习　题　五

A　组

1．填空题

（1）当方程的个数等于未知数的个数时，$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有惟一解的充分必要条件是______.

解 因为 $R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{A}\,\vdots\,\boldsymbol{b})=n$ 是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有惟一解的充要条件．故由 $R(\boldsymbol{A})=n$ 可得 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$.

（2）线性方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2=a_1, \\ x_2+x_3=a_2, \\ x_3+x_4=a_3, \\ x_4+x_1=a_4 \end{cases}$$

有解的充分必要条件是______.

解 对方程组的增广矩阵施行初等行变换

$$\boldsymbol{B}=\left(\boldsymbol{A}\,\vdots\,\boldsymbol{b}\right)=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & a_2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & a_3 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & a_4 \end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & a_2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & a_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_4-a_1+a_2-a_3 \end{pmatrix}.$$

所以方程组有解的充要条件是 $R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{B})$，即

$$a_4-a_3+a_2-a_1=0.$$

（3）设 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的各行元素之和均为零，且 $R(\boldsymbol{A})=n-1$，则线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的通解为______

.

解 令

$$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

显然 $\boldsymbol{x}$ 满足方程组，又因为 $R(\boldsymbol{A})=n-1$，所以 $n-R(\boldsymbol{A})=1$，即方程组的基础解系中有一个向量，通解为

$$\boldsymbol{x}=k\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix}=k(1,1,\cdots,1)^{\mathrm{T}}\text{，}k\text{ 为任意常数.}$$

（4）设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵，$|\boldsymbol{A}|=0$，且 a_{kj} 的代数余子式 $A_{kj}\neq 0$（其中，$1\leq k\leq n$； $j=1,2,\cdots,n$），则 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的通解______.

解 因为 $|\boldsymbol{A}|=0$，又 $A_{kj}\neq 0$，所以 $R(\boldsymbol{A})=n-1$，并且有

$$a_{i1}A_{k1}+a_{i2}A_{k2}+\cdots+a_{in}A_{kn}=\begin{cases}0, & i\neq k;\\ |\boldsymbol{A}|=0, & i=k.\end{cases}$$

所以 $\left(A_{k1},A_{k2},\cdots,A_{kn}\right)^{\mathrm{T}}$ 是方程组的解，又因为 $R(\boldsymbol{A})=n-1$，可知方程组的通解为

$$\boldsymbol{x}=c\left(A_{k1},A_{k2},\cdots,A_{kn}\right)^{\mathrm{T}},$$

其中 c 为任意常数.

（5）设

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&\cdots&1\\a_1&a_2&\cdots&a_n\\a_1^2&a_2^2&\cdots&a_n^2\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_1^{n-1}&a_2^{n-1}&\cdots&a_n^{n-1}\end{pmatrix},\ \boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\\vdots\\x_n\end{pmatrix},\ \boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix},$$

其中，$a_i\neq a_j\ (i\neq j;\ i,j=1,2,\cdots,n)$，则非齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 的解是 $\boldsymbol{x}=$______.

解 $\boldsymbol{x}=(1,0,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}}$.

（6）设方程 $\begin{pmatrix}a&1&1\\1&a&1\\1&1&a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$ 有无穷多个解，则 $a=$______.

解 $a=-2$.

2．单项选择题

（1）齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}_{3\times 5}\boldsymbol{x}_{5\times 1}=\boldsymbol{0}$ 解的情况是______.

(A) 无解；　　(B) 仅有零解；

(C) 必有非零解；　　(D) 可能有非零解，也可能没有非零解.

答 （C）.

（2）　设 n 元齐次线性方程组的系数矩阵的秩 $R(\boldsymbol{A})=n-3$，且 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3$ 为此方程组的三个线性无关的解，则此方程组的基础解系是______.

(A) $-\boldsymbol{\xi}_1,\ 2\boldsymbol{\xi}_2,\ 3\boldsymbol{\xi}_3+\boldsymbol{\xi}_1-2\boldsymbol{\xi}_2$；　　(B) $\boldsymbol{\xi}_1+\boldsymbol{\xi}_2,\ \boldsymbol{\xi}_2-\boldsymbol{\xi}_3,\ \boldsymbol{\xi}_3+\boldsymbol{\xi}_1$；

(C) $\boldsymbol{\xi}_1-2\boldsymbol{\xi}_2,\ -2\boldsymbol{\xi}_2+\boldsymbol{\xi}_1,\ -3\boldsymbol{\xi}_3+2\boldsymbol{\xi}_2$；　(D) $2\boldsymbol{\xi}_1+4\boldsymbol{\xi}_2,\ -2\boldsymbol{\xi}_2+\boldsymbol{\xi}_3,\ \boldsymbol{\xi}_1+\boldsymbol{\xi}_3$.

答（A）.

（3）要使$\boldsymbol{\xi}_1=(1,0,2)^{\mathrm T}$，$\boldsymbol{\xi}_2=(0,1,-1)^{\mathrm T}$都是线性方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$的解，只要$\boldsymbol{A}$为______.

(A) $(-2\quad 1\quad 1)$；

(B) $\begin{pmatrix}2 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$；

(C) $\begin{pmatrix}-1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}$；

(D) $\begin{pmatrix}0 & 1 & -1\\ 4 & -2 & -2\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$.

答（A）.

（4）已知$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$是$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$的两个不同的解，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$是相应的齐次方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$的基础解系，$k_1,k_2$为任意常数，则$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$的通解是______.

(A) $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)+\dfrac{\boldsymbol{\beta}_1-\boldsymbol{\beta}_2}{2}$；

(B) $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2(\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2)+\dfrac{\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2}{2}$；

(C) $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2(\boldsymbol{\beta}_1-\boldsymbol{\beta}_2)+\dfrac{\boldsymbol{\beta}_1-\boldsymbol{\beta}_2}{2}$；

(D) $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2(\boldsymbol{\beta}_1-\boldsymbol{\beta}_2)+\dfrac{\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2}{2}$.

答（B）.

（5）设n阶矩阵$\boldsymbol{A}$的伴随矩阵$\boldsymbol{A}^*\neq\boldsymbol{0}$ 若$\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3,\boldsymbol{\xi}_4$是非齐次线性方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$的互不相等的解，则对应的齐次线性方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$的基础解系是______.

(A) 不存在；

(B) 仅含一个非零解向量；

(C) 含有两个线性无关的解向量；

(D) 含有三个线性无关的解向量.

答（B）.

（6）设有齐次线性方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$和$\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$，其中$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$均为$m\times n$矩阵，现有4个命题：

① 若$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$的解均是$\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$的解，则$R(\boldsymbol{A})\geq R(\boldsymbol{B})$；

② 若$R(\boldsymbol{A})\geq R(\boldsymbol{B})$，则$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$的解均是$\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$的解；

③ 若$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$与$\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$同解，则$R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{B})$；

④ 若$R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{B})$，则$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$与$\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$同解.

以上命题正确的是______.

（A） ①，②；　（B）①，③；　（C）②，④；　（D）③，④.

答（B）.

（7）设$\boldsymbol{A}$是$m\times n$矩阵，$\boldsymbol{B}$是$n\times m$矩阵，则线性方程组$(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ ______.

（A）当$n>m$时仅有零解；

（B）当$n>m$时必有非零解；

（C）当$m>n$时仅有零解；

（D）当$m>n$时必有非零解.

答（D）.

（8）设$\boldsymbol{A}$是n阶矩阵，$\boldsymbol{\alpha}$是n维列向量. 若秩$\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{\alpha}\\ \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm T} & 0\end{pmatrix}=$秩$(\boldsymbol{A})$，则线性方程组______.

（A） $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\alpha}$必有无穷多解；

（B） $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\alpha}$必有惟一解；

（C） $\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{\alpha}\\ \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm T} & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}\\ y\end{pmatrix}=\boldsymbol{0}$仅有零解；

（D） $\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{\alpha}\\ \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm T} & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}\\ y\end{pmatrix}=\boldsymbol{0}$必有非零解.

答（D）.

3．求下列齐次线性方程组的一个基础解系

(1) $\begin{cases} x_1+\ x_2+2x_3-\ x_4=0, \\ 2x_1+\ x_2+\ x_3-\ x_4=0, \\ 2x_1+2x_2+\ x_3+2x_4=0; \end{cases}$

解 对系数矩阵施行初等行变换，有

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{4}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{4}{3} \end{pmatrix}.$$

与原方程组同解的方程组为

$$\begin{cases} x_1-\frac{4}{3}x_4=0, \\ x_2+\ 3x_4=0, \\ x_3-\frac{4}{3}x_4=0, \end{cases}$$

或写为

$$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}=x_4\begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ -3 \\ \frac{4}{3} \\ 1 \end{pmatrix}=k_1\begin{pmatrix} 4 \\ -9 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix},$$

其中 $k_1=\frac{4}{3}$ 为任意常数．所以，基础解系为

$$\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix} 4 \\ -9 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

(2) $\begin{cases} x_1+\ 2x_2+x_3-\ x_4=0, \\ 3x_1+\ 6x_2-x_3-3x_4=0, \\ 5x_1+10x_2+x_3-5x_4=0; \end{cases}$

解

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 3 & 6 & -1 & -3 \\ 5 & 10 & 1 & -5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

与原方程组同解的方程组为

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \qquad - x_4 = 0, \\ \qquad\qquad x_3 \qquad = 0, \end{cases}$$

或写为

$$\begin{cases} x_1 = -2x_2 + x_4, \\ x_2 = \quad x_2, \\ x_3 = 0, \\ x_4 = \qquad\quad x_4, \end{cases}$$

其中，x_2，x_4 可取任意常数 k_1，k_2，故

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = k_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

所以，基础解系为

$$\boldsymbol{\xi}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{\xi}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(3) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 5x_4 = 0, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 - 7x_4 = 0, \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 + 6x_4 = 0, \\ x_1 - 2x_2 + 4x_3 - 7x_4 = 0; \end{cases}$

解

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & -7 \\ 4 & 1 & -3 & 6 \\ 1 & -2 & 4 & -7 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & 7 \\ 0 & 1 & 21 & -26 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 327 \end{pmatrix},$$

$R(\boldsymbol{A}) = 4 = n$，方程组组只有零解.

