

三次数学危机

1-1 什么是数学危机

为了讲清楚第三次数学危机的来龙去脉，我们首先要说明什么是数学危机。一般来讲，**危机是一种激化的、非解决不可的矛盾**。从哲学上来看，矛盾是无处不在的、不可避免的，即便以确定无疑著称的数学也不例外。

数学中有大大小小的**许多矛盾**，比如正与负、加法与减法、微分与积分、有理数与无理数、实数与虚数等等。但是整个数学发展过程中还有许多深刻的矛盾，例如有穷与无穷，连续与离散，乃至存在与构造，逻辑与直观，具体对象与抽象对象，概念与计算等等。在整个数学发展的历史上，贯穿着矛盾的斗争与解决。而在**矛盾激化到涉及整个数学的基础时，就产生数学危机**。

矛盾的消除，危机的解决，往往给数学带来新的内容，新的进展，甚至引起革命性的变革，这也反映出矛盾斗争是事物发展的历史动力这一基本原理。整个数学的发展史就是矛盾斗争的历史，斗争的结果就是数学领域的发展。

人类最早认识的是自然数。从引进零及负数就经历过斗争：要么引进这些数，要么大量的数的减法就行不通；同样，引进分数使乘法

有了逆运算——除法，否则许多实际问题也不能解决。但是接着又出现了这样的问题，是否所有的量都能用有理数来表示？于是发现无理数就导致了**第一次数学危机**，而危机的解决也就促使逻辑的发展和几何学的体系化。

方程的解导致了虚数的出现，虚数从一开始就被认为是“不实的”。可是这种不实的数却能解决实数所不能解决的问题，从而为自己争得存在的权利。

几何学的发展从欧几里得几何的一统天下发展到各种非欧几何学也是如此。在十九世纪发现了许多用传统方法不能解决的问题，如五次及五次以上代数方程不能通过加、减、乘、除、乘方、开方求出根来；古希腊几何三大问题，即三等分任意角、倍立方体、化圆为方不能通过圆规、直尺作图来解决等等。

这些否定的结果表明了传统方法的局限性，也反映了人类认识的深入。这种发现给这些学科带来极大的冲击，几乎完全改变了它们的方向。比如说，代数学从此以后向抽象代数学方面发展，而求解方程的根变成了分析及计算数学的课题。在第三次数学危机中，这种情况也多次出现，尤其是包含整数算术在内的形式系统的不完全性、许多问题的不可判定性都大大提高了人们的认识，也促进了数理逻辑的大发展。

这种矛盾、危机引起的发展，改变面貌，甚至引起革命，在数学发展历史上是屡见不鲜的。第二次数学危机是由无穷小量的矛盾引起的，它反映了数学内部的有限与无穷的矛盾。数学中也一直贯穿着计

算方法、分析方法在应用与概念上清楚及逻辑上严格的矛盾。在这方面，比较注意实用的数学家盲目应用。而比较注意严密的数学家及哲学家则提出批评。只有这两方面取得协调一致后，矛盾才能解决。后来算符演算及 δ 函数也重复了这个过程，开始是形式演算、任意应用，直到施瓦尔兹才奠定广义函数论的严整系统。

对于第三次数学危机，有人认为只是数学基础的危机，与数学无关。这种看法是片面的。诚然，问题涉及数理逻辑和集合论，但它一开始就牵涉到无穷集合，而现代数学如果脱离无穷集合就可以说寸步难行。因为如果只考虑有限集合或至多是可数的集合，那绝大部分数学将不复存在。而且即便这些有限数学的内容，也有许多问题要涉及无穷的方法，比如解决数论中的许多问题都要用解析方法。由此看来，第三次数学危机是一次深刻的数学危机。

1-2 第一次数学危机

从某种意义上讲，现代意义下的数学（也就是作为演绎系统的纯粹数学）来源于古希腊的毕达哥拉斯学派。这个学派兴旺的时期为公元前 500 年左右，它是一个唯心主义流派。他们重视自然及社会中不变因素的研究，把几何、算术、天文学、音乐称为“四艺”，在其中追求宇宙的和谐及规律性。他们认为“万物皆数”，认为数学的知识是可靠的、准确的，而且可以应用于现实的世界。数学的知识是由于纯粹的思维而获得，并不需要观察、直觉及日常经验。

毕达哥拉斯的数是指整数，他们在数学上的一项重大发现是证明了勾股定理。他们知道满足直角三角形三边长的一般公式，但由此也发现了一些直角三角形的三边比不能用整数来表达，也就是勾长或股长与弦长是不可通约的。这样一来，就否定了毕达哥拉斯学派的信条：宇宙间的一切现象都能归结为整数或整数之比。

不可通约性的发现引起第一次数学危机。有人说，这种性质是希帕索斯约在公元前 400 年发现的，为此，他的同伴把他抛进大海。不过更有可能是毕达哥拉斯已经知道这种事实，而希帕索斯因泄密而被处死。不管怎样，这个发现对古希腊的数学观点有极大的冲击。这表明，几何学的某些真理与算术无关，几何量不能完全由整数及其比来表示，反之数却可以由几何量表示出来。整数的尊崇地位受到挑战，于是几何学开始在希腊数学中占有特殊地位。

同时这也反映出，直觉和经验不一定靠得住，而推理证明才是可靠的。从此希腊人开始由“自明的”公理出发，经过演绎推理，并由此**建立几何学体系**，这不能不说是数学思想上一次巨大革命，这也是**第一次数学危机的自然产物**。

回顾以前的各种数学，无非都是“算”，也就是提供算法。即使在古希腊，数学也是从实际出发，应用到实际问题中去的。比如泰勒斯预测日食，利用影子距离计算金字塔高度，测量船只离岸距离等等，都是属于计算技术范围的。至于埃及、巴比伦、中国、印度等国的数学，并没有经历过这样的危机和革命，所以也就一直停留在“算学”

