康托尔与集合论

集合论或**集论**是研究集合（由一堆抽象物件构成的整体）的数学理论，包含集合、元素和成员关系等最基本数学概念。在大多数现代数学的公式化中，集合论提供了要如何描述数学物件的语言。集合论和逻辑与一阶逻辑共同构成了数学的公理化基础，以未定义的“集合”与“集合成员”等术语来形式化地建构数学物件。 在朴素集合论中，集合是被当做一堆物件构成的整体之类的自证概念。 在**公理化集合论**中，集合和集合成员并不直接被定义，而是先规范可以描述其性质的一些公理。在此一想法之下，集合和集合成员是有如在欧式几何中的点和线，而不被直接定义。

对集合论的异议

一开始，有些数学家拒绝将集合论当做数学的基础，认为这只是一场含有奇幻元素的游戏。埃里特·比修普驳斥集合论是“上帝的数学，应该留给上帝”。而且，路德维希·维特根斯坦特别对无限的操作有疑问，这也和策梅罗-弗兰克尔集合论有关。维特根斯坦对于数学基础的观点曾被保罗·贝奈斯所批评，且被克里斯平·赖特等人密切研究过。 对集合论最常见的反对意见来自结构主义者，他们认为数学是和计算些微相关着的，但朴素集合论却加入了非计算性的元素。 拓朴斯理论曾被认为是传统公理化集合论的另一种选择。拓朴斯理论可以被用来解译各种集合集的替代方案，如结构主义、模糊集合论、有限集合论和可计算集合论等。

集合论（Set theory）

作用

按现代数学观点，数学各分支的研究对象或者本身是带有某种特定结构的集合如群、环、拓扑空间，或者是可以通过集合来定义的（如自然数、实数、函数）。从这个意义上说，集合论可以说是整个现代数学的基础。

历史

集合论作为数学中最富创造性的伟大成果之一，是在 19 世纪末由德国的康托尔（1845－1918）创立起来的。但是，它萌发、孕育的历史却源远流长，至少可以追溯到两千多年前。

无穷集合的早期研究

概念

集合论是关于无穷集合和超穷数的数学理论。集合作为数学中最原始的概念之一，通常是指按照某种特征或规律结合起来的事物的总体。例如美国国会图书馆的全部藏书，自然数的全体以及直线上所有点的总体等等。集合论的全部历史都是围绕无穷集合而展开的。

创立之前

早在集合论创立之前两千多年，数学家和哲学家们就已经接触到了大量有关无穷的问题，古希腊的学者最先注意并考察了它们。公元前 5 世纪，埃利亚学派的芝诺（约公元前 490－前 430），一共提出 45 个悖论，其中关于运动的四个悖论：二分法悖论、阿基里斯追龟悖论、飞矢不动悖论与运动场悖论尤为著名，前三个悖论都与无穷直接有关。芝诺在悖论中虽然没有明确使用无穷集合的概念，但问题的实质却与无穷集合有关。　　在数理哲学中，有两种无穷方式历来为数学家和哲学家所关注，一种是无穷过程，称为潜在无穷，一种是无穷整体，称为实在无穷。希腊哲学家亚里士多德（前 384－前 322）最先提出要把潜在的无穷和实在的无穷加以区别，这种思想在当今仍有重要意义。他认为只存在潜在无穷，如地球的年龄是潜在无穷，但任意时刻都不是实在无穷。他承认正整数是潜在无穷的，因为

任何正整数加上 1 总能得到一个新数。对他来说，无穷集合是不存在的。   哲学权威亚里士多德把无穷限于潜在无穷之内，如同下了一道禁令，谁敢冒天下之大不韪，以至于影响对无穷集合的研究达两千多年之久。

创立过程

公元 5 世纪，拜占庭的普罗克拉斯（410－485）是欧几里德《几何原本》的著名评述者。他在研究直径分圆问题时，注意到圆的一根直径分圆成两个半圆，由于直径有无穷多，所以必须有两倍无穷多的半圆。为了解释这个在许多人看来是一个矛盾的问题，他指出：任何人只能说有很大很大数目的直径或者半圆，而不能说一个实实在在无穷多的直径或者半圆，也就是说，无穷只能是一种观念，而不是一个数，不能参与运算。其实，他这里是接受了亚里士多德的潜无穷的概念，而否认实无穷的概念，对这种对应关系采用了回避的态度。到了中世纪，随着无穷集合的不断出现，部分能够同整体构成一一对应这个事实也就越来越明显地暴露出来。例如，数学家们注意到把两个同心圆上的点用公共半径联结起来，就构成两个圆上的点之间的一一对应关系。近代科学的开拓者伽利略（1564－1642）注意到：两个不等长的线段上的点可以构成一一对应。他又注意到：正整数与它们的平方可以构成一一对应，这说明无穷大有不同的“数量级”，不过伽利略认为这是不可能的。他说，所有无穷大量都一样，不能比较大小。   到了十七世纪，数学家把无穷小量引进数学，构成所谓“无穷小演算”，这就是微积分的最早名称。所谓积分法无非是无穷多个无穷小量加在一起，而微分法则是两个无穷小量相除。由于无穷小量运算的引进，无穷大模大样地进入数学，虽然它给数学带来前所未有的繁荣和进步，它的基础及其合法性仍然受到许多数学家的质疑，他们对无穷仍然心存疑虑，这方面以“数学家之王”高斯（1777—1855）的意见为代表。高斯是一个潜在无穷论者，他在 1831 年 7 月 12 日给他的朋友舒马赫尔的信中说“我必须最最强烈地反对你把无穷作为一完成的东西来使用，因为这在数学中是从来不允许的。无穷

