



离散数学

Discrete Mathematics

第6讲 关系 Relation (1)

计算机学院科学系 薛思清

An Example: Relational Database

关系

关系数据库：

关系数据结构

关系模型

关系代数

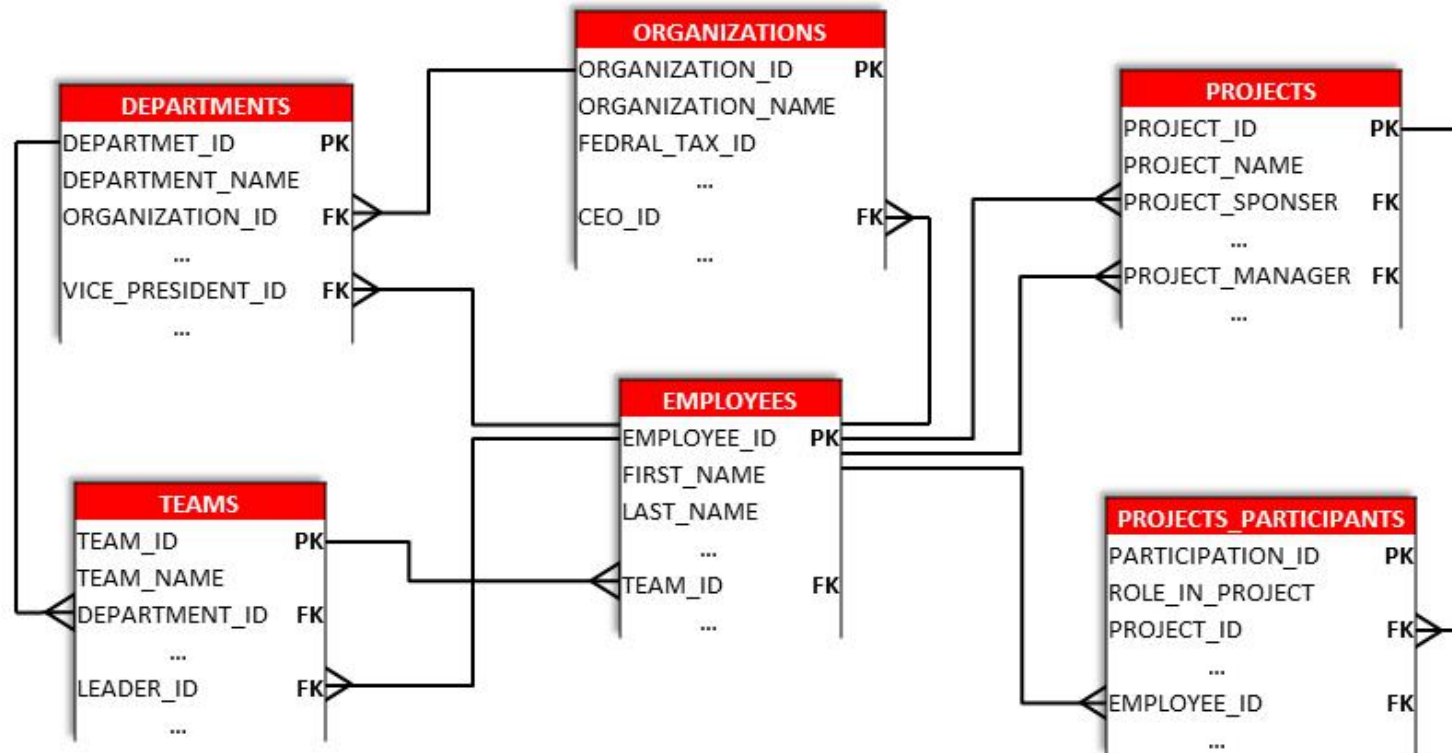
关系演算

数据库设计与关系理论

Database Design &
Relational Theory

- 任何给定的数据库包含关系变量（英文简称为relvar）。
- 在任何给定的时间，任何给定的关系变量的值都是一个关系值（简称为关系）。
- 每个关系变量都代表一个特定的谓词。
- 在任何给定的关系变量中，每个元组都代表一个特定的命题。
- 按照封闭世界假设（The Closed World Assumption, CWA），关系变量R在时间T包含所有且只包含那些代表关系变量R对应的谓词在时间T计算结果为TRUE的实例元组。