阶段。而希腊数学则走向了完全不同的道路，形成了欧几里得《几何原本》的公理体系与亚里士多德的逻辑体系。

1-3 第一次数学危机的产物——古典逻辑与欧氏几何学

亚里士多德的方法论对于数学方法的影响是巨大的，他指出了正确的定义原理。亚里士多德继承自己老师柏拉图的观念，把定义与存在区分，由某些属性来定义的东西可能未必存在(如正九面体)。另外，定义必须用已存在的定义过的东西来定义，所以必定有些最原始的定义，如点、直线等。而证明存在的方法需要规定和限制。

亚里士多德还指出公理的必要性，因为这是演绎推理的出发点。他区别了公理和公设，认为公理是一切科学所公有的真理，而公设则只是某一门学科特有的最基本的原理。他把逻辑规律(矛盾律、排中律等)也列为公理。

亚里士多德对逻辑推理过程进行深入研究，得出**三段论法**，并把它表达成一个公理系统，这是最早的公理系统。他关于逻辑的研究不仅使逻辑形成一个独立学科，而且对数学证明的发展也有良好的影响。

亚里士多德对于离散与连续的矛盾有一定阐述。对于潜在的无穷(大)和实在的无穷(大)加以区别。他认为正整数是潜在无穷的，因为任何整数加上 1 以后总能得到一个新的数。但是他认为所谓“无穷集合”是不存在的。他认为空间是潜在无穷的，时间在延长上是潜在无穷的，在细分上也是潜在无穷的。

欧几里得的《几何原本》对数学发展的作用无须在此多谈。不过应该指出，欧几里得的贡献在于他有史以来第一次总结了以往希腊人的数学知识，构成一个标准化的演绎体系。这对数学乃至哲学、自然科学的影响一直延续到十九世纪。牛顿的《自然哲学的数学原理》和斯宾诺莎的《伦理学》等都采用了欧几里得《几何原本》的体例。

欧几里得的平面几何学为《几何原本》的最初四篇与第六篇。其中有七个原始定义，五个公理和五个公设。他规定了存在的证明依赖于构造。

《几何原本》在西方世界成为仅次于《圣经》而流传最广的书籍。它一直是几何学的标准著作。但是它还存在许多缺点并不断受到批评，比如对于点、线、面的定义是不严格的：“点是没有部分的对象”，“线是没有宽度的长度(线指曲线)”，“面是只有长度和宽度的对象”。显然，这些定义是不能起逻辑推理的作用。特别是直线、平面的定义更是从直观来解释的(“直线是同其中各点看齐的线”)。

另外，他的公理五是“整体大于部分”，没有涉及无穷量的问题。在他的证明中，原来的公理也不够用，须加上新的公理。特别是平行公设是否可由其他公理、公设推出更是人所瞩目的问题。尽管如此，近代数学的体系特点在其中已经基本上形成了。

1-4 非欧几何学的诞生

欧几里得的《几何原本》是第一次数学危机的产物。尽管它有种种缺点和毛病，毕竟两千多年来一直是大家公认的典范。尤其是许多

哲学家，把欧几里得几何学摆在绝对几何学的地位。十八世纪时，大部分人都认为欧几里得几何是物质空间中图形性质的正确理想化。特别是康德认为关于空间的原理是先验综合判断，物质世界必然是欧几里得式的，**欧几里得几何是唯一的、必然的、完美的。**

既然是完美的，大家希望公理、公设简单明白、直截了当。其他的公理和公设都满足了上面的这个条件，唯独平行公设不够简明，象是一条定理。

欧几里得的平行公设是：每当一条直线与另外两条直线相交，在它一侧做成的两个同侧内角的和小于两直角时，这另外两条直线就在同侧内角和小于两直角的那一侧相交。

在《几何原本》中，证明前 28 个命题并没有用到这个公设，这很自然引起人们考虑：这条啰哩啰嗦的公设是否可由其他的公理和公设推出，也就是说，平行公设可能是多余的。

之后的二千多年，许许多多人都曾试图证明这点，有些人开始以为成功了，但是经过仔细检查发现：所有的证明都使用了一些其他的假设，而这些假设又可以从平行公设推出来，所以他们只不过得到一些和平行公设等价的命题罢了。

到了十八世纪，有人开始想用反证法来证明，即假设平行公设不成立，企图由此得出矛盾。他们得出了一些推论，比如“有两条线在无穷远点处相交，而在交点处这两条线有公垂线”等等。在他们看来，这些结论不合情理，因此不可能真实。但是这些推论的含义不清楚，也很难说是导出矛盾，所以不能说由此证明了平行公设。

从旧的欧几里得几何观念到新几何观念的确立，需要在某种程度上解放思想。

首先，要能从二千年来证明平行公设的失败过程中看出这个证明是办不到的事，并且这种不可能性是可以加以证实的；其次，要选取与平行公设相矛盾的其他公设，也能建立逻辑上没有矛盾的几何。这主要是罗巴切夫斯基的开创性工作。

要认识到欧几里得几何不一定是物质空间的几何学，欧几里得几何学只是许多可能的几何学中的一种。而几何学要从由直觉、经验来检验的空间科学要变成一门纯粹数学，也就是说，它的存在性只由无矛盾性来决定。虽说象兰伯特等人已有这些思想苗头，但是真正把几何学变成这样一门纯粹数学的是希尔伯特。

这个过程是漫长的，其中最主要的一步是罗巴切夫斯基和波耶分别独立地创立非欧几何学，尤其是它们所考虑的无矛盾性是历史上的独创。后人把罗氏几何的无矛盾性隐含地变成欧氏几何无矛盾性的问题。这种利用“模型”和证明“相对无矛盾性”的思想一直贯穿到以后的数学基础的研究中。而且这种把非欧几何归结到大家一贯相信的欧氏几何，也使得大家在接受非欧几何方面起到重要作用。

应该指出，非欧几何为广大数学界接受还是经过几番艰苦斗争的。首先要证明第五公设的否定并不会导致矛盾，只有这样才能说新几何学成立，才能说明第五公设独立于别的公理公设，这是一个起码的要求。

当时证明的方法是证明“相对无矛盾性”。因为当时大家都承认欧几里得几何学没有矛盾，如果能把非欧几何学用欧几里得几何学来解释而且解释得通，也就变得没有矛盾。而这就要把非欧几何中的点、直线、平面、角、平行等翻译成欧几里得几何学中相应的东西，公理和定理也可用相应欧几里得几何学的公理和定理来解释，这种解释叫做**非欧几何学的欧氏模型**。

