1　求下列函数的间断点，并确定其类型.

(1) $f(x)=\dfrac{\ln|x|}{x^2-3x+2}$；　(2) $f(x)=\begin{cases}|x-1|, & |x|>1\\ \cos\dfrac{\pi x}{2}, & |x|\le 1\end{cases}$；　(3) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}\ln(1-x), & x<0\\ 0, & x=0\\ \dfrac{\sin x}{x-1}, & x>0\end{cases}$.

解　(1) 由 $\ln|x|$ 的定义域知 $x\ne 0$.又由 $x^2-3x+2=0$ 得 $x_1=1$, $x_2=2$.显然，$f(x)$ 在 $(-\infty,0)$，$(0,1)$，$(1,2)$及$(2,+\infty)$内均连续，故 $f(x)$ 的可能间断点为 $x=0,1,2$.又

$$\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{\ln|x|}{x^2-3x+2}=-\infty,\qquad \lim_{x\to 2}f(x)=\lim_{x\to 2}\frac{\ln|x|}{x^2-3x+2}=\infty,$$

故 $x=0,2$ 均为 $f(x)$ 的第二类无穷间断点.

而 $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln|x|}{x^2-3x+2}=-1$，故 $x=1$ 为 $f(x)$ 的第一类可去间断点.

(2) 将 $f(x)$ 改写成　$f(x)=\begin{cases}1-x, & x<-1\\ \cos\dfrac{\pi x}{2}, & -1\le x\le 1\\ x-1, & x>1\end{cases}$. 显然，$f(x)$ 在$(-\infty,-1)$, $(-1,1)$ 及$(1,+\infty)$内连续. 下面讨论 $f(x)$ 在 $x=-1$ 与 $x=1$ 处的连续性.

∵

$$f(-1-0)=\lim_{x\to -1^-}f(x)=\lim_{x\to -1^-}(1-x)=2\ne f(-1+0)=\lim_{x\to -1^+}f(x)=\lim_{x\to -1^+}\cos\frac{\pi x}{2}=0$$

即 $f(x)$ 在 $x=-1$ 处的左右极限都存在，但不相等，∴ $x=-1$ 为 $f(x)$ 的第一类跳跃间断点.

∵ $f(1-0)=\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\cos\dfrac{\pi x}{2}=0=f(1+0)=\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}(x-1)=0$

即 $f(x)$ 在 $x=1$ 处的左右极限都存在并且相等，∴ $x=1$ 为 $f(x)$ 的第一类可去间断点.

(3) 显然，$f(x)$ 在$(-\infty,0)$，$[0,1)$及$(1,+\infty)$内连续. 下面讨论 $f(x)$ 在 $x=0$ 与 $x=1$ 处的连续性.

∵

$$f(0-0)=\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{\ln(1-x)}{x}=-1\ne f(0+0)=\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{x-1}=0=f(0)$$

∴ $x=0$ 为 $f(x)$ 的第一类跳跃间断点.

$\because \lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin x}{x-1}=\infty$，$\therefore x=1$ 为 $f(x)$ 的第二类无穷间断点.

2　讨论 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2+(2x)^n+x^{2n}}$ 的连续性（$x\ge 0$）.

解　若 $0\le x\le \dfrac{1}{2}$，则　$\sqrt[n]{2}\le\sqrt[n]{2+(2x)^n+x^{2n}}\le\sqrt[n]{4}$；

若 $\dfrac{1}{2}<x<2$，则　$2x\le\sqrt[n]{2+(2x)^n+x^{2n}}=2x\sqrt[n]{2(2x)^{-n}+1+2^{-n}x^n}\le 2x\sqrt[n]{3}$；

若 $2\le x<+\infty$，则　$x^2\le\sqrt[n]{2+(2x)^n+x^{2n}}=x^2\sqrt[n]{2x^{-2n}+2^n x^{-n}+1}\le x^2\sqrt[n]{3}$；

而
$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{2}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{3}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{4}=1$$

∴
$$f(x)=\begin{cases}1, & 0\le x\le\dfrac{1}{2}\\ 2x, & \dfrac{1}{2}<x<2\\ x^2, & 2\le x<+\infty\end{cases},$$

而 $f(x)$ 在 $[0,\dfrac{1}{2}]$，$(\dfrac{1}{2},2)$，$[2,+\infty)$ 上是初等函数，因而连续.