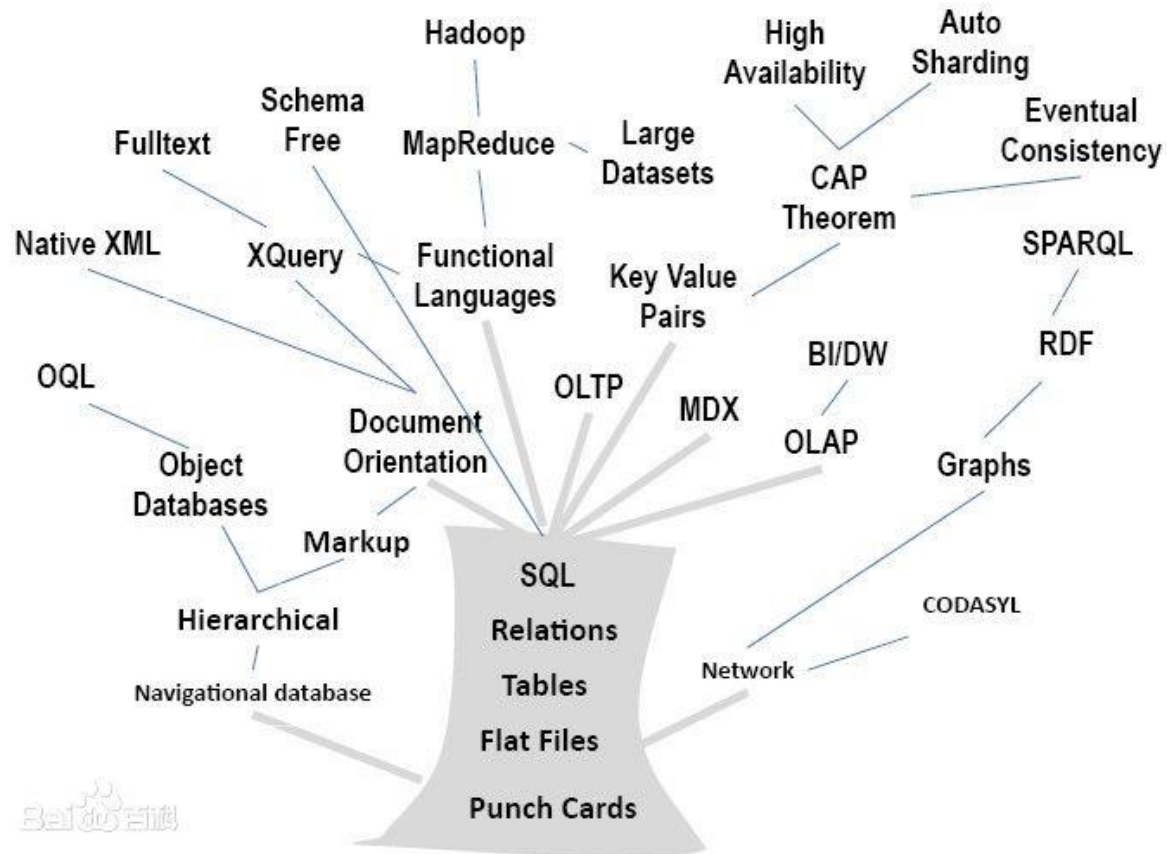
A Relational Database Model



© 2014 AZSQLCertification.com All rights reserved

3.	Predicates and Propositions	63
3.1	Introduction	63
3.2	What Is a Predicate?	63
3.3	Substitution and Instantiation	68
3.4	How a Relation Represents an Extension	69
3.5	Deriving Predicates from Predicates	75
	EXERCISES	84
4.	Relational Algebra – The Foundation	85
4.1	Introduction	85
4.2	Relations and Predicates	88
4.3	Relational Operators and Logical Operators	89
4.4	JOIN and AND	90
4.5	RENAME	93
4.6	Projection and Existential Quantification	97
4.7	Restriction and AND	103
4.8	Extension and AND	106
4.9	UNION and OR	108
4.10	Semidifference and NOT	111

Figure 1: A NoSQL Concept Tree



Outline

- 关系及其表示
- 关系运算
- 关系性质
- 等价关系
- 序关系
- 函数关系

- ▶ **序偶(序对, Ordered Pair)**: (a,b) 或者 $\langle a,b \rangle$
 - 序偶 $\langle a, b \rangle$ 中两个元素不一定来自同一个集合, 它们可以代表不同类型的事物。例如, a 代表操作码, b 代表地址码, 则序偶 $\langle a, b \rangle$ 就代表一条单地址指令; 哈密尔顿引进有序偶 (a, b) 来表示复数 $a + bi$
 - $(a,b) = (c,d) \Leftrightarrow a=c \wedge b=d$
 - $a \neq b \Rightarrow (a,b) \neq (b,a)$
- ▶ **有序n元组**: $(a_1, a_2, \dots, a_n) = ((a_1, a_2, \dots, a_{n-1}), a_n)$
- ▶ **有序n元组相等**: $(a_1, a_2, \dots, a_n) = (b_1, b_2, \dots, b_n)$

笛卡尔积(Cartesian product, 卡氏积):

$$A \times B = \{ \langle x, y \rangle \mid x \in A \wedge y \in B \}.$$

示例

$$A = \{\emptyset, a\}, \quad B = \{1, 2, 3\}.$$

$$A \times B = \{ \langle \emptyset, 1 \rangle, \langle \emptyset, 2 \rangle, \langle \emptyset, 3 \rangle, \langle a, 1 \rangle, \langle a, 2 \rangle, \langle a, 3 \rangle \}.$$

$$B \times A = \{ \langle 1, \emptyset \rangle, \langle 1, a \rangle, \langle 2, \emptyset \rangle, \langle 2, a \rangle, \langle 3, \emptyset \rangle, \langle 3, a \rangle \}.$$

$$A \times A = \{ \langle \emptyset, \emptyset \rangle, \langle \emptyset, a \rangle, \langle a, \emptyset \rangle, \langle a, a \rangle \}.$$

$$B \times B = \{ \langle 1, 1 \rangle, \langle 1, 2 \rangle, \langle 1, 3 \rangle, \langle 2, 1 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 2, 3 \rangle, \langle 3, 1 \rangle, \langle 3, 2 \rangle, \langle 3, 3 \rangle \}.$$

n维笛卡尔积

$$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$$

$$= \{ \langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle \mid x_1 \in A_1 \wedge x_2 \in A_2 \wedge \dots \wedge x_n \in A_n \}$$

$$A^n = A \times A \times \dots \times A$$

$$\text{令 } |A_i| = n_i, i = 1, 2, \dots, n,$$

$$\text{显然 } |A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n| = n_1 \times n_2 \times \dots \times n_n.$$

笛卡尔积一些性质

$$A \times B = \emptyset \Leftrightarrow A = \emptyset \vee B = \emptyset$$

非交换

$$A \times B \neq B \times A \text{ (除非 } A=B \vee A=\emptyset \vee B=\emptyset)$$

非结合

$$(A \times B) \times C \neq A \times (B \times C) \text{ (除非 } A=\emptyset \vee B=\emptyset \vee C=\emptyset)$$

分配律

$$A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$$

示例 试证明分配律

$$A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C).$$

证明: $\forall \langle x, y \rangle, \langle x, y \rangle \in A \times (B \cup C)$

$$\Leftrightarrow x \in A \wedge y \in (B \cup C) \Leftrightarrow x \in A \wedge (y \in B \vee y \in C)$$

$$\Leftrightarrow (x \in A \wedge y \in B) \vee (x \in A \wedge y \in C)$$

$$\Leftrightarrow (\langle x, y \rangle \in A \times B) \vee (\langle x, y \rangle \in A \times C)$$

$$\Leftrightarrow \langle x, y \rangle \in (A \times B) \cup (A \times C)$$

所以, $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C).$

1. $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$
2. $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$
3. $(B \cup C) \times A = (B \times A) \cup (C \times A)$
4. $(B \cap C) \times A = (B \times A) \cap (C \times A)$

示例 设 A, B, C, D 是任意集合,

(1) 若 $A \neq \emptyset$, 则 $A \times B \subseteq A \times C \Leftrightarrow B \subseteq C$.

(2) $A \subseteq C \wedge B \subseteq D \Rightarrow A \times B \subseteq C \times D$,

且当 $(A=B=\emptyset) \vee (A \neq \emptyset \wedge B \neq \emptyset)$ 时,

$A \times B \subseteq C \times D \Rightarrow A \subseteq C \wedge B \subseteq D$.