对于罗巴切夫斯基几何学，最著名的欧氏模型有意大利数学家贝特拉米于 1869 年提出的常负曲率曲面模型；德国数学家克莱因于 1871 年提出的射影平面模型和彭加勒在 1882 年提出的用自守函数解释的单位圆内部模型。这些模型的确证实了非欧几何的相对无矛盾性，而且有的可以推广到更一般非欧几何，即黎曼创立的椭圆几何学，另外还可以推广到高维空间上。

因此，从十九世纪六十年代末到八十年代初，大部分数学家接受了非欧几何学。尽管有的人还坚持欧几里得几何学的独特性，但是许多人**明确指出非欧几何学和欧氏几何学平起平坐的时代已经到来**。当然也有少数顽固派，如数理逻辑的缔造者弗雷格，至死不肯承认非欧几何学，不过这已无关大局了。

非欧几何学的创建对数学的震动很大。数学家开始关心几何学的基础问题，从十九世纪八十年代起，几何学的公理化成为大家关注的目标，**并由此产生了希尔伯特的公理化运动**。

1-5 第二次数学危机

早在古代，人们就对长度、面积、体积的度量问题感兴趣。古希腊的欧多克斯引入量的观念来考虑连续变动的东西，并完全依据几何来严格处理连续量。这造成数与量的长期脱离。古希腊的数学中除了整数之外，并没有无理数的概念，连有理数的运算也没有，可是却有量的比例。他们对于连续与离散的关系很有兴趣，尤其是芝诺提出的四个著名的悖论：

第一个悖论是说运动不存在，理由是运动物体到达目的地之前必须到达半路，而到达半路之前又必须到达半路的半路……如此下去，它必须通过无限多个点，这在有限长时间之内是无法办到的。

第二个悖论是跑得很快的阿希里赶不上在他前面的乌龟。因为乌龟在他前面时，他必须首先到达乌龟的起点，然后用第一个悖论的逻辑，乌龟者在他的前面。这两个悖论是反对空间、时间无限可分的观点的。

而第三、第四悖论是反对空间、时间由不可分的间隔组成。第三个悖论是说“飞矢不动”，因为在某一时间间隔，飞矢总是在某个空间间隔中确定的位置上，因而是静止的。第四个悖论是游行队伍悖论，内容大体相似。这说明希腊人已经看到无穷小与“很小很小”的矛盾。当然他们无法解决这些矛盾。

希腊人虽然没有明确的极限概念，但他们在处理面积体积的问题时，却有严格的逼近步骤，这就是所谓“穷竭法”。它依靠间接的证明方法，证明了许多重要而难证的定理。

到了十六、十七世纪，除了求曲线长度和曲线所包围的面积等类问题外，还产生了许多新问题，如求速度、求切线，以及求极大、极小值等问题。经过许多人多年的努力，终于在十七世纪晚期，形成了无穷小演算——微积分这门学科，这也就是数学分析的开端。

牛顿和莱布尼兹被公认为微积分的奠基者。他们的功绩主要在于：
1，把各种问题的解法统一成一种方法，微分法和积分法；2，有明确的计算微分法的步骤；3，微分法和积分法互为逆运算。

由于运算的完整性和应用范围的广泛性，使微积分成为解决问题的重要工具。同时关于微积分基础的问题也越来越严重。以求速度为例，瞬时速度是 $\Delta s/\Delta t$ 当 Δt 趋向于零时的值。 Δt 是零、是很小的量，还是什么东西，这个无穷小量究竟是不是零。这引起了极大的争论，从而引发了第二次数学危机。

十八世纪的数学家成功地用微积分解决了许多实际问题，因此有些人就对这些基础问题的讨论不感兴趣。如达朗贝尔就说，现在是“把房子盖得更高些，而不是把基础打得更加牢固”。更有许多人认为所谓的严密化就是烦琐。

但也因此，微积分的基础问题一直受到一些人的批判和攻击，其中最有名的是贝克莱主教在 1734 年的攻击。

十八世纪的数学思想的确是不严密的、直观的、强调形式的计算，而不管基础的可靠与否，其中特别是：没有清楚的无穷小概念，因此导数、微分、积分等概念不清楚；对无穷大的概念也不清楚；发散级

数求和的任意性；符号使用的不严格性；不考虑连续性就进行微分，不考虑导数及积分的存在性以及可否展成幂级数等等。

一直到十九世纪二十年代，一些数学家才开始比较关注于微积分的严格基础。它们从波尔查诺、阿贝尔、柯西、狄里克莱等人的工作开始，最终由维尔斯特拉斯、戴德金和康托尔彻底完成，中间经历了半个多世纪，基本上解决了矛盾，为数学分析奠定了一个严格的基础。

波尔查诺不承认无穷小数和无穷大数的存在，而且给出了连续性的正确定义。柯西在 1821 年的《代数分析教程》中从定义变量开始，认识到函数不一定要有解析表达式。他抓住了极限的概念，指出无穷小量和无穷大量都不是固定的量而是变量，并定义了导数和积分；阿贝尔指出要严格限制滥用级数展开及求和；狄里克莱给出了函数的现代定义。

在这些数学工作的基础上，维尔斯特拉斯消除了其中不确切的地方，给出现在通用的 $\varepsilon - \delta$ 的极限、连续定义，并把导数、积分等概念都严格地建立在极限的基础上，从而克服了危机和矛盾。

十九世纪七十年代初，维尔斯特拉斯、戴德金、康托尔等人独立地建立了实数理论，而且在实数理论的基础上，建立起极限论的基本定理，从而使数学分析终于建立在实数理论的严格基础之上了。

同时，维尔斯特拉斯给出一个处处不可微的连续函数的例子。这个发现以及后来许多病态函数的例子，充分说明了直观及几何的思考不可靠，而必须诉诸严格的观念及推理。由此，第二次数学危机使数学更深入地探讨数学分析的基础——实数论的问题，这不仅导致集合

