第 10 章 习题解题思路

1. 8 个
2. 根据推论 10.1，题述二序列均不能
3. 证明

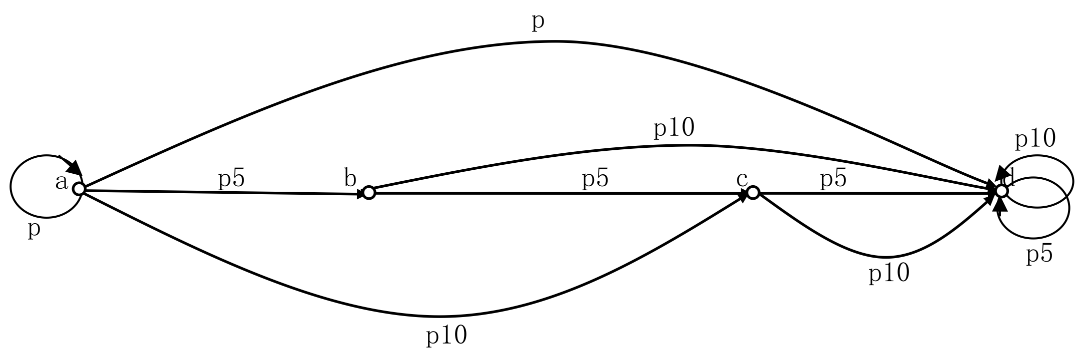
设图 G 具有 n(n≥2)个结点。由于每个结点仅能与其它 n-1 个结点邻接，因此，每个结点度数最大为 n-1.

假设 G 中不存在度数相同的结点. 于是，图 G 的 n 个结点度数分别为 0, 1, 2, …, n-1.

现在去掉图 G 中结点度数为 0 的孤立点，得到 G’, 则 G’结点度数序列为 1，2，…, n-1. 但注意到，G’ 结点数为 n-1，其结点的度数不超过 n-2，矛盾。

因此，图 G 中至少存在两个度数相同结点。

4. 用有向加权图描绘自动售货机的自动机模型如下



其中，

结点（表示已投入钱的状态）:

a： 0

b： 5 分

c： 1 0 分

d： ≥1 5 分

边/权(表示一种动作):

p 5：投 5 分的动作

p 1 0：投 1 0 分的动作

p：压按扭动作

5. 可以对边数进行归纳，注意到每条边对于图的总的出度、入度的度数和之影响均是 1 度
6. 证明：在任何有向完全图中，所有结点入度的平方和等于所有结点出度的平方和。

根据有向完全图的定义，其每个结点的出度与入度相等，因此，结论是显然成立的。但需要注意的是，此结论对于一个去掉方向后是完全图的有向图 D 是否也成立?

下面予以简单证明：

设图 D 有 n 个结点，由图 D 的性质注意到：

对任意结点的出度、入度之和为 n-1，即

$$\deg^+(v)+\deg^-(v)=n-1 \qquad (*)$$

且所有结点出度之和等于所有结点入度之和，即

$$\Sigma\deg^+(v)=\Sigma\deg^-(v) \qquad (**)$$

现在需要证明 $\Sigma(\deg^+(v))^2=\Sigma(\deg^-(v))^2$，即

$\Sigma(\deg^+(v))^2-\Sigma(\deg^-(v))^2=0$

$\Leftrightarrow \Sigma((\deg^+(v))^2-(\deg^-(v))^2)=0$

$\Leftrightarrow (\deg^+(v)+\deg^-(v))(\deg^+(v)-\deg^-(v))=0$ (***)

由（*）式，（***）式左端即

$\Sigma(n-1)(\deg^+(v)-\deg^-(v))$

$=(n-1)\Sigma(\deg^+(v)-\deg^-(v))$

$=(n-1)(\Sigma\deg^+(v)-\Sigma\deg^-(v))$

$=(n-1)\cdot 0$ （据（**）式）

$=0$

因此，（***）成立。

从而，$\Sigma(\deg^+(v))^2-\Sigma(\deg^-(v))^2=0$

即 $\Sigma(\deg^+(v))^2=\Sigma(\deg^-(v))^2$

7. 证明：K_n 的边数 $|E(K_n)|=\dfrac{n(n-1)}{2}$，且对于一般的 n 个结点的图 G 其边数 $|E(G)|\le\dfrac{n(n-1)}{2}$。