又∵
$$\lim_{x\to\frac{1}{2}^-} f(x)=1=\lim_{x\to\frac{1}{2}^+} f(x),\qquad f(\frac{1}{2})=1;$$
$$\lim_{x\to 2^-} f(x)=4=\lim_{x\to 2^+} f(x),\qquad f(2)=4.$$

∴　$f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续.

3 若 $\lim\limits_{x\to x_0}u(x)=A$，$\lim\limits_{x\to x_0}v(x)=B$，**证明** $\lim\limits_{x\to x_0}u(x)^{v(x)}=A^B$.

证　$\lim\limits_{x\to x_0}u(x)^{v(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}e^{v(x)\ln u(x)}=e^{\lim\limits_{x\to x_0}v(x)\ln u(x)}=e^{B\ln A}=A^B$.

4 若函数 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上连续，且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 存在. 证明 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上有界. 试问 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上必有最大(小)值吗?

证　∵　$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 存在，设为 A，则对 $\varepsilon=1$，$\exists\ X>0$，$\forall\ x>X$ 时，有 $|f(x)-A|<1$，即

$\left|f(x)\right| < 1 + \left|A\right|$, 故 $\forall x \in [X, +\infty)$, 有 $\left|f(x)\right| \le 1 + \left|A\right|$.

又函数 $f(x)$ 在 $[a, X]$ 上连续, 则应有界, 即 $\exists M_1 > 0$, 使 $\forall x \in [a, X]$ 时, 有 $\left|f(x)\right| \le M_1$, 取 $M = \max\{1 + \left|A\right|, M_1\}$, 则 $\forall x \in [a, +\infty)$, 有 $\left|f(x)\right| \le M$,

$\therefore$ $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上有界.

另外, 在本例的条件下, 连续函数 $f(x)$ 不一定能同时取到最大、最小值. 比如在 $(-\infty, +\infty)$ 上的连续函数 $f(x) = \left|\arctan x\right|$, 有 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \dfrac{\pi}{2}$, $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上有最小值 $f(0) = 0$, 但它不存在最大值.

5 设函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内连续且恒大于零, $a < x_1 < x_2 < \cdots < x_n < b$, 证明至少存在一点 $c \in (a,b)$, 使得 $f(c) = \sqrt[n]{f(x_1)f(x_2)\cdots f(x_n)}$.

证 由已知, 函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内连续且恒大于零, 由 $a < x_1 < x_2 < \cdots < x_n < b$ 可知, $f(x)$ 在 $[x_1, x_n]$ 内也连续且恒大于零, 故它在 $[x_1, x_n]$ 上必有最大值和最小值. 设

$$M = \max_{x\in[x_1,x_n]} f(x) > 0, \quad m = \min_{x\in[x_1,x_n]} f(x) > 0.$$

则
$$0 < m \le f(x_i) \le M \ (i = 1, 2, \cdots, n),$$

从而有
$$0 < m^n \le f(x_1)f(x_2)\cdots f(x_n) \le M^n,$$

即
$$m \le \sqrt[n]{f(x_1)f(x_2)\cdots f(x_n)} \le M,$$

故由介值定理可知, 至少存在一点 $c \in [x_1, x_n] \subset (a,b)$, 使得

$$f(c) = \sqrt[n]{f(x_1)f(x_2)\cdots f(x_n)}.$$

6 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, $f(a) = f(b)$, 证明存在 $x_0 \in [a,b]$, 使

$$f(x_0) = f(x_0 + \frac{b-a}{2}).$$

证 1 令 $F(x) = f(x) - f(x + \dfrac{b-a}{2})$, 则 $F(x)$ 在 $[a, \dfrac{b+a}{2}]$ 上连续, 且

$$F(a)=f(a)-f(\frac{a+b}{2}),\qquad F(\frac{a+b}{2})=f(\frac{a+b}{2})-f(b).$$

由 $f(a)=f(b)$ 知, 若 $f(a)=f(\frac{a+b}{2})$, 则取 $x_0=a$ (或 $x_0=\frac{b+a}{2}$), 命题得证.

