# 习　题　六

## A　组

1．填空题

（1）已知向量 $\boldsymbol{a}=(1,-2,3)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{b}=(-4,t,6)^{\mathrm{T}}$，$[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]=7$，则 $t=$________.

**解**　$\dfrac{7}{2}$.

（2）设 $\|\boldsymbol{x}_0\|=4$，$\boldsymbol{A}$ 为正交矩阵，则 $\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_0\|=$________.

**解**　4.

（3）设 $\boldsymbol{P}$ 为 $n$ 阶可逆矩阵，$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}^3\boldsymbol{P}$，则 $\boldsymbol{B}$ 的特征值为________.

**解**　$a_1^3,a_2^3,\cdots,a_n^3$.

（4）已知3阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值分别为 $1,-1,2$，则矩阵 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^3-2\boldsymbol{A}^2$ 的特征值是________，$|\boldsymbol{B}|=$__

.

**解**　$-1,-3,0$;　0.

（5）如果 $n$ 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的元素全为1，那么 $\boldsymbol{A}$ 的 $n$ 个特征值是________.

**解**　$n,0,0,\cdots,0$.

（6）矩阵 $\begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ 的非零特征值是________.

**解** 4.

（7）设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$，其中 $\boldsymbol{P}$ 为三阶可逆矩阵，　则 $\boldsymbol{B}^{2004}-2\boldsymbol{A}^2=$________.

**解**　$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

（8）　　　　设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{3\times 3}$ 是实正交矩阵，且 $a_{11}=1$，$\boldsymbol{b}=(1,0,0)^{\mathrm{T}}$，则线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 的解是

.

解　$(1,0,0)^{\mathrm{T}}$.

（9）二次型 $f(x_1,x_2)=x_1^{\ 2}+2x_2^2-4x_1x_2$ 的矩阵是________.

解　$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$.

（10）二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^{\ 2}-2x_1x_2+2x_2^2-2x_1x_3+2x_2x_3+x_3^2$ 的秩是________.

解　2.

（11）二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1+x_2)^2+(x_2-x_3)^2+(x_3+x_1)^2$ 的秩为________.

解　2.

（12）二次型 $f=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 是正定的充分必要条件是实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值都是________.

解　正数.

2．选择题

（1）已知 $\|\boldsymbol{a}\|=1,\ \|\boldsymbol{b}\|=2,\ [\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]=1$，则向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为________.

（A）$0$；　　（B）$\dfrac{\pi}{4}$；　　（C）$\dfrac{\pi}{3}$；　　（D）$\dfrac{\pi}{2}$.

解　（C）.

（2）$n$ 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的两个不同的特征值所对应的特征向量________.

（A）线性相关；　　（B）线性无关；

（C）正交；　　（D）内积为 1.

解　（B）.

（3）设 $\boldsymbol{P}$ 为三阶可逆矩阵，$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 8 & 9 & 4 \\ 7 & 6 & 5 \end{pmatrix}$，$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 是 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ 的三个特征值，则 $\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3$ 的值为________.

（A）1；　　（B）10；　　（C）15；　　（D）19.

解　（C）.

（4）设 $\boldsymbol{P}$ 为可逆矩阵，$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$，$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{P}$，则矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的特征值和特征向量分别是______.

（A）$\lambda$ 和 $\boldsymbol{x}$；　　（B）$\lambda^{-1}$ 和 $\boldsymbol{x}$；　　（C）$\lambda^{-1}$ 和 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{x}$；　　（D）$\lambda$ 和 $\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}$.

解　（C）.

（5）设 $\boldsymbol{A}$ 是 $n$ 阶实对陈矩阵，$\boldsymbol{P}$ 是 $n$ 阶可逆矩阵．已知 $n$ 维列向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 $\lambda$ 的特征向量，则矩阵 $\left(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}\right)^{\mathrm{T}}$ 属于特征值 $\lambda$ 的特征向量是________.

（A）$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{\alpha}$；　　（B）$\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}$；　　（C）$\boldsymbol{P}\boldsymbol{\alpha}$；　　（D）$\left(\boldsymbol{P}^{-1}\right)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}$.

解 (B).

(6) 设$\lambda_1,\lambda_2$是矩阵$\boldsymbol{A}$的两个不同的特征值，对应的特征向量分别为$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$，则$\boldsymbol{\alpha}_1$，

$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)$线性无关的充分必要条件是________.

(A) $\lambda_1\neq 0$； (B) $\lambda_2\neq 0$； (C) $\lambda_1=0$； (D) $\lambda_2=0$.

解 (B).

(7) 设$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$为$n$阶矩阵，且$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}$相似，$\boldsymbol{E}$为$n$阶单位矩阵，则下列命题正确的是________.

(A) $\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}$； (B) $\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}$有相同的特征值与特征向量；

(C) $\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}$都相似于一个对角矩阵； (D) 对任意常数$t$，$t\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$与$t\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}$相似.

解 (D).

(8) $n$阶方阵$\boldsymbol{A}$具有$n$个不同的特征值是$\boldsymbol{A}$与对角矩阵相似的________.

(A) 充分必要条件； (B) 充分非必要条件；

(C) 必要非充分条件； (D) 既非充分也非必要条件.

解 (B).

(9) 设矩阵$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$，已知矩阵$\boldsymbol{A}$相似于$\boldsymbol{B}$，则$R(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})$与$R(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})$之和等于________.

(A) 2； (B) 3； (C) 4； (D) 5.

解 (C).

(10) 设$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}4&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$，则$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}$ ________.

(A) 合同且相似； (B) 合同但不相似； (C) 不合同但相似； (D) 不合同且不相似.

解 (A).

(11) 二次型$f(x_1,x_2,x_3)=a(x_1{}^2+x_2{}^2+x_3{}^2)+4x_1x_2+4x_1x_3+4x_2x_3$经正交变换$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$可以化成

标准形$f=6y_1^2$，则$a$的值是________.

(A) 1； (B) 2； (C) 3； (D) 无法确定.

解 (B).

3．利用 Schimidt 正交化方法将下列向量组规范正交化.

(1) $\boldsymbol{a}_1=(1,2,-1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{a}_2=(-1,3,1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{a}_3=(4,-1,0)^{\mathrm{T}}$；

解 先正交化

$$\boldsymbol{b}_1=\boldsymbol{a}_1=(1,2,-1)^{\mathrm{T}},$$

$$\boldsymbol{b}_2=\boldsymbol{a}_2-\frac{[\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{a}_2]}{[\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_1]}\boldsymbol{b}_1=\frac{5}{3}(-1,1,1)^{\mathrm{T}},$$

$$\boldsymbol{b}_3=\boldsymbol{a}_3-\frac{[\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{a}_3]}{[\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_1]}\boldsymbol{b}_1-\frac{[\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{a}_3]}{[\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{b}_2]}\boldsymbol{b}_2=(2,0,2)^{\mathrm{T}},$$

再单位化得

$$\boldsymbol{e}_1=\frac{\boldsymbol{b}_1}{\|\boldsymbol{b}_1\|}=\frac{1}{\sqrt{6}}(1,2,-1)^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{e}_2=\frac{\boldsymbol{b}_2}{\|\boldsymbol{b}_2\|}=\frac{1}{\sqrt{3}}(-1,1,1)^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{e}_3=\frac{\boldsymbol{b}_3}{\|\boldsymbol{b}_3\|}=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1)^{\mathrm{T}}.$$

（2） 矩阵$\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&-1&1\\-1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$的列向量组.