>>>

证明 (1) 若 $A \neq \emptyset$, 则 $A \times B \subseteq A \times C \Leftrightarrow B \subseteq C$.

(\Rightarrow) 若 $B = \emptyset$, 则 $B \subseteq C$.

设 $B \neq \emptyset$, 由 $A \neq \emptyset$, 设 $x \in A$.

$$\forall y, y \in B \Rightarrow \langle x, y \rangle \in A \times B$$

$$\Rightarrow \langle x, y \rangle \in A \times C$$

$$\Leftrightarrow x \in A \wedge y \in C \Rightarrow y \in C.$$

所以, $B \subseteq C$

(\Leftarrow)若 $B=\emptyset$,则 $A\times B\subseteq A\times C$.

设 $B\neq\emptyset$.

$$\forall \langle x,y\rangle, \langle x,y\rangle\in A\times B \Leftrightarrow x\in A\wedge y\in B$$

$$\Rightarrow x\in A\wedge y\in C \Leftrightarrow \langle x,y\rangle\in A\times C$$

所以, $A\times B\subseteq A\times C$.

2 二元关系 (Binary Relations)

设 $n \in \mathbb{I}_+$, A_1, A_2, \dots, A_n 为任意 n 个集合, $\rho \subseteq A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$, 则

- (1) 称 ρ 为 A_1, A_2, \dots, A_n 间的 **n 元关系**;
- (2) 若 $n=2$, 则称 ρ 为从 A_1 到 A_2 的 **二元关系**;
- (3) 若 $\rho = \Phi$, 则称 ρ 为 **空关系**;
- (4) 若 $\rho = A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$, 则称 ρ 为 **普遍关系**;
- (5) 若 $A_1 = A_2 = \dots = A_n = A$, 则称 ρ 为 A 上的 **n 元关系**;
- (6) 若 $\rho = \{(x, x) | x \in A\}$, 则称 ρ 为 A 上的 **恒等关系**。

若 ρ 是由 A 到 B 的一个关系, 且 $(a, b) \in \rho$, 则 a 对 b 有关系 ρ , 记为 **$a\rho b$** 。中缀(infix)、前缀(prefix)、后缀(suffix)记号

A relation is a particular type of set.

A function is a particular type of relation.

A predicate is a particular type of function.

2 二元关系 (Binary Relations)

对集合A上的关系R, 可以定义:

定义域(domain) : $\text{dom } R = \{ x \mid \exists y(y \in A \wedge xRy) \}$

值域(range): $\text{ran } R = \{ y \mid \exists x(x \in A \wedge xRy) \}$

域(field): $\text{fld } R = \text{dom } R \cup \text{ran } R$

2 二元关系 (Binary Relations)

示例

1. $\{ \langle 1, 2 \rangle, \langle \alpha, \beta \rangle, \langle a, b \rangle \}$ 是二元关系, $\{ \langle 1, 2 \rangle, \langle 3, 4 \rangle, \langle \text{白菜}, \text{小猫} \rangle \}$ 是二元关系, $A = \{ \langle a, b \rangle, \langle 1, 2, 3 \rangle, a, \alpha, 1 \}$ 不是关系
2. 设 $A = \{1, 2, 4, 7, 8\}$, $B = \{2, 3, 5, 7\}$, 定义由A到B的关系 $\rho = \{ (a, b) \mid 5 \mid (a+b) \}$, \mid 表示整除, 求关系 ρ 。
3. 设 $A = \{2, 3, 4, 5, 9, 25\}$, 定义A上的关系 ρ , 对于任意的 $a, b \in A$, 当且仅当 $(a-b)^2 \in A$ 时, 有 $a \rho b$, 试问 ρ 由哪些序偶组成?
4. 设 $A = \{0, 1, 2\}$, 求A上的普遍关系 U_A 和A上的恒等关系 I_A 。
5. A到B不同的二元关系共有多少个? A上不同的二元关系共有多少个?

2 二元关系 (Binary Relations)

示例

6. 设 $A \subseteq \mathbb{R}$, 则可以定义A上的:

小于等于(less than or equal to)关系:

$$LEA = \{ \langle x, y \rangle \mid x \in A \wedge y \in A \wedge x \leq y \}$$

小于(less than)关系, $LA = \{ \langle x, y \rangle \mid x \in A \wedge y \in A \wedge x < y \}$

大于等于(greater than or equal to)关系

大于(great than)关系

7. 设A为任意集合, 则可以定义 $P(A)$ 上的:

包含关系: $\subseteq A = \{ \langle x, y \rangle \mid x \subseteq A \wedge y \subseteq A \wedge x \subseteq y \}$

真包含关系: $\subset A = \{ \langle x, y \rangle \mid x \subseteq A \wedge y \subseteq A \wedge x \subset y \}$

2 二元关系 (Binary Relations)

示例

8 自然数上的二元关系

$$D = \{(m, n) \in \mathbb{N}^2 \mid m \mid n\}$$

自然数上的同余关系

$$R_k = \{(m, n) \in \mathbb{N}^2 \mid (k, |m - n|) \in D\}$$

$$m \equiv n \pmod{k}$$

- 集合论方法（序对之集合）
- 代数表示（矩阵表示法）
- 几何表示（图）

关系R的集合表达式, 关系矩阵, 关系图三者均可以唯一互相确定

3 关系的表示——关系矩阵

设 $A=\{a_1,a_2,\dots,a_m\}$, $B=\{b_1,b_2,\dots,b_n\}$, $R\subseteq A\times B$, 则R的关系矩阵 $M(R)$ (或者记为 M_R) $= (r_{ij})_{m\times n}$, 其中,

$$r_{ij} = \begin{cases} 1, & x_i R x_j \\ 0, & otherwise \end{cases}$$

如, $A=\{2,3,4,5\}$, $B=\{6,7,8,9\}$, 由A到B的关系

$$\rho = \{(2,7),(2,9),(3,7),(3,8),(4,7),(4,9),(5,6),(5,7),(5,8),(5,9)\},$$

所以关系矩阵

$$M_\rho = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

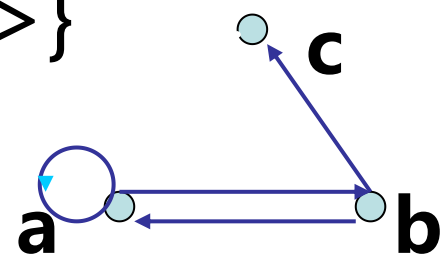
3 关系的表示——关系矩阵

集合A到B的关系R的关系图 $G(R)$ 或 G_R :