若 $f(a)=f(b)\neq f(\frac{a+b}{2})$, 则 $F(a)F(b)<0$. 由介值定理可知, 存在 $x_0\in(a,\frac{b+a}{2})$,

$$使 F(x_0)=0,\qquad 即\ f(x_0)=f(x_0+\frac{b-a}{2}).$$

证 2　设 $F(x)$ 在 $[a,\frac{b+a}{2}]$ 上无零点, 则 $F(x)$ 在此区间上不变号. 不妨设 $F(x)>0$, 这时取 $x=a$ 得 $F(a)=f(a)-f(\frac{a+b}{2})>0$, 再取 $x=\frac{a+b}{2}$ 得 $F(\frac{a+b}{2})=f(\frac{a+b}{2})-f(b)>0$. 由此得 $f(a)>f(\frac{a+b}{2})>f(b)$, 与已知条件矛盾.

注　由证 2 可知: 对任意正整数 n, 存在 $x_0\in[a,b]$, 使 $f(x_0)=f(x_0+\frac{b-a}{n})$. 请仿证 2 的方法, 证明这一结论.

7　设 $f(x)=|x-a|\varphi(x)$, 其中 $\varphi(x)$ 在 $x=a$ 处连续, 则在什么条件下 $f(x)$ 在 $x=a$ 处可导?

【分析】　先去掉绝对值, 再由 $f(x)$ 在 $x=a$ 处可导的充分必要条件: $f'_-(a)=f'_+(a)$ 判断.

解　$f(x)=\begin{cases}(a-x)\varphi(x), x<a\\(x-a)\varphi(x), x\geq a\end{cases}$, 则

$$f'_-(a)=\lim_{x\to a^-}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a^-}\frac{(a-x)\varphi(x)}{x-a}=-\lim_{x\to a^-}\varphi(x)=-\varphi(a),$$
$$f'_+(a)=\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a^+}\frac{(x-a)\varphi(x)}{x-a}=\lim_{x\to a^-}\varphi(x)=\varphi(a),$$

又　$\because$ $f(x)$ 在 $x=a$ 处可导的充分必要条件是 $f'_-(a)=f'_+(a)$, 即 $-\varphi(a)=\varphi(a)$

$\therefore$ 当 $\varphi(a)=0$ 时, $f(x)$ 在 $x=a$ 处可导, 且 $f'(a)=0$.

8　设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有定义, 对任意 x, 均有 $f(x+1)=2f(x)$, 且当 $0\leq x\leq 1$ 时, $f(x)=x(1-x^2)$, 试判断 $f(x)$ 在 $x=0$ 处是否可导.

【分析】　由 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导的充分必要条件, 即 $f'_-(0)=f'_+(0)$ 来判断.

解　当 $-1\leq x<0$ 时, $0\leq x+1<1$, 于是由已知有

$$f(x)=\frac{1}{2}f(x+1)=\frac{1}{2}(x+1)[1-(x+1)^2]=\frac{1}{2}(x+1)(-2x-x^2)=-\frac{1}{2}(x+1)x(2+x),$$

因此，$f'_-(0)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{-\frac{1}{2}(x+1)x(2+x)}{x}=-1$，

而 $f'_+(0)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x(1-x^2)}{x}=1$，

$\because f'_-(0)\neq f'_+(0)$， $\therefore f(x)$ 在 $x=0$ 处不可导.

9 设 $f(x)$ 在 $x=1$ 处连续，且 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{x-1}=2$，求 $f'(1)$.

解 $\because f(1)=\lim\limits_{x\to 1}f(x)=\lim\limits_{x\to 1}(x-1)\cdot\dfrac{f(x)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}(x-1)\cdot\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{x-1}=0$，

$\therefore f'(1)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{x-1}=2$.

10 设 $f(x)$ 对 x 可导，求 y'.

(1) $y=f\{f[f(x)]\}$； (2) $y=f(\arctan x)e^{f(x)}$； (3) $y=f^n[\varphi^m(2^{x^2})]$.

解 (1) $y'=f'\{f[f(x)]\}\cdot f'[f(x)]\cdot f'(x)$；

(2) $y'=f'(\arctan x)\cdot\dfrac{1}{1+x^2}\cdot e^{f(x)}+f(\arctan x)\cdot e^{f(x)}\cdot f'(x)$

$=e^{f(x)}[\dfrac{f'(\arctan x)}{1+x^2}+f(\arctan x)f'(x)]$；

(3) $y'=nf^{n-1}[\varphi^m(2^{x^2})]\cdot f'[\varphi^m(2^{x^2})]\cdot m\varphi^{m-1}(2^{x^2})\cdot\varphi'(2^{x^2})\cdot 2^{x^2}\cdot\ln 2\cdot 2x$

$=2(\ln 2)nmx2^{x^2}f^{n-1}[\varphi^m(2^{x^2})]\cdot f'[\varphi^m(2^{x^2})]\cdot\varphi^{m-1}(2^{x^2})\cdot\varphi'(2^{x^2})$.

