=r*sin(t);
>> m=subs(ds,[x y],[u v])；
>> int(int(4*m*r,r,0,2*cos(t)),t,0,pi/2)
```

```
>>ans =8*pi-8*4^(1/2)
ans=4(-4+2π)
```

例 6　求位于两圆 $r = 2\sin t$ 和 $r = 4\sin t$ 之间的均匀薄片 D 的重心。

设重心坐标为（x_0, y_0），D 关于 y 轴对称，所以 $x_0 = 0$，下面求 y_0

```
>>syms r t
>>1/(3*pi)*int(int(r^2*sin(t),r,2*sin(t),4*sin(t)),t,0,pi)
```

>>ans= $\frac{7}{3}$

例 7 计算 $\iiint\limits_{\Omega} xz\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中 Ω 由平面 $z = 0$、$z = y$、$y = 1$ 以及抛物柱面 $y = x^2$ 所围成的闭区域。

求积分

```
>>syms x   y   z
>>int(int(int(x*z , z , 0, y),y,x^2,1),x,-1,1)
>>ans
     0
```

例 8 计算 $\iiint\limits_{\Omega} xy^2z^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中 Ω 由平面 $z = xy$ 与平面 $y = x$、$x = 1$ 和 $z = 0$ 所围成的闭区域。

计算三重积分

```
>>syms x   y   z
>>Int(int(int(x*y^2*z^3,z,0,x*y),y,0,x),x,0,1)
```

>>ans= $\frac{1}{364}$

例 9 求 $\iiint\limits_{\Omega} z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中 Ω 由两个球 $x^2 + y^2 + z^2 \le R^2$ 与 $x^2 + y^2 + z^2 \le 2Rx$（$R > 0$）的公共部分。

用球面坐标计算积分