8. 设 G 是具有 4 个结点的完全图，(1) G 有多少个子图? (2) G 有多少个生成子图?请将这些子图构造出来。

（1）首先考虑结点，再进一步考虑边，事实上应用排列组合最容易。

第一类：1 个结点的子图为 $C_4^1=4$

第二类：2 个结点的子图为 $C_4^2(C_1^0+C_1^1)=12$

第三类：3 个结点的子图为 $C_4^3(C_3^0+C_3^1+C_3^2+C_3^3)=32$

第四类：4 个结点的子图为 $C_4^4(C_6^0+C_6^1+C_6^2+\cdots+C_6^5+C_6^6)=64$

总计 K_4 有 112 个子图。

（2）有 64 个生成子图

0 条边：1 个

1 条边：$C_6^1=6$ 个

2 条边：$C_6^2=15$ 个

3 条边、4 条边、5 条边、6 条边……

总计：$C_6^0+C_6^1+C_6^2+\cdots+C_6^5+C_6^6=64$

9. 证明思路：用结点表示计算机，如果二计算机可以进行直接数据传递，则在相应而结点间加边，从而可以将原问题表示为一个简单图 G，如果图 G 是连通的，则表示在这 2n 台计算机中任何两台之间都可以传递数据（也可能要通过其它的计算机）。

应用反证法来证明 G 是连通的。

假设 G 不连通，则至少存在两个分图，设其中二个分图的结点数分别为 n1,n2，结点 u，v 分别在这两个分图中，于是，容易得到:$d(u)+d(v)\ge 2n$ 与 $d(u)+d(v)\le(n1-1)+(n2-1)=2n-2$ 的矛盾。