(4) $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - 5x_3 + 7x_4 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 0, \\ 4x_1 + 11x_2 - 13x_3 + 16x_4 = 0, \\ 7x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 0. \end{cases}$

解

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3&4&-5&7\\2&-3&3&-2\\4&11&-13&16\\7&-2&1&3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-\frac{3}{17}&\frac{13}{17}\\0&1&-\frac{19}{17}&\frac{20}{17}\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

与原方程组同解的方程组为

$$\begin{cases}x_1\qquad -\dfrac{3}{17}x_3+\dfrac{13}{17}x_4=0,\\ \qquad x_2-\dfrac{19}{17}x_3+\dfrac{20}{17}x_4=0.\end{cases}$$

或写为

$$\begin{cases}x_1=\dfrac{3}{17}x_3-\dfrac{13}{17}x_4,\\ x_2=\dfrac{19}{17}x_3-\dfrac{20}{17}x_4,\\ x_3=\quad x_3,\\ x_4=\qquad\qquad x_4.\end{cases}$$

故

$$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=k_1\begin{pmatrix}3\\19\\17\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}-13\\-20\\0\\17\end{pmatrix}.$$

所以基础解系为

$$\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}3\\19\\17\\0\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix}-13\\-20\\0\\17\end{pmatrix}.$$

4．求解下列非齐次线性方程组．

（1）$\begin{cases}4x_1+2x_2-x_3=2,\\3x_1-x_2+2x_3=10,\\11x_1+3x_2\qquad=8;\end{cases}$

解 对增广矩阵施行初等行变换

$$\boldsymbol{B}=\left(\begin{array}{ccc|c}4&2&-1&2\\3&-1&2&10\\11&3&0&8\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&3&-3&-8\\0&-10&11&34\\0&0&0&-6\end{array}\right),$$

所以$R(\boldsymbol{A})=2,\ R(\boldsymbol{B})=3$．无解．

(2) $\begin{cases} 2x+3y+\ \ z=4, \\ \ \ x-2y+4z=-5, \\ 3x+8y-2z=13, \\ 4x-\ \ y+9z=-6; \end{cases}$

解

$$\boldsymbol{B}=\left(\begin{array}{ccc:c} 2 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & 4 & -5 \\ 3 & 8 & -2 & 13 \\ 4 & -1 & 9 & -6 \end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{B})=2$，所以原方程组有解．与原方程组同解的方程组为

$$\begin{cases} x=-2z-1, \\ y=\quad z+2, \\ z=\quad z. \end{cases}$$

故

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=k\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(3) $\begin{cases} 2x+\ \ y-\ \ z+w=1, \\ 4x+2y-2z+w=2, \\ 2x+\ \ y-\ \ z-w=1; \end{cases}$

解

$$\boldsymbol{B}=\left(\begin{array}{cccc:c} 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & -2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cccc:c} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

$R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{B})=2$，原方程组有解．与原方程组同解的方程组为

$$\begin{cases} x=-\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}z+\frac{1}{2}, \\ y=\quad y, \\ z=\qquad z, \\ w=0. \end{cases}$$

所以原方程组的通解为

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = y\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = k_1\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(4) $\begin{cases} 2x+y-z+w=1, \\ 3x-2y+z-3w=4, \\ x+4y-3z+5w=-2. \end{cases}$

解

$$\boldsymbol{B} = \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 1 & -3 & 4 \\ 1 & 4 & -3 & 5 & -2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -\frac{1}{7} & -\frac{1}{7} & \frac{6}{7} \\ 0 & 1 & -\frac{5}{7} & \frac{9}{7} & -\frac{5}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

$R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{B})=2$，原方程组有解．与原方程组同解的方程组为

$$\begin{cases} x = \frac{1}{7}z + \frac{1}{7}w + \frac{6}{7}, \\ y = \frac{5}{7}z - \frac{9}{7}w - \frac{5}{7}, \\ z = z, \\ w = w. \end{cases}$$

故通解为

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = k_1\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2\begin{pmatrix} 1 \\ -9 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{6}{7} \\ -\frac{5}{7} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

5．问 λ 取何值时，非齐次线性方程组

$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = \lambda, \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = \lambda^2 \end{cases}$$

(1)有惟一解；(2)无解；(3)有无穷个解？

解 系数行列式

$$D=\begin{vmatrix}\lambda & 1 & 1\\ 1 & \lambda & 1\\ 1 & 1 & \lambda\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda+2).$$

当 $\lambda\neq 1$ 且 $\lambda\neq -2$ 时 $D\neq 0$，方程组有惟一解.

当 $\lambda=1$ 时，对增广矩阵施行初等行变换

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

则 $R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{B})=1<3$，故原方程组有解且有无穷多解.

当 $\lambda=-2$ 时，对增广矩阵施行初等行变换

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 1 & 1\\ 1 & -2 & 1 & -2\\ 1 & 1 & -2 & 4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 1 & -2 & 4\\ 1 & -2 & 1 & -2\\ -2 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1 & 1 & -2 & 4\\ 0 & -3 & 3 & -6\\ 0 & 3 & -3 & 9\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 1 & -2 & 4\\ 0 & -3 & 3 & -6\\ 0 & 0 & 0 & 3\end{pmatrix},$$

$R(\boldsymbol{A})=2,\ R(\boldsymbol{B})=3$. 所以方程组无解.

6．非齐次线性方程组

$$\begin{cases}-2x_1+x_2+x_3=-2,\\ x_1-2x_2+x_3=\lambda,\\ x_1+x_2-2x_3=\lambda^2\end{cases}$$

当λ取何值时有解？并求出它的全部解.

解 对增广矩阵施行初等行变换，得

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 1 & -2\\ 1 & -2 & 1 & \lambda\\ 1 & 1 & -2 & \lambda^2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 1 & -2 & \lambda^2\\ 0 & -3 & 3 & \lambda(1-\lambda)\\ 0 & 0 & 0 & (\lambda-1)(\lambda+2)\end{pmatrix},$$

当 $\lambda\neq 1$ 且 $\lambda\neq -2$ 时，$R(\boldsymbol{A})=2,\ R(\boldsymbol{B})=3$ 方程组无解.

当 $\lambda=1$ 时，有

$$\boldsymbol{B}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & 1\\ 0 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{B})=2$，方程组有解，且与原方程组同解的方程组为

$$\begin{cases} x_1 = x_3 + 1, \\ x_2 = x_3 + 0, \\ x_3 = x_3. \end{cases}$$

故原方程组的解为

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = k_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

当 $\lambda = -2$ 时，有

$$\boldsymbol{B} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

与原方程组同解的方程组为

$$\begin{cases} x_1 = x_3 + 2, \\ x_2 = x_3 + 2, \\ x_3 = x_3. \end{cases}$$

故方程组的解为

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

7．设 $\begin{cases} (2-\lambda)x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 1, \\ 2x_1 + (5-\lambda)x_2 - 4x_3 = 2, \\ -2x_1 - 4x_2 + (5-\lambda)x_3 = -\lambda - 1, \end{cases}$ 问λ为何值时，此方程组有惟一解、无解或有无穷多解？并在有无穷多解时求出其通解.

解 系数行列式

$$D = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 & -2 \\ 2 & 5-\lambda & -4 \\ -2 & -4 & 5-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda-1)^2(\lambda-10).$$

当 $\lambda \neq 1$ 且 $\lambda \neq 10$ 时，方程组有惟一解.

当 $\lambda = 1$ 时，有

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 2 & 4 & -4 & 2 \\ -2 & -4 & 4 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$R(\boldsymbol{A}) = R(\boldsymbol{B}) = 1$，方程组有无穷多解，此时

$$x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 1$$

通解为

$$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=k_1\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}.$$

当$\lambda=10$时，有

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}-8&2&-2&1\\2&-5&-4&2\\-2&-4&-5&-11\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}2&-5&-4&2\\0&1&1&1\\0&0&0&-3\end{pmatrix},$$

$R(\boldsymbol{A})=2,\ R(\boldsymbol{B})=3$，故方程组无解.