```
>>syms   x   y   z   a   b   R   t1   t2
>>x=r*sin(t2);y=r*sin(t2)*(t1);z=r*cos(t2);
>>a=int(int(int(z^2*r^2*sin(t2),t1,0,2*pi),t2,0,pi/3),r,0,R);
>>b=int(int(int(z^2*r^2*sin(t2),r,0,2*R*cos(t2)),t1,0,2*pi),t2,pi/3,pi/2);
>>ans= a+b
```

$\text{ans}=\dfrac{59}{480}\pi R^5$

【实验练习】

要求：在 MATLAB 中编写下述练习题的程序，然后运行，将源程序及运行结果保存，并以实验报告形式交回。

练习 1　计算二次积分

（1）$\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{\cos\theta}4\sqrt{1-r^2}dr$

（2）$\int_0^1 dx\int_0^{1-x}dy\int_0^{1-x-y}\dfrac{1}{(1+x+y+z)^3}dz$

练习 2　计算二重积分

（1）$\iint\limits_D(x^2+y^2)dxdy$，$D:1\le x\le 2,x\le y\le 2x$；

（2）$\iint\limits_D(x^2+y^2)dxdy$，$D:x^2+y^2\le x$

练习 3　求下面曲面所围成立体的体积

（1）$z=e^{-x^2-y^2}$，$z=0$，$x^2+y^2=R^2$；

（2）$z=x^2+y^2$，$y=x^2$，$y=1$，$z=0$。

练习 4　求曲面 $z^2=2xy$ 被平面 $x+y=1$，$x=0$，$y=0$ 所截得在第一卦限内的部分曲面的面积。

练习 5　设平面薄片所占的闭区域 D 由抛物线 $y=x^2$ 及直线 $y=x$ 所围成，面密度为 $\rho(x,y)=x^2y$，求该薄片的质量。

练习 6　计算下列三重积分

（1）计算 $\iiint\limits_\Omega zdv$，$\Omega:x^2+y^2+(z-a)^2\le a^2,x^2+y^2\le z^2$；

（2）$\iiint\limits_\Omega xydv$，$\Omega$ 由 $x^2+y^2=1,z=1,z=0,x=0,y=0$ 围成；

（3）$\iiint\limits_\Omega\sqrt{x^2+y^2+z^2}dv$，$\Omega$ 由 $x^2+y^2+z^2=z$ 围成；

（4）$\iiint\limits_\Omega(x^2+y^2)dv$，$\Omega$ 由 $4z^2=25(x^2+y^2)$，$z=5$ 围成；

实验七　曲线积分及曲面积分

【实验类型】验证性

【实验学时】1 学时

【实验目的】

1. 通过使用 MATLAB 的一些基本功能（主要是计算功能），理解和掌握曲线、曲面积分的相关基本概念及其相应的计算方法

2. 会用 MATLAB 计算两类曲线、曲面积分等应用问题。

【实验内容】

1. 使用 MATLAB 掌握第一、二类曲线积分的计算方法；

2. 使用 MATLAB 掌握平面区域的计算方法；

3. 使用 MATLAB 掌握 Green 公式的计算方法；

4. 使用 MATLAB 掌握第一、二类曲面积分的计算方法；

【实验方法与步骤】

一、实验的基本理论与方法

1、第一类曲线积分的概念及其计算方法：若函数 $f(x,y)$ 在光滑曲线弧 L 上连续，L 的参数方程为 $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, (\alpha \le t \le \beta)$，且 $x(t), y(t)$ 在 $[\alpha, \beta]$ 上具有连续导数，$x'^2(t) + y'^2(t) \ne 0$，则 $\int_L f(x,y)ds = \int_\alpha^\beta f(x(t), y(t))\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}dt$。

2、第二类曲线积分的概念及其计算方法（略）

3、若平面区域 D 的面积为 A，边界曲线为 L，则有

$$A = \frac{1}{2}\int_L xdy - ydx$$

4、定理（Green 公式）设函数 $P(x,y), Q(x,y)$ 及其一阶偏导数在区域 D 上连续，则公式

$$\int_L Pdx + Qdy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy$$

成立，其中 L 是区域 D 的边界，它是分段光滑的，方向取正向。

5、 平面曲线积分与路径无关的条件（略）

6、 两类曲面积分的概念及其计算方法（略）

7、 Gauss 公式（略）

8、 Stocks 公式（略）

二、实验使用的 MATLAB 函数

1. plot函数：绘制二维曲线的最基本函数

plot函数的基本调用格式为：plot(x,y)，其中x和y为长度相同的向量，分别用于存储x坐标和y坐标数据。

2. 双纵坐标函数plotyy：绘制二维曲线的最基本函数

它能把函数值具有不同量纲、不同数量级的两个函数绘制在同一坐标中。

调用格式为：plotyy(x1,y1,x2,y2)，其中x1—y1对应一条曲线，x2—y2对应另一条曲线。横坐标的标度相同，纵坐标有两个，左纵坐标用于x1—y1数据对，右纵坐标用于x2—y2数据对。

3. 绘制图形的辅助操作---图形标注

有关图形标注函数的调用格式为：

title(图形名称)

xlabel(x轴说明)

ylabel(y轴说明)

text(x,y,图形说明)

legend(图例1,图例2,…)

4. 绘制三维曲线的最基本函数

plot3函数与plot函数用法十分相似，其调用格式为：

plot3(x1,y1,z1,选项1,x2,y2,z2,选项2,…,xn,yn,zn,选项n)

5. 绘制三维曲面的函数

surf函数和mesh函数的调用格式为：

mesh(x,y,z,c)

surf(x,y,z,c)

6. 计算累次积分：

int(int(f,x,a,b),y,c,d),其中f=f(x,y), $x\in(a,b)$， $y\in(c,d)$；

int(int（int(f,x,a,b),y,c,d),z,e,f）(其中 f=f(x,y,z), $x\in(a,b)$， $y\in(c,d)$, $z\in(e,f)$.

6.diff(f，x),其中， $f=f(x,y)$：求偏导数$\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}$。

三、实验指导

例 1 计算曲线积分 $\int_L yds$，其中 L 为心形线 $r = a(1+\cos t)$ 的下半部分。

心形线的参数方程为 $\begin{cases} x = a(1+\cos t)\cos t \\ y = a(1+\cos t)\sin t \end{cases} (\pi \le t \le 2\pi)$

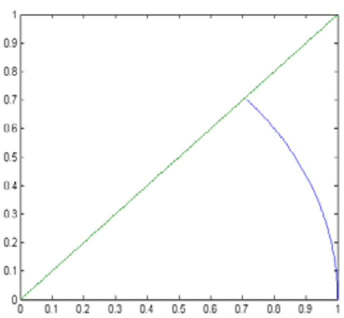
```
>> syms r t x y a f g u
>> x=a*(1+cos(t))*cos(t);y=a*(1+cos(t))*sin(t);
>> r=a*(1+cos(t));
>> f=diff(x); g=diff(y);
>> u=sqrt(f^2+g^2);
>> int(y*u,t,pi,2*pi)
ans =-16/5*(a^2)^(1/2)*a
```

（计算结果：ans=$-\dfrac{16}{5}a\sqrt{a^2}$ ）

例 2 计算曲线积分 $\int_L e^{\sqrt{x^2+y^2}}ds$，其中 L 为圆周 $x^2+y^2=a^2$，直线 $y=x$ 及 x 轴在第一象限内所围成的扇形的整个边界。

取 $a=1$ 画出曲线的图形，如图所示

```
>> t=0:0.01:pi/4;
>> x=cos(t); y=sin(t);
>> x1=0:0.01:1;
>> y1=x1;
>> plot(x,y,x1,y1)
```



由图知： $L = l_1$ ； l_2 ； l_3，

其中 l_1 的参数方程为 $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = a\sin t \end{cases} (0 \le t \le \dfrac{\pi}{4})$；

l_2的参数方程为$\begin{cases} x=t \\ y=t \end{cases}(0 \le t \le \dfrac{a}{\sqrt{2}})$；

l_3的参数方程为$\begin{cases} x=t \\ y=0 \end{cases}(0 \le t \le 1)$；

计算在l_1上的积分：