此题还可以用证明 G 为 Hamilton 图的方法来证明其连通性。

10. 用简单图来表示上述问题：结点表示相关人员，如果二人可以说同一语言，则在相应的二结点间加边。如果得到的图是连通图则表示上述七人可以任意二人进行交谈。

11. 设图 G 是一个 (n,m) 图，且 $m>(n-1)(n-2)/2$，证明：G 是连通图。

参考定理 10.3 的证明方法。最后得到相关边数的矛盾。

14. 环图 C_n：n-1，轮图 $W_{1,n}$：2n-3，超立方体 Q_n：$n2^{n-1}$

15. 注意到自补图相应完全图边数为 e=n（n-1）/2， 图 G 与其自补图的边数是相等的。
16. 对于 G’中任意二结点 v1、v2，
(1)若 v1、v2 分别在原图 G 的不同分图中，则根据补图性质，可知，v1、v2 在补图中连通；
(2)若 v1、v2 分别在原图 G 的同一个分图 G1 中，由于 G 不连通，则可以找到 G 的另一分图 G2 中结点 v3，由补图性质可知，v1 与 v3 连通，v2 与 v3 连通，从而 v1、v2 在 G’中通过 v3 连通
综上可知，G’连通，原命题成立.
17. 用六个结点表示 6 个人，结点间存在边表示人员间相互认识，否则表示人员间相互不认识，于是得到一个简单图 G。
考虑结点 v, 在 G 中或 G’中与 v 关联的边有至少有 3 条。不妨设在 G 中与 v 关联的边有三条，这三边的另一个端点分别是 u1,u2,u3。再考虑 u1,u2,u3 间的边情况，如果 u1，u2，u3 中有二个结点间有边，不妨设 u1，u2 间有边，那么就已经得到一个由 v,u1,u2 组成的 K3，如果 u1，u2，u3 中任意二结点间没有边，那么在 G’中存在由 u1，u2，u3 组成的 K3。
18. 首先得到有向图 G(设其结点数为 n)的邻接矩阵 A，之后求解 A^n。
对于 A^n，
如果 A^n的元素(ij)值均为 1，则表明 G 为强连通，、
如果(ij)或(ji)值为 1，则 G 为单向连通，否则，
在不考虑边 G 的方向得到图 G’,G’的邻接矩阵 A’，求解$(A')^n$。如果$(A')^n$的元素(ij)值均为 1，则表明 G 为弱连通，否则 G 不连通。
19. 不同构。
20. 两两同构。
21. 不同构子图数有 18 个。
22. 3 个
23. 4 个
24. 6 个
25. 5 个
26. 可以通过判断 K_n 中是否存在欧拉图来讨论：当 n 为奇数时，一笔可以画出；当 n 为偶数时需要 n/2 笔画出。
27. (1) K_3 (2) K_5
28.
首先，容易根据定理 10.3 判断 G 是连通图。
其次，假设 G 不是 Hamilton 图，根据 Hamilton 图的判定定理 10.10，存在二结点 u，v，其度数均之和小于 n，于是，而其它结点构成完全图的情况下，G 度数之和最大，由握手定理：
$2m < (2((n-2)(n-2-1)/2)+n)+n=(n-1)(n-2)+4$,
于是 $m<(n-1)(n-2)/2+2$。
矛盾。
29. （3）（4）证明：
设 n 个人分别为 v_1，v_2，…，v_n
对任意 v_i，$v_j \in V$，假设 v_i 与 v_j 不相邻（即 v_i，v_j 所代表的人不认识），则对任意 v_k（$k \neq i$，j），必与 v_i，v_j 相邻，否则与已知矛盾，下面进行证明：
①不妨假设 v_k 与 v_i，v_j 均不相邻，则 $\deg(v_i)+\deg(v_j) \leq n-3$，即 v_i，v_j 所代表同起认识的人不超过 n-3 个，与题设矛盾。
②进一步，假设 v_k 与 v_i 相邻而与 v_j 不相邻，则 v_k，v_i 所代表的人均不认识 v_j 所代表的人，这与已知矛盾。

所以，v_k与 v_i，v_j均相邻。
于是，v_i与 v_j都与其余 n-2 个结点相邻
从而 deg（v_i）+ deg（v_j）=n-2+n-2=2n-4
由 n≥3 知 2n-4≥n-1
根据定理可知图 G 中存在哈密顿路，即……
又若 n≥4 则 2n-4≥n，由定理可知，G 中存在哈密回路，即，…
证毕。

30. 可以考虑用数学归纳法，需要注意 Q_n 的构造方式（笛卡尔积）。

第 11 章　习题参考解答

1 有 3 棵
3 9 个度数为 1 的结点
7 提示：注意到，一棵树的任二结点间添加一条边 e1 则得到一条包含边 e1 的回路 C1，如果添加不同于 e1 的另一条边 e2，则得到不同于 C1 的回路 C2，因此，一个连通图中回路的数目是其边数与其生成树边数之差。题中图 G 含有 k 个分图，容易求得所有分图的生成树的边数之和为 n-k, 从而，图 G 中回路数即每个分图中回路数之和为 m-(n-k)=m-n+k.
8 (1) 可以。只需要将 Kruskal 算法的每次选择为权值最大的边即可
(2) 可以。
11 注意到有向图的邻接矩阵表明了结点间边的方向性
12 请模仿例 11.5
14 设 T 的叶子结点数为 t，则根据定理 11.5 知其分支结点数为 t-1，于是有：
T 的结点数 n=i+t=2t-1，故 n 为奇数且 T 的叶子结点数 t=(n+1)/2。(原题漏印“叶子”)
20 将分图加 k-1 条边构成连通图，再应用欧拉公式即可得
22 利用 2m=f1 以及欧拉公式即可得
23 注意到，K5 的一个细分为题图的一个子图
24 分别是 2，2，1