第五章习题

微分中值定理的应用

1　证明：当$|x|\le\dfrac{1}{2}$时，$3\arccos x-\arccos(3x-4x^3)=\pi$ 。

证：记左式为$f(x)$，则当$|x|<\dfrac{1}{2}$时，

$$f'(x)=\frac{-3}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{3-12x^2}{\sqrt{1-(3x-4x^3)^2}}=\frac{-3}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{3(1-4x^2)}{\sqrt{(1-x^2)(1-4x^2)^2}}$$

$$=-\frac{3}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{3}{\sqrt{1-x^2}}=0(|x|<\frac{1}{2})$$

$$\therefore\ f(x)\equiv C$$

取$x=0$，计算得$f(0)=3\arccos 0-\arccos 0=\pi$

$$\therefore\quad C=\pi, f(x)=\pi(|x|<\frac{1}{2})$$

又直接计算$f(\pm\dfrac{1}{2})$得$f(\dfrac{1}{2})=3\arccos(\dfrac{1}{2})-\arccos 1=\pi$

$$f(-\frac{1}{2})=3\arccos(-\frac{1}{2})-\arccos(-1)=3\cdot\frac{2\pi}{3}-\pi=\pi$$

综上所述，得$f(x)\equiv\pi$（$|x|\le\dfrac{1}{2}$），得证。

2　（1）证明：$e^x>ex$，$(x>1)$

证：设$f(x)=e^x-ex$，在$[1,x]$上满足拉格朗日中值定理的条件，有

$$f(x)-f(1)=f'(\xi)(x-1)$$

$\because\quad \xi\in(1,x)\qquad\therefore\quad f'(\xi)=e^{\xi}-e>e^1-e=0$

从而　　$e^x-ex>0\Rightarrow e^x>ex$。

（2）证明：$\arctan x-\ln(1+x^2)>\dfrac{\pi}{4}-\ln 2\qquad x\in[\dfrac{1}{2},1]$

证：设$f(x)=\arctan x$，$g(x)=\ln(1+x^2)$，由题设条件得，$f(x)$，$g(x)$在$[x,1]$上　满足柯西中值定理的条件，于是有

$$\frac{f(1)-f(x)}{g(1)-g(x)}=\frac{f'(\eta)}{g'(\eta)}\qquad 其中\ \frac{1}{2}<x<\eta<1$$

得 $$\frac{\frac{\pi}{4}-\arctan x}{\ln 2-\ln(1+x^2)}=\frac{\frac{1}{1+\eta^2}}{\frac{2\eta}{1+\eta^2}}=\frac{1}{2\eta}<1$$

即 $\frac{\pi}{4}-\arctan x<\ln 2-\ln(1+x^2)$， $\therefore$ $\arctan x-\ln(1+x^2)>\frac{\pi}{4}-\ln 2$

3 设函数 $f(x)$ 满足 $f(0)=0, f''(x)<0$ 在 $(0,+\infty)$ 成立，

求证：对任何 $x_1>x_2>0$ 有 $x_1 f(x_2)>x_2 f(x_1)$

分析：对任何 $x_1>x_2>0$ 有 $x_1 f(x_2)>x_2 f(x_1)$

$$\Leftrightarrow \frac{f(x_2)}{x_2}>\frac{f(x_1)}{x_1}$$

$\Leftrightarrow g(x)=\frac{f(x)}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 内严格单调减少

可见只需 $g'(x)<0$ 在 $(0,+\infty)$ 内成立。

证：令 $g(x)=\frac{f(x)}{x}$ 于是 $g'(x)=\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}=\frac{f'(x)-\frac{f(x)}{x}}{x^2}$

当 $x>0$ 时 $g'(x)$ 与 $f'(x)-\frac{f(x)}{x}$ 同号，由拉格朗日中值定理得

$\exists\xi\in(0,x)$, 使 $\frac{f(x)}{x}=\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(\xi)$

从而再用一次拉格朗日中值定理，可得

$f'(x)-\frac{f(x)}{x}=f'(x)-f'(\xi)=f''(\eta)(x-\xi)<0$ 其中 $\xi<\eta<x$

即 $g'(x)<0$。

同理当 $x<0$ 时 $g'(x)<0$ 也成立。

从而有对任何 $x_1>x_2>0$ 有 $x_1 f(x_2)>x_2 f(x_1)$，即原不等式成立。

5 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导，且有 $f_+'(a)\cdot f_-'(b)<0$ 则在 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使得 $f'(\xi)=0$。

