

## <样卷>

### 一、填空题

1. (4分) 判定下列4个命题公式的类型(重言式、矛盾式、可满足式):

(1)  $P \rightarrow (Q \vee P) \vee R$  \_\_\_\_\_,

(2)  $((\neg(P \rightarrow Q)) \wedge Q) \wedge R$  \_\_\_\_\_,

(3)  $(P \wedge (P \rightarrow Q)) \rightarrow Q$  \_\_\_\_\_,

(4)  $\forall x \exists y G(x-y, x+y) \wedge (Q \vee \neg Q)$  \_\_\_\_\_, 其中  $x, y$  的个体域为整数集,  $Q$  为命题变元,  $G(x, y)$  表示  $x < y$ .

重言式、矛盾式、重言式、重言式

2. (2分) 求  $\forall x P(x, y) \rightarrow (\forall x Q(x) \rightarrow \exists y P(y, z))$  前束析取范式  $\exists x \exists y \exists z (\neg P(x, u) \vee \neg Q(v) \vee P(y, z))$ .

3. (3分) 下列推理形式不正确是(多选二) (2), (8).

(1)  $\forall x (A(x) \vee B) \Leftrightarrow \forall x A(x) \vee B$

(2)  $\forall x A(x) \vee \forall x B(x) \Leftrightarrow \forall x (A(x) \vee B(x))$

(3)  $\forall x (A(x) \wedge B(x)) \Leftrightarrow \forall x A(x) \wedge \forall x B(x)$

(4)  $\exists x (A(x) \rightarrow B) \Leftrightarrow \forall x A(x) \rightarrow B$

(5)  $\exists x (A(x) \rightarrow B(x)) \Rightarrow \exists x A(x) \rightarrow \exists x B(x)$

(6)  $\exists x (A(x) \rightarrow B(x)) \Leftrightarrow \forall x A(x) \rightarrow \exists x B(x)$

(7)  $\exists x (A(x) \vee B(x)) \Leftrightarrow \exists x A(x) \vee \exists x B(x)$

(8)  $\exists x (A(x) \wedge B(x)) \Leftrightarrow \exists x A(x) \wedge \exists x B(x)$

(9)  $\forall x \forall y (P(x) \rightarrow Q(y)) \Leftrightarrow \exists x P(x) \rightarrow \forall y Q(y)$

4. (2分) 下列推理序列中, 第 (4) 步推理是错误的.

(1)  $\exists x P(x)$        $P$

(2)  $P(c)$        $ES, (1)$

(3)  $\exists x Q(x)$        $P$

(4)  $Q(c)$        $ES, (2)$

5. (2分) 集合  $A$  基数为  $n$ , 则  $|P(A)| =$   $2^n$ .

6. (3分) 下列命题中, 不正确有(多选一) (4).

(1) 设  $A, B$  为任意两个集合, 则以下条件互相等价:

1)  $A \subseteq B$ ;      2)  $A \cup B = B$ ;      3)  $A \cap B = A$ .

(2) 设  $A, B$  为任意两个集合, 若  $A \subseteq B$ , 则  $P(A) \subseteq P(B)$ .

(3)  $A, B$  为集合,  $A \subseteq B$  和  $A \in B$  能同时成立.

(4) 下述2个命题中, 前者为假, 后者为真:

1) 若  $A \cup B = A \cup C$ , 则  $B = C$ ; 2) 若  $A \cap B = A \cap C$ , 则  $B = C$ .

(5) 若  $A \subseteq B$  且  $A \subseteq C$ , 则  $A \subseteq B \cap C$ .

(6) 设  $\rho$  是集合  $A$  上的等价关系, 则  $A$  关于  $\rho$  的商集  $A/\rho$  是  $A$  的一个划分.

7. (2分) 设  $A = \{x, y, z\}$ ,  $\langle P(A), \subseteq \rangle$  为偏序集, 请给出  $P(A)$  的最大元、最小元  $\{x, y, z\}, \emptyset$ .

8. (2分) 设  $A = \{a, b, c\}$ ,  $B = \{1, 2\}$ , 试问有多少个由  $A$  到  $B$  的满射函数 6.

9. (2分) 半群  $\langle A; * \rangle$  的单位元为  $e$ . 若其元素  $a, b$  的逆元为  $a^{-1}, b^{-1}$ , 则  $a * b$  的逆元为  $b^{-1} * a^{-1}$ .