```
>> syms a t x y f g u f1
>> x=a*cos(t); y=a*sin(t);
>> f=diff(x); g=diff(y);
>> u=sqrt(f^2+g^2);
>>f1= int(exp(sqrt(x^2+y^2))*u,t,0,pi/4)
```

>> ans=f1=$\frac{1}{4}\sqrt{a^2}e^{\sqrt{a^2}}\pi$

计算在l_2上的积分：

```
>> syms a t x y f g u f2
>> x=t; y=t;
>> f=diff(x); g=diff(y);
>> u=sqrt(f^2+g^2);
>>f2= int(exp(sqrt(x^2+y^2))*u,t,0,a/sqrt)
```

ans=f2=$\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{a^2}}{\sqrt{2}a}+\frac{\sqrt{a^2}e^{\sqrt{a^2}}}{\sqrt{2}a}\right)$

计算在l_3上的积分：

```
>> syms a t x y f g u f3
>> x=t; y=0;
>> f=diff(x); g=diff(y);
>> u=sqrt(f^2+g^2);
>>f3= int(exp(sqrt(x^2+y^2))*u,t,0,1)
```

>> f3=$-1+e$

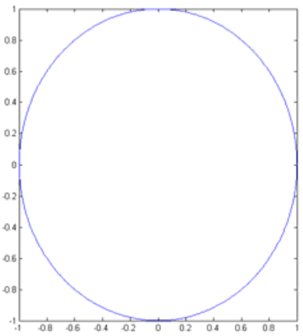
```
>> f1+f2+f3
```

>>ans= $-1+e+\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{a^2}}{\sqrt{2}a}+\frac{\sqrt{a^2}e^{\sqrt{a^2}}}{\sqrt{2}a}\right)+\frac{1}{4}\sqrt{a^2}e^{\sqrt{a^2}}\pi$

例 3 计算曲线积分 $I=\int_L (xy^2-4y^3)dx+(x^2y+\sin y)dy$，其中 L 为圆周 $x^2+y^2=a^2$ 的，且取正方向。

取 $a=1$，画出积分曲线，如图所示

```
>> t=0:0.01:2*pi;
>> x=cos(t); y=sin(t);
>> plot(x,y);
```



积分的计算方法有两种;

（1） 直接计算

```
>> syms x y t dx dy a
>> x=a*cos(t); y=a*sin(t);
>> dx=diff(x); dy=diff(y);
>> int((x*y^2-4*y^3)*dx+(x^2*y+sin(y))*dy,t,0,2*pi);
>>ans =3*a^4*pi
```

（计算结果：ans= $3a^4\pi$ ）

（1） 利用 Green 公式

```
>> syms x y p q d r t f a u v
>> p=x*y^2-4*y^3;
>> q=x^2*y+sin(y);
>> d=diff(q,x)-diff(p,y);
>> u=r*cos(t);
```

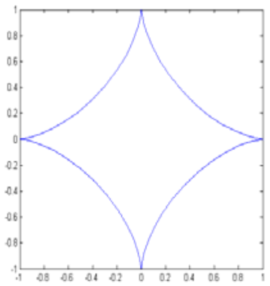
```
>> v=r*sin(t);
>> g=subs(d,[x y],[u v]);
>> int(int(g*r,t,0,2*pi),r,0,a)
>>ans = 3*pi*a^4
```

（计算结果：ans=$3a^4\pi$ ）

例 4 利用曲线积分求星形线$\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \end{cases}$$(0 \le t \le 2\pi)$所围成图形的面积。

取$a = 1$，画出积分曲线，如图所示

```
>>    t=0:0.1:2*pi;
>> x=cos(t).^3; y=sin(t).^3;
>> plot(x,y)
```



利用公式$A = \dfrac{1}{2}\int_L xdy - ydx$计算面积：

```
>> syms x y a t dx dy
>> x=a*cos(t)^3; y=a*sin(t)^3;
>> dx=diff(x); dy=diff(y);
>> int(1/2*(x*dy-y*dx),t,0,2*pi)
>>ans = 3/8*a^2*pi
```

（计算结果：ans=$\dfrac{3a^2\pi}{8}$）

例 5 计算曲线积分$\int_L \dfrac{(x-y)dx + (x+y)dy}{x^2 + y^2}$，其中 L 为星形线$\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \end{cases}$从$t = 0$到$t = \pi$的一段。

判断曲线积分是否与路径无关：