证：由题设条件可知 $f'_+(a)$ 与 $f'_-(b)$ 异号，不妨设 $f'_+(a)<0, f'_-(b)>0$，

$\because \quad f'_+(a)=\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}<0$，

由极限的保号定理，可知 $\exists\delta_1>0,$ 当 $x\in(a,a+\delta_1)$ 时，有

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a}<0 \qquad \Rightarrow f(x)<f(a)$$

同理，$\exists\delta_2>0,$ 当 $x\in(b-\delta_2,b)$ 时，有

$$\frac{f(x)-f(b)}{x-b}>0 \qquad \Rightarrow f(x)<f(b)$$

又因为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，所以 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上必有最小值，由以上证明可得最小值必在 (a,b) 内。

设 $\xi\in(a,b), f(\xi)=\min\limits_{a\le x\le b}\{f(x)\}$，由费马定理，$f'(\xi)=0$。

6　若 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有三阶导数，且 $f(0)=f(1)=0$，，设 $F(x)=x^3f(x)$，

求证：至少存在一点 $\xi\in(0,1)$，使得 $F'''(\xi)=0$。

证法一：由题设知，$F(x)$，$F'(x)$，$F''(x)$，$F'''(x)$ 在 $[0,1]$ 上存在，

又 $F(0)=F(1)$，由洛尔定理，$\exists\xi_1\in(0,1)$，使 $F'(\xi_1)=0$，

又 $F'(0)=[3x^2f(x)+x^3f'(x)]_{x=0}=0$，

可知 $F'(x)$ 在 $[0,\xi_1]$ 上满足洛尔定理，于是 $\exists\xi_2\in(0,\xi_1)$，使得 $F''(\xi_2)=0$。

又 $F''(0)=[6xf(x)+6x^2f(x)+x^3f''(x)]_{x=0}=0$，

对 $F''(x)$ 在 $[0,\xi_2]$ 上再次利用洛尔定理，故 $\exists\xi\in(0,\xi_2)\subset(0,\xi_1)\subset(0,1)$

使得 $F'''(\xi)=0$。

证法二：写出 $F(x)$ 在 $x=0$ 处的泰勒展开式

$$F(x)=F(0)+F'(0)x+\frac{1}{2!}F''(0)x^2+\frac{1}{3!}F'''(0)x^3 \qquad （1）$$

$\because F'(x)=3x^2f(x)+x^3f'(x)$，$F''(x)=6xf(x)+6x^2f(x)+x^3f''(x)$，

$\therefore\ F(0)=F'(0)=F''(0)=0$

于是由（1）得，$F(x)=\dfrac{1}{3!}F'''(\xi)x^3$　　　（2）

又 $F(1)=f(1)=0$，由（2）得 $\dfrac{1}{3!}F'''(\xi)=0$，即 $F'''(\xi)=0$。

7　函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $f(1)=0$，试证：至少存在一点 $\xi\in(0,1)$，使得 $(2\xi+1)f(\xi)+\xi f'(\xi)=0$。

分析：　由 $\xi\in(0,1)$，则 $(2\xi+1)f(\xi)+\xi f'(\xi)=0$

$$\Leftrightarrow (2+\frac{1}{\xi})f(\xi)+f'(\xi)=0$$

$$\Leftrightarrow p(\xi)(2+\frac{1}{\xi})f(\xi)+p(\xi)f'(\xi)=0$$

其中 $\forall x\in(0,1)$ 有 $p(x)>0$

若 $p(x)$ 还满足 $p'(x)=p(x)(2+\dfrac{1}{x})$ 当 $x\in(0,1)$ 时成立，则要证的结果 $\Leftrightarrow [p(x)f(x)]'$ 在 $(0,1)$ 内有零点。

于是考虑辅助函数 $F(x)=p(x)f(x)$，其中 $p(x)$ 满足

$$p'(x)=p(x)(2+\frac{1}{x}),\quad x\in(0,1),\qquad 即\qquad [\ln p(x)]'=2+\frac{1}{x}$$

