谓词逻辑

习题参考答案与提示

1. （1）设 $W(x)$：x 是工人；c：小张。原命题可符号化为：$\neg W(c)$。
   （2）设$S(x)$：x是田径运动员；$B(x)$：x是球类运动员；h：他。原命题可符号化为：
   $S(h)\vee B(h)$。
   （3）设$C(x)$：x是聪明的；$B(x)$：x是美丽的；l：小莉。原命题可符号化为：
   $C(l)\wedge B(l)$。
   （4）设$O(x)$：x是奇数。原命题可符号化为：$O(m)\rightarrow\neg O(2m)$
   （5）设$P(x，y)$：直线x平行于直线y；$G(x，y)$：直线x相交于直线y。原命题可符号化为：
   $P(x，y)\rightarrow\neg G(x，y)$。
   （6）设$O(x)$：x是老的；$V(x)$：x是健壮的；j：王教练。原命题可符号化为：
   $\neg O(j)\wedge\neg V(j)$。
   （7）设 $L(x, y)$：x 大于 y。原命题可符号化为：$L(5,4)\rightarrow L(4,6)$。

2. （1）存在自然数 x，对任意自然数 y 满足 xy=1；
   a)0 b)0 c)0 d)0
   （2）对每个自然数 x，存在自然数 y 满足 xy=1；
   a)0 b)0 c)0 d)1
   （3）对每个自然数 x，存在自然数 y 满足 xy=0；
   a)1 b)1 c)0 d)0
   （4）存在自然数 x，对任意自然数 y 满足 xy=1；
   a)1 b)1 c)0 d)0
   （5）对每个自然数 x，存在自然数 y 满足 xy=x；
   a)1 b)1 c)1 d)1
   （6）存在自然数 x，对任意自然数 y 满足 xy=x；
   a)1 b)1 c)0 d)0
   （7）对任意自然数 x,y，存在自然数 z 满足 x-y=z。
   a)1 b)1 c)0 d)0

3. （1）$\neg\exists xL(x,0)$
   （2）$\forall x\forall y\forall z((L(x,y)\wedge L(y,z))\rightarrow L(x,z))$
   （3）$\forall x\forall y((L(x,y)\rightarrow\exists z(L(z,0)\wedge G(xz,yz)))$
   （4）$\exists x\forall yM(x,y,y)$
   （5）$\forall x\exists yA(x,y,x)$

4. $\exists!xP(x)$可用以下具有相同的意义的谓词公式表示
   $$\exists x(P(x)\wedge\forall y(P(y)\rightarrow E(y,x)))$$
   $E(y,x)$表示 y 等于 x

5. 设$R(x)$：x是兔子；$T(x)$：x是乌龟。$F(x，y)$：x比y跑得快；$S(x，y)$：x与y跑得同样快。

（1）$\forall x\forall y(R(x)\wedge T(y)\rightarrow F(x, y))$

（2）$\exists x(R(x)\wedge\forall y(T(y)\rightarrow F(x, y)))$

（3）$\neg\forall x\forall y(R(x)\wedge T(y)\rightarrow F(x, y))$

（4）$\neg\exists x\exists y(R(x)\wedge R(y)\wedge S(x, y))$

6.（1）设 M(x)：x 是数学家；A(x)：x 是天文学家；g：高斯，则原命题可表示为：
$M(g)\wedge\neg A(g)$

（2）设 O(x)：x 是奇数；E(x)：x 是偶数，则原命题可表示为：
$\neg\exists x(O(x)\wedge E(x))$

（3）设 P(x)：x 是质数；E(x)：x 是偶数，则原命题可表示为：
$\forall x(P(x)\wedge E(x)\leftrightarrow x=2)$