```
>> syms p q x y m
>> p=(x-y)/(x^2+y^2);
>> q=(x+y)/(x^2+y^2);
>> m=diff(q,x)-diff(p,y);
>> simplify(m)
>>ans =0
```

设$D=\{(x,y)\,|\,x\neq 0且y>0\}$，则 D 是单连通区域，由于$P=\dfrac{x-y}{x^2+y^2}$和$Q=\dfrac{x+y}{x^2+y^2}$以及他们的一阶偏导数在 D 内连续，且$\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial y}$，因此，积分在 D 内与路径无关，考虑到被积函数的特点，我们取上半圆周$C:\begin{cases}x=a\cos t\\ y=a\sin t\end{cases}\ t:0\to\pi$为新的积分路径，计算积分

```
>> syms a x y t dx dy
>> x=a*cos(t); y=a*sin(t);
>> dx=diff(x); dy=diff(y);
>> int(((x-y)*dx+(x+y)*dy)/(x^2+y^2),t,0,pi)
>>ans = pi
```

（计算结果：ans=π）

例 6 利用曲面积分计算旋转抛物面$z=x^2+y^2(0\le z\le 3)$的面积。

根据被积函数和积分区域的特点，采用极坐标计算曲面面积：

```
>> syms r u v m f
>> u=r*cos(t);
>> v=r*sin(t);
>> m=subs(s,[x,y],[u,v]);
>> int(int(m*r,t,0,2*pi),r,0,sqrt(3))
>>ans = 13/6*13^(1/2)*pi-1/6*pi
```

（计算结果：ans=$2\left(-\dfrac{1}{12}+\dfrac{13\sqrt{13}}{12}\right)\pi$）

例 7 计算曲面积分$\iint\limits_S yzdS$，其中S是平面$z=y+3$被圆柱面$x^2+y^2=1$截得的部分。画

出曲面及其在 XOY 面上的投影区域，如图所示

根据积分区域的形状，采用极坐标计算积分：

```
>> syms x y z dzx dzy sxy r t u v
>> z=y+3;
>> dzx=diff(z,x); dzy=diff(z,y);
>> sxy=y*z*sqrt(1+dzx^2+dzy^2);
>> u=r*cos(t);v=r*sin(t);
>> int(int(subs(sxy,[x y],[u v])*r,t,0,2*pi),r,0,1)
>>ans =1/4*2^(1/2)*pi
```

（计算结果：ans=$\dfrac{\pi}{2\sqrt{2}}$）

例 8 利用 Gauss 公式计算曲面积分 $\iint\limits_{S} xz^2dydz+(x^2y-z^3)dzdx+(2xy+y^3z)dxdy$，其中 S 为上半球体 $x^2+y^2+z^2\le a^2, 0\le z\le\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 的表面外侧。

```
>> syms p q r x y z dpx dqy drz   f g u v t m n l a
>> p=x*z^2;
>> q=x^2*y-z^3;
>> r=2*x*y+y^2*z;
>> dpx=diff(p,x);
>> dqy=diff(q,y);
>> drz=diff(r,z);
>> f=dpx+dqy+drz;
>> m=t*sin(u)*cos(v);
>> n=t*sin(u)*sin(v);
>> l=t*cos(u);
>>g=subs(f,[x y z],[m n l]);
>> int(int(int(g*t^2*sin(u),u,0,pi/2),v,0,2*pi),t,0,a)
>>ans = 2/5*pi*a^5
```

（计算结果：ans=$\dfrac{2a^5\pi}{5}$）

【实验练习】

练习 1 计算曲线积分 $I=\int_L (x^2+y^2)ds$，其中 L 是圆心在（R，0），半径为 R 的上半圆周；

练习 2 利用曲线积分求椭圆 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$ 所围图形的面积。

练习 3 计算曲线积分 $\int_L (2xy-x^2)dx+(x+y^2)dy$，并验证 Green 公式的正确性，其中 L 是由抛物线 $y=x^2$ 和 $y^2=x$ 所围成区域的正向边界线。

练习 4 计算曲面积分 $\iint\limits_S \dfrac{dS}{z}$，S 是球面 $x^2+y^2+z^2\le a^2$ 被平面 $z=h(0<h<a)$ 截出的顶部。

练习 5 计算曲面积分 $\iint\limits_S (x-y)dxdy+(y-z)xdydz$，其中 S 为柱面 $x^2+y^2=1$ 及平面 $z=0,z=3$ 所围成的空间闭区域的整个边界曲面的外侧。

实验八　级数及运算

【实验类型】验证性

【实验学时】1 学时

【实验目的】

1．掌握用 MATLAB 判定常数项级数的敛散性的方法。

2．掌握用 MATLAB 进行幂级数求和的方法。

3．掌握用 MATLAB 将函数展开成幂级数的方法；

【实验内容】

1．熟悉有关级数收敛、发散的判定方法和级数求和；

2．利用 MATLAB 判断常数项级数的敛散性；

3．熟悉有关幂级数的各种运算；

4．利用 MATLAB 进行幂级数的求和运算；

5．利用 MATLAB 进行函数的幂级数展开；

【实验方法与步骤】

一、实验的基本理论与方法

1、 常数项级数的审敛法：

（1）　级数收敛的必要条件：若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，则必有 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$。

（2）　比较审敛法的极限形式：设有正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$，若 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_n}{v_n} = \rho$，$(0<\rho<+\infty)$，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 同时收敛或发散。

（3）　比值审敛法：设有正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$，若 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \rho$，当 $\rho<1$ 时级数收敛；当 $\rho>1$ 时级数发散。

（4）　条件收敛与绝对收敛：若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 收敛（级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 必收敛），则称级数绝对收敛；若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 发散，而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，则称级数条件收敛。

2、 幂级数展开的唯一性：若函数 $f(x)$ 在含点 x_0 的某一区间内能展开为幂级数，则必为

Taylor 级数

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2!}f''(x_0)(x-x_0)^2+\cdots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n+\cdots$$

二、实验使用的 MATLAB 函数

1、 taylor(f,x,k)　将 $f(x)$ 按 x=0 进行 Taylor 幂级数展开

taylor(f,x,k,a)　将 $f(x)$ 按 x=a 进行 Taylor 幂级数展开

其中，f 为函数的符号表达式，x 为自变量，若函数只有一个自变量，则 x 可以省略。K 为需要展开的项数，默认值为 6 项。还可以给出 a 参数，表明需要获得关于 x=a 的幂级数展开。

2、 $S=symsum(f_k,k,k_0,k_n)$　判断级数 $\sum_{k=k_0}^{k_n} f_k$ 的收敛性并求级数的和。

其中，f_k 为级数的通项，k 为级数自变量，k_0 和 k_n 为级数求和的起始项与终止项，并可以将起始或终止项设置成无穷量 inf。若给出的 f_k 变量中只含有一个变量，则在函数调用时可以省略 k 量。 但是在调用这个函数时，需要先用 syms k 声明自变量 k 为符号变量。

三、实验指导

例 1 讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$ 是否绝对收敛？

