群 论　习题解答提示

1 仅平凡群{e}有零元，独异点（单位半群）的幂等元不一定惟一，但群的幂等元惟一。

3.1 原题表述为：

证明：　半群<G;o>是群的充要条件是满足如下两个条件：

1）G 中有左单位元 e_1;

2）对 $\forall a\in G$，有元素 $a^{-1}\in G$，使得 $a^{-1}oa=e_1$

提示：

注意：这里的 a^{-1} 仅表示与 a 相关的一个元素，并不是群中 a 的逆元之意。

注意到，$(a^{-1})^{-1}a^{-1}=e_1$，于是

$ae_1=e_1ae_1=(a^{-1})^{-1}a^{-1}ae_1=(a^{-1})^{-1}(a^{-1}a)e_1$

$=(a^{-1})^{-1}e_1e_1=(a^{-1})^{-1}(e_1e_1)=(a^{-1})^{-1}e_1$

$=(a^{-1})^{-1}(a^{-1})a=((a^{-1})^{-1}(a^{-1}))a=e_1a=a.$

从而，为 G 之单位元。进而易证 a^{-1} 即为 a 的逆元。

3.2 由于变换（映射）的复合运算o是可以结合的，恒等变换 $I=f_{1,0}\in G$，显然 I 为 G 单位元。下面只证明复合运算o在 G 上是封闭的，且 G 中每个元素有单位元。

事实上，　a,b,c,d∈Q，且 a,c≠0，对于 x∈Q，有

$(f_{ab}of_{cd})(x)=f_{ab}(f_{cd}(x))=a(cx+d)+b=acx+(ad+b)$，

又 ac≠0，ac，ad+b∈Q，故 $=f_{ac,ad+b}\in G$，所以，复合运算在 G 上是封闭的。

$f_{a,b}\in G$，a≠0，a，b∈Q，取 $f_{1/a,-b/a}\in G$，有

$f_{a,b}of_{1/a,-b/a}=f_{a(1/a),a(-b/a)+b}=f_{1,0}$

所以，f_{ab} 存在逆元 f。

综上，G 关于变换的复合运算o构成群。

4 首先要说明 H 能构成代数结构.

6 注意消去律的应用。解为 $a^{-1}bca^{-1}b^{-1}$

7 必要性显然。下面证明充分性。

设 $|G|=n$，$G=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$。

任意 a，b∈G，由 G 满足消去律易得

$b\in\{aa_1,aa_2,\cdots,aa_n\}$，即 b∈G.

于是，在 G 中必存在 $aa_i=b$（$1\le i\le n$），即方程 ax=b 在 G 中有解。

同理，方程 ya=b 在 G 中也有解。

所以，根据例 8.4 的结论知，G 作成群。

8 注意 Abel 群的可交换性。

9 首先构造出 3 阶群的运算表，再讨论。

10 任意 $a\in G$，则在序列 $a,a^2,a^3,\ldots,a^{|G|+1}$ 中至少有两个元素相同，不妨设 $a^r=a^s$（$1\leqslant s<r\leqslant|G|+1$）。

于是，$a^{r-s}=e$

所以，元素 a 的阶数至多为 $r-s\leqslant|G|$。

若元素 $a\in G$，$|a|=|G|$，则 G 中元素可以列举出来：设 $|a|=n$.

$G=\{a^0,a^1,a^2,\cdots,a^{n-1}\}$。注意到，G 显然非空。　且 g 中任意 n 个元素是互异的，否则，假设 $a^i=a^j(0\leqslant i<j<n)$，则 $a^{j-i}=e$，$j-i<n$，与 $|a|=n$ 矛盾。

11（1）设 $|a|=|a^{-1}|=r_1$（可根据教材证明 $|a|=|a^{-1}|$），

令 $|b^{-1}*a*b|=r_2$，则 $(b^{-1}*a*b)^{r1}$

$=(b^{-1}*a*b)*(b^{-1}*a*b)*\cdots*(b^{-1}*a*b)$

$=b^{-1}*a*(b*b^{-1})*a*(b*b^{-1})*\cdots*(b*b^{-1})*a*b$

$= b^{-1}*a^{r1}*b= b^{-1}*e*b=e$

故 $r_2 \mid r_1$ (1)