取 $\ln p(x)=2x+\ln x$　即　$p(x)=xe^{2x}$

证：令 $F(x)=xe^{2x}f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $F(0)=0$，

$F(1)=e^2f(1)=0$

即 $F(x)$ 在 $[0,1]$ 上满足洛尔定理，$\therefore$ 至少存在一点 $\xi\in(0,1)$，　使得

$$F'(\xi)=(e^{2\xi}+2\xi e^{2\xi})f(\xi)+\xi e^{2\xi}f'(\xi)=e^{2\xi}[(2\xi+1)f(\xi)+\xi f'(\xi)]=0$$

$\therefore\qquad (2\xi+1)f(\xi)+\xi f'(\xi)=0$。

8　设 $f(x),g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $g(b)=g(a)=1$，在 (a,b) 内 $f(x),g(x)$ 均可导，且 $g(x)+g'(x)\neq 0, f'(x)\neq 0$，证明：$\exists\xi,\eta\in(a,b)$，使

$$\frac{f'(\xi)}{f'(\eta)}=\frac{e^{\xi}[g(\xi)+g'(\xi)]}{e^{\eta}}。$$

分析：　原结论 $\Leftrightarrow \dfrac{f'(\xi)}{e^{\xi}[g(\xi)+g'(\xi)]}=\dfrac{f'(\eta)}{e^{\eta}}$

均将 η,ξ 看作变量，则上式可写成 $\dfrac{f'(\xi)}{[e^{\xi}g(\xi)]'}=\dfrac{f'(\eta)}{(e^{\eta})'}$，

则辅助函数可令 $\varphi(x)=e^{x}g(x)$，$\psi(x)=e^{x}$。

证：令 $\varphi(x)=e^{x}g(x)$，则由题设可知 $f(x),\varphi(x)$ 在 $[a,b]$ 上满足柯西中值定理，

于是 $\exists\xi\in(a,b)$，使得 $\dfrac{f(b)-f(a)}{e^{b}g(b)-e^{a}g(a)}=\dfrac{f'(\xi)}{e^{\xi}[g(\xi)+g'(\xi)]}$

$\because\quad g(b)=g(a)=1\quad\therefore \dfrac{f(b)-f(a)}{e^{b}-e^{a}}=\dfrac{f'(\xi)}{e^{\xi}[g(\xi)+g'(\xi)]}$　　　　（1）

又令 $\psi(x)=e^{x}$，则由题设可知 $f(x),\psi(x)$ 在 $[a,b]$ 上满足柯西中值定理的条件，

于是 $\exists\eta\in(a,b)$，　$\dfrac{f(b)-f(a)}{e^{b}-e^{a}}=\dfrac{f'(\eta)}{e^{\eta}}$　　　　（2）

由（1）（2）得，

$$\frac{f'(\eta)}{e^{\eta}}=\frac{f'(\xi)}{e^{\xi}[g(\xi)+g'(\xi)]}\Rightarrow\frac{f'(\xi)}{f'(\eta)}=\frac{e^{\xi}[g(\xi)+g'(\xi)]}{e^{\eta}}。$$

洛必达法则与泰勒公式

1　求 $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{e^{x}-e^{\sin x}}{1-\cos\sqrt{x(1-\cos x)}}$

分析：本题是求“$\dfrac{0}{0}$”型未定式的极限，从分子和分母的表达式不难发现，直接利用洛必达法则会碰到复杂的计算，为了简化计算的过程，应当在分子和分母中进行适当的等价无穷小代换。

解：当 $x\to0$ 时，有 $e^{x}-e^{\sin x}=e^{\sin x}(e^{x-\sin x}-1)$

又因 $e^{x-\sin x}-1 \sim x-\sin x$，$\lim\limits_{x\to0} e^{\sin x}=1$，于是，分子可用 $x-\sin x$ 代换。

当 $x\to0$ 时，$\sqrt{x(1-\cos x)}$ 是无穷小量，于是分母了作等价无穷小代换，即

$$1-\cos\sqrt{x(1-\cos x)} \sim \frac{1}{2}x(1-\cos x) \sim \frac{x}{2}\cdot\frac{x^2}{2}=\frac{x^3}{4},$$