**解** 先正交化，

$$\boldsymbol{b}_1=\boldsymbol{a}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\1\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{b}_2=\boldsymbol{a}_2-\frac{[\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{a}_2]}{[\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_1]}\boldsymbol{b}_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\1\end{pmatrix}-\frac{2}{3}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\1\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\-3\\2\\1\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{b}_3=\boldsymbol{a}_3-\frac{[\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{a}_3]}{[\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_1]}\boldsymbol{b}_1-\frac{[\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{a}_3]}{[\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{b}_2]}\boldsymbol{b}_2=\begin{pmatrix}-1\\1\\1\\0\end{pmatrix}+\frac{2}{3}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\1\end{pmatrix}+\frac{2}{15}\begin{pmatrix}1\\-3\\2\\1\end{pmatrix}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}-1\\3\\3\\4\end{pmatrix}.$$

再单位化得

$$\boldsymbol{e}_1=\frac{\boldsymbol{b}_1}{\|\boldsymbol{b}_1\|}=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{e}_2=\frac{\boldsymbol{b}_2}{\|\boldsymbol{b}_2\|}=\frac{1}{\sqrt{15}}\begin{pmatrix}1\\-3\\2\\1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{e}_3=\frac{\boldsymbol{b}_3}{\|\boldsymbol{b}_3\|}=\frac{1}{\sqrt{35}}\begin{pmatrix}-1\\3\\3\\4\end{pmatrix}.$$

4．设向量$\boldsymbol{a}_1=(1,1,1)^{\mathrm{T}}$，求非零向量$\boldsymbol{a}_2$，$\boldsymbol{a}_3$，使得$\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$，$\boldsymbol{a}_3$是正交向量组.

**解** 根据题意，$\boldsymbol{a}_2$，$\boldsymbol{a}_3$应满足方程$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}_1=0$，即$x+y+z=0$．解得基础解系为$\xi_1=(-1,1,0)^{\mathrm{T}}$和$\xi_2=(-1,0,1)^{\mathrm{T}}$．正交化得到

$$\boldsymbol{a}_2=\xi_1=(-1,1,0)^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{a}_3=\xi_2-\frac{[\xi_2,\boldsymbol{a}_2]}{[\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_2]}\xi_1=-\frac{1}{2}(1,1,-2)^{\mathrm{T}}.$$

5．求下列矩阵的特征值和特征向量.

（1）$\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & 4\end{pmatrix}$；　　（2）$\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\\ -4 & 3 & 0\\ 1 & 0 & 2\end{pmatrix}$；　　（3）$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 1 & 3\\ 3 & 3 & 6\end{pmatrix}$.

**解**　（1）特征多项式为$\begin{vmatrix}1-\lambda & -1\\ 2 & 4-\lambda\end{vmatrix}=(\lambda-3)(\lambda-2)$，得到特征值为$\lambda_1=2, \lambda_2=3$.

对于$\lambda_1=2$，解齐次线性方程组$\begin{pmatrix}-1 & -1\\ 2 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$，得基础解系$\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}$，对应的特征向量可取

$\boldsymbol{p}_1=k_1\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix},\ k_1\neq 0$.

对于$\lambda_2=3$，解齐次线性方程组$\begin{pmatrix}-2 & -1\\ 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$，得基础解系$\begin{pmatrix}-1\\ 2\end{pmatrix}$，对应的特征向量可取

$\boldsymbol{p}_2=k_2\begin{pmatrix}-1\\ 2\end{pmatrix},\ k_2\neq 0$.

（2）特征多项式为

$$|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}|=\begin{vmatrix}-1-\lambda & 1 & 0\\ -4 & 3-\lambda & 0\\ 1 & 0 & 2-\lambda\end{vmatrix}=(2-\lambda)(1-\lambda)^2,$$

得到特征值为值$\lambda_1=\lambda_2=1,\ \lambda_3=2$.

对于$\lambda_1=\lambda_2=1$，解齐次线性方程组

$$\begin{pmatrix}-2 & 1 & 0\\ -4 & 2 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix},$$

得基础解系$\begin{pmatrix}1\\ 2\\ -1\end{pmatrix}$，对应的特征向量可取$\boldsymbol{p}_1=k_1\begin{pmatrix}1\\ 2\\ -1\end{pmatrix},\ k_1\neq 0$.

对于$\lambda_3=2$，解齐次线性方程组$\begin{pmatrix}-3 & 1 & 0\\ -4 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$，得基础解系$\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$，对应的特征向量可取

$\boldsymbol{p}_2=k_2\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 1\end{pmatrix}\ k_2\neq 0$.

（3）特征多项式为$|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}|=\lambda(1+\lambda)(9-\lambda)$，得到特征值为$\lambda_1=0, \lambda_2=-1, \lambda_3=9$.

对于 $\lambda_1=0$，解齐次线性方程组 $(\boldsymbol{A}-0\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，得基础解系 $\xi_1=\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$，特征向量为

$k_1\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$, $k_1\neq 0$.

对于 $\lambda_2=-1$，解齐次线性方程组 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，得基础解系 $\boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$，特征向量为

$k_2\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$, $k_2\neq 0$.

对于 $\lambda_3=9$，解齐次线性方程组 $(\boldsymbol{A}-9\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，得基础解系 $\boldsymbol{\xi}_3=\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$，特征向量为

$k_3\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$, $k_3\neq 0$.

6．设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3&-1\\1&1\end{pmatrix}$，$\varphi(A)=16\boldsymbol{E}+8\boldsymbol{A}+4\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{A}^3+\boldsymbol{A}^4$，求 $\varphi(\boldsymbol{A})$ 的特征值和特征向量.

**解**　$\boldsymbol{A}$ 的特征多项式为

$$|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}|=\begin{vmatrix}3-\lambda&-1\\1&1-\lambda\end{vmatrix}=(\lambda-2)^2,$$

得到 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=2$.

对于 $\lambda_1=\lambda_2=2$，解齐次线性方程组 $\begin{pmatrix}1&-1\\1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$，得特征向量 $\boldsymbol{\xi}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$.

因为 2 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，所以 $\varphi(2)=80$ 是 $\varphi(\boldsymbol{A})$ 的特征值，$k\boldsymbol{\xi}=k\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ 为 $\varphi(\boldsymbol{A})$ 的全部特征向量

$(k\neq 0)$.

7．证明

（1）若 $n$ 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}^2$，则 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 0 或 1；

（2）若 $n$ 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^k=\boldsymbol{E}$，则 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 $\lambda$ 满足 $\lambda^k=1$.

**证明** （1）设 $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$ 满足 $\boldsymbol{Ax}=\lambda\boldsymbol{x}$，$\lambda$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，则 $\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x}=\lambda^2\boldsymbol{x}$，故 $\lambda\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x}=\lambda^2\boldsymbol{x}$，得 $\lambda(\lambda-1)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，因为 $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$，所以 $\lambda=0$ 或 $\lambda=1$.

（2）设 $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$ 满足 $\boldsymbol{Ax}=\lambda\boldsymbol{x}$，则 $\lambda^k\boldsymbol{x}=\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Ex}=\boldsymbol{x}$. 因此 $(\lambda^k-1)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，而 $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$，故 $\lambda^k=1$.

8．设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&a&1\\a&1&b\\1&b&1\end{pmatrix}$ 与 $\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$ 相似，求 $a$，$b$.

**解** 由于 $\boldsymbol{A}$ 的特征值与 $\boldsymbol{\Lambda}$ 的特征值相同，也是 0，1，2，因此

$$\begin{cases}|\boldsymbol{A}|=-(b-a)^2=0\times1\times2=0,\\|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}|=2ab=0,\end{cases}$$

得 $a=b=0$.

9．设方阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-2&-4\\-2&x&-2\\-4&-2&1\end{pmatrix}$ 与 $\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}5&&\\&y&\\&&-4\end{pmatrix}$ 相似，求 $x,y$.

**解** 由 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{\Lambda}$ 相似可知，$\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=5,\lambda_2=y,\lambda_3=-4$，于是

$$\begin{cases}1+x+1=5+y-4,\\|\boldsymbol{A}+4\boldsymbol{E}|=\begin{vmatrix}5&-2&-4\\-2&x+4&-2\\-4&-2&5\end{vmatrix}=9x-36=0,\end{cases}$$

得 $x=4$，$y=5$.