又$(b^{-1}*a*b)^{r2}=\cdots= b^{-1}* a^{r2}*b=e$

于是，$a^{r2}=b* b^{-1}=e$

故 $r_1 \mid r_2$ (2)

于是由(1)(2)知 $r_1= r_2$,

即 a，a^{-1}和 $b^{-1}*a*b$ 的周期相同。

(2) 设$|ab|=r_1$,令$|ba|= r_2$

则$(ab)^{r2}=\cdots=a(ba)^{r2-1}b=a(ba)^{r2}(ba)^{-1}b=\cdots=e$。

从而，$r_1|r_2$,

……。

（3）类似地，可以证明。

12 （1）注意到周期大于 2 的元素及其逆元是成对出现（不相等），因此，其个数为偶。

（2）注意到仅单位元 e 周期为 1，去除同期大于 2 的元素个数，余下即为周期为 2 的元素个数，并结合（1）易得结论。

13 设$\langle G,*\rangle$是一个群,e 为单位元,则

$\forall a\in G$，若 $a\neq e$，则 $a\neq a^{-1}$,

若 $a=a^{-1}$ 则 $a_2=e$，于是$\langle\{a,e\},*\rangle$是$\langle G,*\rangle$的阶为 2 的子群

由拉格朗日定理:$2 \mid |G|$，即群 G 阶数为偶数，矛盾.

所以，$\forall a\in G$，若 $a\neq e$,a、a^{-1}总是成对出现，

于是,G 可以表示为：$\{e,a_1,a_1^{-1},a2,a_2^{-1},\ldots,a_n,a_n^{-1}\}$，其中 $a_i\neq a_i^{-1}$

故 $e*a_1* a_1^{-1}*\ldots* a_n * a_n^{-1}=e*e*\cdots*e=e$.

15 易证明$\langle H\cap K; *\rangle$是 G 之子群；但 $H\cup K$ 不是，当 $a\in H$，$b\in K$ 时不能确定 $ab^{-1}\in H\cup K$。

17 思路：显然 $C\subseteq A$,需要证明

对$\forall x,y\in C, xy^{-1}\in C$,

即 $f(xy^{-1})=g(xy^{-1})$

亦即 $f(x)f(y^{-1})=g(x)g(y^{-1})$ (*)

$f(x)=g(x)$是显然的，需要证明 $f(y^{-1})=g(y^{-1})$.

又根据群间同态映射的性质有 $f(e)=g(e)=e'$，其中 e'为 B 的单位元

即 $f(yy^{-1})=g(yy^{-1})$，亦即 $f(y)f(y^{-1})=g(y)g(y^{-1})$,

而 $f(y)=g(y)$是显然的,

于是由群的消去律可得 $f(y^{-1})=g(y^{-1})$.

综上，命题得证.

18 显然 A 非空且 $A\subseteq G$,需要证明对$\forall x,y\in A, xy^{-1}\in A$.

对$\forall x,y\in A$,有 $xHx^{-1}=H$, $yHy^{-1}=H$.

由 $yHy^{-1}=H$ 可得 $y^{-1}Hy=H$.

于是$(xy^{-1})H(xy^{-1})^{-1}=x(y^{-1}H(y^{-1})^{-1})x^{-1}$

$=xHx^{-1}=H$.

因此，$xy^{-1}\in A$，故$\langle A; *\rangle$是$\langle G; *\rangle$的一个子群.

19 1）HK 显然非空.