```
syms n;
s=symsum((-1)^(n-1)/n,n,1,inf)
```

结果：

```
s =
log(2)
```

即原级数收敛。再考察绝对值级数是否收敛：

```
syms n;
s=symsum(1/n,n,1,inf)
```

结果：

```
s =
inf
```

即绝对值级数发散。

故原级数条件收敛。

例 2、判断级数 $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \frac{12^k}{k!}$ 是否绝对收敛？

syms k;

s=symsum((-12)^k/sym('k!'),k,1,inf)

结果：

s =

exp(-12)*(1-exp(12))

即原级数收敛。再考察绝对值级数是否收敛：

syms k;

s=symsum(12^k/sym('k!'),k,1,inf)

结果：

s =

exp(12)*(1-exp(-12))

即绝对值级数收敛。

故原级数绝对收敛。

例 3、讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$ 的收敛性。

syms k;

s=symsum(1/sqrt(k*(k+1)),1,n); %先求出前 n 项和 s

s1=limit(s,n,inf) %判断前 n 项和 s 是否有极限

结果：

s1 =

inf

即原级数发散

例 4、判断级数 $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{\ln n}$ 的敛散性。

syms n;

s=symsum((-1)^n/log(n),n,2,inf);

vpa(s,4)　　　　　　　　　　%用此命令改变 s 的精度

结果：

ans =

0.9243

例 5、求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{2^n \cdot n}$ 的收敛区间及和函数。

先求收敛区间：

syms n;

f=2^n*n/2^(n+1)/(n+1);

r=1/limit(f,n,inf)

结果：

r =

2

考察 x=-2 处是否收敛:

syms n;

s1=symsum((-2)^n/2^n/n,n,1,inf)

结果：

s1 =

-log(2)

考察 x=2 处是否收敛：

syms n;

s2=symsum(2^n/2^n/n,n,1,inf)

结果：

s2 =

inf

再求幂级数的和函数：

syms n x

s3=symsum(x^n/2^n/n,n,1,inf)

结果：

s3 =

-log(1-1/2*x)

故幂级数的和函数为$-\ln(1-\frac{x}{2})$

例 6、求下列幂级数的和函数。

（1）$2\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)(2x+1)^{2n+1}}$

```
syms n x
s=symsum(2/((2*n+1)*(2*x+1)^(2*n+1)),n,0,inf)
simple(s)     %对结果进行化简。
```

结果:

```
ans=
log((x+1)/x)
```

(2) $\sum_{n=1}^{+\infty}n(x-1)^n$

```
syms n x
s=symsum(n*(x-1)^n,n,1,inf)
simple(s)
```

结果：

```
ans =
 (x-1)/(x-2)^2
```

例 7 （1）将$\ln(x+\sqrt{x^2+1})$展开为 x 的幂级数。

（2）将$\frac{1}{x^2+3x+2}$展开为$x-1$的幂级数。

（3）将$e^{-5x}\sin(3x+\frac{\pi}{3})$展开成$x-a$的幂级数。

解：

（1）
```
syms x;
f=log(x+sqrt(x^2+1));
y=taylor(f,x)
```

结果为：