论的诞生，并且由此把数学分析的无矛盾性问题归结为实数论的无矛盾性问题，而这正是二十世纪数学基础中的首要问题

第三次数学危机产生的背景

第三次数学危机产生于十九世纪末和二十世纪初，当时正是数学空前兴旺发达的时期。首先是逻辑的数学化，促使了数理逻辑这门学科诞生。

十九世纪七十年代康托尔创立的集合论是现代数学的基础，也是产生危机的直接来源。十九世纪末，戴德金及皮亚诺对算术及实数理论进行公理化，推动了公理化运动。而公理化运动的最大成就则是希尔伯特在 1899 年对于初等几何的公理化。

公理化方法是现代数学最重要的方法之一，对于数学基础和数理逻辑的研究也有影响。当时也是现代数学一些新分支兴起的时期，如抽象代数学、点集拓扑学和代数拓扑学、泛函分析、测度与积分理论等学科。这些学科的发展一直与数学基础及数理逻辑的发展有着密切的关系。数学的更新与发展也对数学哲学有许多新的探讨，数学的陈腐哲学观念在当时已经几乎一扫而空了。

2-1 数学符号化的扩充：数理逻辑的兴起

数学的主要内容是计算和证明。在十七世纪，算术因符号化促使了代数学的产生，代数使计算变得精确和方便，也使计算方法系统化。

费尔马和笛卡儿的解析几何把几何学代数化，大大扩展了几何的领域，而且使得少数天才的推理变成机械化的步骤。这反映了代数学作为普遍科学方法的效力，于是笛卡儿尝试也把逻辑代数化。与笛卡儿同时代的英国哲学家霍布斯也认为推理带有计算性质，不过他并没有系统地发展这种思想。

现在公认的数理逻辑创始人是莱布尼兹。他的目的是选出一种“通用代数”，其中把一切推理都化归为计算。实际上这正是数理逻辑的总纲领。他希望建立一套普遍的符号语言，其中的符号是表义的，这样就可以象数字一样进行演算，他的确将某些命题形式表达为符号形式，但他的工作只是一个开头，大部分没有发表，因此影响不大。

真正使逻辑代数化的是英国数学家布尔，他在 1847 年出版了《逻辑的数学分析》，给出了现代所谓的“布尔代数”的原型。布尔确信符号化会使逻辑变得严密。他的对象是事物的类，1 表示全类，0 表示空类； xy 表示 x 和 y 的共同分子所组成的类，运算是逻辑乘法； $x + y$ 表示 x 和 y 两类所合成的类，运算是逻辑加法。

所以逻辑命题可以表示如下：凡 x 是 y 可以表示成 $x(1 - y) = 0$ ；没有 x 是 y 可以表示成 $xy = 0$ 。它还可以表示矛盾律 $x(1 - x) = 0$ ；排中律 $x + (1 - x) = 1$ 。

布尔看出类的演算也可解释为命题的演算。当 x 、 y 不是类而是命题，则 $x = 1$ 表示的是命题 x 为真， $x = 0$ 表示命题 x 为假， $1 - x$ 表示 x 的否定等等。显然布尔的演算构成一个代数系统，遵守着某些规律，这就是布尔代数。特别是它遵从德·莫尔根定律。

美国哲学家、数学家小皮尔斯推进了命题演算，他区别了命题和命题函数。一个命题总是真的或假的，而一个命题函数包含着变元，随着变元值选取的不同，它可以是真也可以是假。皮尔斯还引进了两个变元的命题函数以及量词和谓词的演算。

对现代数理逻辑贡献最大的是德国耶拿大学教授、数学家弗雷格。弗雷格在 1879 年出版的《概念文字》一书中不仅完备地发展了命题演算，而且引进了量词概念以及实质蕴涵的概念，他还给出一个一阶谓词演算的公理系统，这可以说是历史上第一个符号逻辑的公理系统。因此在这本只有 88 页的小册子中，包含着现代数理逻辑的一个颇为完备的基础。

1884 年，弗雷格的《算术基础》出版，后来又扩展成《算术的基本规律》。不过由于他的符号系统烦琐复杂，从而限制了它的普及，因此在十九世纪时，他的著作流传不广。后来由于罗素的独立工作，才使得弗雷格的工作受到重视。

用符号语言对数学进行公理化的是意大利数学家皮亚诺，他在 1889 年用拉丁文写了一本小册子《用新方法陈述的算术原理》。在这之前，皮亚诺已经把布尔和施罗德的逻辑用在数学研究上，并且引进了一系列对于他前人工作的更新。例如对逻辑运算和数学运算使用不同的符号，区别范畴命题和条件命题，这引导他得出量词理论。

这些改进都是对于布尔和施罗德理论的改进，而不是对弗雷格理论的改进，因为当时皮亚诺还不知道弗雷格的工作。在《算术原理》

中，他在引进逻辑概念和公式之后，开始用符号的记法来重写算术，在这本书中他讨论了分数、实数、甚至极限和点集论中的概念。

皮亚诺引进最原始的算术概念是“数”“1”“后继”和“等于”，并且陈述了关于这些概念的九条公理。今天我们认为其中公理 2、3、4、5 都是讨论恒等的，应该属于逻辑公理，所以就剩下了五条公理。这就是现在众所周知的皮亚诺公理。最后一条公理即公理 9，就是所谓数学归纳法原理，他用类的词句来表述，其中包含一个类变元。皮亚诺承认他的公理化来自戴德金。

从 1 开始，皮亚诺用 $x + 1$ 来表示后继函数。然后作为定义引进了加法和乘法。这些定义是递归的定义。虽然在他的系统中，皮亚诺没有象戴德金那样有力的定理可资利用，但皮亚诺并没有公开地宣称这些定义可以去掉。

这本书的逻辑部分还列出命题演算的公式，类演算的公式，还有一部分量词的理论。皮亚诺的符号要比布尔和施罗德的符号高明得多，标志着向近代逻辑的重要转变。他还对于命题的演算和类演算做了某些区别。这就是我们现在的两种不同演算，而不是同一种演算的两种不同解释。它的普遍量词记号是新的，而且是便利的。