由**结点**(表示集合元素)与**边**(表示结点代表的元素之间具有关系R)构成的图。结点数为 $|A|+|B|$ ，有向边数为 $|R|$

如, $A=\{a,b,c\}$,

$\rho=\{<a,a>, <a,b>, <b,a>, <b,c>\}$



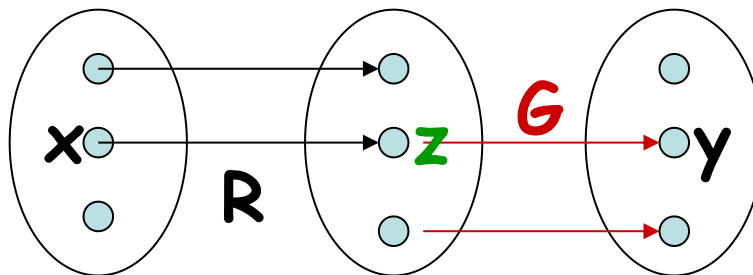
对任意关系R,G, 有:

► 逆(Inverse Operation) :

$$R^{-1} = \{ \langle x, y \rangle \mid yRx \}$$

► 复合(合成)(Composite Operation)

$$R \circ G = \{ \langle x, y \rangle \mid \exists z (xRz \wedge zGy) \}$$



对任意关系 R, G , 与集合 A ,

若 $R \subseteq G$, 则称 R 为 G 的**限制**(Restriction), G 为 R 的**延拓**(Extension),

G 在集合 A 下的限制:

$$G \upharpoonright A = \{ \langle x, y \rangle \mid x G y \wedge x \in A \}$$

示例

1 设 $A=\{a,b,c,d\}$, $B=\{a,b,\langle c,d \rangle\}$,

$$R=\{ \langle a,b \rangle, \langle c,d \rangle \},$$

$$F=\{ \langle a,b \rangle, \langle a,\{a\} \rangle, \langle \{a\},\{a,\{a\}\} \rangle \},$$

$$G=\{ \langle b,e \rangle, \langle d,c \rangle \}.$$

求: (1) A^{-1} , B^{-1} , R^{-1} .

(2) $R^{-1} \circ B$, $B \circ G$, $R \circ G$, $G \circ R$.

(3) $F \uparrow \{a\}$, $F \uparrow \{\{a\}\}$, $F \uparrow \{a,\{a\}\}$, $F^{-1} \uparrow \{\{a\}\}$.

$$(1) A^{-1} = \emptyset,$$

$$B^{-1} = \{ \langle d, c \rangle \},$$

$$R^{-1} = \{ \langle b, a \rangle, \langle d, c \rangle \}.$$

$$(2) R^{-1} \circ B = \{ \langle d, d \rangle \},$$

$$B \circ G = \{ \langle c, c \rangle \},$$

$$R \circ G = \{ \langle a, e \rangle, \langle c, c \rangle \},$$

$$G \circ R = \{ \langle d, d \rangle \}.$$

$$(3)$$

$$F \uparrow \{a\} = \{ \langle a, b \rangle, \langle a, \{a\} \rangle \},$$

$$F \uparrow \{\{a\}\} = \{ \langle \{a\}, \{a, \{a\}\} \rangle \},$$

$$F \uparrow \{a, \{a\}\} = F,$$

$$F^{-1} \uparrow \{\{a\}\} = \{ \langle \{a\}, a \rangle \}.$$

2 $A=\{a,b,c\}$,
 $R_1=\{<a,a>, <a,b>, <b,a>, <b,c>\}$,
 $R_2=\{<a,b>, <a,c>, <b,c>\}$,

试根据关系矩阵求解
 R_1^{-1}, R_2^{-1} ,
 $R_1 \circ R_1$

$$M(R_1) = \begin{matrix} & \begin{matrix} a & b & c \end{matrix} \\ \begin{matrix} a \\ b \\ c \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}, \quad M(R_2) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$M(R_1^{-1}) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad M(R_2^{-1}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$M(R_1 \circ R_1) = \begin{matrix} & \begin{matrix} a & b & c \end{matrix} \\ \begin{matrix} a \\ b \\ c \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix} \bullet \begin{matrix} & \begin{matrix} a & b & c \end{matrix} \\ \begin{matrix} a \\ b \\ c \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix} = \begin{matrix} & \begin{matrix} a & b & c \end{matrix} \\ \begin{matrix} a \\ b \\ c \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}.$$

3 设 F 是任意集合, 则

(1) $\text{dom}F^{-1} = \text{ran}F$; (2) $\text{ran}F^{-1} = \text{dom}F$; (3) $(F^{-1})^{-1} = F$.

证明: (1) $\forall x, x \in \text{dom}F^{-1} \Leftrightarrow \exists y(xF^{-1}y) \Leftrightarrow \exists y(yFx) \Leftrightarrow x \in \text{ran}F$
于是, $\text{dom}F^{-1} = \text{ran}F$.

(2)可类似证明.

(3)

$\forall \langle x, y \rangle, \langle x, y \rangle \in (F^{-1})^{-1} \Leftrightarrow x(F^{-1})^{-1}y \Leftrightarrow yF^{-1}x \Leftrightarrow xFy \Leftrightarrow \langle x, y \rangle \in F$.

所以, $(F^{-1})^{-1} = F$.