```
y =
```

x-1/6*x^3+3/40*x^5

（2）

```
syms x;
f=1/(x^2+3*x+2);
y=taylor(f,x,5,1)
```

结果为：

```
y =
11/36-5/36*x+19/216*(x-1)^2-65/1296*(x-1)^3+211/7776*(x-1)^4
```

（3）

```
syms x a;
f=exp(-5*x)*sin(3*x+pi/3);
y=taylor(f,x,2,a)
```

结果为：

```
y =
exp(-5*a)*sin(3*a+1/3*pi)+(3*exp(-5*a)*cos(3*a+1/3*pi)-5*exp(-5*a)*sin(3*a+1/3*pi))
*(x-a)
```

【实验练习】

练习 1 判断下列级数的收敛性。

（1）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ （2）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$ （3）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi}{2}$

练习 2 将下列函数展开成 x 的幂级数。

（1）$\ln(a+x)\quad(a>0)$ （2）a^x （3）$\sin^2(x)$ （4）$\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

练习 3 将下列函数展开成幂级数

（1） $\sqrt{x^3}$ 展开为 $x-1$ 的幂级数。

（2）$\cos x$ 展开成 $x+\frac{\pi}{3}$ 的幂级数。

实验九　微分方程及应用

【实验类型】验证性

【实验学时】1 学时

【实验目的】

掌握用 MATLAB 求常微分方程的解的方法。

【实验内容】

1．熟悉各种简单常微分方程及解法；

2．利用 MATLAB 求解常见常微分方程；

【实验方法与步骤】

一、实验的基本理论与方法

1．齐次方程的求解法。

2．一阶线性微分方程的求解法。

3．可降阶的高阶微分方程的求解法。

4．二阶线性微分方程的求解法。

二、实验使用的 MATLAB 函数

1. dsolve：求解常微分方程的通解。

dsolve 命令的调用格式有：

◆dsolve('equ')

◆dsolve('equ', ' var')

上述命令调用格式中，equ 为待求解的常微分方程，第一种调用格式视变量 t 为自变量进行求解；第二种调用格式中 var 为指定变量，dsolve 将以 var 为自变量进行常微分方程的求解。

2. dsolve('equ', 'condition1,condition2,6 ,conditionm', ' var') 或

dsolve('equ', 'condition1', 'condition2',6 , 'conditionm', ' var')：求解有初始条件的常微分方程。

以上两种调用格式所得结果完全相同，其中：equ 为常微分方程；condition1, condition2,6 ,conditionm 为初始条件；var 为指定变量。

注：平时以 $y''+2y'=x$ 形式出现的常微分方程，在 Matlab 中需重新改写。Matlab 中用 D 表示对变量求导数，Dy 表示对 y 求一阶导数，Dny 表示对 y 求 n 阶导数，因此，

$y'' + 2y' = x$ 这一常微分方程在 Matlab 中需描述为：$D2y + 2Dy = x$

三、实验指导

例 1、求解微分方程 $xy' - y\ln y = 0$。

可以执行以下命令：y=dsolve('x*Dy-y*log(y)=0','x')

则执行结果为：

y =

exp(exp(C1)*x)

其中 exp(C1)表示所求出的解为通解。若一时粗心，把执行命令写为：

y=dsolve('x*Dy-y*log(y)=0')

则所得到的执行结果为：

y =

exp(exp((t+C1)/x))

显然结果相差甚远。

例 2、求解微分方程 $y' - \dfrac{2y}{x+1} = (x+1)^{\frac{5}{2}}$。

可以执行以下命令：y=dsolve('Dy-2*y/(x+1)-(x+1)^(5/2)=0','x')

则执行结果为：

y =

2/3*(x+1)^(3/2)*x^2+4/3*(x+1)^(3/2)*x+2/3*(x+1)^(3/2)+C1*x^2+2*C1*x+C1

例 3、求解微分方程 $y''' = e^{2x} - \cos x$。

可以执行以下命令：y=dsolve('D3y=exp(2*x)-cos(x)','x')

则执行结果为：

y =

1/8*exp(2*x)+sin(x)+1/2*C1*x^2+C2*x+C3

例 4、求解微分方程 $yy'' - y'^2 = 0$。

可以执行以下命令：y=dsolve('y*D2y-Dy^2=0','x')

则执行结果为：

y =

[exp((x+C2)/C1)]

例 5、求解微分方程 $y^{(4)}-2y'''+5y''=0$ 。

可以执行以下命令：y=dsolve('D4y-2*D3y+5*D2y=0','x')

则执行结果为：y =

C1+C2*x+C3*exp(x)*cos(2*x)+C4*exp(x)*sin(2*x)

例 6、求解微分方程 $y''-5y'+6y=xe^{2x}$ 。

可以执行以下命令：y= dsolve('D2y-5*Dy+6*y=x*exp(2*x)','x')

则执行结果为：

y=

-1/2*exp(2*x)*(x^2+2*x+2)+C1*exp(2*x)+C2*exp(3*x)

例 7、求解微分方程 $y''+y=\cos 2x$ 。

可以执行以下命令：y=dsolve('D2y+y=cos(2*x)','x')

则执行结果为：

y =

(1/2*sin(x)+1/6*sin(3*x))*sin(x)+(1/6*cos(3*x)-1/2*cos(x))*cos(x)+C1*sin(x)+C2*cos(x)

利用 pretty 命令将结果化为手写格式：

pretty(y)

以上命令的执行结果为：