（4）设 C(x)：x 是猫；M(x)：x 是耗子；G(x)：x 是好的；K(x, y)：x 会捉 y，则原命题可表示为：
$\exists x(C(x)\wedge\forall y(M(y)\rightarrow\neg K(x,y))\wedge\forall x(C(x)\wedge\forall y(M(y)\rightarrow K(x,y))\rightarrow G(x))$

（5）设 G(x)：x 是金子；L(x)：x 是发亮的，则原命题可表示为：
$\neg\forall x(L(x)\rightarrow G(x))$

（6）设 M(x)：x 是男人；F(x)：x 是女人；H(x, y)：x 比 y 高，则原命题可表示为：
$\neg\forall x(M(x)\rightarrow\exists y(F(y)\wedge H(x,y)))\wedge\exists x(M(x)\wedge\forall y(F(y)\rightarrow H(x,y)))$

（7）设 M(x)：x 是人；B(x,y)：x 相信 y，则原命题可表示为：
$\forall x(M(x)\wedge\neg\exists y(M(y)\wedge x\neq y\wedge B(x,y))\rightarrow\neg\exists z(M(z)\wedge x\neq z\wedge B(z,x)))$

（8）设 C(x)：x 是星球；M(x)：x 是人；A(x)：x 是天文学家；e：地球；H(x,y)：x 有 y；S(x)：x 惊讶，则原命题可表示为：
$\exists x(C(x)\wedge x\neq e\wedge\exists y(M(y)\wedge H(x,y)))\rightarrow\forall x(A(x)\rightarrow\neg S(x))$

（9）设 Q(x,y)：x 指向 y；J(x,y)：x 奔向 y；p：党；w：我们，则原命题可表示为：
$\forall x(Q(p, x)\rightarrow J(w, x))$

（10）设 M(x)：x 是人；K(x)：x 游戏人生；L(x)：x 一事无成；H(x, y)：x 主宰 y；N(x)：x 是奴隶，则原命题可表示为：
$\forall x(M(x)\wedge K(x)\rightarrow L(x))\wedge\forall x(\neg H(x, x)\rightarrow N(x))$

7. 设N(x)：x是一个数；S(x，y)：y是x的后继数（即x是y的直接先行者，例如2的直接先行者是1）

（1）$\forall x(N(x)\rightarrow\exists!y(N(y)\wedge S(x, y)))$

（2）$\neg\exists x(N(x)\wedge S(x, 1))$

（3）$\forall x(N(x)\wedge\neg S(x, 2)\rightarrow\exists!y(N(y)\wedge S(y, x)))$

8.（1）5是质数。

（2）2是偶数且2是质数。

（3）所有能被2除尽的数必是偶数。

（4）存在6能被其除尽的偶数。

（5）不是偶数的数，必不能被2除尽。

（6）对所有x，若x是偶数，则对任意y，若y能被x除尽，则y也是偶数。

（7）对任意质数x，必存在偶数y，且y能被x除尽。

（8）对任意奇数，所有的质数均不能被它除尽。

9.（1）对正整数集个体域，$\forall x(x>0)$为真。

（2）对{5，6}，$\forall x(x=5\vee x=6)$为真。

（3）对整数集，$\forall x\exists y(x+y=3)$为真。

（4）使得$\exists y\forall x(x+y<0)$为真的整数集的尽可能大的子集不存在。

10.（1）量词$\forall x$的辖域是$P(x)\vee Q(x)$，其中x为约束变元，$\forall x(P(x)\vee Q(x))\wedge R$是命题。

（2）量词$\forall x$的辖域是$P(x)\wedge Q(x)$，其中x为约束变元。

量词$\exists x$的辖域是$S(x)$，其中x为约束变元。

$T(x)$中x为自由变元。$\forall x(P(x)\wedge Q(x))\wedge\exists xS(x)\to T(x)$不是命题。

（3）量词$\forall x$的辖域是$P(x)\to\exists y(B(x,y)\wedge Q(y))\vee T(y)$，其中x为约束变元，$T(y)$中y为自由变元。