8．问a,b为何值时，非齐次线性方程组

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3+x_4=0,\\ x_2+2x_3+2x_4=1,\\ -x_2+(a-3)x_3-2x_4=b,\\ 3x_1+2x_2+x_3+ax_4=-1\end{cases}$$

(1) 有惟一解，求出惟一解；(2) 无解；(3) 有无穷多解，并写出通解.

解 方程组的增广矩阵

$$\boldsymbol{B}=\left(\begin{array}{cccc:c}1&1&1&1&0\\0&1&2&2&1\\0&-1&a-3&-2&b\\3&2&1&a&-1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cccc:c}1&1&1&1&0\\0&1&2&2&1\\0&0&a-1&0&b+1\\0&0&0&a-1&0\end{array}\right).$$

当$a\neq1$时，$R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{B})=4$，方程组有惟一解．此时

$$\boldsymbol{B}\to\left(\begin{array}{cccc:c}1&0&0&0&\dfrac{-a+b+2}{a-1}\\0&1&0&0&\dfrac{a-2b-3}{a-1}\\0&0&1&0&\dfrac{b+1}{a-1}\\0&0&0&1&0\end{array}\right).$$

所以，$x_1=\dfrac{-a+b-2}{a-1},\ x_2=\dfrac{a-2b+3}{a-1},\ x_3=\dfrac{b+1}{a-1},\ x_4=0$.

当$a=1$时，有

$$\boldsymbol{B}\to\left(\begin{array}{cccc:c}1&1&1&1&0\\0&1&2&2&1\\0&0&0&0&b+1\\0&0&0&0&0\end{array}\right),$$

所以，当$a=1$且$b\neq-1$时，$R(\boldsymbol{A})=2$，$R(\boldsymbol{B})=3$，方程组无解.

而当$a=1$且$b=-1$时，有

$$B\rightarrow\left(\begin{array}{cccc:c}1&0&-1&-1&-1\\0&1&2&2&1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{array}\right),$$

$R(A)=R(B)=2$，方程组有解，且与原方程组同解的方程组为

$$\begin{cases}x_1-x_3-x_4=-1,\\x_2+2x_3+2x_4=1,\end{cases}$$

或写为

$$\begin{cases}x_1=x_3+x_4-1,\\x_2=-2x_3-2x_4+1,\\x_3=x_3,\\x_4=x_4.\end{cases}$$

故原方程组的通解为

$$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=k_1\begin{pmatrix}1\\-2\\1\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}1\\-2\\0\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\0\end{pmatrix},$$

其中k_1，k_2为任意实数．

9．设四元非齐次线性方程组的系数矩阵的秩为3，已知$\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3$是它的三个解向量，且

$$\boldsymbol{\eta}_1=\begin{pmatrix}2\\3\\4\\5\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\eta}_2+\boldsymbol{\eta}_3=\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix},$$

求该方程组的通解．

解　$n=4,\ r=R(A)=3$，所以$n-r=1$，令

$$\boldsymbol{\xi}_1=2\boldsymbol{\eta}_1-(\boldsymbol{\eta}_1+\boldsymbol{\eta}_2)=\begin{pmatrix}4\\6\\8\\10\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\4\\5\\6\end{pmatrix},$$

则$\boldsymbol{\xi}_1$为基础解系，故方程组的通解为

$$x = k\xi_1 + \eta_1 = k\begin{pmatrix}3\\4\\5\\6\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2\\3\\4\\5\end{pmatrix},$$

其中k可取任意常数.

10. 设A, B都是n阶方阵，且$AB = 0$．证明

$$R(A) + R(B) \le n.$$

证明 设$B = (b_1, b_2, \cdots, b_n)$，则有

$$Ab_j = 0 \ \ (j = 1, 2, \cdots, n).$$

可见每个b_j都是$Ax = 0$的解向量．因$R(A) = r$，可知$Ax = 0$的解空间的维数是$n - r$，所以向量组

$b_1, b_2, \cdots, b_n$的秩小于等于$n - r$，从而$R(B) \le n - r$，于是$R(A) + R(B) \le r + (n - r) = n$.

11．已知非齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -1 \\ 4x_1 + 3x_2 + 5x_3 - x_4 = -1 \\ ax_1 + x_2 + 3x_3 + bx_4 = 1 \end{cases}$$

有3个线性无关的解.

（1）证明方程组的系数矩阵A的秩$R(A) = 2$；

（2）求a, b的值及方程组的通解.

解 （1） 设$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$是方程组$Ax = \beta$的3个线性无关的解，其中

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 5 & -1 \\ a & 1 & 3 & b \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

则有$A(\alpha_1 - \alpha_2) = 0, A(\alpha_1 - \alpha_3) = 0$，即$\alpha_1 - \alpha_2, \alpha_1 - \alpha_3$是对应齐次线性方程组$Ax = 0$的解，且线性无关.（否则，易推出$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$线性相关，矛盾）.

所以$n - R(A) \ge 2$，即$4 - R(A) \ge 2 \Rightarrow R(A) \le 2$．又矩阵$A$中有一个2阶子式$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = -1 \ne 0$，所以$R(A) \ge 2$．因此$R(A) = 2$.

（2） 因为

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 5 & -1 \\ a & 1 & 3 & b \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -5 \\ 0 & 1-a & 3-a & b-a \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 4-2a & b+4a-5 \end{pmatrix}$$

又$R(A) = 2$，则

$$\begin{cases} 4 - 2a = 0, \\ b + 4a - 5 = 0 \end{cases}, \Rightarrow \begin{cases} a = 2, \\ b = -3. \end{cases}$$

对原方程组的增广矩阵施行初等行变换，

$$B=\begin{pmatrix}1&1&1&1&-1\\4&3&5&-1&-1\\2&1&3&-3&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&2&-4&2\\0&1&-1&5&-3\\0&0&0&0&0\end{pmatrix},$$

故原方程组与下面的方程组同解

$$\begin{cases}x_1=-2x_3+4x_4+2\\x_2=x_3-5x_4-3\end{cases}.$$

选 x_3,x_4 为自由变量，则

$$\begin{cases}x_1=-2x_3+4x_4+2\\x_2=x_3-5x_4-3\\x_3=x_3\\x_4=x_4\end{cases}.$$

故所求通解为

$$\boldsymbol{x}=k_1\begin{pmatrix}-2\\1\\1\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}4\\-5\\0\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\-3\\0\\0\end{pmatrix}，k_1,k_2 \text{ 为任意常数}.$$

12．已知三阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第一行是 $\begin{pmatrix}a & b & c\end{pmatrix}$，$a,b,c$ 不全为零，矩阵 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&4&6\\3&6&k\end{pmatrix}$（$k$ 为常数），且 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{0}$，求线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的通解.

解　由于 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{0}$，故 $R(\boldsymbol{A})+R(\boldsymbol{B})\le 3$，又由 a,b,c 不全为零，可知 $R(\boldsymbol{A})\ge 1$.

当 $k\ne 9$ 时，$R(\boldsymbol{B})=2$，于是 $R(\boldsymbol{A})=1$；

当 $k=9$ 时，$R(\boldsymbol{B})=1$，于是 $R(\boldsymbol{A})=1$ 或 $R(\boldsymbol{A})=2$.

① 对于 $k\ne 9$，由 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{0}$ 可得

$$\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}=\boldsymbol{0} \text{ 和 } \boldsymbol{A}\begin{pmatrix}3\\6\\k\end{pmatrix}=\boldsymbol{0}.$$

由于 $\boldsymbol{\eta}_1=(1,2,3)^{\mathrm T},\boldsymbol{\eta}_2=(3,6,k)^{\mathrm T}$ 线性无关，故 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2$ 为 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系，于是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的通解为 $\boldsymbol{x}=c_1\boldsymbol{\eta}_1+c_2\boldsymbol{\eta}_2$，其中 c_1,c_2 为任意常数.

② 对于 $k=9$，分别就 $R(\boldsymbol{A})=2$ 和 $R(\boldsymbol{A})=1$ 进行讨论.

如果 $R(\boldsymbol{A})=2$，则 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系由一个向量构成.　又因为 $\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}=\boldsymbol{0}$，所以 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的通解为 $\boldsymbol{x}=c_1(1,2,3)^{\mathrm T}$，其中 c_1 为任意常数.

如果 $R(\boldsymbol{A})=1$，则 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系由两个向量构成.　又因为 $\boldsymbol{A}$ 的第1行是 (a,b,c)，且 a,b,c 不全为零，所以 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 等价于 $ax_1+bx_2+cx_3=0$.　不妨设 $a\ne 0$，$\boldsymbol{\eta}_1=(-b,a,0)^{\mathrm T},\boldsymbol{\eta}_2=(-c,0,a)^{\mathrm T}$ 是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的两个线性无关的解，故 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的通解为 $\boldsymbol{x}=c_1\boldsymbol{\eta}_1+c_2\boldsymbol{\eta}_2$，其中 c_1,c_2 为任意常数.

13．确定常数 a，使向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,a)^{\mathrm T}$, $\boldsymbol{\alpha}_2=(1,a,1)^{\mathrm T}$, $\boldsymbol{\alpha}_3=(a,1,1)^{\mathrm T}$ 可由向量组 $\boldsymbol{\beta}_1=(1,1,a)^{\mathrm T}$，$\boldsymbol{\beta}_2=(-2,a,4)^{\mathrm T}$，$\boldsymbol{\beta}_3=(-2,a,a)^{\mathrm T}$ 线性表示，但向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 不能由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示.