即得 $$\lim_{x\to0^+}\frac{e^x-e^{\sin x}}{1-\cos\sqrt{x(1-\cos x)}}=\lim_{x\to0^+}\frac{x-\sin x}{\frac{x^3}{4}}=4\lim_{x\to0^+}\frac{x-\sin x}{x^3}=\frac{4}{3}\lim_{x\to0^+}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{2}{3}$$

2　求 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos(xe^{2x})-\cos(xe^{-2x})}{x^3}$

解法一：$$\lim_{x\to0}\frac{\cos(xe^{2x})-\cos(xe^{-2x})}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{-2\sin\frac{xe^{2x}+xe^{-2x}}{2}\sin\frac{xe^{2x}-xe^{-2x}}{2}}{x^3}$$

$$=-2\lim_{x\to0}\frac{x^2(e^{2x}+e^{-2x})(e^{2x}-e^{-2x})}{4x^3}=-\lim_{x\to0}\frac{e^{2x}-e^{-2x}}{x}=-\lim_{x\to0}2(e^{2x}+e^{-2x})=-4$$

解法二：利用 $\cos x$ 的麦克劳林公式 $\cos x=1-\dfrac{x^2}{2}+o(x^3)\quad(x\to0)$，可得

$$\cos(xe^{2x})=1-\frac{x^2e^{4x}}{2}+o(x^3)\qquad(x\to0)$$

$$\cos(xe^{-2x})=1-\frac{x^2e^{-4x}}{2}+o(x^3)\qquad(x\to0)$$

代入原式，即得

$$原式==\lim_{x\to0}\frac{e^{-4x}-e^{4x}}{2x}+\lim_{x\to0}\frac{o(x^3)}{x^3}=-2\lim_{x\to0}(e^{2x}+e^{-2x})=-4$$

3 求 $\lim\limits_{x\to\infty}(\dfrac{ex^{1+x}}{(1+x)^x}-x)$

解：所求极限为“$\infty-\infty$”型未定式，但无法经过通分化为“$\dfrac{0}{0}$”或“$\dfrac{\infty}{\infty}$”型的未定式，这时可从括号内提出无穷大因子 x，先化为“$0\cdot\infty$”型的未定式，最后再换元 $y=\dfrac{1}{x}$，并化为“$\dfrac{0}{0}$”型未定式求极限，

$$\lim_{x\to\infty} x\left(\frac{ex^x}{(1+x)^x}-1\right)=\lim_{y\to0^+}\frac{\dfrac{e}{(1+y)^{\frac{1}{y}}}-1}{y}=\lim_{y\to0^+}\frac{e^{1-\frac{\ln(1+y)}{y}}-1}{y}$$

$$=\lim_{y\to0^+}\frac{1-\dfrac{\ln(1+y)}{y}}{y}=\lim_{y\to0^+}\frac{y-\ln(1+y)}{y^2}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{y\to0^+}\frac{1-\dfrac{1}{y+1}}{y}=\frac{1}{2}\lim_{y\to0^+}\frac{1}{y+1}=\frac{1}{2}$$

注：对于“$\infty-\infty$” 型未定式，基本的两种方法是通分法和提取无穷大公因子法。

4 求 $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{4^x-3^x}{x}\right)^{\frac{1}{x-1}}$

解：$\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{4^x-3^x}{x}\right)^{\frac{1}{x-1}}=e^{\lim\limits_{x\to1}\frac{\ln(\frac{4^x-3^x}{x})}{x-1}}=e^{\lim\limits_{x\to1}\frac{\frac{4^x-3^x}{x}-1}{x-1}}=e^{\lim\limits_{x\to1}\frac{\frac{4^x-3^x}{x}-1}{(x-1)}}$

$=e^{\lim\limits_{x\to1}\frac{4^x-3^x-x}{x-1}}=e^{\lim\limits_{x\to1}(4^x\ln4-3^x\ln3-1)}=e^{4\ln4-3\ln3-1}=\dfrac{4^4}{3^3e}=\dfrac{256}{27e}$