不过书里还是存在缺点，如公式只是列出来的，而不是推导出来的；因为没有给出推导规则，皮亚诺引进了代入规则的概念，但是也没有给出任何规则；更严重的是他没有给出任何分离规则，结果尽管他的系统有许多优点，但他没有可供使用的逻辑。一直到后来，他才在一系列文章，特别是 1895 年发表的《数学论集》中，对这些逻辑

公式进行了证明。然而他这些证明还是缺少推演规则，在这方面他受到了弗雷格的批评。后来皮亚诺尽力想比弗雷格的《概念文字》有更多的内容，但是他做得并不够。不过他的这些著作在数学界仍有很大影响，得到广泛的传播。

2.1.1 命题演算

逻辑演算是数理逻辑的基础，命题演算是逻辑演算最基本的组成部分。命题演算研究命题之间的关系，比如简单命题和复杂命题之间的关系，简单命题如何构成复杂命题，由简单命题的真假如何推出复杂命题的真假等等。对于具体命题，我们不难通过机械运算来达到我们的目的，这就是命题的算术。

对于命题演算最早是由美国逻辑学家波斯特在 1921 年给出证明的，他的证明方法是把命题化为标准形式——合取范式。教科书中常见的证明是匈牙利数学家卡尔马给出的。除了这些构造性证明之外，还有用布尔代数的非构造性证明。

2.1.2 一阶谓词演算

在命题演算中，形式化的对象及演算的对象都是语句。但是，在数学乃至一般推理过程中，许多常见的逻辑推理并不能建立在命题演算的基础上。例如：1. 张三的每位朋友都是李四的朋友，王五不是

李四的朋友，所以王五不是张三的朋友。因此，我们必须深入到语句的内部，也就是要把语句分解为主语和谓语。

谓词演算要比命题演算范围宽广得多，这由变元也可以反映出来。命题演算的变元只是语句或命题，而谓词演算的变元有三类：个体变元、命题变元、谓词变元。由于谓词演算中有全称量词和存在量词，在这些量词后面的变化称为约束变元，其他变元称为自由变元。最简单的谓词演算是狭义谓词演算，现在通称一阶谓词演算。

谓词演算中的普遍有效公式与命题演算中的重言式还是有差别的。我们有行之有效的具体方法来判定一个公式是不是重言式。这种方法每一步都有明确的规定，并且可以在有限步内完成，这种方法我们称为能行的。但是在谓词演算中，并没有一种能行的方法来判定任何一个公式是否普遍有效的。这就需要寻找一种能行的方法来判定某个具体公式或一类公式是否普遍有效，这就是所谓判定问题。它是数理逻辑中最主要的问题之一。

一阶谓词演算的普遍有效公式也有一个公理系统。另外，同样也有代入规则及推理规则。另外，还有约束变元改字规则等变形规则。在谓词演算中也可以将每一个公式通过变形规则化为标准形式。其中最常用的是所谓前束范式，也就是公式中所有的量词都放在最前面，而且还可以把前束范式进一步化成斯科兰路范式，它不但具有前束范式的形状，而且每一个存在量词都在所有全称量词之前。

利用范式可以解决许多问题，最重要的是哥德尔证明的一阶谓词演算的公理系统的完全性定理，即可以证明：公式 **A** 在公理系统中

可以证明的当且仅当 A 是普遍有效的。同样，一阶谓词演算的公理系统也是协调(无矛盾)的、相独立的。1936 年丘奇和图林独立的证明一阶谓词演算公式的一般判定问题不可解问题，可以变为去解决具有特殊形式的范式公式的判定问题。

2.1.3 其他逻辑演算

逻辑演算系统很多，命题演算应该说来源于布尔，布尔的系统是非真即假的二值系统。真值大于 2 的逻辑系统称为多值逻辑。多值逻辑首先由波兰数学家卢卡西维茨在 1920 年引进，波斯特在 1921 年也独立地引进。多值逻辑有着广泛的应用，在二十世纪七十年代，国际上就曾多次召开专门的多值逻辑会议。

另一种常见的逻辑是模态逻辑，它是美国逻辑学家刘易斯在 1918 年引进的。他考虑的不是实质蕴涵而是严格蕴涵。另外，他在逻辑中也考虑所谓必要性与可能性等问题，引进著名的模态算子，这是直观可能性的形式化。

还有一个包括古典逻辑演算的公理系统，即直觉主义公理系统，其中否定排中律，它是荷兰数学家海丁于 1930 年引进的。它虽因直觉主义而得名，但是可以得到其他的解释，在现代数理逻辑的研究中十分重要。

在数理逻辑的研究中，狭义谓词演算是最重要的。狭义谓词演算也称一阶谓词演算，许多人默认数学中所用的逻辑通用为一阶谓词演算。但是，许多涉及数学问题的逻辑演算必须加进有关等号的谓词，

称为具等式的一阶谓词演算。这是现在最常用的一种逻辑系统，在研究算术系统中就要用到它。

但是，即使象实数的算术系统，一阶谓词演算也是不够的，更何况现代数学中涉及集合的子集，因此一阶谓词演算是不足以表达的。这时需要二阶谓词演算乃至高阶谓词演算，其中首先出现的是谓词变元。

不过，在现代数理逻辑的研究中，常常通过其它方式推广一阶谓词演算。比如一种常用的“无穷”逻辑允许无穷公式，即公式中容许可数多合取或析取，不过量词仍限制为有限多。这种无穷逻辑现在在集合论、递归论、模型论当中是必不可少的。另外一种推广一阶谓词演算的途径是引进新的量词，比如“存在许多……”。

逻辑系统比数学系统更不统一，各人用的系统在细节上有许多不同，而且同一概念也用不同的符号来表示。第一套是弗雷格自己系统运用的，但是连他的后继者也不用这套极不方便的符号系统。第二套是皮亚诺首先在《数学论集》提出的，后经罗素和怀特海在《数学原理》中使用。一般文献通用的都是这种符号系统的改进形式，如希尔伯特和他的学生们采用的也属于这一套。第三套是卢卡西维茨使用的，后来也有人用，如普瑞尔在《形式逻辑》中就加以来用。

2、寻找数学的基础：集合论的创立

2.1 集合论的创立和传播

集合论的创立者格奥尔格·康托尔，1845 年 3 月 3 日出生于俄国圣彼得堡(前苏联列宁格勒)一个商人家庭。他在中学时期就对数学感兴趣。1862 年，他到苏黎世上大学，1863 年转入柏林大学。