只不过是一种谈话方式，它是指一种极限，某些比值可以任意地逼近它，而另一些则容许没有限制地增加。”这里极限概念只不过是一种潜在的无穷过程。这里高斯反对那些哪怕是偶尔用一些无穷的概念，甚至是无穷的记号的人，特别是当他们把它当成是普通数一样来考虑时。　　法国大数学家柯西（1789－1857）也同他的前人一样，不承认无穷集合的存在。他认为部分同整体构成一一对应是自相矛盾的事。

过程艰辛

科学家们接触到无穷，却又无力去把握和认识它，这的确是向人类提出的尖锐挑战。正如大卫·希尔伯特（1862－1943）在他的 1926 年《论无穷》的讲演中所说的那样：“没有任何问题象无穷那样深深地触动人的情感，很少别的观念能象无穷那样激励理智产生富有成果的思想，然而也没有任何其它概念能象无穷那样需要加以阐明”。面对“无穷”的长期挑战，数学家们不会无动于衷，他们为解决无穷问题而进行的努力，首先是从集合论的先驱者开始的。

集合论的诞生

先驱

数学分析严格化的先驱波尔查诺（1781－1848）也是一位探索实无穷的先驱，他是第一个为了建立集合的明确理论而作出了积极努力的人。他明确谈到实在无穷集合的存在，强调两个集合等价的概念，也就是后来的一一对应的概念。他知道，无穷集合的一个部分或子集可以等价于其整体，他认为这个事实必须接受。例如 0 到 5 之间的实数通过公式 $y=12x/5$ 可与 0 到 12 之间的实数构成一一对应，虽然后面的集合包含前面的集合。为此，他为无穷集合指定超限数，使不同的无穷集合，超限数不同。不过，后来康托尔指出，波尔查诺指定无穷集合的超限数的具体方法是错误的。另外，他还提出了一些集合的性质，并将他们视为悖论。因此，他关于无穷的研究哲学意义大于数学意义。应该说，他是康托尔集合论的先驱。

问题出现

黎曼（1826－1866）是在 1854 年的就职论文《关于用三角级数表示函数的可能性》中首次提出“唯一性问题”的。大意是：如果函数 f（x）在某个区间内除间断点外所有点上都能展开为收敛于函数值的三角级数，那么这样的三角级数是否是唯一的？但他没有给予回答。1870 年海涅（1821－1881）证明：当 f（x）连续，且它的三角级数展开式一致收敛时，展开式是唯一的。进一步的问题是：当 f（x）具有无穷多个间断点时，唯一性能否成立？康托尔就是通过对唯一性问题的研究，认识到无穷集合的重要性，并开始从事无穷集合的一般理论研究。

奠定基础

早在 1870 年和 1871 年，康托尔两次在《数学杂志》上发表论文，证明了函数 f（x）的三角级数表示的唯一性定理，而且证明了即使在有限个间断点处不收敛，定理仍然成立。1872 年他在《数学年鉴》上发表了一篇题为《三角级数中一个定理的推广》的论文，把海涅的一致收敛的严酷条件推广到允许间断点是某种无穷的集合的情形。为了描述这种集合，他首先定义了点集的极限点，然后引进了点集的导集和导集的导集等有关重要概念。这是从唯一性问题的探索向点集论研究的开端，并为点集论奠定了理论基础。

集合论诞生

1873 年 11 月 29 日康托尔在给戴德金（1831－1916）的一封信中，终于把导致集合论产生的问题明确地提了出来：正整数的集合（n）与实数的集合（x）之间能否把它们一一对应起来。同年 12 月 7 日，康托尔写信给戴德金，说他已能成功地证明实数的“集体”是不可数的，也就是不能同正整数的“集体”一一对应起来。这个时期应该看成是集合论的诞生日。