```
(1/2 sin(x) + 1/6 sin(3 x)) sin(x) + (1/6 cos(3 x) - 1/2 cos(x)) cos(x)

     + C1 sin(x) + C2 cos(x)
```

例 8、求解微分方程 $xdy+2ydx=0$, $y\big|_{x=2}=1$ 。

可以执行以下命令：y=dsolve('x*Dy+2*y=0','y(2)=1','x')

则执行结果为：

y =

4/x^2

例 9、求解常微分方程 $w'''=-w$ 满足 $w(0)=1$, $w'(0)=0$, $w''(0)=0$ 的特解。

可以执行以下命令：w=dsolve('D3w=-w','w(0)=1,Dw(0)=0,D2w(0)=0')

则执行结果为：

w =

1/3*exp(-t)+2/3*exp(1/2*t)*cos(1/2*3^(1/2)*t)

若想使得到的结果 w 为自变量 x 的表达式，只需执行以下命令：

w=dsolve('D3w=-w','w(0)=1,Dw(0)=0,D2w(0)=0','x')

以上命令的执行结果为：

w =

1/3*exp(-x)+2/3*exp(1/2*x)*cos(1/2*3^(1/2)*x)

【实验练习】

1、求解下列微分方程。

（1） $xy'\ln x + y = ax(\ln x + 1)$；（2） $ydx + (x^2 - 4x)dy = 0$；

（3） $\dfrac{dy}{dx} + xy - x^3y^3 = 0$；（4） $y''' + y'' - 2y' = x(e^x + 4)$；

（5） $y'' + 2y' + 5y = \sin 2x$；

（6）求解微分方程 $y'' - y = 4xe^x$ 满足 $y(0) = 0$，$y'(0) = 1$ 的特解。

（7） $y'' + 2y' + y = \cos x$，满足当 $x = 0$ 时，$y = 0$，$y' = \dfrac{3}{2}$ 的特解。

实验十　下落物体的速度问题

【实验类型】综合性

【实验学时】2 学时

【实验目的】

1、 初步认识数学建模，理解微分方程在实际中的应用；
2、 了解下落物体运动规律的常微分方程模型的建立；
3、 掌握利用 MATLAB 求解微分方程；
4、 通过本实验，进一步掌握微分方程，理解课堂所学内容，同时提高学生的实际动手能力及综合解决问题能力。

【实验内容】

内容 1：掌握问题 1（核废料处理问题）的常微分方程模型的建立，并验证其实验结果，同时按此模型计算问题 1 的另外两小题，要求在实验报告中写清 MATLAB 运行结果；

内容 2：建立问题 2（冰雹下落速度问题）的常微分方程模型，并用 MATLAB 计算结果，要求在实验报告中按问题 1 中建模的格式写出问题 2 所建的模型及 MATLAB 运行结果。

【实验准备】

实验前学生应当做好预习，理解问题 1（核废料处理问题）所建模型并掌握其建模方法，初步建立问题 2（冰雹下落速度问题）的数学模型。

【实验方法与步骤】

一、实验的基本理论与方法

1、 下落物体的受力分析；
2、 牛顿第二运动定律；
3、 数学建模基础知识；
4、 高阶常微分方程初值问题数学模型的建立；
5、 一阶常系数非奇次线性微分方程初值问题的解法；
6、 二阶常系数非奇次线性微分方程初值问题的解法；
7、 MATLAB 中 dsolve、sovle 命令的用法。

二、实验使用的 MATLAB 函数

1、 dsolve：求解常微分方程的通解。

dsolve 命令的调用格式有：

◆dsolve('equ')

◆dsolve('equ', ' var')

上述命令调用格式中，equ 为待求解的常微分方程，第一种调用格式视变量t为自变量进行求解；第二种调用格式中 var 为指定变量，dsolve 将以 var 为自变量进行常微分方程的求解。

2、dsolve('equ', 'condition1,condition2,… ,conditionm', ' var') 或

dsolve('equ', 'condition1', 'condition2',… , 'conditionm', ' var')：求解有初始条件的常微分方程。

以上两种调用格式所得结果完全相同，其中：equ 为常微分方程；condition1, condition2,… ,conditionm 为初始条件；var 为指定变量。

三、实验指导

问题 1：核废料处理问题

以前,美国原子能委员会将放射性核废料装在密封的圆桶里扔到水深约 90m 的深海里。生态学家和科学家担心这种做法不安全而提出疑问。原子能委员会会向他们保证：圆桶决不会破漏。经过周密的试验，证明圆桶的密封性是很好的。但工程师们又问：圆桶是否会因与海底碰撞而发生破裂？原子能委员会说：决不会。但工程师们不放心。他们进行了大量的试验后发现：当圆桶的速度超过 12.2m/s 时，圆桶会因碰撞而破裂。那么圆桶到达海底时的速度到底是多少呢？它会因碰撞而破裂吗？下面是一些真实而具体的数据，请你根据这些具体数据解决这个问题。

已知圆桶的质量$m=239.46$ kg，海水密度$\rho=1035.71$ kg/m^3，海水深度 90m，圆桶的体积$V=0.2058$ m^3。另外，工程师们做了大量牵引试验后得出结论：圆桶下沉时的阻力与圆桶的方位大致无关，而与下沉的速度成正比，比例系数$k=0.6$。

问题 2：冰雹下落速度问题

当冰雹中高空下落时，除了受到重力之外，还受到了空气阻力的作用，此处忽略冰雹的形状及风力对阻力的影响，则冰雹所受的阻力主要由冰雹的速度所决定，请在以下两种假设的前提下建立冰雹下落速度问题的常微分方程模型：

（1）阻力大小与下落速度成正比；

（2）阻力大小与下落速度的平方成正比；

然后思考，如果没有空气阻力，那么从 5000m 高空落下的冰雹将是一场什么样的灾难？

【问题 1 指导】

1、核废料处理问题的模型建立

只要找出圆桶的运动规律，即可判断出这样处理核废料的方法是否安全。

圆桶在运动过程中所受到的作用力包括：圆桶所受的重力G、水的浮力F和水的阻力f。

设圆桶的位移函数为$s=s(t)$，速度函数为$v=v(t)$，由牛顿运动定律得圆桶的位移和速度满足如下的微分方程：

$$\begin{cases} m\dfrac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2}=G-F-f=mg-\rho gV-k\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} \\ \left.\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}=v|_{t=0}=0 \\ s|_{t=0}=0 \end{cases} \tag{1}$$

$$\begin{cases} m\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=G-F-f=mg=\rho gV-kv \\ v|_{t=0}=0 \end{cases} \tag{2}$$

根据方程（1)，（2）解出圆桶的位移函数$s(t)$和速度函数$v(t)$。令$s(t)=90$，求出圆桶落入海底所需的时间t_0，则$v(t_0)$即为圆桶落入海底时的速度。这样就可以判断出这种处理核废料的方式是否安全。

2、求解程序