11 求下列函数的导数.

(1) 设 $f(\frac{1}{2}x)=\sin x$，求 $f'[f(x)]$，$\{f[f(x)]\}'$；

(2) $f(x)=e^{\sin x}$，$g(x)=\begin{cases}x^2(\sin\frac{1}{x^2})^{\frac{1}{3}}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$，求 $\dfrac{d}{dx}[f(g(x))]\Big|_{x=0}$；

(3) 求 $\frac{d}{dx}\left[\lim_{t\to\infty} x\left(1+\frac{1}{t}\right)^{2tx}\right]$.

解 (1) 令 $t=\frac{1}{2}x$, 则 $f(t)=\sin 2t$, $f'(t)=2\cos 2t$, 于是

$f'[f(x)]=2\cos 2[f(x)]=2\cos(2\sin 2x)$;

$\{f[f(x)]\}'=f'[f(x)]\cdot f'(x)=2\cos(2\sin 2x)\cdot 2\cos 2x=4\cos(2\sin 2x)\cdot\cos 2x$;

(2) $\because$ $f(g(x))=\begin{cases} e^{\sin[x^2(\sin\frac{1}{x^2})^{\frac{1}{3}}]}, x\neq 0, \\ 1, \quad x=0 \end{cases}$ 因此,

$$\frac{d}{dx}[f(g(x))]\Big|_{x=0}=\lim_{x\to 0}\frac{f(g(x))-f(g(0))}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin[x^2(\sin\frac{1}{x^2})^{\frac{1}{3}}]}-1}{x},$$

而 $\lim_{x\to 0}\sin[x^2(\sin\frac{1}{x^2})^{\frac{1}{3}}]=0$, 于是当 $x\to 0$ 时, $e^{\sin[x^2(\sin\frac{1}{x^2})^{\frac{1}{3}}]}-1$ 与 $\sin[x^2(\sin\frac{1}{x^2})^{\frac{1}{3}}]$ 为等价无穷小, 且 $\sin[x^2(\sin\frac{1}{x^2})^{\frac{1}{3}}]$ 与 $x^2(\sin\frac{1}{x^2})^{\frac{1}{3}}$ 为等价无穷小,

$\therefore$

$$\frac{d}{dx}[f(g(x))]\Big|_{x=0}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin[x^2(\sin\frac{1}{x^2})^{\frac{1}{3}}]}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2(\sin\frac{1}{x^2})^{\frac{1}{3}}}{x}=\lim_{x\to 0}x(\sin\frac{1}{x^2})^{\frac{1}{3}}=0;$$

(3) 令 $f(x)=\lim_{t\to\infty}x\left(1+\frac{1}{t}\right)^{2tx}$, 先求出极限表示的函数 $f(x)$, 再求 $f'(x)$.

$\because$ $f(x)=x\lim_{t\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t}\right]^{2x}=xe^{2x}$,

$\therefore$ $\frac{d}{dx}\left[\lim_{t\to\infty}x\left(1+\frac{1}{t}\right)^{2tx}\right]=\frac{d}{dx}(xe^{2x})=e^{2x}(1+2x)$.

12. 求极限 $\lim_{x\to 0}\frac{\tan(\tan x)-\sin(\sin x)}{x(e^{-x^2}-1)}$.

解　原式$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{[\tan(\tan x)-\sin(\tan x)]+[\sin(\tan x)-\sin(\sin x)]}{x(-x^2)}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\tan(\tan x)-\sin(\tan x)}{-x^3}+\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\tan x)-\sin(\sin x)}{-x^3}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{(\tan x)^3}{2}}{-x^3}+\lim_{x\to 0}\frac{2\cos(\frac{\tan x+\sin x}{2})\sin(\frac{\tan x-\sin x}{2})}{-x^3}$$

$$=-\frac{1}{2}+2\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\frac{x^3}{2})}{-x^3}=-\frac{1}{2}+(-\frac{1}{2})=-1.$$

13. 已知$\dfrac{d}{dx}\left[f\left(\dfrac{1}{x^2}\right)\right]=\dfrac{1}{x}$, 求 $f'(\dfrac{1}{2})$.