10．设 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 均为 $n$ 阶方阵，$|\boldsymbol{A}|\neq0$，证明 $\boldsymbol{AB}$ 与 $\boldsymbol{BA}$ 相似.

**证明** 由 $|\boldsymbol{A}|\neq0$ 知 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 存在，于是

$$\boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A})\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{BA},$$

因此 $\boldsymbol{AB}$ 与 $\boldsymbol{BA}$ 相似.

11．若 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似，$\boldsymbol{C}$ 与 $\boldsymbol{D}$ 相似，则分块矩阵 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{0}\\\boldsymbol{0}&\boldsymbol{C}\end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}&\boldsymbol{0}\\\boldsymbol{0}&\boldsymbol{D}\end{pmatrix}$ 相似.

**证明** 由条件可知，存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}_1$，$\boldsymbol{P}_2$，使得

$$\boldsymbol{P}_1^{-1}\boldsymbol{AP}_1=\boldsymbol{B},\quad \boldsymbol{P}_2^{-1}\boldsymbol{CP}_2=\boldsymbol{D},$$

于是

$$\begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_1^{-1}AP_1 & 0 \\ 0 & P_2^{-1}CP_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_1^{-1}A & 0 \\ 0 & P_2^{-1}C \end{pmatrix}\begin{pmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_1^{-1} & 0 \\ 0 & P_2^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}\begin{pmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}\begin{pmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{pmatrix},$$

所以$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}$与$\begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}$相似.

12．已知 3 阶矩阵 $A$ 与三维向量 $x$，使得向量组 $x$，$Ax$，$A^2x$ 线性无关，且满足

$$A^3x = 3Ax - 2A^2x.$$

（1）记 $P = (x, Ax, A^2x)$，求三阶矩阵 $B$，使 $A = PBP^{-1}$；

（2）计算行列式 $|A+E|$.

**解** （1）设 $B = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$，则由 $AP = PB$ 得

$$(Ax, A^2x, A^3x) = (x, Ax, A^2x)\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}.$$

上式可写为

$$Ax = a_1x + b_1Ax + c_1A^2x,$$

$$A^2x = a_2x + b_2Ax + c_2A^2x,$$

$$A^3x = a_3x + b_3Ax + c_3A^2x.$$

将 $A^3x = 3Ax - 2A^2x$ 代入得

$$3Ax - 2A^2x = a_3x + b_3Ax + c_3A^2x.$$

由于 $x$，$Ax$，$A^2x$ 线性无关，故

$$a_1 = c_1 = 0, b_1 = 1;$$

$$a_2 = b_2 = 0, c_2 = 1;$$

$$a_3 = 0, b_3 = 3, c_3 = -2,$$

从而$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&3\\0&1&-2\end{pmatrix}$.

（2）由（1）知$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}$相似，故$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}$与$\boldsymbol{B}+\boldsymbol{E}$相似，从而

$$|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}|=|\boldsymbol{B}+\boldsymbol{E}|=\begin{vmatrix}1&0&0\\1&1&3\\0&1&-1\end{vmatrix}=-4.$$

13．求下列矩阵多项式.

（1）设$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3&-2\\-2&3\end{pmatrix}$，求$\varphi(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{A}^{10}-5\boldsymbol{A}^{9}$；

（2）$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&1&2\\1&2&2\\2&2&1\end{pmatrix}$，求$\varphi(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{A}^{10}-6\boldsymbol{A}^{9}+5\boldsymbol{A}^{8}$.

**解**　（1）由$|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}|=(1-\lambda)(5-\lambda)=0$得特征值为

$$\lambda_1=1,\ \lambda_2=5.$$

对于$\lambda_1=1$，解方程组$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$得特征向量$\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$，取$\boldsymbol{p}_1=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$.

对于$\lambda_2=5$，解方程组$(\boldsymbol{A}-5\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$得特征向量$\boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$，取$\boldsymbol{p}_2=\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$.

令$\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2)=\begin{pmatrix}1&-1\\1&1\end{pmatrix}$，则$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}1&\\&5\end{pmatrix}$，于是

$$\boldsymbol{A}^{9}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}^{9}\boldsymbol{P}^{-1}=\begin{pmatrix}1&-1\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&\\&5^9\end{pmatrix}\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&1\\-1&1\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1+5^9&1-5^9\\1-5^9&1+5^9\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{A}^{10}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}^{10}\boldsymbol{P}^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1+5^{10}&1-5^{10}\\1-5^{10}&1+5^{10}\end{pmatrix},\quad \varphi(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{A}^{10}-5\boldsymbol{A}^{9}=-2\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}.$$

（2）由$|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}|=-(\lambda+1)(\lambda-5)(\lambda-1)=0$求得特征值

$$\lambda_1=-1,\ \lambda_2=1,\ \lambda_3=5.$$

对于$\lambda_1=-1$，解方程组$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，得$\boldsymbol{p}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$.

对于 $\lambda_2=1$，解方程组 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，得 $\boldsymbol{p}_2=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$.

对于 $\lambda_1=5$，解方程组 $(\boldsymbol{A}-5\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，得 $\boldsymbol{p}_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.

因此，$\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{p}_1,\ \boldsymbol{p}_2,\ \boldsymbol{p}_3)=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&-1&1\\-2&0&1\end{pmatrix}$，且 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}-1&&\\&1&\\&&5\end{pmatrix}$，

$$\boldsymbol{A}^8=\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}^8\boldsymbol{P}^{-1}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&-1&1\\-2&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}(-1)^8&&\\&1^8&\\&&5^8\end{pmatrix}\frac{1}{6}\begin{pmatrix}1&1&-2\\3&-3&0\\2&2&2\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2+5^8&-1+5^8&-1+5^8\\-1+5^8&2+5^8&-1+5^8\\-1+5^8&-1+5^8&2+5^8\end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned}\varphi(\boldsymbol{A})&=\boldsymbol{A}^{10}-6\boldsymbol{A}^9+5\boldsymbol{A}^8=\boldsymbol{A}^8(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A}-5\boldsymbol{E})\\&=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2+5^8&-1+5^8&-1+5^8\\-1+5^8&2+5^8&-1+5^8\\-1+5^8&-1+5^8&2+5^8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&2\\1&1&2\\2&2&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-3&1&2\\1&-3&2\\2&2&-4\end{pmatrix}\\&=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2+5^8&-1+5^8&-1+5^8\\-1+5^8&2+5^8&-1+5^8\\-1+5^8&-1+5^8&2+5^8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&2&-4\\2&2&-4\\-4&-4&8\end{pmatrix}\\&=2\begin{pmatrix}1&1&-2\\1&1&-2\\-2&-2&4\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

14．求一个正交相似变换矩阵，把下列对称矩阵化为对角矩阵．

（1）$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&-2&0\\-2&1&-2\\0&-2&0\end{pmatrix}$；　　（2）$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&2&-2\\2&5&-4\\-2&-4&5\end{pmatrix}$.

**解**　（1）由 $|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}|=(\lambda-1)(4-\lambda)(2+\lambda)=0$，得到 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=-2,\ \lambda_2=1,\ \lambda_3=4$，

对于 $\lambda_1=-2$，解齐次线性方程组 $(\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 得特征向量 $\xi_1=\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$，单位化得 $\boldsymbol{p}_1=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$.

对于 $\lambda_2=1$，解齐次线性方程组 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 得特征向量 $\xi_2=\begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix}$，单位化得 $\boldsymbol{p}_2=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}$.

对于 $\lambda_3=4$，解齐次线性方程组 $(\boldsymbol{A}-4\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 得特征向量 $\xi_3=\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}$，单位化得 $\boldsymbol{p}_1=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}$.

写出正交矩阵 $\boldsymbol{P}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&-2\\2&-2&1\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\begin{pmatrix}-2&&\\&1&\\&&4\end{pmatrix}$.