量词$\exists x$的辖域是$B(x,y)\wedge Q(y)$，其中y为约束变元。

$\forall x(P(x)\to\exists y(B(x,y)\wedge Q(y))\vee T(y))$是命题。

（4）量词$\forall y$的辖域$\exists x(P(x)\wedge B(x,y))$，其中y为约束变元。

量词$\exists x$，辖域$P(x)\wedge B(x,y)$，其中x为约束变元。

不在量词辖域中的$P(x)$中的x为自由变元。

$P(x)\to(\forall y\exists x(P(x)\wedge B(x,y))\to P(x))$不是命题。

11.（1）真　（2）假　（3）真　（4）真　（5）假　（6）真

12.（1）永真式　（2）永假式　（3）可满足式

（4）可满足式　（5）可满足式　（6）可满足式

13.（1）前束合取范式：$\exists x\forall y(A(x)\wedge\neg B(y))$

前束析取范式：$\exists x\forall y(A(x)\wedge\neg B(y))$

（2）前束合取范式：$\forall x\exists y(\neg A(x)\vee B(x,y))$

前束析取范式：$\forall x\exists y(\neg A(x)\vee B(x,y))$

（3）前束合取范式：$\forall x\forall y\forall z\exists u\forall v\exists w((\neg A(x,y,z)\vee B(x,y,u))\wedge(\neg B(x,y,v)\vee A(x,y,w)))$

前束析取范式：$\forall x\forall y\forall z\exists u\forall v\exists w((\neg A(x,y,z)\wedge\neg B(x,y,v))\vee(\neg A(x,y,z)\wedge A(x,y,w))\vee(B(x,y,u)\wedge\neg B(x,y,v))\vee(B(x,y,u)\wedge A(x,y,w)))$

（4）前束合取范式：$\exists x\exists y\forall z(A(x,y)\vee\neg B(z)\vee C(x))$

前束析取范式：$\exists x\exists y\forall z(A(x,y)\vee\neg B(z)\vee C(x))$

（5）前束合取范式：$\forall x\exists z\exists u((\neg P(x)\vee\neg Q(y)\vee R(z))\wedge(\neg P(x)\vee\neg Q(y)\vee\neg S(u)))$

前束析取范式：$\forall x\exists z\exists u(\neg P(x)\vee\neg Q(y)\vee(R(z)\wedge\neg S(u)))$

（6）前束合取范式：$\forall x\exists z\exists t((\neg P(x)\vee\neg R(x,t))\wedge(\neg Q(z,y)\vee\neg R(x,t)))$

前束析取范式：$\forall x\exists z\exists t((\neg P(x)\wedge\neg Q(z,y))\vee\neg R(x,t))$

（7）前束合取范式：$\forall x\exists t(P(t,y)\vee\neg Q(z)\vee R(x))$

前束析取范式：$\forall x\exists t(P(t,y)\vee\neg Q(z)\vee R(x))$

14. 先将上述推理形式化。设个体域为全总个体域。令w：小王；$F(x)$：x是一年级生；$E(x)$：x是理科生；$L(x)$：x是文科生；$D(x,y)$：x是y的辅导员，则推理可以形式化为

$\forall x(F(x)\wedge\neg L(x)\to\exists yD(y,x))$，$F(w)$，$E(w)$，$\forall x(D(x,w)\to E(x))$，$\forall x(E(x)\to\neg L(x))$ $\Rightarrow\exists x\exists y(\neg L(x)\wedge D(x,y))$