解　由已知，$f'\left(\dfrac{1}{x^2}\right)\cdot\left(-\dfrac{2}{x^3}\right)=\dfrac{1}{x}$, 因此，$f'\left(\dfrac{1}{x^2}\right)=-\dfrac{x^2}{2}$, 令 $x^2=2$, 得 $f'(\dfrac{1}{2})=-1$.

14. 已知 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}, x\neq 0\\ 0, \quad x=0\end{cases}$, 讨论 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性与可导性.

解　$\because$ $f(0-0)=\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}=0$，$f(0+0)=\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}=0$,

即 $f(0-0)=f(0+0)=0=f(0)$，　$\therefore$ $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续；

又
$$f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{\frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}-0}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}=1,$$

$$f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}-0}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}=0,$$

即 $f'_-(0)\neq f'_+(0)$, 因此 $f(x)$ 在 $x=0$ 处不可导.

15. 设 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^2e^{n(n-1)}+ax+b}{1+e^{n(n-1)}}$, 求 $f(x)$ 并讨论 $f(x)$ 的连续性与可导性.

解　$f(x)=\begin{cases} ax+b, & x<1 \\ \dfrac{a+b+1}{2}, & x=1 \\ x^2, & x>1 \end{cases}$,

仅当 $f(1-0)=f(1+0)=f(1)$ 时，$f(x)$ 在 $x=1$ 处连续, 即 $a+b=1=\dfrac{a+b+1}{2}$, 因此,

当 $a+b=1$ 时, $f(x)$ 在 $x=1$ 处连续, 且 $f(1)=1$.

又显然 $f(x)$ 在 $x\neq 1$ 处连续, 故当 $a+b=1$ 时, $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续.

当 $f'_-(1)=f'_+(1)$ 时，$f(x)$ 在 $x=1$ 处可导, 并注意到可导必连续, 于是

$$f'_-(1)=\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{ax+b-(a+b)}{x-1}=a,$$

$$f'_+(1)=\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{x^2-1}{x-1}=2,$$

故当 $a=2$, $b=-1$ 时, $f'_-(1)=f'_+(1)$, 即 $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导, 显然在 $x\neq 1$ 处 $f(x)$ 也可导.

综上所述, 当 $a=2$, $b=-1$ 时, $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上可导.

16. 设 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上有定义，$f'(1)=4$, 且对任意正数 x,y 有 $f(xy)=xf(y)+yf(x)$, 证明 $f(x)$ 处处可导, 并求 $f(x)$ 和 $f'(x)$.

证　令 $x=y=1$, 得 $f(1)=f(1)+f(1)$, 因此，$f(1)=0$. 再令 $y=1+\Delta x$, 可得

$$f(x(1+\Delta x))=xf(1+\Delta x)+(1+\Delta x)f(x),$$

$$\Rightarrow\ f(x+x\Delta x)-f(x)=xf(1+\Delta x)+\Delta xf(x),$$

$$\Rightarrow\ \frac{f(x+x\Delta x)-f(x)}{x\Delta x}=\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}+\frac{f(x)}{x},$$

令 $\Delta x\to 0$, 得 $f'(x)=f'(1)+\dfrac{f(x)}{x}=4+\dfrac{f(x)}{x}$, 从而有

$$[\frac{f(x)}{x}]'=\frac{4}{x},$$

因此，$f(x)=4x\ln x$ ，$\therefore$ $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内处处可导. 且显然，$f'(x)=4(1+\ln x)$.

17. 设对 $\forall x, y$，有 $f(xy)=f(x)+f(y)$，且 $f'(1)=a$，证明当 $x\neq 0$ 时，$f'(x)=\dfrac{a}{x}$.

证　在 $f(xy)=f(x)+f(y)$ 中取 $x=y=1$，得　$f(1)=f(1)+f(1)$，　$\Rightarrow f(1)=0$.

