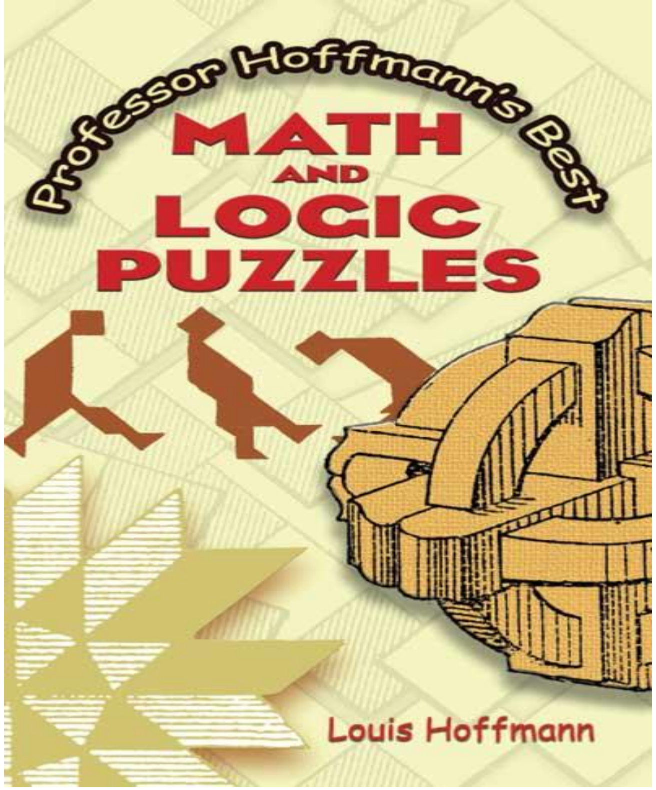
离散数学
Discrete Mathematics

第2讲 命题逻辑 Propositional Logic（3）

■ ■ ■ ■ ■ ■

我的命题仅仅是‘如果…那么…’，
并且我的成功仅在于用漂亮的链，
把两个疑虑连接：因为问也徒劳。
如果我的假设是成立的，
或者我所证明的是具有事实的根据，
桥还是存在的，人不必在两侧都爬行，
这样就取得了胜利。
这个摆弄微弱阴影的游戏，
并不需要多少力气，
多么脆弱的魔棍，
却又具有多么深厚的魅力。

——C.R.Wylie, Jr



Histories make men wise; poets, witty; the mathematics, subtle; natural philosophy, deep; moral, grave; logic and rhetoric, able to contend.

——*Bacon Francis*

2.5 推理演算

▶ 演绎推理

数理逻辑中，应用公认的推理规则(Rules of Inference)从一些前提(Premise)中推导出结论来时，这种推导过程称之为演绎推理(Deduction)或形式证明(Formal Proof)。

Deductive Reasoning vs. Inductive Reasoning

1 推理形式

设$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n, \beta$都是命题公式。称由前提$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$推出$\beta$的推理是**有效的**或**正确的**，并称$\beta$是$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$的**有效结论**或**逻辑结果**（**Logical Consequence**），

当且仅当

$$(\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \cdots \wedge \alpha_n) \rightarrow \beta \text{ 是永真式}$$

记为$\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \cdots \wedge \alpha_n \Rightarrow \beta$或$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n \Rightarrow \beta$（称为**重言蕴含**或**推理形式**）

示例：教材例1.18 写出下述推理关系的推理形式：“下午小王或去看电影或去游泳。他没去看电影。所以，他去游泳了。”

解 设 P：小王下午去看电影；Q：小王下午去游泳。于是得到如下推理形式:

前提：$P \vee Q$，$\neg P$

结论：Q

推理形式为:$(P \vee Q) \wedge \neg P \Rightarrow Q$

讨论

- 符号⇒与→是两个完全不同的符号？
- 推理有效，则所得结论就真实吗？推理是有效的话，那么不可能有：它的前提都为真时而它的结论为假，对吗？
- 可以用**真值表**在有限步内判定一个结论是否是前提的有效逻辑结论吗？
- 推理方法还有那些？