注：本题是“1^∞” 型未定式，其一般形式为$\lim\limits_{x\to\square}f(x)^{g(x)}$，其中$\lim\limits_{x\to\square}f(x)=1$，$\lim\limits_{x\to\square}g(x)=\infty$，首先化为指数复合型的极限$e^{\lim\limits_{x\to\square}g(x)\ln f(x)}$，由于$\lim\limits_{x\to\square}\ln f(x)=0$，利用当$y\to0$时的等价无穷小关系$\ln(1+y)\square y$可得：当$x\to\square$时，$\ln f(x)\square f(x)\square1$于是

$$\lim_{x\to\square}f(x)^{g(x)}=e^{\lim\limits_{x\to\square}g(x)\ln f(x)}=e^{\lim\limits_{x\to\square}g(x)[f(x)-1]}$$

从而归结为求极限$e^{\lim\limits_{x\to\square}g(x)[f(x)-1]}$。

5 确定常数a和b的值，使$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1-2x+3x^2)+ax+bx^2}{x^2}=4$

解法一：$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1-2x+3x^2)+ax+bx^2}{x^2}=4$

$$\Leftrightarrow\lim_{x\to0}\frac{\ln(1-2x+3x^2)+ax}{x^2}+b=4$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1-2x+3x^2)+ax}{x^2}=4-b$$

由此可得 $b=4-\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1-2x+3x^2)+ax}{x^2}$

以及 $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1-2x+3x^2)+ax}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1-2x+3x^2)+ax}{x^2}\cdot x=(4-b)\cdot 0=0$

于是，利用等价无穷小代换即得

$$a=-\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1-2x+3x^2)}{x}=-\lim_{x\to 0}\frac{-2x+3x^2}{x}=2$$

进而，由洛必达法则得

$$b=4-\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1-2x+3x^2)+2x}{x^2}=4-\lim_{x\to 0}\frac{\frac{-2+6x}{1-2x+3x^2}+2}{2x}$$

$$=4-\lim_{x\to 0}\frac{2x+6x^2}{2x(1-2x+3x^2)}=3$$

即 $a=2$，$b=3$。

解法二：利用带皮亚诺型余项的麦克劳林公式，由 $\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+o(x^2)$，

可得 $\ln(1-2x+3x^2)=-2x+3x^2-\frac{1}{2}(-2x+3x^2)^2+o(x^2)$

$$=-2x+x^2+o(x^2)\text{，}$$

代入即得 $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1-2x+3x^2)+ax+bx^2}{x^2}=4$

$$\Leftrightarrow \lim_{x\to 0}\frac{(a-2)x+(b+1)x^2}{x^2}=4$$

$$\Leftrightarrow a-2=0,b+1=4\Leftrightarrow a=2,b=3\text{。}$$

6 求极限 $\lim_{x\to 0}\frac{1+\frac{x^2}{2}-\sqrt{1+x^2}}{(\cos x-e^{x^2})\sin x^2}$

解：$\because \sqrt{1+x^2}=1+\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)\frac{x^4}{2!}+o(x^4)=1+\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{8}+o(x^4)$

$$\therefore 1+\frac{x^2}{2}-\sqrt{1+x^2}=\frac{x^4}{8}+o(x^4)$$

又$\because$ $\cos x-e^{x^2}=1-\frac{x^2}{2}-(1+x^2)+o(x^2)=-\frac{3}{2}x^2+o(x^2)$， $\sin x^2=x^2+o(x^2)$

$$\therefore \quad (\cos x-e^{x^2})\sin x^2=-\frac{3}{2}x^4+o(x^4)$$

$$\therefore \quad \lim_{x\to 0}\frac{1+\frac{x^2}{2}-\sqrt{1+x^2}}{(\cos x-e^{x^2})\sin x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{8}x^4+o(x^4)}{-\frac{3}{2}x^4+o(x^4)}=-\frac{1}{12}$$

7 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶可导，且 $f(0)=f'(0)=f'(1)=0$， $f(1)=1$

求证：$\exists\xi\in(0,1)$，使 $|f''(\xi)|\geq 4$。

证：把函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 展开成带拉格朗日型余项的一阶泰勒公式，得

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{1}{2}f''(\xi_1)x^2 \qquad (0<\xi_1<x)$$

取 $x=\frac{1}{2}$，可得 $\quad f(\frac{1}{2})=\frac{1}{8}f''(\xi_1) \qquad (0<\xi_1<\frac{1}{2})$