因此　$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f[x(1+\frac{\Delta x}{x})]-f(x)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x)+f(1+\frac{\Delta x}{x})-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(1+\frac{\Delta x}{x})-f(1)}{x\frac{\Delta x}{x}}=\frac{1}{x}f'(1),$$

∴　$$f'(x)=\frac{a}{x}.$$

18. 设 $f(x)=a_1\sin x+a_2\sin 2x+\cdots+a_n\sin nx$，其中 a_1，a_2，$\cdots$，a_n 都是实数，已知对一切 x 有 $|f(x)|\le|\sin x|$，证明 $|a_1+2a_2+\cdots+na_n|\le 1$.

证　由 $f(x)=a_1\sin x+a_2\sin 2x+\cdots+a_n\sin nx$ 可知，

$$f(0)=0,\qquad f'(0)=a_1+2a_2+\cdots+na_n.$$

又　$$|f'(0)|=\left|\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}\right|=\left|\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}\right|=\lim_{x\to 0}\left|\frac{f(x)}{x}\right|\le\lim_{x\to 0}\left|\frac{\sin x}{x}\right|=1,$$

即　$$|a_1+2a_2+\cdots+na_n|\le 1.$$

19　求下列函数的高阶导数.

(1) $y=x(2x-1)^2(x+3)^3$，求 $y^{(6)}$ 及 $y^{(7)}$；

(2) $f(x)=2x^2+x|x|$，求 $f''(x)$ 并证明 $f''(0)$ 不存在；

(3) $y=e^x f[\varphi(x)]$，f、φ 二阶可导，求 y''.

解　(1) ∵ $y=x(2x-1)^2(x+3)^3=2x^6+p(x)$，其中 $p(x)$ 为 5 次多项式，

∴　$y^{(6)}=2\times 6!$，$y^{(7)}=0$；

(2) $\because\ f(x)=2x^2+x|x|=\begin{cases}3x^2, x\ge 0\\ x^2,\ \ x<0\end{cases}$，　$\therefore\ f'(x)=\begin{cases}6x, x>0\\ 2x, x<0\end{cases}$，　又由于

$$f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{x^2}{x}=0,\qquad f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{3x^2}{x}=0,$$

因此，$f'(0)=0$. 从而 $f''(x)=\begin{cases}6, x>0\\ 2, x<0\end{cases}$, 又

$$f''_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f'(x)-f'(0)}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{2x}{x}=2,\qquad f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{6x}{x}=6,$$

因此，$f''(0)$ 不存在；

(3) $y'=e^x f[\varphi(x)]+e^x f'[\varphi(x)]\varphi'(x)=e^x\{f[\varphi(x)]+f'[\varphi(x)]\varphi'(x)\}$,

$$y''=e^x f[\varphi(x)]+2e^x f'[\varphi(x)]\varphi'(x)+e^x f''[\varphi(x)]\varphi'^2(x)+e^x f'[\varphi(x)]\varphi''(x)$$

$$=e^x\{f[\varphi(x)]+2f'[\varphi(x)]\varphi'(x)+f''[\varphi(x)]\varphi'^2(x)+f'[\varphi(x)]\varphi''(x)\}.$$

20　试从 $\dfrac{dx}{dy}=\dfrac{1}{y'}$ 导出:

(1) $\dfrac{d^2x}{dy^2}=-\dfrac{y''}{(y')^3}$；　　　(2) $\dfrac{d^3x}{dy^3}=\dfrac{3(y'')^2-y'y'''}{(y')^5}$.

证　(1) $\dfrac{d^2x}{dy^2}=\dfrac{d}{dy}(\dfrac{dx}{dy})=\dfrac{d}{dy}(\dfrac{1}{y'})=\dfrac{d}{dx}(\dfrac{1}{y'})\cdot\dfrac{dx}{dy}=-\dfrac{y''}{(y')^2}\cdot\dfrac{1}{y'}=-\dfrac{y''}{(y')^3}$；

(2) $\dfrac{d^3x}{dy^3}=\dfrac{d}{dy}(\dfrac{d^2x}{dy^2})=\dfrac{d}{dy}(-\dfrac{y''}{(y')^3})=\dfrac{d}{dx}(-\dfrac{y''}{(y')^3})\cdot\dfrac{dx}{dy}$

$$=-\frac{y'''(y')^3-3(y')^2(y'')^2}{(y')^6}\cdot\frac{1}{y'}=\frac{3(y'')^2-y'y'''}{(y')^5}.$$

21　设 $y=\ln(ax+b)$, 求 $y^{(n)}$.