→动态推理方法：

公理+推理规则：演绎推理

等值公式（用于等价变换或蕴含推理）以及以下蕴含推理定律构成了演绎推理基本公理

2 推理定律——公理

有如下蕴含推理式（α、β、γ均为任意命题公式）：

I_1 合取引入规则 $\alpha, \beta \Rightarrow \alpha \wedge \beta$

I_2 简化规则 $\alpha \wedge \beta \Rightarrow \alpha$, $\alpha \wedge \beta \Rightarrow \beta$

I_5 $\neg(\alpha \to \beta) \Rightarrow \alpha$, $\neg(\alpha \to \beta) \Rightarrow \neg \beta$

I_3 附加规则 $\alpha \Rightarrow \alpha \vee \beta$, $\beta \Rightarrow \alpha \vee \beta$

I_4 $\neg \alpha \Rightarrow \alpha \to \beta$, $\beta \Rightarrow \alpha \to \beta$

I_6 $\alpha \to \beta \Rightarrow (\alpha \vee \gamma) \to (\beta \vee \gamma)$,

$\alpha \to \beta \Rightarrow (\alpha \wedge \gamma) \to (\beta \wedge \gamma)$

2.5 推理演算

I_7 **假言推理**（又称分离规则） $\alpha\wedge(\alpha\to\beta)\Rightarrow\beta$

I_8 **拒取式**(否定后件式) $\neg\beta\wedge(\alpha\to\beta)\Rightarrow\neg\alpha$

I_9 析取三段论 $(\alpha\vee\beta)\wedge\neg\beta\Rightarrow\alpha$

I_{11} 二难推理 $(\alpha\to\gamma)\wedge(\beta\to\gamma)\wedge(\alpha\vee\beta)\Rightarrow\gamma$

I_{10} 假言三段论 $(\alpha\to\beta)\wedge(\beta\to\gamma)\Rightarrow(\alpha\to\gamma)$

I_{12} 等价三段论 $(\alpha\leftrightarrow\beta)\wedge(\beta\leftrightarrow\gamma)\Rightarrow(\alpha\leftrightarrow\gamma)$

I_{13} $(\alpha\to\beta)\wedge(\beta\to\alpha)\Rightarrow(\alpha\leftrightarrow\beta)$

$\alpha\leftrightarrow\beta\Rightarrow\alpha\to\beta$， $\alpha\leftrightarrow\beta\Rightarrow\beta\to\alpha$

3 推理规则

- 前提引入(P)
- 结论引用(T)
- 置换规则(R)
- 代入规则(S)

4 动态推理方法

- 直接证明

4 动态推理方法

● 直接证明

示例 证明 $(P\vee Q)\wedge(P\rightarrow R)\wedge(Q\rightarrow S)\Rightarrow S\vee R$

证明

(1)	$P\vee Q$	P
(2)	$\neg P\rightarrow Q$	R, E, (1)
(3)	$Q\rightarrow S$	P
(4)	$\neg P\rightarrow S$	T, I, (2), (3)
(5)	$\neg S\rightarrow P$	R, E, (4)
(6)	$P\rightarrow R$	P
(7)	$\neg S\rightarrow R$	T, I, (5), (6)
(8)	$S\vee R$	R, E, (7)

2.5 推理演算

练习：构造下列推理的证明

前提：$A \vee B$， $B \to C$， $A \to D$， $\neg D$，结论：$C \wedge (A \vee B)$

解 根据合取引入规则，因为已经有前提$A \vee B$，所以只要推出结论C即可：

(1) $A \to D$ P

(2) $\neg D$ P

(3) $\neg A$ T, I (1)(2)

((4)) $A \vee B$ P

(5) B T, I (3)(4)

(6) $B \to C$ P

(7) C T, I (5)(6)

2.5 推理演算

- **间接证明**

●间接证明

反证法?