（2）由 $|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}|=(\lambda-1)^2(10-\lambda)=0$，得到 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=10,\ \lambda_2=\lambda_3=1$.

对于 $\lambda_1=10$，解齐次线性方程组 $(\boldsymbol{A}-10\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 得特征向量 $\xi_1=\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix}$，单位化得 $\boldsymbol{p}_1=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix}$.

对于 $\lambda_2=\lambda_2=1$ 时，解齐次线性方程组 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 得特征向量 $\xi_2=\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$, $\xi_3=\begin{pmatrix}-2\\2\\1\end{pmatrix}$.

$\xi_1$, $\xi_2$, $\xi_3$ 是正交向量组，将 $\xi_2,\xi_3$ 单位化得 $\boldsymbol{p}_2=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{p}_3=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-2\\2\\1\end{pmatrix}$. 取正交矩阵

$\boldsymbol{P}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&2&-2\\2&1&2\\-2&2&1\end{pmatrix}$，则有 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\begin{pmatrix}10&&\\&1&\\&&1\end{pmatrix}$.

15．设三阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $6,3,3$，与特征值 $6$ 对应的特征向量为 $\boldsymbol{p}_1=(1,1,1)^{\mathrm{T}}$，求矩阵 $\boldsymbol{A}$.

**解**　设 $\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_3$ 分别是对应于特征值 $6,3,3$ 的特征向量，则 $\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_3$ 应与 $\boldsymbol{p}_1$ 正交，即满足方程

$x_1+x_2+x_3=0$，解得 $\boldsymbol{p}_2=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}, \boldsymbol{p}_3=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$，于是

$$\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_3)=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\1&1&0\\1&0&1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\begin{pmatrix}6&&\\&3&\\&&3\end{pmatrix},$$

因此，

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}6&&\\&3&\\&&3\end{pmatrix}\boldsymbol{P}^{-1}=\begin{pmatrix}4&1&1\\1&4&1\\1&1&4\end{pmatrix}.$$

16．设 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 为同阶方阵，

（1）如果 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 相似，试证 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 的特征多项式相等；

（2）举一个二阶方阵的例子说明（1）的逆命题不成立；

（3）当 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 均为实对称矩阵时，试证（1）的逆命题成立．

解 （1）若 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 相似，则存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{B}$，故

$$\begin{aligned}|\lambda \boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}| &= |\boldsymbol{P}^{-1}\lambda \boldsymbol{EP}-\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}| = |\boldsymbol{P}^{-1}(\lambda \boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{P}| \\ &= |\boldsymbol{P}^{-1}(\lambda \boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{P}| = |\boldsymbol{P}^{-1}||\lambda \boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}||\boldsymbol{P}| \\ &= |\lambda \boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|.\end{aligned}$$

（2）令 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$，则 $|\lambda \boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=|\lambda \boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}|=\lambda^2$，但 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 不相似．否则由 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{B}=\boldsymbol{0}$ 得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{0}$，矛盾．

（3）$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 均为实对称矩阵时，$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 均相似于对角阵．若 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 的特征多项式相等，则特征值相等，记为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$，有 $\boldsymbol{A}$ 相似于 $\begin{pmatrix}\lambda_1&&\\&\ddots&\\&&\lambda_n\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}$ 也相似于 $\begin{pmatrix}\lambda_1&&\\&\ddots&\\&&\lambda_n\end{pmatrix}$，存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，$\boldsymbol{Q}$ 使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\begin{pmatrix}\lambda_1&&\\&\ddots&\\&&\lambda_n\end{pmatrix}=\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{BQ}$，于是 $(\boldsymbol{PQ}^{-1})^{-1}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{PQ}^{-1})=\boldsymbol{B}$，由 $\boldsymbol{PQ}^{-1}$ 可逆知 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 相似．

17．设三阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 $2$，$\lambda_1=\lambda_2=6$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的二重特征值．若 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,0)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(2,1,1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(-1,2,-3)^{\mathrm{T}}$，都是 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 6 的特征向量．

（1）求 $\boldsymbol{A}$ 的另一特征值和对应的特征向量；

（2）求矩阵 $\boldsymbol{A}$．

解 （1）因为 $\lambda_1=\lambda_2=6$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的二重特征值，故 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 6 的线性无关的特征向量有 2 个．由题设知 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,0)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(2,1,1)^{\mathrm{T}}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 6 的线性无关特征向量．

又 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 2，于是 $|\boldsymbol{A}|=0$，所以 $\boldsymbol{A}$ 的另一特征值 $\lambda_3=0$．设 $\lambda_3=0$ 所对应的特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}=(x_1,x_2,x_3)^{\mathrm{T}}$，则有 $\boldsymbol{\alpha}_1{}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=0$，$\boldsymbol{\alpha}_2{}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=0$，即

$$\begin{cases}x_1+x_2 & =0,\\ 2x_1+x_2+x_3 & =0.\end{cases}$$

解得基础解系为 $\boldsymbol{\alpha}=(-1,1,1)^{\mathrm{T}}$，故 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 $\lambda_3=0$ 全部特征向量为 $k\boldsymbol{\alpha}=k(-1,1,1)^{\mathrm{T}}$，其中 $k$ 为任意不为零的常数．

(2) 令矩阵 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha})$，则 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\begin{pmatrix}6&&\\&6&\\&&0\end{pmatrix}$，所以

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}6&&\\&6&\\&&0\end{pmatrix}\boldsymbol{P}^{-1}=\begin{pmatrix}1&2&-1\\1&1&1\\0&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6&&\\&6&\\&&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&-1\\\frac{1}{3}&-\frac{1}{3}&\frac{2}{3}\\-\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&2&2\\2&4&-2\\2&-2&4\end{pmatrix}.$$

18．用矩阵表示下列二次型.

(1) $f(x,y,z)=x^2+2y^2-8z^2-4xy+6yz$；

(2) $f(x_1,x_2,x_3,x_4)=5x_1^2+3x_2^2-x_3^2+x_4^2+2x_1x_2-4x_1x_3+6x_1x_4+8x_2x_4$.

**解** (1) $f(x,y,z)=(x,y,z)\begin{pmatrix}1&-2&0\\-2&2&3\\0&3&-8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$.

(2) $f=(x_1,x_2,x_3,x_4)\begin{pmatrix}5&1&-2&3\\1&3&0&4\\-2&0&-1&0\\3&4&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}$.

19．用正交变换法将下列二次型化为标准型.

(1) $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+6x_2^2+2x_3^2+8x_1x_3$；

(2) $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+3x_2^2+3x_3^2+4x_2x_3$；

(3) $f(x_1,x_2,x_3,x_4)=x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+2x_1x_2-2x_1x_4-2x_2x_3+2x_3x_4$.

**解** (1) 二次型的矩阵为 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&0&4\\0&6&0\\4&0&2\end{pmatrix}$，由 $|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}|=0$ 求得 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为

$\lambda_1=-2,\ \lambda_2=\lambda_3=6$.

对于 $\lambda_1=-2$，解 $(\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 得特征向量 $\boldsymbol{p}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$.

对于 $\lambda_2=\lambda_3=6$，解 $(\boldsymbol{A}-6\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 得特征向量

$$\boldsymbol{p}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{p}_3=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}.$$

$\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_3$ 是正交的，单位化后并写成正交矩阵

$$\boldsymbol{P}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&\sqrt{2}&0\\-1&0&1\end{pmatrix}.$$

令 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$，这一正交变换把原二次型化为标准形

$$f=-2y_1^2+6y_2^2+6y_3^2.$$

（2）二次型的矩阵为 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&3&2\\0&2&3\end{pmatrix}$，由 $\left|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}\right|=(2-\lambda)(\lambda-1)(\lambda-5)=0$ 求得 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为

$$\lambda_1=1,\lambda_2=2,\lambda_3=5.$$

对于 $\lambda_1=1$，解方程组 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 得特征向量 $\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$，单位化得 $\boldsymbol{p}_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$.