解 对矩阵 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\beta}_1,\ \boldsymbol{\beta}_2,\ \boldsymbol{\beta}_3 \vdots \boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2,\ \boldsymbol{\alpha}_3)$ 作初等行变换，有

$$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3 \vdots \boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&-2&-2&1&1&a\\1&a&a&1&a&1\\a&4&a&a&1&1\end{array}\right)$$

$$\to\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&-2&-2&1&1&a\\0&a+2&a+2&0&a-1&0\\0&0&a-4&0&3(1-a)&1-a\end{array}\right),$$

当 $a=-2$ 时，

$$\boldsymbol{B}\to\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&-2&-2&1&1&-2\\0&0&0&0&-3&0\\0&0&-6&0&3&3\end{array}\right),$$

显然 $\boldsymbol{\alpha}_2$ 不能由 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 线性表示，因此 $a\neq-2$；

当 $a=4$ 时，

$$\boldsymbol{B}\to\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&-2&-2&1&1&4\\0&6&6&0&3&0\\0&0&0&0&-9&-3\end{array}\right),$$

显然 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 均不能由 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 线性表示，因此 $a\neq4$．

而当 $a\neq-2$ 且 $a\neq4$ 时，秩 $R(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=3$，此时向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 可由向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 线性表示．又

$$\boldsymbol{C}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2,\ \boldsymbol{\alpha}_3 \vdots \boldsymbol{\beta}_1,\ \boldsymbol{\beta}_2,\ \boldsymbol{\beta}_3)=\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&1&a&1&-2&-2\\1&a&1&1&a&a\\a&1&1&a&4&a\end{array}\right)$$

$$\to\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&1&a&1&-2&-2\\0&a-1&1-a&0&a+2&a+2\\0&1-a&1-a^2&0&4+2a&3a\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&1&a&1&-2&-2\\0&a-1&1-a&0&a+2&a+2\\0&0&2-a-a^2&0&6+3a&4a+2\end{array}\right),$$

由题设向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 不能由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示，必有 $a-1=0$ 或 $2-a-a^2=0$，即 $a=1$ 或 $a=-2$．

综上所述，满足题设条件的只能是 $a=1$．

14．已知齐次线性方程组

（Ⅰ）$\begin{cases}x_1+2x_2+3x_3=0,\\2x_1+3x_2+5x_3=0,\\x_1+x_2+ax_3=0,\end{cases}$ （Ⅱ）$\begin{cases}x_1+bx_2+cx_3=0,\\2x_1+b^2x_2+(c+1)x_3=0,\end{cases}$

同解，求 a,b,c 的值．

解 方程组（Ⅱ）的未知量个数大于方程个数，故方程组（Ⅱ）有无穷多解．因为方程组（Ⅰ）与（Ⅱ）同解，所以方程组（Ⅰ）的系数矩阵的秩小于3．

对方程组（Ⅰ）的系数矩阵施以初等行变换

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&5\\1&1&a\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&0&a-2\end{pmatrix},$$

从而 $a=2$．此时，方程组（Ⅰ）的系数矩阵可化为

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&5\\1&1&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix},$$

故$(-1,-1,1)^{\mathrm{T}}$是方程组（Ⅰ）的一个基础解系.

将$x_1=-1,x_2=-1,x_3=1$代入方程组（Ⅱ）可得

$$b=1,c=2\ \text{或}\ b=0,c=1.$$

当$b=1,c=2$时，对方程组（Ⅱ）的系数矩阵施以初等行变换，有

$$\begin{pmatrix}1&1&2\\2&1&3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\end{pmatrix},$$

显然此时方程组（Ⅰ）与（Ⅱ）同解.

当$b=0,c=1$时，对方程组（Ⅱ）的系数矩阵施以初等行变换，有

$$\begin{pmatrix}1&0&1\\2&0&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1\\0&0&0\end{pmatrix},$$

显然此时方程组（Ⅰ）与（Ⅱ）的解不相同.

综上所述，当$a=2,b=1,c=2$时，方程组（Ⅰ）与（Ⅱ）同解.

15．设有齐次线性方程组

$$\begin{cases}(1+a)x_1+x_2+\cdots+x_n=0,\\2x_1+(2+a)x_2+\cdots+2x_n=0,\\\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\nx_1+nx_2+\cdots+(n+a)x_n=0,\end{cases}\qquad(n\geq 2)$$

试问a取何值时，该方程组有非零解，并求出其通解.

解　对方程组的系数矩阵$\boldsymbol{A}$作初等行变换，有

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1+a&1&1&\cdots&1\\2&2+a&2&\cdots&2\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\n&n&n&\cdots&n+a\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1+a&1&1&\cdots&1\\-2a&a&0&\cdots&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\-na&0&0&\cdots&a\end{pmatrix}=\boldsymbol{B}.$$

当$a=0$时，$R(\boldsymbol{A})=1<n$，故方程组有非零解，其同解方程组为

$$x_1+x_2+\cdots+x_n=0,$$

由此得基础解系为

$$\boldsymbol{\eta}_1=(-1,1,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{\eta}_2=(-1,0,1,\cdots,0)^{\mathrm{T}},\cdots,\boldsymbol{\eta}_{n-1}=(-1,0,0,\cdots,1)^{\mathrm{T}},$$

于是方程组的通解为

$$x=k_1\boldsymbol{\eta}_1+\cdots+k_{n-1}\boldsymbol{\eta}_{n-1},$$

其中$k_1,\cdots,k_{n-1}$为任意常数.

当$a\neq 0$时，对矩阵$\boldsymbol{B}$作初等行变换，有

$$\boldsymbol{B}\to\begin{pmatrix}1+a&1&1&\cdots&1\\-2&1&0&\cdots&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\-n&0&0&\cdots&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}a+\dfrac{n(n+1)}{2}&0&0&\cdots&0\\-2&1&0&\cdots&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\-n&0&0&\cdots&1\end{pmatrix}.$$

可知$a=-\dfrac{n(n+1)}{2}$时，$R(\boldsymbol{A})=n-1<n$，故方程组也有非零解，其同解方程组为

$$\begin{cases}-2x_1+x_2=0,\\-3x_1+x_3=0,\\\quad\cdots\cdots\cdots\\-nx_1+x_n=0,\end{cases}$$

由此得基础解系为

$$\boldsymbol{\eta}=(1,2,\cdots,n)^{\mathrm{T}},$$

于是方程组的通解为

$$\boldsymbol{x}=k\boldsymbol{\eta}，其中 k 为任意常数.$$

16．设$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,0)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(1,a+2,-3a)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(-1,-b-2,a+2b)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\beta}=(1,3,-3)^{\mathrm{T}}$，试讨论当$a,b$为何值时，

(1) $\boldsymbol{\beta}$不能由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性表示；

(2) $\boldsymbol{\beta}$可由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$惟一地线性表示，并求出表示式；

(3) $\boldsymbol{\beta}$可由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性表示，但表示式不惟一，并求出表示式.

解　设有数k_1,k_2,k_3，使得

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\beta}.$$

记$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$．对矩阵$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{\beta})$施以初等行变换，有

$$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{\beta})=\begin{pmatrix}1&1&-1&1\\2&a+2&-b-2&3\\0&-3a&a+2b&-3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&-1&1\\0&a&-b&1\\0&0&a-b&0\end{pmatrix}.$$

（1）　当$a=0$时，有

$$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{\beta})\to\begin{pmatrix}1&1&-1&1\\0&0&-b&1\\0&0&0&-1\end{pmatrix}.$$

可知$R(\boldsymbol{A})\neq R(\boldsymbol{A},\boldsymbol{\beta})$．　故方程组无解，$\boldsymbol{\beta}$不能由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性表示.

（2）　当$a\neq0$，且$a\neq b$时，有

$$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{\beta})\to\begin{pmatrix}1&1&-1&1\\0&a&-b&1\\0&0&a-b&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&1-\frac{1}{a}\\0&1&0&\frac{1}{a}\\0&0&1&0\end{pmatrix}$$

$R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{A},\boldsymbol{\beta})=3$，方程组有惟一解：

$$k_1=1-\frac{1}{a},\quad k_2=\frac{1}{a},\quad k_3=0.$$

此时$\boldsymbol{\beta}$可由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$惟一地线性表示，其表示式为

$$\boldsymbol{\beta}=(1-\frac{1}{a})\boldsymbol{\alpha}_1+\frac{1}{a}\boldsymbol{\alpha}_2.$$

（3）　当$a=b\neq0$时，对矩阵$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{\beta})$施以初等行变换，有

$$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{\beta}) \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & a & -b & 1 \\ 0 & 0 & a-b & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1-\dfrac{1}{a} \\ 0 & 1 & -1 & \dfrac{1}{a} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$R(\boldsymbol{A}) = R(\boldsymbol{A},\boldsymbol{\beta}) = 2$，方程组有无穷多解，其全部解为

$$k_1 = 1-\frac{1}{a},\quad k_2 = \frac{1}{a}+c,\quad k_3 = c，\quad \text{其中 } c \text{ 为任意常数.}$$

$\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示, 但表示式不惟一，其表示式为

$$\boldsymbol{\beta} = (1-\frac{1}{a})\boldsymbol{\alpha}_1 + (\frac{1}{a}+c)\boldsymbol{\alpha}_2 + c\boldsymbol{\alpha}_3 .$$

17．设线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + \lambda x_2 + \mu x_3 + x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 0, \\ 3x_1 + (2+\lambda)x_2 + (4+\mu)x_3 + 4x_4 = 1, \end{cases}$$

已知 $(1,-1,1,-1)^{\mathrm{T}}$ 是该方程组的一个解，试求

（1） 方程组的全部解，并用对应的齐次线性方程组的基础解系表示全部解；

（2） 该方程组满足 $x_2 = x_3$ 的全部解.