4 设 R_1, R_2, R_3 为集合 A 上二元关系, 则

$$(R_1 \circ R_2) \circ R_3 = R_1 \circ (R_2 \circ R_3)$$

证明: $\forall \langle x, y \rangle, \langle x, y \rangle \in (R_1 \circ R_2) \circ R_3$

$$\Leftrightarrow \exists z(x(R_1 \circ R_2)z \wedge zR_3y)$$

$$\Leftrightarrow \exists z(\exists t(xR_1t \wedge tR_2z) \wedge zR_3y)$$

$$\Leftrightarrow \exists z\exists t((xR_1t \wedge tR_2z) \wedge zR_3y)$$

$$\Leftrightarrow \exists t\exists z(xR_1t \wedge tR_2z \wedge zR_3y)$$

设 A 为任意集合, ρ 为 A 上的任意二元关系, $m, n \in \mathbb{N}$, 有:

(1) ρ^0 是 A 上的恒等关系, 即 $\rho^0 = I_A$

(2) $\rho^{n+1} = \rho \circ \rho^n, n \in \mathbb{N}$

(3) $\rho^m \circ \rho^n = \rho^{m+n}$

(4) $(\rho^n)^m = \rho^{m \cdot n}$

$$\Leftrightarrow \exists t(xR_1t \wedge \exists z(tR_2z \wedge zR_3y))$$

$$\Leftrightarrow \exists t(xR_1t \wedge t(R_2 \circ R_3)y)$$

$$\Leftrightarrow xR_1 \circ (R_2 \circ R_3)y$$

$$\Leftrightarrow \langle x, y \rangle \in R_1 \circ (R_2 \circ R_3)$$

$$\therefore (R_1 \circ R_2) \circ R_3 = R_1 \circ (R_2 \circ R_3).$$

5 设 R_1, R_2, R_3 是集合,则

$$(1) R_1 \circ (R_2 \cup R_3) = (R_1 \circ R_2) \cup (R_1 \circ R_3)$$

$$(2) (R_1 \cup R_2) \circ R_3 = (R_1 \circ R_3) \cup (R_2 \circ R_3)$$

$$(3) R_1 \circ (R_2 \cap R_3) \subseteq (R_1 \circ R_2) \cap (R_1 \circ R_3)$$

$$(4) (R_1 \cap R_2) \circ R_3 \subseteq (R_1 \circ R_3) \cap (R_2 \circ R_3)$$

$$(5) (R_1 \circ R_2)^{-1} = R_2^{-1} \circ R_1^{-1}$$

$$(1) R_1 \circ (R_2 \cup R_3) = (R_1 \circ R_2) \cup (R_1 \circ R_3)$$

证明: $\forall \langle x, y \rangle, \langle x, y \rangle \in R_1 \circ (R_2 \cup R_3)$

$$\Leftrightarrow \exists z (x R_1 z \wedge z (R_2 \cup R_3) y)$$

$$\Leftrightarrow \exists z (x R_1 z \wedge (z R_2 y \vee z R_3 y))$$

$$\Leftrightarrow \exists z ((x R_1 z \wedge z R_2 y) \vee (x R_1 z \wedge z R_3 y))$$

$$\Leftrightarrow \exists z (x R_1 z \wedge z R_2 y) \vee \exists z (x R_1 z \wedge z R_3 y)$$

$$\Leftrightarrow x (R_1 \circ R_2) y \vee x (R_1 \circ R_3) y \Leftrightarrow x ((R_1 \circ R_2) \cup (R_1 \circ R_3)) y$$

$$\Leftrightarrow \langle x, y \rangle \in (R_1 \circ R_2) \cup (R_1 \circ R_3)$$

$$(3) R_1 \circ (R_2 \cap R_3) \subseteq (R_1 \circ R_2) \cap (R_1 \circ R_3)$$

证明: $\forall \langle x, y \rangle, \langle x, y \rangle \in R_1 \circ (R_2 \cap R_3)$

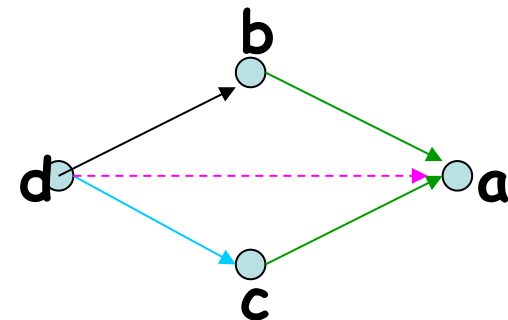
$$\Leftrightarrow \exists z (x R_1 z \wedge z (R_2 \cap R_3) y) \Leftrightarrow \exists z (x R_1 z \wedge (z R_2 y \wedge z R_3 y))$$

$$\Leftrightarrow \exists z ((x R_1 z \wedge z R_2 y) \wedge (x R_1 z \wedge z R_3 y))$$

$$\Rightarrow \exists z (x R_1 z \wedge z R_2 y) \wedge \exists z (x R_1 z \wedge z R_3 y)$$

$$\Leftrightarrow x (R_1 \circ R_2) y \wedge x (R_1 \circ R_3) y \Leftrightarrow x ((R_1 \circ R_2) \cap (R_1 \circ R_3)) y$$

$$\Leftrightarrow \langle x, y \rangle \in (R_1 \circ R_2) \cap (R_1 \circ R_3).$$



反例(说明=不成立):

设 $R_1 = \{\langle d, b \rangle, \langle d, c \rangle\}$, $R_2 = \{\langle b, a \rangle\}$, $R_3 = \{\langle c, a \rangle\}$. 则 $R_1 \circ (R_2 \cap R_3) = R_1 \circ \emptyset = \emptyset$,

$R_1 \circ R_2 = \{\langle d, a \rangle\}$, $R_1 \circ R_3 = \{\langle d, a \rangle\}$, $(R_1 \circ R_2) \cap (R_1 \circ R_3) = \{\langle d, a \rangle\}$.

- ▶ 自反性(Reflexivity)
- ▶ 反自反性(Anti-reflexivity)
- ▶ 对称性(Symmetry)
- ▶ 反对称性(Anti-symmetry)
- ▶ 传递性(Transitivity)

设 $R \subseteq A \times A$, 说 R 是自反的(Reflexive), 如果 $\forall x(x \in A \rightarrow xRx)$.