对于 $\lambda_2=2$，解方程组 $(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 得特征向量 $\boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$，单位化得 $\boldsymbol{p}_2=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$.

对于 $\lambda_3=5$，解方程组 $(\boldsymbol{A}-5\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 得特征向量 $\boldsymbol{\xi}_3=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$，单位化得 $\boldsymbol{p}_3=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$.

于是正交矩阵 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_3)=\begin{pmatrix}0&1&0\\-\frac{1}{\sqrt{2}}&0&\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&0&\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$，在正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$ 下，$f=y_1^2+2y_2^2+5y_3^2$.

（3）二次型的矩阵为

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&0&-1\\1&1&-1&0\\0&-1&1&1\\-1&0&1&1\end{pmatrix}.$$

由$\left|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}\right|=(\lambda+1)(\lambda-1)^2(\lambda-3)=0$得$\boldsymbol{A}$的特征值

$$\lambda_1=-1,\ \lambda_2=\lambda_3=1,\ \lambda_4=3.$$

对于$\lambda_1=-1$，解方程组$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$得特征向量$\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\\1\end{pmatrix}$，单位化得$\boldsymbol{p}_1=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\\1\end{pmatrix}$.

对于$\lambda_2=\lambda_3=1$，解方程组$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$得$\boldsymbol{A}$的特征向量

$$\boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\xi}_3=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix},$$

$\boldsymbol{\xi}_2$，$\boldsymbol{\xi}_3$是正交的，只需单位化得$\boldsymbol{p}_2=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{p}_3=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}$.

对于$\lambda_4=3$，解方程组$(\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$得特征向量$\boldsymbol{\xi}_4=\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\\1\end{pmatrix}$，单位化得$\boldsymbol{p}_4=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\\1\end{pmatrix}$.

写出正交矩阵

$$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&\frac{1}{\sqrt{2}}&0\\-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&0&\frac{1}{\sqrt{2}}\\-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&\frac{1}{\sqrt{2}}&0\\\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0&\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix},$$

在正交变换$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$下，$f=-y_1^2+3y_2^2+y_3^2+y_4^2$.

20．用配方法化下列二次型为标准形，并写出变换矩阵.

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^{\ 2}+2x_2^2+x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3+4x_2x_3.$$

**解**

$$f(x_1,x_2,x_3)=(x_1+x_2+x_3)^2+(x_2+x_3)^2-x_3^{\ 2}=y_1^2+y_2^2-y_3^2,$$

其中，

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 + x_3, \\ y_2 = \quad\quad x_2 + x_3, \\ y_3 = \quad\quad\quad\quad x_3, \end{cases} \quad 即 \quad \begin{cases} x_1 = y_1 - y_2, \\ x_2 = \quad\quad y_2 - y_3, \\ x_3 = \quad\quad\quad\quad y_3, \end{cases}$$

故所用的变换矩阵为$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

21．判定下列二次型的正定性.

（1） $f(x_1,x_2,x_3)=5x_1^2+6x_2^2+4x_3^2-4x_1x_2-4x_2x_3$；

（2） $f(x_1,x_2,x_3)=10x_1^2+2x_2^2+x_3^2+8x_1x_2+24x_1x_3-28x_2x_3$.

**解** （1） 二次型的矩阵为$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 5 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}$，因为

$$5>0,\ \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 6 \end{vmatrix}=26>0,\ \begin{vmatrix} 5 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \end{vmatrix}=84>0,$$

所以 $f$ 正定.

（2） 二次型的矩阵为$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 10 & 4 & 12 \\ 4 & 2 & -14 \\ 12 & -14 & 1 \end{pmatrix}$，因为

$$10>0,\ \begin{vmatrix} 10 & 4 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}>0,\ \begin{vmatrix} 10 & 4 & 12 \\ 4 & 2 & -14 \\ 12 & -14 & 1 \end{vmatrix}<0,$$

所以 $f$ 非正定，也非负定.

22．确定 $t$ 的取值范围，使得下列的二次型为正定.

（1） $f(x_1,x_2,x_3)=5x_1^2+x_2^2+tx_3^2+4x_1x_2-2x_1x_3-2x_2x_3$；

（2） $f(x_1,x_2,x_3)=tx_1^2+x_2^2+5x_3^2-2tx_1x_2-2x_1x_3+4x_2x_3$.

**解** （1）二次型的矩阵为$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & t \end{pmatrix}$. 要使 $f$ 正定，就要求 $\boldsymbol{A}$ 的顺序主子式都大于零，即

$$5>0,\ \begin{vmatrix}5&2\\2&1\end{vmatrix}=1>0,\ \begin{vmatrix}5&2&-1\\2&1&-1\\-1&-1&t\end{vmatrix}=t-2>0,$$

得$t>2$．即当$t>2$时，$f$是正定的．

（2）二次型的矩阵为$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}t&-t&-1\\-t&1&2\\-1&2&5\end{pmatrix}$．要使$f$正定，就要求$\boldsymbol{A}$的顺序主子式都大于零，即

$$t>0,\ \begin{vmatrix}t&-t\\-t&1\end{vmatrix}=t(1-t)>0,\ \begin{vmatrix}t&-t&-1\\-t&1&2\\-1&2&5\end{vmatrix}=-5t^2+5t-1>0,$$

得$\dfrac{5-\sqrt{5}}{10}<t<\dfrac{5+\sqrt{5}}{10}$．即当$\dfrac{5-\sqrt{5}}{10}<t<\dfrac{5+\sqrt{5}}{10}$时，$f$是正定的．

23．设$\boldsymbol{A}$是可逆实矩阵，证明$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$是正定矩阵．

**证明**　由$(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$知，$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$是对称矩阵．对任意的$\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$，有$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$，所以

$$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\left(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\right)\boldsymbol{x}=\left(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\right)^{\mathrm{T}}\left(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\right)=\left\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\right\|^2>0,$$

从而$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$是正定矩阵．

24．设$\boldsymbol{A}$是三阶实对称矩阵，已知$\boldsymbol{A}$的秩$R\left(\boldsymbol{A}\right)=2$，且满足条件$\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{A}=\boldsymbol{0}$，

（1）求$\boldsymbol{A}$的全部特征值；

（2）当$k$为何值时，矩阵$\boldsymbol{A}+k\boldsymbol{E}$为正定矩阵，其中$\boldsymbol{E}$为三阶单位矩阵．

**解**　（1）设$\lambda$为$\boldsymbol{A}$的一个特征值，对应的特征向量为$\boldsymbol{\alpha}$，则$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}=\lambda\boldsymbol{\alpha}\left(\boldsymbol{\alpha}\neq\boldsymbol{0}\right)$，$\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\alpha}=\lambda^2\boldsymbol{\alpha}$，于是$\left(\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{A}\right)\boldsymbol{\alpha}=\left(\lambda^2+2\lambda\right)\boldsymbol{\alpha}$．由条件$\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{A}=\boldsymbol{0}$得$\left(\lambda^2+2\lambda\right)\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0}$．又$\boldsymbol{\alpha}\neq\boldsymbol{0}$，所以$\lambda^2+2\lambda=0$，即$\lambda=-2$或$\lambda=0$．因为实对称矩阵$\boldsymbol{A}$必可对角化，又$R\left(\boldsymbol{A}\right)=2$，所以$\boldsymbol{A}$与对角矩阵

$\begin{pmatrix}-2&&\\&-2&\\&&0\end{pmatrix}$相似．因此，矩阵$\boldsymbol{A}$的全部特征值为$\lambda_1=\lambda_2=-2,\lambda_3=0.$

（2）矩阵$\boldsymbol{A}+k\boldsymbol{E}$仍为实对称矩阵，由（1）知$\boldsymbol{A}+k\boldsymbol{E}$的全部特征值为$-2+k,-2+k,k.$于是，当$k>2$时，$\boldsymbol{A}+k\boldsymbol{E}$的全部特征值大于零，从而矩阵$\boldsymbol{A}+k\boldsymbol{E}$为正定矩阵．

## B　组

1．已知向量 $\boldsymbol{a}=(1,k,1)^{\mathrm{T}}$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{pmatrix}$ 的逆矩阵 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 的特征向量，求常数 $k$ 的值．

**解**　设 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 的特征向量 $\boldsymbol{a}=(1,k,1)^{\mathrm{T}}$ 对应的特征值为 $\lambda$，则有 $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{A}\boldsymbol{a}$，即

$$\begin{pmatrix}1\\k\\1\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\k\\1\end{pmatrix},$$

解得 $k=-2$ 或 $1$．

2．若矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&2&0\\8&2&a\\0&0&6\end{pmatrix}$ 相似于对角阵 $\boldsymbol{\Lambda}$，试确定常数 $a$ 的值；并求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}$.