把函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处展开成泰勒公式，

$$f(x)=f(1)+f'(1)(x-1)+\frac{1}{2}f''(\xi_2)(x-1)^2 \qquad (x<\xi_2<1)$$

取 $x=\frac{1}{2}$，可得 $\quad f(\frac{1}{2})=1+\frac{1}{8}f''(\xi_2) \qquad (\frac{1}{2}<\xi_1<1)$

两式相减消去 $f(\frac{1}{2})$ 即得

$$f''(\xi_1)-f''(\xi_2)=8\Rightarrow|f''(\xi_1)|+|f''(\xi_2)|\geq 8$$

从而，在 ξ_1 和 ξ_2 中至少有一个使得该点的二阶导数值不小于 4，把该点取为 ξ，

就有 $\xi\in(0,1)$，使 $|f''(\xi)|\geq 4$ 。

8 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶可导，且 $|f(x)|\leq a$， $|f''(x)|\leq b$，其中 a， b 都是非负常数， c 是 $(0,1)$ 内的任意一点，求证：$|f'(c)|\leq 2a+\frac{b}{2}$ 。

解：把 $f(0)$， $f(1)$ 分别在 $(0,1)$ 内展开成带拉格朗日型余项的一阶泰勒公式，得

$$f(0)=f(c)+f'(c)(0-c)+\frac{1}{2}f''(\xi_1)(0-c)^2 \quad (0<\xi_1<c)$$

$$f(1)=f(c)+f'(c)(1-c)+\frac{1}{2}f''(\xi_2)(1-c)^2 \quad (c<\xi_2<1)$$

两式相减消去 $f(c)$，即得

$$f(1)-f(0)=f'(c)+\frac{1}{2}f''(\xi_2)(1-c)^2-\frac{1}{2}f''(\xi_1)c^2$$

$$\therefore \quad |f'(c)|\le|f(1)|+|f(0)|+\frac{1}{2}|f''(\xi_1)|c^2+\frac{1}{2}|f''(\xi_2)|(1-c)^2$$

$$\le 2a+\frac{b}{2}[(1-c)^2+c^2]\le 2a+\frac{b}{2}$$

最后一步用到的是：由 c 是 $(0,1)$ 内的任意一点，可得 $(1-c)^2<1-c$ 和 $c^2<c$，于是 $0<(1-c)^2+c^2<1-c+c=1$ 或者求函数 $g(x)=(1-x)^2+x^2$ 在闭区间 $\left[0,1\right]$ 上的最大值也可得到 $g(x)\le 1$。

导数的应用

1 已知函数 $f(x)$ 当 $x>0$ 时满足 $f''(x)+3[f'(x)]^2=x\ln x$，且 $f'(1)=0$，则下列四个结论中，正确的是（　）

（A） $f(1)$ 是函数 $f(x)$ 的极大值。

（B） $f(1)$ 是函数 $f(x)$ 的极小值。

（C） $(1,f(1))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点。

（D） $f(1)$ 不是函数 $f(x)$ 的极值，$(1,f(1))$ 也不是曲线 $y=f(x)$ 的拐点。

分析：由当 $x>0$ 时，$f''(x)+3[f'(x)]^2=x\ln x$，则 $f''(x)$ 在 $x>0$ 时存在，于是 $f'(x)$ 在 $x>0$ 时连续，由上式知 $f''(x)$ 在 $x>0$ 时连续。利用洛必达法则，可得

$$\lim_{x\to 1}\frac{f''(x)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x\ln x}{x-1}-3\lim_{x\to 1}\frac{[f'(x)]^2}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to 1}(1+\ln x)-3\cdot 2\lim_{x\to 1}f'(x)f''(x)=1-6f'(1)f''(1)=1$$

由极限的保号性知，$f''(x)$ 在 $x=1$ 某空心邻域中与 $x-1$ 同号，在此邻域中当 $x<1$

与 $x>1$ 时 $f''(x)$ 反号，从而 $(1,f(1))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点。选（C）。