R 是非自反的 $\Leftrightarrow \exists x(x \in A \wedge \neg xRx)$

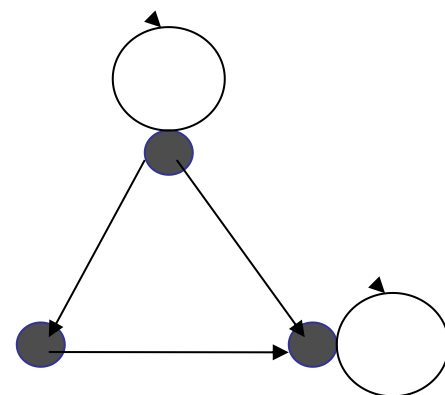
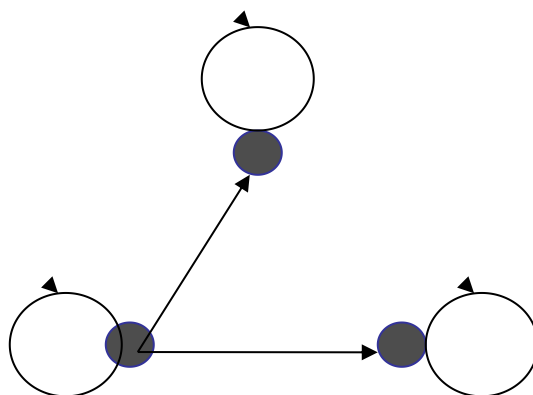
性质: R 是自反的

$$\Leftrightarrow I_A \subseteq R$$

$$\Leftrightarrow R^{-1} \text{ 是自反的}$$

$$\Leftrightarrow M(R) \text{ 主对角线上的元素全为 } 1$$

$$\Leftrightarrow G(R) \text{ 的每个顶点处均有环.}$$



设 $R \subseteq A \times A$, 说 R 是反自反的(irreflexive), 如果

$$\forall x(x \in A \rightarrow \neg xRx).$$

R 是非反自反的 $\Leftrightarrow \exists x(x \in A \wedge xRx)$

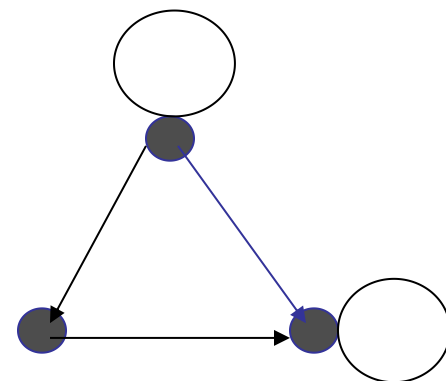
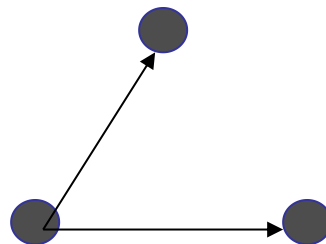
性质: R 是反自反的

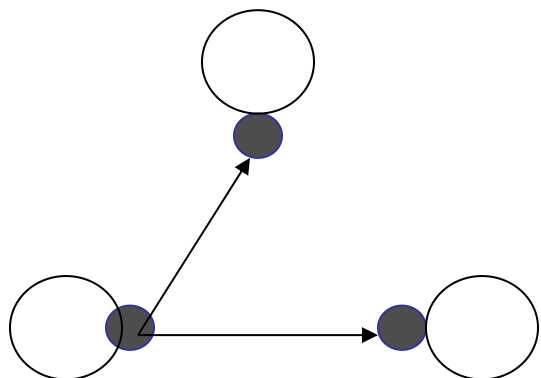
$$\Leftrightarrow I_A \cap R = \emptyset$$

$$\Leftrightarrow R^{-1} \text{ 是反自反的}$$

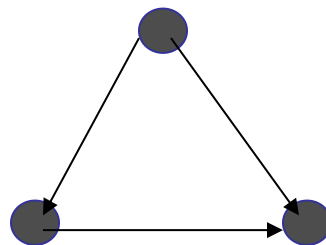
$$\Leftrightarrow M(R) \text{ 主对角线上的元素全为 } 0$$

$$\Leftrightarrow G(R) \text{ 的每个顶点处均无环.}$$

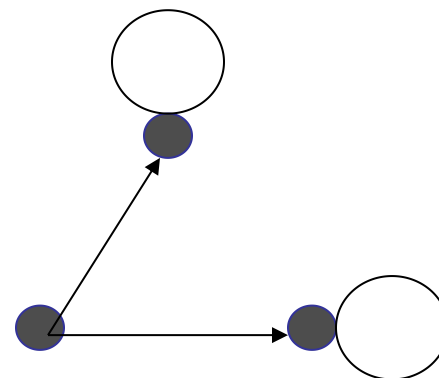




自反



反自反



非自反, 非反自反

自反,
反自反?

\emptyset 上的空关系

设 $R \subseteq A \times A$, 说 R 是对称的(Symmetric), 如果

$$\forall x \forall y (x \in A \wedge y \in A \wedge xRy \rightarrow yRx).$$

R 非对称 $\Leftrightarrow \exists x \exists y (x \in A \wedge y \in A \wedge xRy \wedge \neg yRx)$

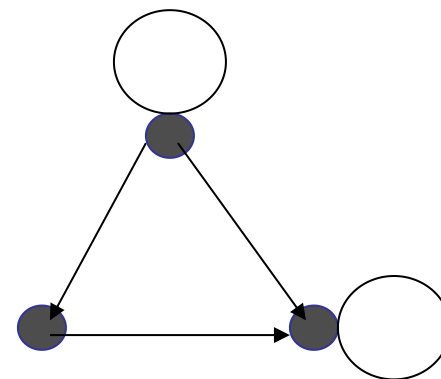
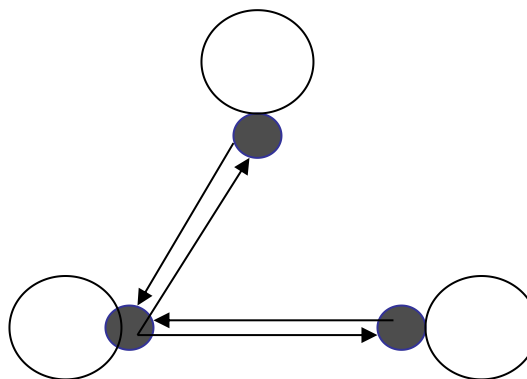
性质: R 是对称的

$$\Leftrightarrow R^{-1} = R$$

$$\Leftrightarrow R^{-1} \text{ 是对称的}$$

$$\Leftrightarrow M(R) \text{ 是对称的}$$

$$\Leftrightarrow G(R) \text{ 的任何两个顶点之间若有边, 则必有两条方向相反的有向边.}$$



设 $R \subseteq A \times A$, 说 R 是反对称的(Anti-symmetric), 若

$$\forall x \forall y (x \in A \wedge y \in A \wedge xRy \wedge yRx \rightarrow x=y).$$