解 将 $(1,-1,1,-1)^{\mathrm{T}}$ 代入方程组，得 $\lambda = \mu$．对方程组的增广矩阵 $\boldsymbol{B}$ 施以初等行变换, 得

$$\boldsymbol{B} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & \lambda & \lambda & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2+\lambda & 4+\lambda & 4 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2\lambda & 1-\lambda & -\lambda \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2(2\lambda-1) & 2\lambda-1 & 2\lambda-1 \end{array}\right),$$

（1） 当 $\lambda \neq \dfrac{1}{2}$ 时，有

$$\boldsymbol{B} \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\dfrac{1}{2} & -\dfrac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2} \end{array}\right),$$

$R(\boldsymbol{A}) = R(\boldsymbol{B}) = 3 < 4$，故方程组有无穷多解，且 $\boldsymbol{\xi}_0 = (0,-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2},0)^{\mathrm{T}}$ 为其一个特解，对应的齐次线性方程组的基础解系为 $\boldsymbol{\eta} = (-2,1,-1,2)^{\mathrm{T}}$，故方程组的全部解为

$$\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\xi}_0 + k\boldsymbol{\eta} = (0,-\frac{1}{2},\frac{1}{2},0)^{\mathrm{T}} + k(-2,1,-1,2)^{\mathrm{T}} \qquad (k \text{ 为任意常数}).$$

当 $\lambda = \dfrac{1}{2}$ 时，有

$$\boldsymbol{B} \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & \dfrac{1}{2} & -\dfrac{1}{2} \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

$R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{B})=2<4$，故方程组有无穷多解，且$\boldsymbol{\xi}_0=(-\frac{1}{2},1,0,0)^{\mathrm{T}}$为其一个特解，对应的齐次线性方程组的基础解系为 $\boldsymbol{\eta}_1=(1,-3,1,0)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\eta}_2=(-1,-2,0,2)^{\mathrm{T}}$，故方程组的全部解为

$$\boldsymbol{\xi}=\boldsymbol{\xi}_0+k_1\boldsymbol{\eta}_1+k_2\boldsymbol{\eta}_2=(-\frac{1}{2},1,0,0)^{\mathrm{T}}+k_1(1,-3,1,0)^{\mathrm{T}}+k_2(-1,-2,0,2)^{\mathrm{T}}$$

(k_1,k_2为任意常数).

（2） 当$\lambda\neq\frac{1}{2}$时，由于$x_2=x_3$，即

$$-\frac{1}{2}+k=\frac{1}{2}-k,$$

解得$k=\frac{1}{2}$，故方程组的解为

$$\boldsymbol{\xi}=(1,-\frac{1}{2},\frac{1}{2},0)^{\mathrm{T}}+\frac{1}{2}(-2,1,-1,2)^{\mathrm{T}}=(-1,0,0,1)^{\mathrm{T}}\ .$$

当$\lambda=\frac{1}{2}$时，由于$x_2=x_3$，即$1-3k_1-2k_2=k_1$，解得

$$k_1=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}k_2,$$

故方程组的全部解为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\xi}&=(-\frac{1}{2},1,0,0)^{\mathrm{T}}+(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}k_2)(1,-3,1,0)^{\mathrm{T}}+k_2(-1,-2,0,2)^{\mathrm{T}}\\&=(-\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4},0)^{\mathrm{T}}+k_2(-\frac{3}{2},-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},2)^{\mathrm{T}}\end{aligned}$$

其中k_2为任意常数.

18．已知平面上三条不同直线的方程分别为

$$\begin{cases}l_1: ax+2by+3c=0,\\ l_2: bx+2cy+3a=0,\\ l_3: cx+2ay+3b=0.\end{cases}$$

试证这三条直线交于一点的充分必要条件为$a+b+c=0$.

解 必要性．设三条直线l_1,l_2,l_3交于一点，则线性方程组

$$\begin{cases}ax+2by=-3c,\\ bx+2cy=-3a,\\ cx+2ay=-3b\end{cases}$$

有惟一解，故系数矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a&2b\\b&2c\\c&2a\end{pmatrix}$与增广矩阵$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}a&2b&-3c\\b&2c&-3a\\c&2a&-3b\end{pmatrix}$的秩均为 2，于是$|\boldsymbol{B}|=0$．由于

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{B}|&=\begin{vmatrix}a&2b&-3c\\b&2c&-3a\\c&2a&-3b\end{vmatrix}=6(a+b+c)[a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc]\\&=3(a+b+c)[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2],\end{aligned}$$

但根据题设$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\neq0$，故

$$a+b+c=0.$$

充分性．由$a+b+c=0$，则从必要性的证明可知，$|\boldsymbol{B}|=0$，故秩$(\boldsymbol{B})<3$．由于

$$\begin{vmatrix} a & 2b \\ b & 2c \end{vmatrix} = 2(ac-b^2) = -2[a(a+b)+b^2] = -2[(a+\frac{1}{2}b)^2+\frac{3}{4}b^2] \neq 0,$$

故秩$(\boldsymbol{B})=2$．于是，秩$(\boldsymbol{A})=$秩$(\boldsymbol{B})=2$．因此方程组有惟一解，即三直线l_1,l_2,l_3交于一点．

*19．求方程组

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 = -1, \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 2, \end{cases}$$

的最小二乘解．

解 方程组的系数矩阵和常数项矩阵为

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

记

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},$$

则方程组的正规方程 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}$ 为

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 2 & 6 & 8 \\ 6 & 8 & 18 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix},$$

解之得

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3/5 \\ -4/5 \\ 1 \end{pmatrix},$$

因此，方程组的最小二乘解为

$$x_1 = -\frac{3}{5}, x_2 = -\frac{4}{5}, x_3 = 1.$$

*20．当外加电压E（单位：V）分别为 5，8，10，12 时，测得电源中对应的电流I（单位：A）分别为 4，6，8，9，试根据公式$E = E_0 + R_0 I$确定电源内阻R_0与电源的端电势E_0．

解 根据公式$E = E_0 + R_0 I$，把测得的数据代入方程，得

$$\begin{cases} E_0 + 4R_0 = 5, \\ E_0 + 6R_0 = 8, \\ E_0 + 8R_0 = 10, \\ E_0 + 9R_0 = 12. \end{cases}$$

该方程组的系数矩阵和常数项矩阵为

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 4\\1 & 6\\1 & 8\\1 & 9\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}5\\8\\10\\12\end{pmatrix},$$

记

$$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}E_0\\R_0\end{pmatrix},$$

则方程组的正规方程 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}$ 为

$$\begin{pmatrix}4 & 27\\27 & 197\end{pmatrix}\begin{pmatrix}E_0\\R_0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}35\\256\end{pmatrix},$$

解之得

$$\begin{pmatrix}E_0\\R_0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-17/59\\79/59\end{pmatrix},$$

即

$$E_0\approx -0.288(V),\ R_0\approx 1.339(\Omega)\text{。}$$

B　组

1．设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵，$\boldsymbol{E}$ 是 n 阶单位矩阵，证明

（1）若 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$，则 $R(\boldsymbol{A})+R(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})=n$；

（2）若 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{E}$，则 $R(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})+R(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})=n$．

证明　(1) 因为 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})=\boldsymbol{0}$，所以

$$R(\boldsymbol{A})+R(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\le n.$$

另一方面，

$$R(\boldsymbol{A})+R(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})=R(\boldsymbol{A})+R(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\ge R(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{E})=n.$$

两式综合即得结论．

(2) 因为 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})=\boldsymbol{0}$，所以

$$R(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})+R(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\le n.$$

另一方面，

$$R(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})+R(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})=R(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})+R(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\ge R(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}+\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=R(2\boldsymbol{E})=n.$$

两式综合即得结论．

2．设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵，$\boldsymbol{A}^*$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵，证明

$$R(\boldsymbol{A}^*)=\begin{cases} n, & R(\boldsymbol{A})=n; \\ 1, & R(\boldsymbol{A})=n-1; \\ 0, & R(\boldsymbol{A})<n-1. \end{cases}$$

证明　若 $R(\boldsymbol{A})=n$，则 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$．由 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$ 知，$|\boldsymbol{A}^*|\neq 0$，即 $R(\boldsymbol{A}^*)=n$

若 $R(\boldsymbol{A})=n-1$，则 $|\boldsymbol{A}|=0$，于是有 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}=\boldsymbol{0}$．因此，