集合拓扑开始

1874 年，康托尔发表了这个证明，不过论文题目换成另外一个题目“论所有实代数数集体的一个性质，”因为克洛内克（1823－1891）根本就反对这种论文，他认为这种论文根本没有内容，无的放矢。该文提出了“可数集”概念，并以一一对应为准则对无穷集合进行分类，证明了如下重要结果：（1）一切代数数是可数的；（2）任何有限线段上的实数是不可数的；（3）超越数是不可数的；（4）一切无穷集并非都是可数的，无穷集同有穷集一样也有数量（基数）上的区别。　　1874 年 1 月 5 日，康托尔给戴德金写信，提出下面的问题：　　是否能把一块曲面（如包含边界在内的正方形）一意地映射到一条线（如包含端点在内的线段），使得面上每一点对应线上一点而且反过来线上每一点对应面上一点？　　1877 年 6 月 20 日，他给戴德金写信，这次他告诉他的朋友这个问题答案是肯定的理由，虽然几年以来他都认为答案是否定的。信中说“我看到了它，但我简直不能相信它”。关于这一成果的论文 1878 年发表后，吸引人们研究度量空间维数的本质，很快出现一批论文。这批论文标志集合拓扑的开始。

点集论体系建立

从 1879 年到 1883 年，康托尔写了六篇系列论文，论文总题目是“论无穷线形点流形”，其中前四篇同以前的论文类似，讨论了集合论的一些数学成果，特别是涉及集合论在分析上的一些有趣的应用。第五篇论文后来以单行本出版，单行本的书名《一般集合论基础》。第六篇论文是第五篇的补充。《一般集合论基础》在数学上的主要成果是引进超穷数。该文从内容到叙述方式都同现代的朴素集合论基本一致，所以该书标志着点集论体系的建立。

遭遇挫折

1884 年，由于连续统假设长期得不到证明，再加上与克罗内克的尖锐对立，精神上屡遭打击，5 月底，他支持不住了，第一次精神崩溃。他的精神沮丧，不能很好地集中研究集

合论，从此深深地卷入神学、哲学及文学的争论而不能自拔。不过每当他恢复常态时，他的思想总变得超乎寻常的清晰，继续他的集合论的工作。

康托尔的贡献

《对超穷集合论基础的贡献》是康托尔最后一部重要的数学著作。《贡献》分两部分，第一部分是全序集合的研究，于 1895 年 5 月在《数学年刊》上发表。第二部分于 1897 年 5 月在《数学年刊》上发表。《贡献》的发表标志集合论已从点集论过渡到抽象集合论。但是，由于它还不是公理化的，而且它的某些逻辑前提和某些证明方法如不给予适当的限制便会导出悖论，所以康托尔的集合论通常成为古典集合论或朴素集合论。

出现悖论导致怀疑

不过，康托尔的集合论并不是完美无缺的，一方面，康托尔对“连续统假设”和“良序性定理”始终束手无策；另一方面，19 和 20 世纪之交发现的布拉利－福蒂悖论、康托尔悖论和罗素悖论，使人们对集合论的可靠性产生了严重的怀疑。加之集合论的出现确实冲击了传统的观念，颠倒了许多前人的想法，很难为当时的数学家所接受，遭到了许多人的反对，其中反对的最激烈的是柏林学派的代表人物之一、构造主义者克罗内克。克罗内克认为，数学的对象必须是可构造出来的，不可用有限步骤构造出来的都是可疑的，不应作为数学的对象，他反对无理数和连续函数的理论，同样严厉批评和恶毒攻击康托尔的无穷集合和超限数理论不是数学而是神秘主义。他说康托尔的集合论空空洞洞毫无内容。集合论的悖论出现之后，他们开始认为集合论根本是一种病态，他们以不同的方式发展为经验主义、半经验主义、直觉主义、构造主义等学派，在基础大战中，构成反康托尔的阵营。

得到肯定

康托尔的集合论得到公开的承认和热情的称赞应该说首先在瑞士苏黎世召开的第一届国际数学家大会上表现出来。瑞士苏黎世理工大学教授胡尔维茨（1859－1919）在他的综

合报告中，明确地阐述康托尔集合论对函数论的进展所起的巨大推动作用，这破天荒第一次向国际数学界显示康托尔的集合论不是可有可无的哲学，而是真正对数学发展起作用的理论工具。在分组会上，法国数学家阿达玛（1865－1963），也报告康托尔对他的工作的重要作用。　　随着时间的推移，人们逐渐认识到集合论的重要性。希尔伯特高度赞誉康托尔的集合论“是数学天才最优秀的作品”，“是人类纯粹智力活动的最高成就之一”，“是这个时代所能夸耀的最巨大的工作”。在 1900 年第二届国际数学家大会上，希尔伯特高度评价了康托尔工作的重要性，并把康托尔的连续统假设列入 20 世纪初有待解决的 23 个重要数学问题之首。当康托尔的朴素集合论出现一系列悖论时，克洛内克的后继者布劳威尔（1881－1966）等人借此大做文章，希尔伯特用坚定的语言向他的同代人宣布：“没有任何人能将我们从康托尔所创造的伊甸园中驱赶出来”。