R **非**反对称 $\Leftrightarrow \exists x \exists y (x \in A \wedge y \in A \wedge xRy \wedge yRx \wedge x \neq y)$

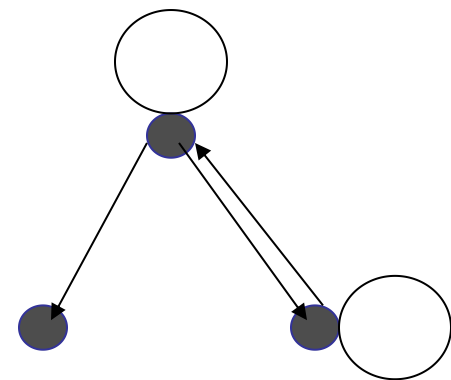
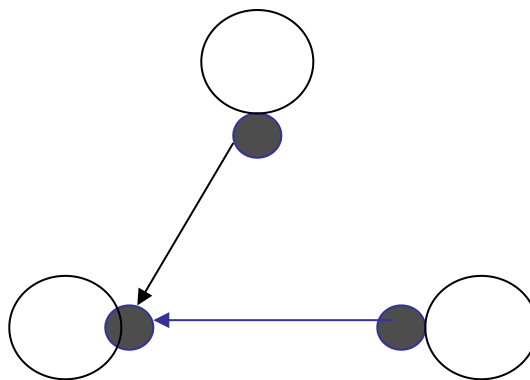
性质: R 是反对称的

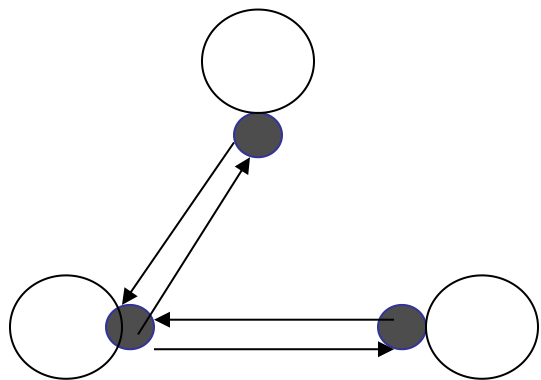
$$\Leftrightarrow R^{-1} \cap R \subseteq I_A$$

$\Leftrightarrow R^{-1}$ 是反对称的

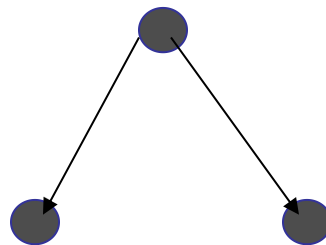
$$\Leftrightarrow \text{在 } M(R) \text{ 中, } \forall i \forall j (i \neq j \wedge r_{ij} = 1 \rightarrow r_{ji} = 0)$$

$\Leftrightarrow \text{在 } G(R) \text{ 中, } \forall x_i \forall x_j (i \neq j), \text{ 若有有向边 } \langle x_i, x_j \rangle, \text{ 则必没有 } \langle x_j, x_i \rangle.$

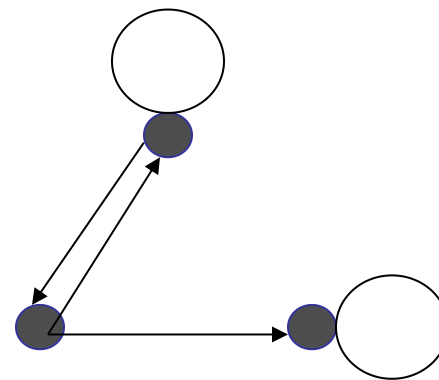




对称

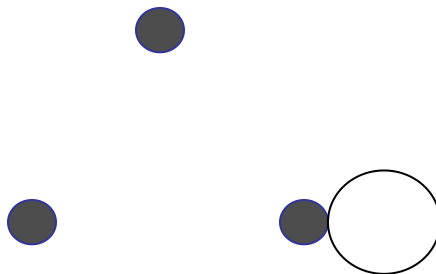


反对称



非对称, 非反对称

对称,
反对称?



设 $R \subseteq A \times A$, 说 R 是传递的(Transitive), 如果

$$\forall x \forall y \forall z (x \in A \wedge y \in A \wedge z \in A \wedge xRy \wedge yRz \rightarrow xRz).$$

$$R \text{ 非传递} \Leftrightarrow \exists x \exists y \exists z (x \in A \wedge y \in A \wedge z \in A \wedge xRy \wedge yRz \wedge \neg xRz)$$

性质: R 是传递的

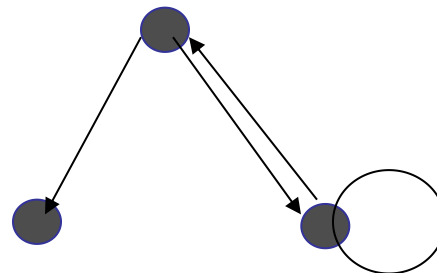
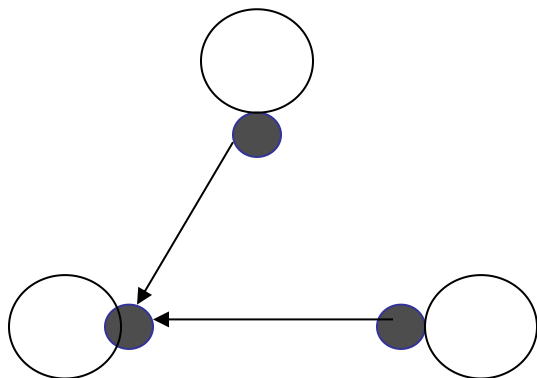
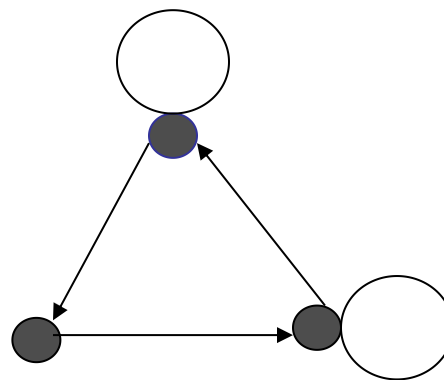
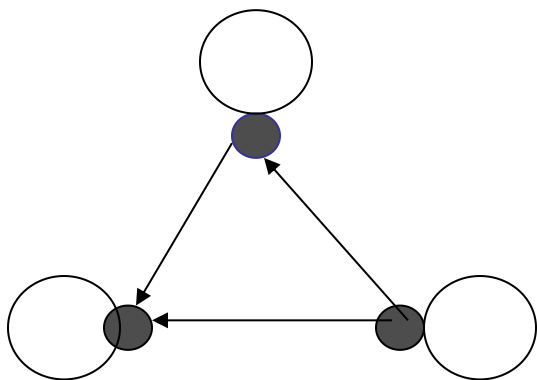
$$\Leftrightarrow R \circ R \subseteq R$$