$R(\boldsymbol{A})+R(\boldsymbol{A}^*)\le n$，$R(\boldsymbol{A}^*)\le 1$．但 $R(\boldsymbol{A})=n-1$，$\boldsymbol{A}$ 至少有一个 $n-1$ 阶子式非零，$\boldsymbol{A}^*$ 中至少有一元素非零，于是 $R(\boldsymbol{A}^*)\ge 1$，故 $R(\boldsymbol{A}^*)=1$．

若 $R(\boldsymbol{A})<n-1$，则 $\boldsymbol{A}$ 的所有 $n-1$ 阶子式均为零，从而 $\boldsymbol{A}^*=\boldsymbol{0}$，故 $R(\boldsymbol{A}^*)=0$．

3．设 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩 $R(\boldsymbol{A})=n-1$，证明存在常数 k，使得 $(\boldsymbol{A}^*)^2=k\boldsymbol{A}^*$．

证明　已知 $r=R(\boldsymbol{A})=n-1$，所以 $n-r=1$，即 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系有一个线性无关的解向量 $\boldsymbol{\xi}_1$．又因为 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|E=\boldsymbol{0}$，故矩阵 $\boldsymbol{A}^*=(\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{a}_n)$ 的列向量组 $\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{a}_n$ 的秩不大于 1，则有

$$\boldsymbol{A}^*=(k_1\boldsymbol{\xi},\ k_2\boldsymbol{\xi},\ \cdots,\ k_n\boldsymbol{\xi})=\boldsymbol{\xi}(k_1,\ k_2,\ \cdots,\ k_n).$$

其中 k_1，k_2，$\cdots$，k_n，为任意常数．假设

$$\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix},$$

则

$$(\boldsymbol{A}^*)^2=\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}^*=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}(k_1,\ k_2,\ \cdots,\ k_n)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}(k_1,\ k_2,\ \cdots,\ k_n)$$

$$=\sum_{i=1}^{n}k_ix_i\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}(k_1,\ k_2,\ \cdots,\ k_n)=k\boldsymbol{A}^*$$

其中$k=\sum_{i=1}^{n}k_ix_i$.

4．已知线性方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1(2n)}x_{2n}=0,\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2(2n)}x_{2n}=0,\\\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{n(2n)}x_{2n}=0\end{cases}$$

的一个基础解系为

$$\begin{pmatrix}b_{11}\\b_{12}\\\vdots\\b_{1(2n)}\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}b_{21}\\b_{22}\\\vdots\\b_{2(2n)}\end{pmatrix},\ \cdots,\ \begin{pmatrix}b_{n1}\\b_{n2}\\\vdots\\b_{n(2n)}\end{pmatrix},$$

写出方程组

$$\begin{cases}b_{11}x_1+b_{12}x_2+\cdots+b_{1(2n)}x_{2n}=0,\\b_{21}x_1+b_{22}x_2+\cdots+b_{2(2n)}x_{2n}=0,\\\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\b_{n1}x_1+b_{n2}x_2+\cdots+b_{n(2n)}x_{2n}=0\end{cases}$$

的通解，并说明理由.

解 设

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1(2n)}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2(2n)}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{n(2n)}\end{pmatrix},$$

又令

$$\boldsymbol{b}_1=\begin{pmatrix} b_{11}\\ b_{12}\\ \vdots\\ b_{1(2n)} \end{pmatrix},\ \boldsymbol{b}_2=\begin{pmatrix} b_{21}\\ b_{22}\\ \vdots\\ b_{2(2n)} \end{pmatrix},\ \cdots,\ \boldsymbol{b}_n=\begin{pmatrix} b_{n1}\\ b_{n2}\\ \vdots\\ b_{n(2n)} \end{pmatrix},$$

因为$\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{b}_n$是$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$的基础解系，所以，$\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{b}_n$线性无关，且有$2n-R(\boldsymbol{A})=n$，即

$R(\boldsymbol{A})=n$．又设

$$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\cdots,\boldsymbol{b}_n),$$

则有$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{0}$，得 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{0}$，即

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1(2n)}\\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2(2n)}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{n(2n)} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1}\\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{1(2n)} & a_{2(2n)} & \cdots & a_{n(2n)} \end{pmatrix}=\boldsymbol{0}.$$

令

$$\boldsymbol{a}_1=\begin{pmatrix} a_{11}\\ a_{12}\\ \vdots\\ a_{1(2n)} \end{pmatrix},\ \boldsymbol{a}_2=\begin{pmatrix} a_{21}\\ a_{22}\\ \vdots\\ a_{2(2n)} \end{pmatrix},\ \cdots,\ \boldsymbol{a}_n=\begin{pmatrix} a_{n1}\\ a_{n2}\\ \vdots\\ a_{n(2n)} \end{pmatrix},$$

因为$R(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})=R(\boldsymbol{A})=n$，所以$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$线性无关，且都是$\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$的解．又因为

$2n-R(\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}})=2n-R(\boldsymbol{B})=2n-n=n$，可知$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$是$\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$的基础解系．

5．齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 \ +a_{12}x_2+\cdots \ +a_{1n}x_n=0,\\ a_{21}x_1 \ +a_{22}x_2+\cdots \ +a_{2n}x_n=0,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ a_{(n-1)1}x_1+a_{(n-1)2}x_2+\cdots+a_{(n-1)n}x_n=0 \end{cases}$$

的系数矩阵为

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{(n-1)1} & a_{(n-1)2} & \cdots & a_{(n-1)n} \end{pmatrix}$$

设$M_i\ (i=1,2,\cdots,n)$是$\boldsymbol{A}$中划去第i列所得到的$n-1$阶子式．证明

(1) $\left(M_1,-M_2,\cdots,(-1)^{n+1}M_n\right)^{\mathrm{T}}$是方程组的一个解；

(2)若$R(\boldsymbol{A})=n-1$，则方程组的所有解是$\left(M_1,-M_2,\cdots,(-1)^{n-1}M_n\right)^{\mathrm{T}}$的倍数．

证明（1）设n阶方阵

$$\boldsymbol{A}_i=\begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{(n-1)1} & a_{(n-1)2} & \cdots & a_{(n-1)n} \end{pmatrix},\quad i=1,\ 2,\ \cdots,\ n-1,$$

则$|\boldsymbol{A}_i|=0\ \ (i=1,\ 2,\ \cdots,\ n-1)$，按第一行展开，有

$$|\boldsymbol{A}_i|=a_{i1}(-1)^{1+1}M_1+a_{i2}(-1)^{1+2}M_2+\cdots+a_{in}(-1)^{1+n}M_n$$

即

$$a_{i1}M_1-a_{i2}M_2+\cdots+(-1)^{n+1}a_{in}M_n=0\ \ (i=1,\ 2,\ \cdots,\ n-1),$$

所以，$(M_1,\ -M_2,\ \cdots,\ (-1)^{n+1}M_n)^{\mathrm{T}}$是方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$的解.

（2）当$r=R(\boldsymbol{A})=n-1$，则有$n-r=1$，故方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$的通解为

$$\boldsymbol{x}=k\left(M_1,\ -M_2,\ \cdots,\ (-1)^{n+1}M_n\right)^{\mathrm{T}}$$

其中k为任意常数.

6.　设$\boldsymbol{\eta}^*$是非齐次线性方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$的一个解，$\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\xi}_{n-r}$是对应的齐次方程组的一个基础解系．证明

（1）$\boldsymbol{\eta}^*,\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\xi}_{n-r}$线性无关；

（2）$\boldsymbol{\eta}^*,\boldsymbol{\eta}^*+\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\eta}^*+\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}^*+\boldsymbol{\xi}_{n-r}$线性无关.

证明（1）设有一组数$k_0,k_1,k_2,\cdots,\ k_{n-r}$，使

$$k_0\boldsymbol{\eta}^*+k_1\boldsymbol{\xi}_1+k_2\boldsymbol{\xi}_2+\cdots+k_{n-r}\boldsymbol{\xi}_{n-r}=\boldsymbol{0},$$

则有$k_0=0$．反证法，假设$k_0\neq 0$，则有

$$\boldsymbol{\eta}^*=\left(-\frac{k_1}{k_0}\right)\boldsymbol{\xi}_1+\left(-\frac{k_2}{k_0}\right)\boldsymbol{\xi}_2+\cdots+\left(-\frac{k_{n-r}}{k_0}\right)\boldsymbol{\xi}_{n-r}.$$

由于$\boldsymbol{\xi}_1,\ \boldsymbol{\xi}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{\xi}_{n-r}$是$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$的解，所以$\boldsymbol{\eta}^*$也是$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$的解，矛盾，故$k_0=0$成立．于是有

$$k_1\boldsymbol{\xi}_1+k_2\boldsymbol{\xi}_2+\cdots+k_{n-r}\boldsymbol{\xi}_{n-r}=\boldsymbol{0}.$$

又由于$\boldsymbol{\xi}_1,\ \boldsymbol{\xi}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{\xi}_{n-r}$线性无关，所以又得$k_1=k_2=\cdots=k_{n-r}=0$，从而可知$\boldsymbol{\eta}^*,\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\xi}_{n-r}$线性无关.