解　$y'=\dfrac{a}{ax+b}=a(ax+b)^{-1}$，　$y''=a^2(-1)(ax+b)^{-2}$，　$y'''=a^3(-1)(-2)(ax+b)^{-3}$.

用数学归纳法易证　　$y^{(n)}=(-1)^{n-1}\dfrac{(n-1)!a^n}{(ax+b)^n}$

(6.1)

事实上, 当 $n=1$ 时, 式(6.1)已验证, 设 $n=k$ 时, 式(6.1)成立, 即

$$y^{(k)}=(-1)^{k-1}\frac{(k-1)!a^k}{(ax+b)^k}=(-1)^{k-1}(k-1)!a^k(ax+b)^{-k},$$

则 $$y^{(k+1)}=(-1)^{k-1}(k-1)!a^k\cdot(-k)(ax+b)^{-k-1}\cdot a=(-1)^k\frac{k!a^{k+1}}{(ax+b)^{k+1}}.$$

由此, 式(6.1)对一切正整数 n 都成立.

22 求下列函数的 n 阶导数.

(1) $y=\dfrac{x^3}{x^2-3x+2}$; (2) $y=\dfrac{x}{\sqrt{1+ax}}$; (3) $y=\sin^4 x+\cos^4 x$; (4) $y=e^x\cos x$.

解 (1) $y=(x+3)+\dfrac{7x-6}{(x-2)(x-1)}=(x+3)+\dfrac{8}{x-2}-\dfrac{1}{x-1}$, 故

$$y^{(n)}=(x+3)^{(n)}+[8(x-2)^{-1}]^{(n)}-[(x-1)^{-1}]^{(n)}$$

$$=0+(-1)^n\cdot 8\cdot n!(x-2)^{-1-n}-(-1)^n n!(x-1)^{-1-n}$$

$$=(-1)^n n!\left[\frac{8}{(x-2)^{n+1}}-\frac{1}{(x-1)^{n+1}}\right];\ (n\geq 2)$$

(2) 由莱布尼兹公式可得

$$y^{(n)}=[(1+ax)^{-\frac{1}{2}}]^{(n)}x+C_n^1[(1+ax)^{-\frac{1}{2}}]^{(n-1)}$$

$$=(-\frac{1}{2})(-\frac{1}{2}-1)(-\frac{1}{2}-2)\cdots(-\frac{1}{2}-n+1)a^n x(1+ax)^{-\frac{1}{2}-n}$$

$$+n(-\frac{1}{2})(-\frac{1}{2}-1)(-\frac{1}{2}-2)\cdots(-\frac{1}{2}-n)a^{n-1}(1+ax)^{-\frac{1}{2}-n+1}$$

$$=\frac{(-1)^n a^n(2n-1)!!}{2^n}x(1+ax)^{-\frac{2n+1}{2}}+\frac{(-1)^{n-1}a^{n-1}n(2n-3)!!}{2^{n-1}}(1+ax)^{-\frac{2n-1}{2}};$$

(3) $y=(\sin^2 x+\cos^2 x)^2-2\sin^2 x\cos^2 x=1-\dfrac{1}{2}\sin^2 2x$

$$=1-\frac{1}{4}(1-\cos 4x)=\frac{1}{4}(3+\cos 4x),$$

故 $$y^{(n)}=\frac{1}{4}4^n\cos(4x+\frac{n\pi}{2})=4^{n-1}\cos(4x+\frac{n\pi}{2});$$

(4) 由莱布尼兹公式可得

$$y^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}C_n^k(e^x)^{(n-k)}(\cos x)^{(k)}=e^x\sum_{k=0}^{n}C_n^k\cos\left(x+\frac{k\pi}{2}\right),$$

其中， $C_n^k=\dfrac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}$.

23 求下列函数的导数.