当时柏林大学正在形成一个数学教学与研究的中心，他在 1867 年的博士论文中就已经反映出“离经叛道”的观点，他认为在数学中提问的艺术比起解法来更为重要。的确，他原来的成就并不总是在于解决问题，他对数学的独特贡献在于他以特殊提问的方式开辟了广阔的研究领域。他所提出的问题一部分被他自己解决，一部分被他的后继者解决，一些没有解决的问题则始终支配着某一个方向的发展，例如著名的连续统假设。

1869 年康托尔取得在哈勒大学任教的资格，不久就升为副教授，并在 1879 年升为教授，他一直去世都在哈勒大学工作。哈勒是一个小地方，而且薪金微薄。康托尔原来希望在柏林找到一个薪金较高、声望更大的教授职位，但是在柏林，那位很有势力而且又专横跋扈的克洛耐克处处跟他为难，阻塞了他所有的道路。原因是克洛耐克对于他的集合论，特别是他的“超穷数”观点持根本否定的态度。由于用脑过度和精神紧张，从 1884 年起，他不时犯深度精神抑郁症，常常住在疗养院里。1918 年 1 月 6 日他在哈勒大学附近的精神病院中去世。

集合论的诞生可以说是在 1873 年年底。**1873 年 11 月，康托尔在和戴德金的通信中提出了一个问题，这个问题使他从以前关于数学分析的研究转到一个新方向。他认为，有理数的集合是可以“数”的，**

也就是可以和自然数的集合成一一对应的对应。但是他不知道，对于实数集合这种一一对应的对应是否能办到。他相信不能有一一对应的对应，但是他“讲不出什么理由”。

不久之后，他承认他“没有认真地考虑这个问题，因为它似乎没有什么价值”。接着他又补充一句，“要是你认为它因此不值得再花费力气，那我就完全赞同”。可是，康托尔又考虑起集合的映射问题来。很快，他在 1873 年 12 月 7 日又写信给戴德金，说他已能成功地证明实数的“集体”是不可数的了，这一天可以看成是集合论的誕生日。

戴德金热烈的祝贺了康托尔取得的成功。其间，证明的意义也越来越清楚。因为康托尔还成功地证明**代数数的集合也是可数的**。所谓代数数就是整系数代数方程的根，而象 π 与 e 这样的不能成为任何整系数代数方程的根的数，则称为超越数。

早在 1847 年，刘维尔就通过构造的方法（当时大家认为是唯一可接受的方法）证明了超越数的存在，也就是具体造出超越数来。可是，康托尔 1874 年发表的有关集合论的头一篇论文《论所有实代数集合的一个性质》断言，所有实代数数的集合是可数的，所有实数的集合是不可数的。因此，非代数数的超越数是存在的，并且其总数要比我们熟知的实代数数多得多，也就是说超越数的集合也是不可数的。

康托尔的这种证明是史无前例的。他连一个具体的超越数都没有举出来，就“信口开河”的说超越数存在，而且比实代数数的“总数”多得多，这怎么能不引起当时数学家的怀疑甚至愤怒呢？

其实，康托尔的著作主要是证明了无穷之间也有差别，既存在可数的无穷，也存在那种像实数集合那样不可数的、具有“连续统的势”的无穷。过去数学家认为靠得住的只有有限，而无穷最多只是模模糊糊的一个记号。而康托尔把无穷分成许多“层次”，这真有点太玄乎了。

1878 年，康托尔发表了集合论第二篇文章，其中把隐含在 1847 年文章中的“一一对应”概念提出来，作为判断两个集合相同或不同的基础，这就是最原始的等价观念。而两个集合相互之间如果能够一一对应就称为等势，势的概念于是应运而生。

从 1879 年到 1884 年，康托尔发表了题为“论无穷线性点集”的一系列文章，共有六篇，这些文章奠定了新集合论的基础。特别是在 1883 年的文章中引进生成新的超穷数概念，并且提出了所谓连续统假设，即可数基数后面紧接着就是实数基数。他相信这个假设正确，但没能证明。这个假设对于二十世纪数学基础的发展起着极其重大的作用。

康托尔最后的集合论著作是 1895 年和 1897 年发表的两篇文章，其中最重要的是引进“序型”的概念，并定义相应的序数。这个时期，反对集合论的势力逐渐削弱，但是集合论的内在矛盾已经开始暴露出来了。

康托尔自己最早发现了集合论的内在矛盾。他在 1895 年文章中遗留下两大问题未解决：一个是连续统假设，另一个是所有超穷基数的可比较性。他虽然认为无穷基数有最小数但没有最大数，但没有明显叙述其矛盾之处。

第一个发表集合论悖论的是意大利数学家布拉里·福蒂，他指出所有序数的集合这个概念的内在矛盾，但是当时认为这也许能够补救。一直到 1903 年罗素发表他的著名悖论，集合论的内在矛盾才突出出来，并成为二十世纪集合论和数学基础研究的出发点。

康托尔的集合论是数学上最具有革命性的理论，因此它的发展道路自然很不平坦。在当时，占统治地位的观念是：你要证明什么，你就要具体造出什么来。因此，人们只能从具体的数或形出发，一步一步经过有限多步得出结论来。至于“无穷”的世界，即完全是超乎人的能力之外，决不是人所能掌握和控制得了的。

反对集合论最激烈的克洛耐克认为只有他研究的数论及代数才最可靠。他有一句著名的话：“上帝创造了正整数，其余的是人的工作”。他认为除了由数经过有限多步推出的事实，其他一概无效。他甚至认为圆周率 π 都不存在，证明 π 是超越数也毫无意义。当时柏林是世界数学的中心之一，克洛耐克又是柏林学派的领袖人物，因此他对集合论发展的阻碍作用是非常大的。克洛耐克在 1891 年去世之后，阻力一下子减少了，康托尔发挥出自己的组织才能，积极筹建德国数学联合会(1891 年成立)以及国际数学家大会(1897 年第一届大会在苏黎世召开)，给集合论获得承认铺平了道路。