$$\Leftrightarrow R^{-1} \text{是传递的}$$

$$\Leftrightarrow \text{在 } M(R \circ R) \text{ 中, } \forall i \forall j, \text{ 若 } r_{ij}' = 1, \text{ 则 } M(R) \text{ 中相应元素 } r_{ij} = 1.$$

$$\Leftrightarrow \text{在 } G(R) \text{ 中, } \forall x_i \forall x_j \forall x_k, \text{ 若有有向边 } \langle x_i, x_j \rangle, \langle x_j, x_k \rangle, \text{ 则必有有向边 } \langle x_i, x_k \rangle.$$

5 关系性质-传递性



示例

在 $N = \{0, 1, 2, \dots\}$ 上:

- ▶ $\leq = \{ \langle x, y \rangle \mid x \in N \wedge y \in N \wedge x \leq y \}$ 自反, 反对称, 传递
- ▶ $\geq = \{ \langle x, y \rangle \mid x \in N \wedge y \in N \wedge x \geq y \}$ 自反, 反对称, 传递
- ▶ $< = \{ \langle x, y \rangle \mid x \in N \wedge y \in N \wedge x < y \}$ 反自反, 反对称, 传递
- ▶ $> = \{ \langle x, y \rangle \mid x \in N \wedge y \in N \wedge x > y \}$ 反自反, 反对称, 传递
- ▶ $| = \{ \langle x, y \rangle \mid x \in N \wedge y \in N \wedge x \mid y \}$ 反对称, 传递 ($\neg 0 \mid 0$)
- a) $I_N = \{ \langle x, y \rangle \mid x \in N \wedge y \in N \wedge x = y \}$ 自反, 对称, 反对称, 传递
- b) $U_N = \{ \langle x, y \rangle \mid x \in N \wedge y \in N \} = N \times N$ 自反, 对称, 传递.

示例

$$A=\{a,b,c\}$$

$$R_1=\{<a,a>, <a,b>, <b,c>, <a,c>\},$$

$$R_2=\{<a,a>, <a,b>, <b,c>, <c,a>\},$$

$$R_3=\{<a,a>, <b,b>, <a,b>, <b,a>, <c,c>\},$$

$$R_4=\{<a,a>, <a,b>, <b,a>, <c,c>\},$$

$$R_5=\{<a,a>, <a,b>, <b,b>, <c,c>\},$$

$$R_6=\{<a,b>, <b,a>, <b,c>, <a,a>\},$$

示例

设 $R_1, R_2 \subseteq A \times A$ 都具有某种性质

	自反	反自反	对称	反对称	传递
R_1^{-1}, R_2^{-1}					
$R_1 \cup R_2$					
$R_1 \cap R_2$					
$R_1 \circ R_2, R_2 \circ R_1$					
$R_1 - R_2, R_2 - R_1$					
R_1', R_2'					

示例

设 $R_1, R_2 \subseteq A \times A$ 都具有某种性质

	自反	反自反	对称	反对称	传递
R_1^{-1}, R_2^{-1}	√	√	√	√	√
$R_1 \cup R_2$	√	√	√		
$R_1 \cap R_2$	√	√	√	√	√
$R_1 \circ R_2, R_2 \circ R_1$	√				
$R_1 - R_2, R_2 - R_1$		√	√	√	
R_1', R_2'			√		

示例

(1) R_1, R_2 自反 $\Rightarrow R_1 \circ R_2$ 自反.

证明: $\forall x,$

$$x \in A$$

$$\Rightarrow xR_1x \wedge xR_2x$$

$$\Rightarrow xR_1 \circ R_2 x$$

$\therefore R_1, R_2$ 自反 $\Rightarrow R_1 \circ R_2$ 自反.

示例

(2) R_1, R_2 反自反 $\Rightarrow R_1 \cap R_2$ 反自反.

证明: (反证) 若 $R_1 \cap R_2$ 非反自反, 则

$$\exists x \in A,$$

$$x(R_1 \cap R_2)x$$

$$\Leftrightarrow xR_1x \wedge xR_2x$$

与 R_1, R_2 反自反矛盾!

$\therefore R_1, R_2$ 反自反 $\Rightarrow R_1 \cap R_2$ 反自反.

示例

(3) R_1, R_2 对称 $\Rightarrow R_1 - R_2$ 对称.

证明: $\forall x, y \in A,$

$$x(R_1 - R_2)y$$

$$\Leftrightarrow xR_1y \wedge \neg xR_2y$$

$$\Leftrightarrow yR_1x \wedge \neg yR_2x$$

$$\Leftrightarrow y(R_1 - R_2)x$$

$\therefore R_1, R_2$ 对称 $\Rightarrow R_1 - R_2$ 对称.

示例

(4) R_1 对称 $\Rightarrow R_1'$ 对称.

证明: $\forall x, y \in A,$

$$\begin{aligned}
 x(R_1')y &\Leftrightarrow x(U_A - R_1)y \\
 &\Leftrightarrow xU_Ay \wedge \neg xR_1y \\
 &\Leftrightarrow yU_Ax \wedge \neg yR_1x \\
 &\Leftrightarrow y(U_A - R_1)x \Leftrightarrow y(R_1')x
 \end{aligned}$$

$\therefore R_1$ 对称 $\Rightarrow R_1'$ 对称.

示例

(5) R_1 反对称 $\Rightarrow R_1^{-1}$ 反对称.

证明: (反证) 若 R_1^{-1} 非反对称, 则

$$\exists x, y \in A,$$

$$xR_1^{-1}y \wedge yR_1^{-1}x \wedge x \neq y$$

$$\Leftrightarrow yR_1x \wedge xR_1y \wedge x \neq y$$

与 R_1 反对称矛盾!

$\therefore R_1$ 反对称 $\Rightarrow R_1^{-1}$ 反对称.