矛盾法/(Proof by Contradiction)

设 α，β 是命题公式，则 $\alpha \Rightarrow \beta$ 的充要条件是 $\alpha \wedge \neg \beta$ 是矛盾式。

示例 证明$P\rightarrow\neg Q$，$Q\vee\neg R$，$R\wedge\neg S\Rightarrow\neg P$

证明 用反证法。

(1)	$\neg(\neg P)$	P(附加)
(2)	P	R, E, (1)
(3)	$P\rightarrow\neg Q$	P
(4)	$\neg Q$	T, I, (2), (3)
(5)	$Q\vee\neg R$	P
(6)	$\neg R$	T, I, (4), (5)
(7)	$R\wedge\neg S$	P
(8)	R	T, I, (7)
(9)	$R\wedge\neg R$	T, I, (6), (8), 矛盾

因此，假设不成立，原推理形式正确。

▶CP规则(Rule of Condition Proof)

演绎定理

$(\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \cdots \wedge \alpha_k \wedge \alpha) \Rightarrow \beta$ 当且仅当 $(\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \cdots \wedge \alpha_k) \Rightarrow \alpha \rightarrow \beta$。

利用演绎定理，许多命题公式，特别是蕴涵式的证明可得到简化，可将蕴涵式的前件作为前提引入来进行证明。

2.5 推理演算

示例 验证下述推理是否正确。

或者逻辑学难学，或者有多数学生喜欢它；如果数学容易学，那么逻辑学并不难学。因此如果许多学生不喜欢逻辑，那么数学并不容易学。

解 先将命题符号化，首先抽取的基本命题包括：P：逻辑学难学； Q：有多数学生喜欢逻辑学； R：数学容易学。

则上述推理形式化为：

前提：$P \vee Q$，$R \rightarrow \neg P$

结论：$\neg Q \rightarrow \neg R$

2.5 推理演算

证明：$P \vee Q$，$R \to \neg P \Rightarrow \neg Q \to \neg R$

(1)	$\neg Q$	P(附加)
(2)	$P \vee Q$	P
(3)	P	T, I, (1), (2)
(4)	$R \to \neg P$	P
(5)	$\neg R$	T, I, (3), (4)
(6)	$\neg Q \to \neg R$	CP

根据CP规则，整个推理正确。

练习

在某一次足球比赛中，四支球队进行了比赛，已知情况如下，问结论是否有效?

前提：若A队得第一，则B队或C队获亚军；

若C队获亚军，则A队不能获冠军；

若D队获亚军，则B队不能获亚军；

A 队获第一。

结论： D队不是亚军。

首先符号化

令P：A 队获冠军；Q：B 队获亚军；R：C 队获亚军；S：D 队获亚军，则

前提：$P\rightarrow(Q\vee R)$，$R\rightarrow\neg P$，$S\rightarrow\neg Q$，P

结论：$\neg S$

推理形式：$P\rightarrow(Q\vee R)$，$R\rightarrow\neg P$，$S\rightarrow\neg Q$，$P\Rightarrow\neg S$

首先符号化

令P：A队获冠军；Q：B队获亚军；R：C队获亚军；S：D队获亚军，则

前提：$P\rightarrow(Q\vee R)$，$R\rightarrow\neg P$，$S\rightarrow\neg Q$，P

结论：$\neg S$

推理形式：$P\rightarrow(Q\vee R)$，$R\rightarrow\neg P$，$S\rightarrow\neg Q$，$P\Rightarrow\neg S$

证明：	（1）P	P
	（2）$P\rightarrow(Q\vee R)$	P
	（3）$Q\vee R$	T, I, (1), (2)
	（4）$R\rightarrow\neg P$	P
	（5）$P\rightarrow\neg R$	R, E, , (4)
	（6）$\neg R$	T, I, (1), (5)
	（7）Q	T, I, (3), (6)
	（8）$S\rightarrow\neg Q$	P
	（9）$Q\rightarrow\neg S$	R, E, , (8)
	（10）$\neg S$	T, I, (7), (9)

因此，该结论是有效的。

命题逻辑 小结

- ✓ 运算表与真值表：析取、蕴含
- ✓ 等值式
- ✓ 代入定理
- ✓ 置换定理
- ✓ 对偶定理
- ✓演绎定理

▶ 知识要点

– 命题、联接词
– 命题公式、命题公式的类型
– 等值公式、等值演算
– 范式
– 推理演算

- ✓ 主范式
- ✓ 演绎推理
- ✓ 推理规则
- ✓ 推理定律
- ✓ 推理方法