证明：

（1）$\forall x(E(x)\to\neg L(x))$	P
（2）$E(w)\to\neg L(w)$	US,(1)
（3）$E(w)$	P

(4) $\neg L(w)$	T, I, (2), (3)
(5) $F(w)$	P
(6) $F(w)\wedge\neg L(w)$	T, I, (4), (5)
(7) $\forall x(F(x)\wedge\neg L(x)\rightarrow\exists yD(y,x))$	P
(8) $F(w)\wedge\neg L(w)\rightarrow\exists yD(y, w)$	US, (7)
(9) $\exists yD(y, w)$	T, I, (6), (8)
(10) $D(e, w)$	ES, (9)
(11) $\forall x(D(x, w)\rightarrow E(x))$	P
(12) $D(e, w)\rightarrow E(e)$	US, (11)
(13) $E(e)$	T, I, (10), (12)
(14) $E(e)\rightarrow\neg L(e)$	US, (1)
(15) $\neg L(e)$	T, I, (13), (14)
(16) $\neg L(e)\wedge D(e, w)$	T, I, (10), (15)
(17) $\exists y(\neg L(e)\wedge D(e, y))$	EG, (16)
(18) $\exists x\exists y(\neg L(x)\wedge D(x, y))$	EG, (17)

因此，该推理是有效的。

15. (1) 设个体域为全总个体域。

令 $Q(x)$：x 是有理数； $R(x)$：x 是实数；$I(x)$：x 是整数，则推理可以形式化为：

$\forall x(Q(x)\rightarrow R(x))$, $\exists x(Q(x)\wedge I(x))\Rightarrow\exists x(R(x)\wedge I(x))$

证明：

1) $\exists x(Q(x)\wedge I(x))$	P
2) $Q(a)\wedge I(a)$	ES, (1)
3) $Q(a)$	T, I(2)
4) $I(a)$	T, I(2)
5) $\forall x(Q(x)\rightarrow R(x))$	P
6) $Q(a)\rightarrow R(a)$	US, (5)
7) $R(a)$	T, I, (3), (6)
8) $R(a)\wedge I(a)$	T, I, (4), (7)
9) $\exists x(R(x)\wedge I(x))$	EG, (8)

(2) 设个体域为全总个体域。

令$F(x)$：x是无理数；$Q(x)$：x是有理数；$H(x)$：x能表示成分数，则推理可以形式化为：

$\neg\exists x(F(x)\wedge H(x))$, $\forall x(Q(x)\rightarrow H(x))\Rightarrow\forall x(Q(x)\rightarrow\neg F(x))$

证明：

1) $\neg\exists x(F(x)\wedge H(x))$	P
2) $\forall x\neg(F(x)\wedge H(x))$	R, E, (1)
3) $\neg(F(y)\wedge H(y))$	US, (2)
4) $H(y)\rightarrow\neg F(y)$	R, E, (3)
5) $\forall x(Q(x)\rightarrow H(x))$	P
6) $Q(y)\rightarrow H(y)$	US, (5)
7) $Q(y)\rightarrow\neg F(y)$	T, I, (4), (6)
8) $\forall x(Q(x)\rightarrow\neg F(x))$	UG, (7)

（3）设个体域为全总个体域。

令 $P(x)$：x 是牛；$Q(x)$：x 有角；$R(x)$：x 是动物，则推理可以形式化为：

$\forall x(P(x)\rightarrow Q(x))$，$\exists x(P(x)\wedge R(x))\Rightarrow\exists x(Q(x)\wedge R(x))$

证明：	1）$\exists x(P(x)\wedge R(x))$	P
	2）$P(a)\wedge R(a)$	ES,(1)
	3）$P(a)$	T,I,(2)
	4）$\forall x(P(x)\rightarrow Q(x))$	P
	5）$P(a)\rightarrow Q(a)$	US,(4)
	6）$Q(a)$	T,I,(3),(5)
	7）$R(a)$	T,I,(2)
	8）$Q(a)\wedge R(a)$	T,I,(6),(7)
	9）$\exists x(Q(x)\wedge R(x))$	EG,(8)

（4）设个体域为全总个体域。

令 $B(x)$：x 是鸟；$M(x)$：x 是猴子；$F(x)$：x 会飞，则推理可以形式化为：

$\forall x(B(x)\rightarrow F(x))$，$\forall x(M(x)\rightarrow\neg F(x))\Rightarrow\forall x(M(x)\rightarrow\neg B(x))$