（2）令

$$k_0\boldsymbol{\eta}^*+k_1(\boldsymbol{\eta}^*+\boldsymbol{\xi}_1)+k_2(\boldsymbol{\eta}^*+\boldsymbol{\xi}_2)+\cdots+k_{n-r}(\boldsymbol{\eta}^*+\boldsymbol{\xi}_{n-r})=\boldsymbol{0},$$

得

$$(k_0+k_1+\cdots+k_{n-r})\boldsymbol{\eta}^*+k_1\boldsymbol{\xi}_1+k_2\boldsymbol{\xi}_2+\cdots+k_{n-r}\boldsymbol{\xi}_{n-r}=\boldsymbol{0}.$$

由(1)知，$\boldsymbol{\eta}^*$, $\boldsymbol{\xi}_1$, $\boldsymbol{\xi}_2$, $\cdots$, $\boldsymbol{\xi}_{n-r}$线性无关，容易求得$k_1=k_2=\cdots=k_{n-r}=k_0=0$，即

$\boldsymbol{\eta}^*, \boldsymbol{\eta}^*+\boldsymbol{\xi}_1+\cdots+\boldsymbol{\eta}^*+\boldsymbol{\xi}_{n-r}$线性无关.

7．设非齐次线性方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$的系数矩阵的秩为$r$，$\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_{n-r+1}$是它的$n-r+1$个线性无关的解，证明它的任一解可表示为

$$\boldsymbol{x}=k_1\boldsymbol{\eta}_1+k_2\boldsymbol{\eta}_2+\cdots+k_{n-r+1}\boldsymbol{\eta}_{n-r+1}$$

其中$k_1+k_2+\cdots+k_{n-r+1}=1$.

证明 令

$$\boldsymbol{\xi}_i=\boldsymbol{\eta}_i-\boldsymbol{\eta}_{n-r+1},\quad i=1,2,\cdots,n-r,$$

则$\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\xi}_{n-r}$是$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$的$n-r$个解．下证它们线性无关.

设$\lambda_1\boldsymbol{\xi}_1+\lambda_2\boldsymbol{\xi}_2+\cdots+\lambda_{n-r}\boldsymbol{\xi}_{n-r}=\boldsymbol{0}$，则有

$$\lambda_1\boldsymbol{\eta}_1+\lambda_2\boldsymbol{\eta}_2+\cdots+\lambda_{n-r}\boldsymbol{\eta}_{n-r}+(-\lambda_1-\lambda_2-\cdots-\lambda_{n-r})\boldsymbol{\eta}_{n-r+1}=\boldsymbol{0}.$$

由$\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_{n-r+1}$线性无关知$\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_{n-r}=0$，所以，$\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\xi}_{n-r}$线性无关，是$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$的一个基础解系.

于是，$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$的任一解可表示为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}&=l_1\boldsymbol{\xi}_1+l_2\boldsymbol{\xi}_2+\cdots+l_{n-r}\boldsymbol{\xi}_{n-r}+\boldsymbol{\eta}_{n-r+1}\\&=l_1\boldsymbol{\eta}_1+l_2\boldsymbol{\eta}_2+\cdots+l_{n-r}\boldsymbol{\eta}_{n-r}+(1-l_1-l_2-\cdots-l_{n-r})\boldsymbol{\eta}_{n-r+1}.\end{aligned}$$

令

$$k_1=l_1,\ k_2=l_2,\ \cdots,\ k_{n-r}=l_{n-r},\ k_{n-r+1}=1-l_1-l_2-\cdots-l_{n-r},$$

则$k_1+k_2+\cdots+k_{n-r+1}=1$，且

$$\boldsymbol{x}=k_1\boldsymbol{\eta}_1+k_2\boldsymbol{\eta}_2+\cdots+k_{n-r+1}\boldsymbol{\eta}_{n-r+1}.$$

8．已知齐次线性方程组

$$\begin{cases}(a_1+b)x_1+a_2x_2+a_3x_3+\cdots+a_nx_n=0,\\a_1x_1+(a_2+b)x_2+a_3x_3+\cdots+a_nx_n=0,\\a_1x_1+a_2x_2+(a_3+b)x_3+\cdots+a_nx_n=0,\\\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3+\cdots+(a_n+b)x_n=0,\end{cases}$$

其中$\sum_{i=1}^{n}a_i\neq 0$. 试讨论$a_1,a_2,\cdots,a_n$和b满足何种关系时，

（1）方程组仅有零解；
（2）方程组有非零解．在有非零解时，求此方程组的一个基础解系．

解 方程组的系数行列式

$$|A|=\begin{vmatrix} a_1+b & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2+b & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & a_3+b & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n+b \end{vmatrix}=b^{n-1}(b+\sum_{i=1}^{n}a_i).$$

（1）当 $b\neq 0$ 且 $b+\sum_{i=1}^{n}a_i\neq 0$ 时，秩$(A)=n$，方程组仅有零解．

（2）当 $b=0$ 时，原方程组的同解方程组为

$$a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n=0.$$

由 $\sum_{i=1}^{n}a_i\neq 0$ 可知，$a_i(i=1,2,\cdots,n)$ 不全为零．不妨设 $a_1\neq 0$，得原方程组的一个基础解系为

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\left(-\frac{a_2}{a_1},1,0,\cdots,0\right)^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{\alpha}_2=\left(-\frac{a_3}{a_1},0,1,\cdots,0\right)^{\mathrm{T}},\ \cdots,\boldsymbol{\alpha}_n=\left(-\frac{a_n}{a_1},0,0,\cdots,1\right)^{\mathrm{T}}.$$

当 $b=-\sum_{i=1}^{n}a_i$ 时，有 $b\neq 0$，原方程组的系数矩阵可化为

$$\begin{pmatrix} a_1-\sum_{i=1}^{n}a_i & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2-\sum_{i=1}^{n}a_i & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & a_3-\sum_{i=1}^{n}a_i & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n-\sum_{i=1}^{n}a_i \end{pmatrix}$$

（将第 1 行的-1 倍加到其余各行，再从第 2 行到第 n 行同乘以 $-\dfrac{1}{\sum_{i=1}^{n}a_i}$ 倍）

$$\to\begin{pmatrix} a_1-\sum_{i=1}^{n}a_i & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix},$$

（将第 n 行 $-a_n$ 倍到第 2 行的 $-a_2$ 倍加到第 1 行，再将第 1 行移到最后一行）

$$\to\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ -1 & 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ -1 & 0 & 0 & \cdots & 1\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0\end{pmatrix}.$$

由此得原方程组的同解方程组为

$$x_2=x_1,\ x_3=x_1,\ \cdots,x_n=x_1.$$

原方程组的一个基础解系为

$$\boldsymbol{\alpha}=(1,1,\cdots,1)^{\mathrm{T}}.$$

9．设有向量组

（Ⅰ）：$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,2)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(1,1,3)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(1,-1,a+2)^{\mathrm{T}}$；

（Ⅱ）：$\boldsymbol{\beta}_1=(1,2,a+3)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\beta}_2=(2,1,a+6)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\beta}_3=(2,1,a+4)^{\mathrm{T}}$.

试问：当a为何值时，向量组（Ⅰ）与（Ⅱ）等价？当a为何值时，向量组（Ⅰ）与（Ⅱ）不等价？

解　作初等行变换，有

$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=\left(\begin{array}{ccc:ccc}1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2\\ 0 & 1 & -1 & 2 & 1 & 1\\ 2 & 3 & a+2 & a+3 & a+6 & a+4\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:ccc}1 & 0 & 2 & -1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & -1 & 2 & 1 & 1\\ 0 & 0 & a+1 & a-1 & a+1 & a-1\end{array}\right).$$

（1）当$a\neq-1$时，有行列式$\left|(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\right|=a+1\neq0$，秩$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=3$，故线性方程组$x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+x_3\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\beta}_i(i=1,2,3)$均有惟一解．所以，$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$可由向量组（Ⅰ）线性表示．

同样，行列式$\left|(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)\right|=6\neq0$，秩$(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=3$，故$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$可由向量组（Ⅱ）线性表示．因此向量组（Ⅰ）与（Ⅱ）等价．

（2）当$a=-1$时，有

$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)\to\left(\begin{array}{ccc:ccc}1 & 0 & 2 & -1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & -1 & 2 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & -2\end{array}\right).$$

由于秩$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\neq$秩$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3\vdots\boldsymbol{\beta}_1)$，线性方程组$x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+x_3\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\beta}_1$无解，故向量$\boldsymbol{\beta}_1$不能由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性表示．因此，向量组（Ⅰ）与（Ⅱ）不等价．

10．已知4阶方阵$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)$,$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$均为4维列向量，其中$\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$线性无关，$\boldsymbol{\alpha}_1=2\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3$.如果$\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4$，求线性方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$的通解.