(1) 由方程 $\sin(xy)+\ln(y-x)=x$ 确定 y 为 x 的函数, 求 $y'(0)$； (2) $\log_y x=y$, 求 y''；

(3) 设 $y=f(x+y)$, 其中函数 $f(u)$ 二阶可导，且 $f'(u)\neq 1$，求 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

解 (1) 方程两端同时对 x 求导, 得

$$\cos(xy)(y+xy')+\frac{1}{y-x}(y'-1)=1 \tag{6.4}$$

将 $x=0$ 代入已知方程, 可得 $\ln y=0$, $\Rightarrow y=1$, 再将 $x=0$, $y=1$ 代入式(6.4), 可得

$$1+y'\big|_{x=0}-1=1,$$

$$\therefore \quad y'\big|_{x=0}=1.$$

(2) 由 $\log_y x=y$ 得 $\dfrac{\ln x}{\ln y}=y$, 即 $\ln x=y\ln y$, 等式两端同时对 x 求导, 可得

$$\frac{1}{x}=(1+\ln y)y',$$

两端再对 x 求导, 得 $$-\frac{1}{x^2}=\frac{y'^2}{y}(1+\ln y)y'',$$

$$\therefore \quad y''=-\frac{y+y'^2x^2}{x^2y(1+\ln y)}=\frac{y(1+\ln y)^2+1}{x^2y(1+\ln y)^3};$$

(3) 由 $y=f(x+y)$ 两端同时对 x 求导, 可得

$$y'=f'(x+y)\cdot(1+y'),\quad \Rightarrow\quad y'=\frac{f'(x+y)}{1+f'(x+y)},$$

两端再对 x 求导, 得 $$y''=f''(x+y)\cdot(1+y')^2+f'(x+y)y'',$$

$$\therefore \quad y''=\frac{f''(x+y)\cdot(1+y')^2}{1-f'(x+y)}=\frac{f''(x+y)}{[1-f'(x+y)]^3}.$$

24　设$\begin{cases} x = a(t-\sin t) \\ y = a(1-\cos t) \end{cases}$，求$\dfrac{dy}{dx}$，$\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

解　$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{a\sin t}{a(1-\cos t)} = \dfrac{\sin t}{1-\cos t}$，

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{\sin t}{1-\cos t}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\sin t}{1-\cos t}\right)\cdot\frac{1}{\frac{dx}{dt}}$$

$$= \frac{\cos t\cdot(1-\cos t)-\sin^2 t}{(1-\cos t)^2}\cdot\frac{1}{a(1-\cos t)} = -\frac{1}{a(1-\cos t)^2}.$$

25　证明当$|x|$充分小时，有近似公式(其中$a>0$，n是正整数)

$$\sqrt[n]{a^n+x} \approx a + \frac{x}{na^{n-1}},$$

并用此公式求$\sqrt[7]{100}$的近似值.

证　设$f(x) = \left(1+\dfrac{x}{a^n}\right)^{\frac{1}{n}}$，$f(0)=1$，$f'(x) = \dfrac{1}{n}\left(1+\dfrac{x}{a^n}\right)^{\frac{1}{n}-1}\cdot\dfrac{1}{a^n}$，当$|x|$充分小时，由公式

$f(x) = f(0) + f'(0)x$，有

$$\left(1+\frac{x}{a^n}\right)^{\frac{1}{n}} \approx 1 + \frac{x}{na^n},$$

于是，当$|x|$充分小时，有

$$\sqrt[n]{a^n+x} = \sqrt[n]{a^n\left(1+\frac{x}{a^n}\right)} = a\left(1+\frac{x}{a^n}\right)^{\frac{1}{n}} \approx a\left(1+\frac{x}{na^n}\right) = a + \frac{x}{na^{n-1}}.$$

因此，$\sqrt[7]{100} = \sqrt[7]{2^7-28} \approx 2 + \dfrac{-28}{7\times 2^6} \approx 1.938$.

26. 设$f(x) = (x-a)^n\varphi(x)$，而$\varphi(x)$在点a的邻域内有$(n-1)$阶连续导数，求$f^{(n)}(a)$.

解　由莱布尼兹公式，得

$$f^{(n-1)}(x) = \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k \varphi^{(k)}(x)[(x-a)^n]^{(n-1-k)}$$

$$= n!\varphi(x)(x-a) + (n-1)\varphi'(x)\frac{n!}{2}(x-a)^2 + \cdots + \varphi^{(n-1)}(x)(x-a)^n,$$

于是可得，$f^{(n-1)}(a) = 0$，从而

$$\begin{aligned} f^{(n)}(a) &= \lim_{x\to a}\frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(a)}{x-a} \\ &= \lim_{x\to a}[n!\varphi(x) + (n-1)\varphi'(x)\frac{n!}{2}(x-a) + \cdots + \varphi^{(n-1)}(x)(x-a)^{n-1}] \\ &= n!\varphi(a). \end{aligned}$$