2 证明：（1）当 $x>0$ 时，$(x^2-1)\ln x \geq (x-1)^2$ 。

证：令 $f(x)=(x^2-1)\ln x-(x-1)^2$，　$f(1)=0$

$$f'(x)=2x\ln x-x-\frac{1}{x}+2，\quad f'(1)=0$$

$$f''(x)=2\ln x+\frac{1}{x^2}+1，\quad f''(1)=2>0$$

$$f'''(x)=\frac{2(x^2-1)}{x^3}$$

当 $0<x<1$ 时，$f'''(x)<0$，$f''(x)$ “□ ”，$f''(x)>f''(1)=2>0$

$\Rightarrow f'(x)$ “□ ”，$f'(x)<f'(1)=0$，$f(x)$ “□ ”，

$\Rightarrow f(x)>f(1)=0$

$\Rightarrow (x^2-1)\ln x>(x-1)^2$

当 $1<x<+\infty$ 时，$f'''(x)>0$，$f''(x)$ “□ ”，$f''(x)>f''(1)=2>0$

$\Rightarrow f'(x)$ “□ ”，$f'(x)>f'(1)=0$，$f(x)$ “□ ”，

$\Rightarrow f(x)>f(1)=0$

$\Rightarrow (x^2-1)\ln x>(x-1)^2$

当 $x=1$ 时，$(x^2-1)\ln x=(x-1)^2$

综上所述，当 $x>0$ 时，$(x^2-1)\ln x \geq (x-1)^2$ 。

3 证明：当 $0<x<1$ 时，$\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}<\frac{\ln(1+x)}{\arcsin x}$

分析：若令 $f(x)=\frac{\ln(1+x)}{\arcsin x}-\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$，那么在求导数 $f'(x)$ 的时候，会很复杂。因此，作变形 $\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}<\frac{\ln(1+x)}{\arcsin x} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{1-x^2}}{1+x}<\frac{\ln(1+x)}{\arcsin x}$

$\Leftrightarrow \sqrt{1-x^2}\arcsin x < (1+x)\ln(1+x)$

证：令 $f(x)=(1+x)\ln(1+x)-\sqrt{1-x^2}\arcsin x$， $f(0)=0$，

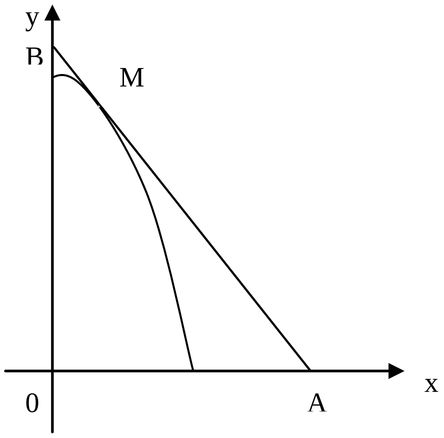
$$\because \quad f'(x)=\ln(1+x)+1+\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\arcsin x-1$$

$$=\ln f'(1+x)+\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\arcsin x>0$$

$\therefore \quad f(x)$ “ ”，故当 $0<x<1$ 时， $f(x)>f(0)=0$

即 $(1+x)\ln(1+x)-\sqrt{1-x^2}\arcsin x>0$，则得 $\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}<\dfrac{\ln(1+x)}{\arcsin x}$ 。

4 如图，设曲线段 L 是抛物线 $y=6-2x^2$ 在第一象限内的部分，在 L 上求一点 M，使过 M 点 L 的切线 AB 与两坐标轴和 L 所围图形的面积为最小。



解：设曲线段 L 上点 M 的坐标为 $(x,6-2x^2)$，则 L 在该点的切线方程为

$$Y=6-2x^2-4x(X-x)$$

令 $Y=0$，可得点 A 的横坐标为 $a=\dfrac{3+x^2}{2x}$，令 $X=0$，可得点 B 的纵坐标为 $b=2(3+x^2)$，从而所求图形的面积为 $S=\dfrac{1}{2}ab-\int_0^{\sqrt{3}}(6-2x^2)dx$，因 $\int_0^{\sqrt{3}}(6-2x^2)dx$ 为一常数，可见 S 与 ab 将在同一点处取得最小值。

记 $f(x)=ab=\dfrac{(3+x^2)^2}{x}$，则

$$f'(x)=4(3+x^2)-\frac{(3+x^2)^2}{x^2}=\frac{3}{x^2}(3+x^2)(x^2-1)\begin{cases}<0, & 0<x<1\\ =0, & x=1\\ >0, & 1<x<\sqrt{3}\end{cases}$$

故当 $x=1$ 时面积 S 最小，即所求点 M 为 $(1,4)$ 。