```
st=dsolve('239.46*D2s=239.46*9.8-1035.71*9.8*0.2058-0.6*Ds','Ds(0)=0,s(0)=0','t')
                                        % 求位移函数
v=dsolve('239.46*Dv=239.46*9.8-1035.71*9.8*0.2058-0.6*v*v','v(0)=0','t')
                                        % 求速度函数
t=double(solve('90=857554962173/5000000*exp(-10/3991*t)+214872203/500000*t-857554962173/5000000'))                %求出圆桶落入海底所需的时间
```

运行结果：

s=

857554962173/5000000*exp(-10/3991*t)+214872203/500000*t-857554962173/5000000

vt=

214872203/500000-214872203/500000*exp(-10/3991*t)

t=

12.99939781354047

此时，

v= 13.70563163899925 （圆桶落入海底时的速度）

求出圆桶落入海底时的速度 13.70m/s。显然此时圆桶的速度已经超过 12.2m/s，因此可以得出结论：这种处理核废料的方法不安全。

另外：

（1）若将圆桶沉入深度为 85m 的海水中，情况如何？

（2）假设水的阻力与速度的平方成正比：$f = kv^2$，并仍设 $k = 0.6$，这时速度与时间的关系如何？并求出当速度不超过 12.2m/s，圆桶的运动时间和位移应不超过多少？

按所给模型求出这两种情况下的结论。

3、建立问题 2（冰雹下落速度问题）的数学模型并用 MATLAB 求解。

实验报告

实验课程：______________________

专　　业：______________________

班　　级：______________________

学　　号：______________________

姓　　名：______________________

实验╳ ╳╳╳╳╳（黑体三号）

【实验目的】1. ××××××××

2. ××××××××

【实验内容】1. ××××××××

2. ××××××××

3. ××××××××

【实验所使用的仪器设备与软件平台】

【实验方法与步骤】(阐述实验的原理、方案、方法及完成实验的具体步骤等，附上自己编写的程序)

【实验结果】

【结果分析与讨论】