**解**　矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式为

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-2&-2&0\\-8&\lambda-2&-a\\0&0&\lambda-6\end{vmatrix}=(\lambda-6)\left[(\lambda-2)^2-16\right]=(\lambda-6)^2(\lambda+2),$$

故 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=6,\lambda_3=-2$.

由于 $\boldsymbol{A}$ 相似于对角矩阵 $\boldsymbol{\Lambda}$，故 $\lambda_1=\lambda_2=6$ 应有两个线性无关的特征向量，即 $3-R(6\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=2$，于是有 $R(6\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=1$．由

$$6\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}4&-2&0\\-8&4&-a\\0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}2&-1&0\\0&0&a\\0&0&0\end{pmatrix}$$

知 $a=0$．

因此，对应于 $\lambda_1=\lambda_2=6$ 的两个线性无关的特征向量可取为 $\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$， $\xi_2=\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$.

当 $\lambda_3=-2$ 时，$-2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-4&-2&0\\-8&-4&0\\0&0&-8\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}2&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$，解方程组 $\begin{cases}2x_1+x_2=0,\\x_3\qquad\;\,=0,\end{cases}$ 得对应于 $\lambda_3=-2$ 的特征向量 $\boldsymbol{\xi}_3=\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}$.

令 $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}0&1&1\\0&2&-2\\1&0&0\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{P}$ 可逆，并有 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}$.

3．设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3&2&2\\2&3&2\\2&2&3\end{pmatrix},\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&0&1\end{pmatrix},\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{P}$，求 $\boldsymbol{B}+2\boldsymbol{E}$ 的特征值和特征向量.

**解**　计算出

$$\boldsymbol{P}^{-1}=\begin{pmatrix}0&1&-1\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix},\qquad \boldsymbol{A}^*=\begin{pmatrix}5&-2&-2\\-2&5&-2\\-2&-2&5\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}7&0&0\\-2&5&-4\\-2&-2&3\end{pmatrix},\qquad \boldsymbol{B}+2\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}9&0&0\\-2&7&-4\\-2&-2&5\end{pmatrix}.$$

由 $|\boldsymbol{B}+2\boldsymbol{E}-\lambda\boldsymbol{E}|=(3-\lambda)(\lambda-9)^2=0$ 得 $\boldsymbol{B}+2\boldsymbol{E}$ 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=9,\ \lambda_3=3$.

对于 $\lambda_1=\lambda_2=9$，由 $(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 求得对应的线性无关特征向量为 $\boldsymbol{p}_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\ \boldsymbol{p}_2=\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}$. 因此，对应于 $\lambda_1=\lambda_2=9$ 的全部特征向量为 $k_1\boldsymbol{p}_1+k_2\boldsymbol{p}_2$， $k_1,k_2$ 不同时为零.

对于 $\lambda_3=3$，由 $(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 求得特征向量为 $\boldsymbol{p}_3=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$. 因此，对应于 $\lambda_3=3$ 的全部特征向量为 $k_3\boldsymbol{p}_3$， $k_3$ 不为零.

4．设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 相似，且 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -3 & -3 & a \end{pmatrix}$， $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$，

（1）求 $a,b$ 的值；

（2）求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B}$．

**解** （1）由于 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 相似，所以 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 有相同的特征值，即 $\lambda_1=\lambda_2=2,\ \lambda_3=b$．由于 $2$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的二重特征值，所以 $2$ 是 $|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}|=(2-\lambda)\left[\lambda^2-(a+3)\lambda+3(a-1)\right]=0$ 的二重根，解得 $a=5$．

由 $|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}|=(2-\lambda)(\lambda^2-8\lambda+12)=(2-\lambda)^2(6-\lambda)$ 得到 $b=\lambda_3=6$．

（2）对于 $\lambda_1=\lambda_2=2$，解方程组 $(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 得基础解系 $\boldsymbol{p}_1=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{p}_2=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

对于 $\lambda_3=6$，解方程组 $(\boldsymbol{A}-6\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 得基础解系 $\boldsymbol{p}_3=\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

令 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3)=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$，有 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B}$．

5．已知 $\boldsymbol{p}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & a & 3 \\ -1 & b & -2 \end{pmatrix}$ 的一个特征向量，

（1）求 $a, b$ 的值和特征向量 $\boldsymbol{p}$ 对应的特征值；

（2）问 $\boldsymbol{A}$ 是否可对角化？说明理由．

**解** （1）由

$$(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})\boldsymbol{p}=\begin{pmatrix} 2-\lambda & -1 & 2 \\ 5 & a-\lambda & 3 \\ -1 & b & -2-\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}=\boldsymbol{0}$$

得

$$\begin{cases} 2-\lambda-1-2=0, \\ 5+a-\lambda-3=0, \\ -1+b+2+\lambda=0. \end{cases}$$

解得 $a=-3,\ b=0,\ \lambda=-1$．

（2）因为 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2 & -1 & 2\\ 5 & -3 & 3\\ -1 & 0 & -2\end{pmatrix}$，所以 $|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}|=-(\lambda+1)^3$，$\lambda=-1$ 是三重根．但 $R(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})=2$，从而 $\lambda=-1$ 对应的线性无关的特征向量只有一个，故 $\boldsymbol{A}$ 不能对角化．

6．设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 1\\ 1 & 1 & a\end{pmatrix}$ 可逆，向量 $\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}1\\ b\\ 1\end{pmatrix}$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}^*$ 的一个特征向量，$\lambda$ 是 $\boldsymbol{\alpha}$ 对应的特征值，其中 $\boldsymbol{A}^*$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵．试求 $a,b$ 和 $\lambda$ 的值．

解　矩阵 $\boldsymbol{A}^*$ 属于特征值 $\lambda$ 的特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}$，由于矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆，故 $\boldsymbol{A}^*$ 可逆.于是 $\lambda\neq 0$，$|\boldsymbol{A}|\neq 0$，且 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{\alpha}=\lambda\boldsymbol{\alpha}$．两边同时左乘矩阵 $\boldsymbol{A}$，得 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{\alpha}=\lambda\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}=\dfrac{|\boldsymbol{A}|}{\lambda}\boldsymbol{\alpha}$，即

$$\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 1\\ 1 & 1 & a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ b\\ 1\end{pmatrix}=\frac{|\boldsymbol{A}|}{\lambda}\begin{pmatrix}1\\ b\\ 1\end{pmatrix}.$$

由此，得方程组

$$\begin{cases}3+b=\dfrac{|\boldsymbol{A}|}{\lambda},\\ 2+2b=\dfrac{|\boldsymbol{A}|}{\lambda}b,\\ a+b+1=\dfrac{|\boldsymbol{A}|}{\lambda}.\end{cases}$$