10. (2分) 设  $g$  为代数结构  $\langle X; \circ \rangle$  到  $\langle Y; * \rangle$  的同构映射, 若  $\langle X; \circ \rangle$  存在单位元  $e_x$ , 则  $\langle Y; * \rangle$  亦存在单位元, 为  $g(e_x)$ .
11. (2分) 设  $R$  是代数结构  $\langle S; * \rangle$  上的同余关系,  $*$  为二元运算, 从而可以定义商代数  $\langle S/R; \circ \rangle$ , 请给出  $\circ$  的定义: 对于  $\forall [a], [b] \in S/R, [a] \circ [b] = [a * b]$ .
12. (4分) 下列表述不正确是 (多选二) (3)、(5).
- (1) 代数结构间的同构关系是等价关系.
- (2)  $\langle I; + \rangle$  上等价关系  $R = \{(x, y) \mid x/y = 2^n, n \in I\}$  不是同余关系.
- (3)  $A = \{a, b\}$ , 记  $S$  为  $A^A$ ,  $\circ$  为  $S$  上函数复合运算, 则  $\langle S; \circ \rangle$  构成代数结构, 但不存在单位元.
- (4) 设  $\langle G; * \rangle$  是一个群, 对于任意的  $a, b \in G$ , 方程  $x * a * x * b * a = x * b * c$  解存在且唯一.
- (5) 不存在有零元的群.
- (6) 有限群  $\langle G; * \rangle$  的每一元素具有有限阶, 且阶数至多为  $|G|$ .
- (7) 有限群  $\langle G; * \rangle$  的非空子集  $H$  以及  $*$  运算构成  $\langle G; * \rangle$  的子群的一个充要条件是:  
对任意的  $a, b \in H$ , 有  $a * b \in H$ .
- (8) 无限循环群  $\langle a \rangle$  有两个生成元, 即  $a$  与  $a^{-1}$ , 且  $\langle a \rangle$  与整数加群  $Z$  同构.
- (9) 有限群  $\langle G, * \rangle$  中的任何元素  $a$  的阶可整除  $G$  的阶.
13. (2分) 图  $G$  为  $n$  个结点、 $w$  个分图的森林, 则  $G$  边数为  $n-w$ ,  $G$  的度数之和为  $2(n-w)$ .
14. (2分)  $T$  为有  $t$  片叶的完全两分树, 则  $T$  有  $2(t-1)$  条边.
15. (2分) 无向完全图  $K_n$  的含 3 条边的所有非同构的生成子图数为 3. 欧拉图  $G$  有 0 个度数为奇数的结点.
16. (2分)  $n (n \geq 2)$  个结点的树、二分图的色数分别是多少? 2、2.
17. (2分) 设有一个连通平面图  $G$ , 共有  $n$  个结点  $e$  条边  $f$  个面, 则  $n, e, f$  关系为:  $n-e+f=2$ , 极大平面图的边数  $e$  与结点数  $n (n \geq 3)$  关系为  $e=3n-6$ .

## 二、解答题

1. (8分) 求  $(\neg P \rightarrow Q) \wedge (P \rightarrow R)$  的主析取范式和主合取范式.
2. (8分) 将下列推理符号化并给出形式证明:  
有理数都是实数, 有的有理数是整数, 因此有的实数是整数 (设个体域为全总个体域).
3. (9分) 设  $R_1$  是集合  $A$  上的一个二元关系,  $R_2 = \{(a, b) \mid a, b \in A, \text{存在 } c \in A, \text{使 } (a, c) \in R_1 \text{ 且 } (c, b) \in R_1\}$ , 请证明若  $R_1$  是  $A$  上的等价关系, 则  $R_2$  也是  $A$  上的等价关系.
4. (10分) 设  $S$  为正实数集合,  $*$  为  $S$  上的一般乘法,  $R$  为实数集合,  $+$  为  $R$  上的一般加法,  
(1) 试说明  $\langle S; * \rangle, \langle R; + \rangle$  均可构成代数结构. (2) 证明:  $\langle S; * \rangle$  与  $\langle R; + \rangle$  同构.
5. (8分) 若群  $G$  中元素  $x$  的周期是  $r$ , 则  $H = \{x^0, x^1, x^2, \dots, x^{r-1}\}$  为  $G$  之  $r$  阶子群.
6. (9分) 图  $G$  为  $n (n \geq 1)$  个结点、 $m$  条边的一棵树, 试用数学归纳法证明:  $m = n - 1$ .
7. (8分) 图  $G$  有  $n (n \geq 3)$  个结点, 其每一对不相邻结点的度数之和都大于或等于  $n$ ,  
(1) 证明  $G$  是连通图. (2) 给出证明  $G$  是哈密尔顿图的思路 (不要求给出详细证明过程).