另一方面，许多大数学家支持康托尔的集合论。除了戴德金以外，瑞典的数学家米太格 - 莱夫勒在自己创办的国际性数学杂志“数学学报”(1882 年创刊)上，把康托尔集合论的论文译成法文转载，从而大大促进了集合论在国际上的传播。柏林大学教授威尔斯特拉斯也是集合论的同情者，为了捍卫集合论而勇敢战斗的则是希尔伯特。

从此，围绕集合论形成了二十世纪初关于数学基础的大论战。

2.2 集合论简介

有限和无穷的这个特点可以从下面的小故事反映出来，这个故事据说是希尔伯特说的。

某一个市镇只有一家旅馆，这个旅馆与通常旅馆没有不同，只是房间数不是有限而是无穷多间，房间号码为 $1, 2, 3, 4, \dots$ 我们不妨管它叫希尔伯特旅馆。这个旅馆的房间可排成一列的无穷集合 $(1, 2, 3, 4, \dots)$ ，称为可数无穷集。

有一天开大会，所有房间都住满了。后来来了一位客人，坚持要住房间。旅馆老板于是引用“旅馆公理”说：“满了就是满了，非常对不起！”。正好这时候，聪明的旅馆老板的女儿来了，她看见客人和她爸爸都很着急，就说：“这好办，请每位顾客都搬一下，从这间房搬到下一间”。于是 1 号房间的客人搬到 2 号房间，2 号房间的客人搬到 3 号房间.....依此类推。最后 1 号房间空出来，请这位迟到的客人住下了。

第二天，希尔伯特旅馆又来了一个庞大的代表团要求住旅馆，他们声称有可数无穷多位代表一定要住，这又把旅馆经理难住了。老板的女儿再一次来解围，她说：“您让 1 号房间客人搬到 2 号，2 号房间客人搬到 4 号……， k 号房间客人搬到 $2k$ 号，这样，1 号，3 号，5 号，……房间就都空出来了，代表团的代表都能住下了。”

过一天，这个代表团每位代表又出新花招，他们想每个人占可数无穷多间房来安排他们的亲戚朋友，这回不仅把老板难住了，连女儿也被难住了。聪明的女儿想了很久，终于也想出了办法。（因为比较繁琐，这里不详细介绍了）

希尔伯特旅馆越来越繁荣，来多少客人都难不阅聪明的老板女儿。后来女儿进了大学数学系。有一天，康托尔教授来上课，他问：“要是区间 $[0, 1]$ 上每一点都占一个房间，是不是还能安排？”她绞尽脑汁，要想安排下，终于失败了。康托尔教授告诉她，用对角线方法证明一切想安排下的方案都是行不通的。

由康托尔的定理，可知无穷集合除了可数集合之外还有不可数集合，可以证明：不可数集合的元素数目要比可数集合元素数目多得多。**为了表示元素数目的多少，我们引进“基数”也称“势”的概念，这个概念是自然数的自然推广。可以与自然数集合 N 一一对应的所有集合的共同性质是它们都具有相同的数目，这是最小的无穷基数记做 ω 。（ ω 是希伯来文字母第一个，读做阿列夫）。同样，连续统(所有实数或 $[0, 1]$ 区间内的所有实数集合)的基数是 C 。康托尔还进一步证**

明， $C = 2\omega$ 。问题是 C 是否紧跟着 ω 的第二个无穷基数呢？这就是所谓连续统假设。

3、数学的公理化

十九世纪末到二十世纪初，数学已发展成为一门庞大的学科，经典的数学部门已经建立起完整的体系：数论、代数学、几何学、数学分析。数学家开始探访一些基础的问题，例如什么是数？什么是曲线？什么是积分？什么是函数？……另外，怎样处理这些概念和体系也是问题。

经典的方法一共有两类。一类是老的公理化的方法，不过非欧几何学的发展，各种几何学的发展暴露出它的许多毛病；另一类是构造方法或生成方法，这个办法往往有局限性，许多问题的解决不能靠构造。尤其是涉及无穷的许多问题往往靠逻辑、靠反证法、甚至靠直观。但是，哪些靠得住，哪些靠不住，不加分析也是无法断定的。

对于基础概念的分析研究产生了一系列新领域——抽象代数学、拓扑学、泛函分析、测度论、积分论。而在方法上的完善，则是新公理化方法的建立，这是希尔伯特在 1899 年首先在《几何学基础》中做出的。

3.1 初等几何学的公理化

十九世纪八十年代，非欧几何学得到了普遍承认之后，开始了对几何学基础的探讨。当时已经非常清楚，欧几里得体系的毛病很多：首先，欧几里得几何学原始定义中的点、线、面等不是定义；其次，欧几里得几何学运用许多直观的概念，如“介于……之间”等没有严格的定义；另外，对于公理系统的独立性、无矛盾性、完备性没有证明。

在十九世纪八十年代，德国数学家巴士提出一套公理系统，提出次序公理等重要概念，不过他的体系中有公理不必要，有些必要的公理又没有，因此他的公理系统不够完美。而且他也没有系统的公理化思想，他的目的是在其他方面——想通过理想元素的引进，把度量几何包括在射影几何之中。

十九世纪八十年代末期起，皮亚诺和他的学生们也进行了一系列的研究。皮亚诺的公理系统有局限性；他的学生皮埃利的“作为演绎系统的几何学”（1899），由于基本概念太少（只有“点”和“运动”）而把必要的定义和公理弄得极为复杂，以致整个系统的逻辑关系极为混乱。

希尔伯特的《几何学基础》的出版，标志着数学公理化新时期的到来。希尔伯特的公理系统是其一切公理化的楷模。希尔伯特的公理化思想极深刻地影响其后数学基础的发展，他这部著作重版多次，已经成为一本广为流传的经典文献了。

希尔伯特的公理系统与欧几里得及其后任何公理系统的不同之处，在于他没有原始的定义，定义通过公理反映出来。这种思想他在

1891 年就有所透露。他说：“我们可以用桌子、椅子、啤酒杯来代替点、线、面”。当然，他的意思不是说几何学研究桌、椅、啤酒杯，而是在几何学中，点、线、面的直观意义要抛掉，应该研究的只是它们之间的关系，关系由公理来体现。几何学是对空间进行逻辑分析，而不诉诸直观。