由第一、二个方程解得 $b=1$，或 $b=-2$．由第一、三个方程解得 $a=2$．

由于　$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}2 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 1\\ 1 & 1 & a\end{vmatrix}=3a-2=4$，故特征向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 所对应的特征值 $\lambda=\dfrac{|\boldsymbol{A}|}{3+b}=\dfrac{4}{3+b}$．所以，当 $b=1$ 时 $\lambda=1$；　当 $b=-2$ 时 $\lambda=4$．

7．设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 2 & -3\\ -1 & 4 & -3\\ 1 & a & 5\end{pmatrix}$ 的特征方程有一个二重根，求 $a$ 的值，并讨论 $\boldsymbol{A}$ 是否可相似对角化．

解　$\boldsymbol{A}$ 的特征多项式为

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -2 & 3\\ 1 & \lambda-4 & 3\\ -1 & -a & \lambda-5\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda-2 & -(\lambda-2) & 0\\ 1 & \lambda-4 & 3\\ -1 & -a & \lambda-5\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-2)\begin{vmatrix}1 & -1 & 0\\ 1 & \lambda-4 & 3\\ -1 & -a & \lambda-5\end{vmatrix}=(\lambda-2)(\lambda^2-8\lambda+18+3a).$$

当 $\lambda=2$ 是特征方程的二重根时，则有 $2^2-16+18+3a=0$, 解得 $a=-2$.

当 $a=-2$ 时，$\boldsymbol{A}$ 的特征值为 2, 2, 6， 矩阵 $2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & -2 & 3\\ 1 & -2 & 3\\ -1 & 2 & -3\end{pmatrix}$ 的秩为 1，故 $\lambda=2$ 对应的线性无关的特征向量有两个，从而 $\boldsymbol{A}$ 可相似对角化.

若 $\lambda=2$ 不是特征方程的二重根，则 $\lambda^2-8\lambda+18+3a$ 为完全平方，从而 $18+3a=16$，解得 $a=-\frac{2}{3}$.

当 $a=-\frac{2}{3}$ 时，$\boldsymbol{A}$ 的特征值为 2, 4, 4，矩阵 $4\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3 & -2 & 3\\ 1 & 0 & 3\\ -1 & \frac{2}{3} & -1\end{pmatrix}$ 的秩为 2，故 $\lambda=4$ 对应的线性无关的特征向量只有一个，从而 $\boldsymbol{A}$ 不可相似对角化.

8．设 $n$ 阶矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & b & \cdots & b\\ b & 1 & \cdots & b\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ b & b & \cdots & 1\end{pmatrix}$,

（1）求 $\boldsymbol{A}$ 的特征值和特征向量;

（2）求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$ 为对角矩阵.

**解** （1）① 当 $b\neq 0$ 时，

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -b & \cdots & -b\\ -b & \lambda-1 & \cdots & -b\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ -b & -b & \cdots & \lambda-1\end{vmatrix}=[\lambda-1-(n-1)b][\lambda-(1-b)]^{n-1}.$$

得 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=1+(n-1)b$，$\lambda_2=\cdots=\lambda_n=1-b$.

对于 $\lambda_1=1+(n-1)b$，

$$\lambda_1 E - A = \begin{pmatrix} (n-1)b & -b & \cdots & -b \\ -b & (n-1)b & \cdots & -b \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -b & -b & \cdots & (n-1)b \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} (n-1) & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & (n-1) & \cdots & -1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & -1 & \cdots & (n-1) \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} n-1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \\ -1 & n-1 & \cdots & -1 & -1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ -1 & -1 & \cdots & n-1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1-n \\ -1 & n-1 & \cdots & -1 & -1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ -1 & -1 & \cdots & n-1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1-n \\ 0 & n & \cdots & 0 & -n \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & n & -n \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

可解得$\boldsymbol{\xi}_1 = (1,1,1,\cdots,1)^{\mathrm{T}}$，所以$\boldsymbol{A}$的属于$\lambda_1$的全部特征向量为$k\boldsymbol{\xi}_1 = k(1,1,1,\cdots,1)^{\mathrm{T}}$，其中$k$为任意不为零的常数.

对于$\lambda_2 = 1-b$，有

$$\lambda_2 E - A = \begin{pmatrix} -b & -b & \cdots & -b \\ -b & -b & \cdots & -b \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -b & -b & \cdots & -b \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

可解得$\boldsymbol{\xi}_2 = (1,-1,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\xi}_3 = (1,0,-1,\cdots,0)^{\mathrm{T}}$，$\cdots$，$\boldsymbol{\xi}_n = (1,0,0,\cdots,-1)^{\mathrm{T}}$. 故$\boldsymbol{A}$的属于$\lambda_2$的全部特征向量为$k_2\boldsymbol{\xi}_2 + k_3\boldsymbol{\xi}_3 + \cdots + k_n\boldsymbol{\xi}_n$，其中$k_2, k_3, \cdots, k_n$是不全为零的常数.

②当$b=0$时，

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda-1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda-1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda-1 \end{vmatrix} = (\lambda-1)^n.$$

因此特征值为$\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 1$，任意非零列向量均为特征向量.

（2）①当$b \neq 0$时，$\boldsymbol{A}$有$n$个线性无关的特征向量，令$\boldsymbol{P} = (\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \cdots, \boldsymbol{\xi}_n)$，则

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1+(n-1)b & & & \\ & 1-b & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1-b\end{pmatrix}.$$

②当$b=0$时，$A=E$，对任意可逆矩阵$P$，均有$P^{-1}AP=E$.

9．设$A$为三阶矩阵，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$是线性无关的三维列向量，且满足$A\alpha_1=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$，$A\alpha_2=2\alpha_2+\alpha_3$，$A\alpha_3=2\alpha_2+3\alpha_3$.

（1）求矩阵$B$，使得$A(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)B$；

（2）求矩阵$A$的特征值；

（3）求可逆矩阵$P$，使得$P^{-1}AP$为对角矩阵.

**解** （1）由$A(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}1&0&0\\1&2&2\\1&1&3\end{pmatrix}$可知，$B=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&2&2\\1&1&3\end{pmatrix}$.

（2）因为$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$是线性无关的三维列向量，可知矩阵$C=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$可逆，所以$C^{-1}AC=B$，即矩阵$A$与$B$相似，由此可得矩阵$A$与$B$有相同的特征值．由

$$|\lambda E-B|=\begin{vmatrix}\lambda-1&0&0\\-1&\lambda-2&-2\\-1&-1&\lambda-3\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda-4)=0,$$

得矩阵$B$的特征值，也即矩阵$A$的特征值$\lambda_1=\lambda_2=1,\lambda_3=4$.

（3）对应于$\lambda_1=\lambda_2=1$，解齐次线性方程组$(E-B)x=0$，得基础解系$\xi_1=(-1,1,0)^{\mathrm{T}}$，$\xi_2=(-2,0,1)^{\mathrm{T}}$.

对应于$\lambda_3=4$，解齐次线性方程组$(4E-B)x=0$，得基础解系$\xi_3=(0,1,1)^{\mathrm{T}}$.

令矩阵$Q=(\xi_1,\xi_2,\xi_3)=\begin{pmatrix}-1&-2&0\\1&0&1\\0&1&1\end{pmatrix}$，则 $Q^{-1}BQ=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&4\end{pmatrix}$．因

$$Q^{-1}BQ=Q^{-1}C^{-1}ACQ=(CQ)^{-1}A(CQ),$$

记矩阵

$$P=CQ=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}-1&-2&0\\1&0&1\\0&1&1\end{pmatrix}=(-\alpha_1+\alpha_2,-2\alpha_1+\alpha_3,\alpha_2+\alpha_3),$$

$\boldsymbol{P}$ 即为所求的可逆矩阵.

10．设实对称矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & -1 \\ 1 & -1 & a \end{pmatrix}$，求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ 为对角矩阵，并计算 $|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}|$.