证明：	1）$\forall x(B(x)\rightarrow F(x))$	P
	2）$B(y)\rightarrow F(y)$	US,(1)
	3）$\forall x(M(x)\rightarrow\neg F(x))$	P
	4）$M(y)\rightarrow\neg F(y)$	US,(3)
	5）$\neg F(y)\rightarrow\neg B(y)$	R,E,(2)
	6）$M(y)\rightarrow\neg B(y)$	T,I,(4),(5)
	7）$\forall x(M(x)\rightarrow\neg B(x))$	UG,(6)

（5）设个体域为全总个体域。

令 $M(x)$：x 是人；$C(x)$：x 长期吸烟；$K(x)$：x 长期酗酒；$J(x)$：x 身体健康；$P(x)$：x 能参加体育比赛，则推理可以形式化为：

$\forall x((M(x)\wedge(C(x)\vee K(x)))\rightarrow\neg J(x))$，$\forall x((M(x)\wedge\neg J(x))\rightarrow\neg P(x))$，$\exists x(M(x)\wedge P(x))$
$\Rightarrow\exists x(M(x)\wedge\neg K(x))$

证明：	1）$\exists x(M(x)\wedge P(x))$	P
	2）$M(c)\wedge P(c)$	ES,(1)
	3）$\forall x((M(x)\wedge\neg J(x))\rightarrow\neg P(x))$	P
	4）$(M(c)\wedge\neg J(c))\rightarrow\neg P(c)$	US,(3)
	5）$P(c)$	T,I,(2)
	6）$\neg(M(c)\wedge\neg J(c))$	T,I,(4),(5)
	7）$\neg M(c)\vee J(c)$	R,E,(6)
	8）$M(c)$	T,I,(2)

9）$J(c)$ T,I,(7),(8)

10）$\forall x((M(x)\wedge(C(x)\vee K(x)))\to\neg J(x))$ P

11）$(M(c)\wedge(C(c)\vee K(c)))\to\neg J(c)$ US,(10)

12）$\neg(M(c)\wedge(C(c)\vee K(c)))$ T,I,(9),(11)

13）$\neg M(c)\vee(\neg C(c)\wedge\neg K(c))$ R,E,(12)

14）$\neg C(c)\wedge\neg K(c)$ T,I,(8),(13)

15）$\neg K(c)$ T,I,(14)

16）$M(c)\wedge\neg K(c)$ T,I,(8),(15)

17）$\exists x(M(x)\wedge\neg K(x))$ EG,(16)

（6）设个体域为全总个体域。

令 M(x)：x 是人；K(x)：x 是科学工作者；Q(x)：x 勤奋；T(x)：x 聪明；S(x)：x 将获得成功；a：王大志，则推理可以形式化为：

$\forall x((M(x)\wedge K(x))\to Q(x))$，$\forall x((M(x)\wedge Q(x)\wedge T(x))\to S(x))$，$M(a)\wedge K(a)\wedge T(a)\Rightarrow S(a)$

证明：1）$M(a)\wedge K(a)\wedge T(a)$ P

2）$\forall x((M(x)\wedge K(x))\to Q(x))$ P

3）$(M(a)\wedge K(a))\to Q(a)$ US,(2)

4）$M(a)\wedge K(a)$ T,I,(1)

5）$Q(a)$ T,I,(2),(4)

6）$M(a)\wedge T(a)$ T,I,(1)

7）$M(a)\wedge Q(a)\wedge T(a)$ T,I,(5),(6)

8）$\forall x((M(x)\wedge Q(x)\wedge T(x))\to S(x))$ P

9）$(M(a)\wedge Q(a)\wedge T(a))\to S(a)$ US,(8)

10）$S(a)$ T,I,(7),(9)