集合论的发展

成为系统的学科

1899 年第一篇点集论的论文在《德国数学家联合会年报》上发表，这篇论文是德国数学家舍恩弗利斯（1853－1928）写的。他本人在其后还为德国《数学科学百科全书》中撰写有关条目。20 世纪初他继续研究康托尔留下的问题，特别是维数不变性问题。大约同时，德国数学家豪斯道夫（1868－1942）对集合论进行一系列研究，特别是序型及序集理论。1914 年出版《集合论大纲》更是集合论及点集拓扑学的经典著作，他的体系是后来研究的基础及出发点。从此集合论成为系统的学科 。

确立地位

从非欧几何的产生开始的对数学无矛盾性（相对无矛盾性）的证明把整个数学解释为集合论，集合论成了数学无矛盾性的基础，集合论在数学中的基础理论地位就逐步确立起来。

集合论公理化

19 和 20 世纪之交人们发现了一系列集合论悖论，表明集合论是不协调的，这使得人们对数学推理的正确性和结论的真理性产生了怀疑，触发了第三次数学危机。为了克服悖论所带来的困难，人们开始对集合论进行改造，即对康托尔的集合定义加以限制，“从现有的集合论成果出发，反求足以建立这一数学分支的原则。这些原则必须足够狭窄，以保证排除一切矛盾，另一方面，又必须充分广阔，使康托尔集合论中一切有价值的内容得以保存下来”（策梅罗语）。这就是集合论公理化方案。1908 年策梅罗（1871－1953）提出第一个公理集合论系统，后经德国－以色列数学家弗兰克尔（1891－1965）和挪威数学家斯科兰姆（1887－1963)的补充和修正，得到现在公认的策梅罗－弗兰克尔公理系统，简记为 ZF,ZF 如果另加选择公理(AC)，则所得的公理系统简记为 ZFC.1925 年大数学家冯·诺伊曼(1903－1957）开创了另一套公理系统，后经伯奈斯（1888－1977）及哥德尔（1906－1978）的改进形成了 NBG 公理系统。已经证明，ZF 对于发展集合论是足够了,它能避免已知的集合论悖论，并在数学基础研究中提供了一种方便的语言和工具。在 ZF 中，几乎所有的数学概念都能用集合论语言表达，数学定理也大都可以在 ZFC 内得到形式证明，因而作为整个数学的基础，ZFC 是完备的，数学的无矛盾性可以归结为 ZFC 的无矛盾性。

对争议公理的研究

由哥德尔不完全性定理可知，如果 ZF 是无矛盾的，则在 ZF 中不能证明自身的无矛盾性,所以在公理集合论中只考虑相对无矛盾性问题。已经证明，如果 ZF 是无矛盾的，则 NBG 也是无矛盾的。选择公理（AC）和连续统假设（CH）有重要地位，是集合论中长期研究的课题。AC 成为数学史上继平行公理之后最有争议的公理，CH 是 1878 年康托尔提出来的，简单的说，就是关于直线上有多少点的问题。　　近 40 年来在 AC 和 CH 研究方面取得不少进展。1938 年，哥德尔证明了：从 ZF 推不出 AC 的否定，从 ZFC 推不出 CH 的否定，即 AC 对于 ZF，CH 对于 ZFC 是相对无矛盾的.1963 年，科恩（1934－）创立著名的力迫

法，证明了 AC 对于 ZF,CH 对于 ZFC 的相对独立性,即从 ZF 推不出 AC,从 ZFC 推不出 CH。综合这两个结果,得出 AC 在 ZF 中,CH 在 ZFC 中都是不可判定的。此外，大基数问题，无穷组合论的研究亦有很大进展，70 年代以来，决定性公理的研究与它们交织在一起，有很大的进展，同时，人们还在寻找迄今尚未发现的与其它公理无矛盾的可信赖的新的公理，以期在更有效的途径上来解决连续统问题，这方面的工作成为集合论当前研究的主流。

能用所谓“常识”来反驳集合论观点吗

集合论的等势性原理,是康托为了给现代分析学构建理论和逻辑基础而准备的,而不是为了描述“常识世界”而构造的。试图用“常识”来反驳等势性原理是荒谬的。就像在现实生活中思考实无穷是没有意义的一样，因为你只能举出潜无穷的例子（例如探究真理时，实践与认识之间的反复，直至无穷），而举不出实无穷的例子。只要能在逻辑上构成一致的体系，在现代分析学体系下就是正确的基础。 作为一个构造性原理，康托的理论假设可以被置换，在对争议公理研究里已经阐明。不过如果替代了某些公理能够形成新的体系，也只是能描述新的体系，不能描述原有体系是“错误”的。