必要性

对$\forall hk\in HK, h\in H, k\in K$，有$h^{-1}\in H$，$k^{-1}\in K$，且
有$(hk)^{-1}=k^{-1}h^{-1}\in KH$.
从而有$hk=((hk)^{-1})^{-1}\in KH$ (KH 为子群)
故$HK\subseteq KH$
类似地可以证明$KH\subseteq HK$.
综上两方面，知KH=HK。
2）充分性
显然$HK\subseteq G$,需要证明对$\forall h_1k_1, h_2k_2\in HK, h_1k_1(h_2k_2)^{-1}\in HK$,其中$h_1, h_2\in H, k_1, k_2\in K$.
而$h_1k_1(h_2k_2)^{-1}=hk_1k_2^{-1}h_2^{-1}=h_1k'h_2^{-1}$,其中$k'=k_1k_2^{-1}$.
由HK=KH，必存$h_3\in H, k_3\in K$在使得$k'h_2^{-1}=h_3k_3$.
于是$h_1k_1(h_2k_2)^{-1}=h_1h_3k_3=h_4k_3\in HK$，其中$h_4=h_1h_3$.
充分性得证.
综上1)、2),命题得证.
20
需要证明如下三个性质：
1)自反性：对于$\forall s\in S_n$,有$I^{-1}sI=s$,其中$I\in G$,为G的单位元(即恒等变换).因此有sRs.
2)对称性：对于$\forall s,t\in S_n$,若(s,t)R,即存在$g\in G$,使得$s=g^{-1}tg$.
由可得,$t=gsg^{-1}=(g^{-1})^{-1}sg^{-1}$,其中$g^{-1}G$.故tRs.
3)传递性：可以类似地证明.
21 S_3的二阶子群有$\{P_1, P_2\}$，$\{p_1, p_3\}$. $\{p_1, p_4\}$

$$P_1=\begin{pmatrix}123\\123\end{pmatrix}, P_2=\begin{pmatrix}123\\213\end{pmatrix}, P_3=\begin{pmatrix}123\\321\end{pmatrix}, P_4=\begin{pmatrix}123\\132\end{pmatrix}\ P_5=\begin{pmatrix}123\\231\end{pmatrix}\ P_6=\begin{pmatrix}123\\312\end{pmatrix}.$$

22 可以由Burnside定理计算得到：(6+2+0+0)/4=2个等价类（轨道）
23 请参考例8.30
24 1）是，-1，1为其生成元。
2）不是。
3）是，其中一个生成元为$e^{(2\pi/n)i}$即$\cos(2\pi/n)+i\sin(2\pi/n)$。
4) 是，生成元为m，或-m。
25 设|a|=n, 则$\{a^0, a^1, a^2, \cdots, a^{n-1}\}$可以构成G的n阶子群，再由拉格朗日定理可知，$|a|\mid|G|$
26 由拉格朗日定理易判定质数阶群G的子群要么是{e}，要么是其自身，没有其它子群。
设|a|=n>1, 则$H=\{a^0, a^1, a^2, \cdots, a^{n-1}\}$可以构成G的子群且H为循环群，因此G=H.
27 根据例8.14可以判定G的生成元有$a^1, a^2, a^4, a^7, a^8, a^{11}, a^{13}, a^{14}$
根据例8.16可以得到G的所有子群为$\langle e\rangle, \langle a\rangle, \langle a^3\rangle, \langle a^5\rangle$
28 下面仅分析2)、4)的证明思路：
2) 必要性 对于任意$b\in Ha$，不妨设$b=h_1a$，$h_1\in H$。于是，对于任意$hb\in Hb$，有
$hb=h(h_1a)=(hh_1)a$
由于H是群，所以$hh_1\in H$。于是
$hb=(hh_1)a\in Ha$，
故$Hb\subseteq Ha$
同理可证：$Ha\subseteq Hb$，于是Hb=Ha。
充分性 略
4) 充分性 若$ab^{-1}\in H$，则存在$h_1\in H$，使得
$h_1=ab^{-1}$。于是，有 $a=h_1b\in Hb$。

又据 2)可知：Ha=Hb。
必要性 若 Ha=Hb，则有

$a\in Ha=Hb$。于是存在 $h\in H$，使 $a=hb$.所以 $ab^{-1}=h\in H$。

29 1) $\langle 3\rangle=\{0,3,6,9\}$,其不同的子陪集有 3 个：

$0+\langle 3\rangle=3+\langle 3\rangle=\langle 3\rangle=\{0,3,6,9\}$

$1+\langle 3\rangle=4+\langle 3\rangle=7+\langle 3\rangle=10+\langle 3\rangle=\{1,4,7,10\}$

$2+\langle 3\rangle=5+\langle 3\rangle=8+\langle 3\rangle=11+\langle 3\rangle=\{2,5,8,10\}$

2) $\{f_1,f_2\}$有 3 个不同的左陪集：

$f_1\{f_1,f_2\}=\{f_1,f_2\}$， $f_3\{f_1,f_2\}=\{f_3,f_5\}$，$f_4\{f_1,f_2\}=\{f_4,f_6\}$.