解　令$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}$，则由$\boldsymbol{Ax}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\boldsymbol{\beta}$得

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+x_3\boldsymbol{\alpha}_3+x_4\boldsymbol{\alpha}_4=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4,$$

将$\boldsymbol{\alpha}_1=2\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3$代入整理得$(2x_1+x_2-3)\boldsymbol{\alpha}_2+(-x_1+x_3)\boldsymbol{\alpha}_3+(x_4-1)\boldsymbol{\alpha}_4=\boldsymbol{0}$．由$\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$线性无关，得

$$\begin{cases}2x_1+x_2-3=0,\\ -x_1+x_3=0,\\ x_4-1=0,\end{cases}$$

解得

$$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}0\\3\\0\\1\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}1\\-2\\1\\0\end{pmatrix}，其中 k 为任意常数.$$

11．设齐次线性方程组

$$\begin{cases}ax_1+bx_2+bx_3+\cdots+bx_n=0,\\bx_1+ax_2+bx_3+\cdots+bx_n=0,\\\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\bx_1+bx_2+bx_3+\cdots+ax_n=0,\end{cases}$$

其中 $a\neq 0,b\neq 0,n\geq 2.$ 试讨论 a,b 为何值时，方程组仅有零解、有无穷多组解？在有无穷多组解时，求出全部解，并用基础解系表示全部解.

解　系数行列式

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}a&b&b&\cdots&b\\b&a&b&\cdots&b\\b&b&a&\cdots&b\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\b&b&b&\cdots&a\end{vmatrix}=\left[a+(n-1)b\right](a-b)^{n-1}.$$

（1）当 $a\neq b$ 且 $a\neq(1-n)b$ 时，方程组仅有零解.

（2）当 $a=b$ 时，对系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 作行初等变换，有

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a&b&b&\cdots&b\\b&a&b&\cdots&b\\b&b&a&\cdots&b\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\b&b&b&\cdots&a\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1&\cdots&1\\0&0&0&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

原方程组的同解方程组为

$$x_1+x_2+\cdots+x_n=0,$$

其基础解系为

$$\boldsymbol{\alpha}_1=(-1,1,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(-1,0,1,\cdots,0)^{\mathrm{T}},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{n-1}=(-1,0,0,\cdots,1)^{\mathrm{T}}.$$

方程组的全部解是

$$\boldsymbol{x}=c_1\boldsymbol{\alpha}_1+c_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+c_{n-1}\boldsymbol{\alpha}_{n-1}\qquad（c_1,c_2,\cdots,c_{n-1} 为任意常数）.$$

（3）当 $a=(1-n)b$ 时，对系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 作行初等变换，有

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}(1-n)b&b&b&\cdots&b\\b&(1-n)b&b&\cdots&b\\b&b&(1-n)b&\cdots&b\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\b&b&b&\cdots&(1-n)b\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1-n&1&1&\cdots&1&1\\1&1-n&1&\cdots&1&1\\1&1&1-n&\cdots&1&1\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\1&1&1&\cdots&1&1-n\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&0&0&\cdots&0&-1\\0&1&0&\cdots&0&-1\\0&0&1&\cdots&0&-1\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&1&-1\\0&0&0&\cdots&0&0\end{pmatrix}.$$

原方程组的同解方程组为

$$\begin{cases}x_1=x_n,\\x_2=x_n,\\\quad\vdots\\x_{n-1}=x_n.\end{cases}$$

其基础解系为 $\boldsymbol{\beta}=(1,1,\cdots,1)^{\mathrm{T}}$．方程组的全部解是 $\boldsymbol{x}=c\boldsymbol{\beta}$（$c$ 为任意常数）．

12．设四元齐次线性方程组(I)为

$$\begin{cases}2x_1+3x_2-x_3=0,\\x_1+2x_2+x_3-x_4=0,\end{cases}$$

又已知另一四元齐次线性方程组(II)的一个基础解系为 $\boldsymbol{\alpha}_1=(2,-1,a+2,1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(-1,2,4,a+8)^{\mathrm{T}}$．

（1） 求方程组（I）的一个基础解系；

（2） 当 a 为何值时，方程组（I）与（II）有非零公共解？在有非零公共解时，求出全部非零公共解．

解（1）对方程组（I）的系数矩阵作行初等变换，有

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&3&-1&0\\1&2&1&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-5&3\\0&1&3&-2\end{pmatrix}.$$

得方程组（I）的同解方程组

$$\begin{cases}x_1=5x_3-3x_4,\\x_2=-3x_3+2x_4.\end{cases}$$

由此可得方程组（I）的一个基础解系为

$$\boldsymbol{\beta}_1=(5,-3,1,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}_2=(-3,2,0,1)^{\mathrm{T}}.$$

（2）由条件，方程组（II）的全部解为

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}2k_1-k_2\\-k_1+2k_2\\(a+2)k_1+4k_2\\k_1+(a+8)k_2\end{pmatrix}\text{（}k_1\text{，}k_2\text{ 为任意常数）.}\qquad①$$

将此式代入方程组（I）得

$$\begin{cases}(a+1)k_1=0,\\(a+1)k_1-(a+1)k_2=0.\end{cases}\qquad②$$

要使方程组（I）与（II）有非零公共解，只需②有非零解．

$$\begin{vmatrix}a+1&0\\a+1&-(a+1)\end{vmatrix}=-(a+1)^2,$$

所以，当 $a=-1$ 时，方程组（I）与（II）有非零公共解．

当 $a=-1$ 时，方程组②有非零解，且 k_1，k_2 为不全为零的任意常数．此时，由①可得方程组（I）与（II）的全部非零公共解为

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=k_1\begin{pmatrix}2\\-1\\1\\1\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}-1\\2\\4\\7\end{pmatrix}\text{（}k_1\text{，}k_2\text{ 为不全为零的任意常数）.}$$

13．已知$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$为线性方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$的一个基础解系，若$\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1+t\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2+t\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\alpha}_3+t\boldsymbol{\alpha}_4$，$\boldsymbol{\beta}_4=\boldsymbol{\alpha}_4+t\boldsymbol{\alpha}_1$，讨论实数$t$满足什么关系时，$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4$也为$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$的一个基础解系．

解　显然$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4$是$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$的解，当且仅当它们线性无关时，为$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$的一个基础解系．

$$(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)\begin{pmatrix}1&0&0&t\\t&1&0&0\\0&t&1&0\\0&0&t&1\end{pmatrix},$$

$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4$线性无关等价于$\begin{vmatrix}1&0&0&t\\t&1&0&0\\0&t&1&0\\0&0&t&1\end{vmatrix}\neq 0$，即$t^4-1\neq 0$，也即$t\neq\pm 1$．

14．设$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$为线性方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$的一个基础解系，$\boldsymbol{\beta}_1=t_1\boldsymbol{\alpha}_1+t_2\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\beta}_2=t_1\boldsymbol{\alpha}_2+t_2\boldsymbol{\alpha}_3$，$\cdots$，$\boldsymbol{\beta}_s=t_1\boldsymbol{\alpha}_s+t_2\boldsymbol{\alpha}_1$，其中$t_1,t_2$为实常数．　试问$t_1,t_2$满足什么关系时，$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$也为$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$的一个基础解系．

解　由于$\boldsymbol{\beta}_i$是$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$的线性组合，所以$\boldsymbol{\beta}_i$均为$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$的解．设

$$k_1\boldsymbol{\beta}_1+k_2\boldsymbol{\beta}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\beta}_s=\boldsymbol{0}, \tag{1}$$

即$(t_1k_1+t_2k_s)\boldsymbol{\alpha}_1+(t_2k_1+t_1k_2)\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+(t_2k_{s-1}+t_1k_s)\boldsymbol{\alpha}_s=\boldsymbol{0}$，由于$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$线性无关，因此有

$$\begin{cases}t_1k_1+t_2k_s=0,\\t_2k_1+t_1k_2=0,\\\qquad\vdots\\t_2k_{s-1}+t_1k_s=0.\end{cases} \tag{2}$$

因为系数行列式

$$\begin{vmatrix}t_1&0&\cdots&0&t_2\\t_2&t_1&0&\cdots&0\\0&t_2&t_1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&t_2&t_1\end{vmatrix}=t_1^s+(-1)^{s+1}t_2^s,$$

所以当$t_1^s+(-1)^{s+1}t_2^s\neq 0$，即当$s$为偶数，$t_1\neq t_2$，$s$为奇数，$t_1\neq -t_2$时，方程组（2）只有零解$k_1=k_2=\cdots=k_s=0$，从而$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$线性无关，此时$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$也为$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$的一个基础解系．

15．设$\boldsymbol{\alpha}_i=(a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in})^{\mathrm{T}}$ $(i=1,2,\cdots,r;r<n)$是n维实向量，且$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$线性无关．已知$\boldsymbol{\beta}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)^{\mathrm{T}}$是线性方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0,\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0,\\\qquad\vdots\\a_{r1}x_1+a_{r2}x_2+\cdots+a_{rn}x_n=0\end{cases}$$

的非零解向量．　试判断向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r,\boldsymbol{\beta}$的线性相关性．

解　设$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_r\boldsymbol{\alpha}_r+k\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{0}$，因为$\boldsymbol{\beta}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)^{\mathrm{T}}$是线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0, \\ \qquad \vdots \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \cdots + a_{rn}x_n = 0 \end{cases}$$

的非零解向量，故有$\boldsymbol{\alpha}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta} = 0$，$\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_i = 0$，于是，由$k_1\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_r\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_r + k\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta} = 0$，得$k\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta} = 0$. 但$\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta} \neq 0$，故$k = 0$，得$k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_r\boldsymbol{\alpha}_r = \boldsymbol{0}$，而$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$线性无关，所以

$$k_1 = k_2 = \cdots = k_r = 0.$$

因此，向量组$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r, \boldsymbol{\beta}$线性无关.