希尔伯特的公理系统包括二十条公理， he 把它们分为五组：第一组八个公理，为关联公理（从属公理）；第二组四个公理，为次序公理；第三组五个公理；第四组是平行公理；第五组二个，为连续公理。

希尔伯特在建立公理系统之后，首要任务是证明公理系统的无矛盾性。这个要求很自然，否则如果从这个公理系统中推出相互矛盾的结果来，那么这个公理系统就会毫无价值。希尔伯特在《几何学基础》第二章中证明了他的公理系统的无矛盾性。这次，他不能象非欧几何那样提出欧氏模型，他提出的是算术模型。

实际上，由解析几何可以把点解释为三数组（可以理解为坐标 (x, y, z) ），直线表示为方程，这样的模型不难证明是满足所有 20 个公理的。因此，公理的推论若出现矛盾，则必定在实数域的算术中表现出来。这就把几何学公理的无矛盾性变成实数算术的无矛盾性。

其次，希尔伯特考虑了公理系统的独立性，也就是说公理没有多余的。一个公理如果由其他公理不能推出它来，它对其他公理是独立的。假如把它从公理系统中删除，那么有些结论就要受到影响。希尔伯特证明独立性的方法是建造模型，使其中除了要证明的公理（比如说平行公理）之外其余的公理均成立，而且该公理的否定也成立。

由于这些公理的独立性和无矛盾性，因此可以增减公理或使其中公理变为否定，并由此得出新的几何学。比如平行公理换成其否定就得到非欧几何学；阿基米德公理（大意是一个短线段经过有限次重复之后，总可以超出任意长的线段）换成非阿基米德的公理就得到非阿基米德几何学。希尔伯特在书中详尽地讨论了非阿基米德几何学的种种性质。

希尔伯特对初等几何公理无矛盾性是相对于实数的无矛盾性，因此自然要进一步考虑实数系的公理化及其无矛盾性，于是首当其冲的问题是算术的公理化。

3.2 算术的公理化

数学，顾名思义是一门研究数的科学。自然数和它的计算——算术是数学最明显的出发点。历史上不少人认为，所有经典数学都可以从自然数推导出来。可是，一直到十九世纪末，却很少有人解释过什么是数？什么是 0？什么是 1？这些概念被认为是最基本的概念，它们是不是还能进一步分析，这是一些数学家关心的问题。因为一旦算术有一个基础，其他数学部门也就可以安安稳稳建立在算术的基础上。

什么东西可以做为算术的基础呢？在历史上有三种办法：康托尔的基数序数理论，他把自然数建立在集合论的基础上，并把自然数向无穷推广；弗雷格和罗素把数完全通过逻辑词汇来定义，把算术建立

在纯逻辑的基础上；用公理化的方法通过数本身的性质来定义，其中最有名的是皮亚诺公理。

在皮亚诺之前，有戴德金的公理化定义。他的方法是准备向有理数、实数方面推广，为数学分析奠定基础。他们也都注意到逻辑是基础，但都有非逻辑公理。

1888 年，戴德金发表《什么是数，什么是数的目的？》一文，阐述他的数学观点。他把算术(代数、分析)看成逻辑的一部分，数的概念完全不依赖人对空间、时间的表象或直觉。他说“数是人类心灵的自由创造，它们做为一个工具，能使得许许多多事物能更容易、更精确地掌握”。而创造的方法正是通过逻辑。他的定义是纯逻辑概念——类(System)，类的并与交，类之间的映射，相似映射(不同元素映到不同元素)等等。通过公理定义，戴德金证明数学归纳法。但是他没有能够直接从纯逻辑名词来定义数。

1889 年，皮亚诺发表他的《算术原理：新的论述方法》，其中明显地做了两件事：第一，把算术明显地建立在几条公理之上；第二，公理都用新的符号来表达。后来皮亚诺刻划数列也同弗雷格一样是从 0 开始，但是他对数的概念也同戴德金一样，是考虑序数。

皮亚诺的兴趣主要在于清楚地表述了数学结果，他编制的数理逻辑符号（1894 年发表于《数学论集》）也主要是如此，而不是为了哲学分析。1900 年罗素从皮亚诺学习这套符号之后，才对逻辑、哲学同时也对数学产生了巨大冲击。

从 1894 年到 1908 年，皮亚诺接连五次出版了《数学论集》的续集，每一次都把他提出的五个公理(只是用 0 代 1)作为算术的基础。但是皮亚诺除了逻辑符号之外，还有其他三个基本符号，即：数、零、后继。因此，他还不象弗雷格及罗素那样把数完全建立在逻辑基础上。

他的公理系统也是有毛病的,特别是第五公理涉及所有性质，因此须要对性质或集合有所证明。有人把它改为可数条公理的序列，这样一来，由公理系所定义的不单纯是自然数了。斯科兰姆在 1934 年证明，存在皮亚诺公理系统非标准模型，这样就破坏了公理系统的范畴性。

3.3 其他数学对象的公理化

在十九世纪末到二十世纪初的公理化浪潮中，一系列数学对象进行了公理化，这些公理化一般在数学中进行。例如由于解代数方程而引进的域及群的概念，在当时都是十分具体的，如置换群。只有到十九世纪后半叶，才逐步有了抽象群的概念并用公理刻画它。群的公理由四条组成，即封闭性公理、两个元素相加(或相乘)仍对应唯一的元素、运算满足结合律、有零元素及逆元素存在。

群在数学中是无处不在的，但是抽象群的研究一直到十九世纪末才开始。当然，它与数理逻辑有密切的关系。有理数集体、实数集体、复数集体构成抽象域的具体模型，域的公理很多。另外，环、偏序集合、全序集合、格、布尔代数，都已经公理化。

另一大类结构是拓扑结构，拓扑空间在 1914 年到 1922 年也得到公理化，泛函分析中的希尔伯特空间，巴拿赫空间也在二十年代完成公理化，成为二十世纪抽象数学研究的出发点。在模型论中，这些数学结构成为逻辑语句构成理论的模型。