30 设 g 为 G 到 H 的单同态映射，则 g 的同态象 g(G)是 H 的子群，g 为 G 到 g(G)的双射，g(G)为 m 阶群，从而知 $m|n$.

31 有 4 个左陪集：H, cH, c^2H, c^3H.

33 设 e 为 G 上之单位元，e' 为 G' 上之单位元，

由题设 $H\subseteq G$，显然 $e'\in H'$ 且 $f(e)=e'$

故 $e\in H$ 从而 $H\neq\phi$.

下面首先证明 H 为 G 子群，之后证明其为 G 之正规子群。

对$\forall$ a，$b\in H$,有 a'，$b'\in H'$，

使得 $a'=f(a)\in H'$，$b'=f(b)\in H'$,且$(f(b))^{-1}\in H'$，

又由 $f(b)\circ(f(b))^{-1}=e'=f(e)=f(b*b^{-1})=f(b)\circ f(b^{-1})$，有$(f(b))^{-1}=f(b^{-1})$

于是,由 $f(a*b^{-1})=f(a)\circ f(b^{-1})=f(a)\circ(f(b))^{-1}\in H'$ (H' 为 G' 之子群)

故 $a*b^{-1}\in H$ 所以 H 为 G 之子群。

进一步，类似地，对$\forall h\in H$,有 $a\in G$，有 $a'\in G'$，$h'\in H'$，

使得 $a'=f(a)\in G'$，$h'=f(h)\in H'$,且$(f(h))^{-1}\in H'$，

于是 $f(a*h*a^{-1})=f(a)\circ f(h)\circ f(a^{-1})=f(a)\circ f(h)\circ(f(a))^{-1}\in H'$ (H' 为 G' 之正规子群).

从而 $a*h*a^{-1}\in H$.

所以 H 为 G 之正规子群.

36.（注：为简便考虑，下面的证明过程忽略了运算符号）

首先，证明 N 为 G 正规子群：即 34 题证明过程

其次，构造以 G/N 到 G'/N' 的双射 f：

$\forall xN\in G/N$，$x\in G$，$f(xN)=f(x)N'$

下面首先证明 f 为双射，其次证明满足同态方程。

显然，$xN\in G/N$ 有像 $f(x)N'\in G'/N'$。

又对$\forall x_1$，$x_2\in G$，

有 $x_1N=x_2N$

$\Leftrightarrow x_1x_2^{-1}\in N$

$\Leftrightarrow f(x_1x_2^{-1})\in N'$

$\Leftrightarrow f(x_1)f(x_2)^{-1}\in N'$

$\Leftrightarrow f(x_1)N'=f(x_2)N'$

从而知，若 $x_1N=x_2N$ 则 $f(x_1)N'=f(x_2)N'$，故 是从 G/N 到 G'/N' 的函数。

且若 $f(x_1)N'=f(x_2)N'$ 则 $x_1N=x_2N$，故 是从 G/N 到 G'/N' 的单射。

又 f 是满射，

故 对$\forall x'N'\in G'/N'$ ($x'\in G'$)

存在 $x \in G$（$f(x) = x'$），$xN \in G/N$ 使 $f(xN) = f(x)N'$

故 f 是满射。

所以 f 为双射。

下面证明 f 满足同态方程：

对 $\forall x_1, x_2 \in G$，

有 $f(x_1Nx_2N)$

$= f(x_1x_2N)$（N 为正规子群）

$= f(x_1x_2)N'$

$= f(x_1)f(x_2)N'$

$= f(x_1)N'f(x_2)N'$（N′为正规子群）

$= f(x_1N)f(x_2N)$

从而同态方程满足.

综上，<G/N；*>与<G′/N′；o>同构.