解　由 $|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}|=-(\lambda-a-1)^2(\lambda-a+2)=0$，得到 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 $\lambda_1=\lambda_2=a+1,\quad \lambda_3=a-2$.

对于 $\lambda_1=\lambda_2=a+1$，由 $(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，求得两个线性无关的特征向量 $\boldsymbol{p}_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{p}_2=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

对于 $\lambda_3=a-2$，由 $(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，求得对应的特征向量 $\boldsymbol{p}_3=\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

令 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_3)=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$，则

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix} a+1 & & \\ & a+1 & \\ & & a-2 \end{pmatrix}.$$

并且，

$$|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}|=|\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{P}^{-1}-\boldsymbol{P}\boldsymbol{P}^{-1}|=|\boldsymbol{P}||\boldsymbol{\Lambda}-\boldsymbol{E}||\boldsymbol{P}^{-1}|=|\boldsymbol{\Lambda}-\boldsymbol{E}|=a^2(a-3).$$

11．设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$，线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\beta}$ 有解但不惟一，

（1）求 $a$ 的值；

（2）求正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$，使得 $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}$ 是对角矩阵.

解　（1）因为线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\beta}$ 有解但不惟一，所以 $|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \end{vmatrix}=-(a-1)^2(a+2)=0$. 当 $a=1$ 时，$R(\boldsymbol{A})\neq R(\boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{\beta})$，方程组无解. 当 $a=-2$ 时，$R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{\beta})$，方程组有解但不惟一. 因此，$a=-2$.

（2）可计算出 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$，于是由 $|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}|=\lambda(3-\lambda)(3+\lambda)=0$，得到 $\lambda_1=3$，$\lambda_2=-3$，$\lambda_3=0$.

由 $(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 求得对应的特征向量分别为 $\boldsymbol{p}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{p}_2=\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{p}_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$. 单位化后（已是正交的）得到正交矩阵

$$\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}.$$

于是，$\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}3 & & \\ & -3 & \\ & & 0\end{pmatrix}$.

12．已知二次型 $f=2x_1^2+3x_2^2+3x_3^2+2ax_2x_3\ (a>0)$ 可以通过正交变换化成标准形 $f=y_1^2+2y_2^2+5y_3^2$，求参数 $a$ 及所用的正交变换.

**解** 二次型的矩阵为 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 3 & a\\ 0 & a & 3\end{pmatrix}$. 由题意知 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=1,\ \lambda_2=2,\ \lambda_3=5$. 将 $\lambda_1=1$ 代入

$$\left|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}\right|=(2-\lambda)(\lambda^2-6\lambda+9-a^2)=0，a>0，$$

得 $a=2$. 于是 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 2\\ 0 & 2 & 3\end{pmatrix}$.

对于 $\lambda_1=1$，解方程组 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 得特征向量 $\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$，单位化得 $\boldsymbol{p}_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$.

对于 $\lambda_2=2$，解方程组 $(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 得特征向量 $\boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$，取 $\boldsymbol{p}_2=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$.

对于 $\lambda_3=5$，解方程组 $(\boldsymbol{A}-5\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 得特征向量 $\boldsymbol{\xi}_3=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$，单位化得 $\boldsymbol{p}_3=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$.

故所用的正交变换矩阵为$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$.

13．判断二次型$f=\sum_{i=1}^{n}x_i^2+\sum_{i=1}^{n-1}x_ix_{i+1}$是否正定.

**解**　二次型的矩阵为

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}.$$

计算得到$\boldsymbol{A}$的任意$k$阶顺序主子式$\left|\boldsymbol{A}_k\right|=\left(\frac{1}{2}\right)^k(k+1)>0$，因此，二次型是正定的.

14．设二次型$f=ax_1^2+2x_2^2-2x_3^2+2bx_1x_3\ (b>0)$，其中二次型的矩阵$\boldsymbol{A}$的特征值之和为$1$，特征值之积为$-12$.

（1）求$a,b$的值；

（2）利用正交变换把二次型$f$化为标准形，并写出所用的正交变换和对应的正交矩阵.

**解**　（1）二次型对应的矩阵为$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & 2 & 0 \\ b & 0 & -2 \end{pmatrix}$. 设$\boldsymbol{A}$的特征值为$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$，则

$$\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=a+2-2=1,$$

$$\lambda_1\lambda_2\lambda_3=\begin{vmatrix} a & 0 & b \\ 0 & 2 & 0 \\ b & 0 & -2 \end{vmatrix}=-4a-2b^2=-12.$$

解得 $a=1,\ b=2$.

（2）由 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&2\\0&2&0\\2&0&-2\end{pmatrix}$，得 $|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}|=-(\lambda-2)^2(\lambda+3)$，于是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=2,\lambda_3=-3$.

对于 $\lambda_1=\lambda_2=2$，由 $(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，求得两个线性无关的特征向量 $\boldsymbol{p}_1=\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{p}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$.

对于 $\lambda_3=-3$，由 $(\boldsymbol{A}+3\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，求得特征向量 $\boldsymbol{p}_3=\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix}$.

由于 $\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_3$ 已是正交，单位化后得到正交矩阵

$$\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}\frac{2}{\sqrt5}&0&\frac{1}{\sqrt5}\\0&1&0\\\frac{1}{\sqrt5}&0&-\frac{2}{\sqrt5}\end{pmatrix}.$$

于是有 $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}2&&\\&2&\\&&-3\end{pmatrix}$. 在正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$ 下，有

$$f=2y_1^2+2y_2^2-3y_3^2.$$

15．证明二次型 $f=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 在 $\|\boldsymbol{x}\|=1$ 时的最大（小）值为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的最大（小）特征值.

**证明** 设存在正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$，将 $f=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 化为标准形

$$f=\lambda_1{y_1}^2+\lambda_2{y_2}^2+\cdots+\lambda_n{y_n}^2.$$

不妨设 $\lambda_1$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值中的最大值，则

$$f=\lambda_1{y_1}^2+\lambda_2{y_2}^2+\cdots+\lambda_n{y_n}^2\le\lambda_1({y_1}^2+{y_2}^2+\cdots+{y_n}^2).$$

由于正交变换不改变向量的长度，而 $\|\boldsymbol{x}\|=1$，所以 $\|\boldsymbol{y}\|=1$，故

$$f=\lambda_1{y_1}^2+\lambda_2{y_2}^2+\cdots+\lambda_n{y_n}^2\le\lambda_1({y_1}^2+{y_2}^2+\cdots+{y_n}^2)=\lambda_1.$$

并且，$f$ 可以达到上限 $\lambda_1$，只要取 $y_1=1,y_2=\cdots=y_n=0$ 即可.

故二次型 $f=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 在 $\|\boldsymbol{x}\|=1$ 时的最大值为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的最大特征值．最小值的情形同理可证．

16．设 $\boldsymbol{U}$ 为可逆矩阵，$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{U}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{U}$，证明 $f=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 是正定二次型．

**证明** 设 $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$，由 $\boldsymbol{U}$ 为可逆矩阵知 $\boldsymbol{U}\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$，于是

$$f=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{U}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{U}\boldsymbol{x}=(\boldsymbol{U}\boldsymbol{x})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{U}\boldsymbol{x}=\|\boldsymbol{U}\boldsymbol{x}\|^2>0,$$

故 $f=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 是正定二次型．

17．设对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为正定矩阵，证明存在可逆矩阵 $\boldsymbol{U}$，使得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{U}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{U}$．

**证明** 若 $\boldsymbol{A}$ 为正定阵，则存在正交矩阵 $\boldsymbol{P}$，使得

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix},$$

其中，每个 $\lambda_i>0$．而

$$\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}\sqrt{\lambda_1} & & & \\ & \sqrt{\lambda_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sqrt{\lambda_n}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sqrt{\lambda_1} & & & \\ & \sqrt{\lambda_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sqrt{\lambda_n}\end{pmatrix}\square\,\boldsymbol{Q}\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}},$$

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{P}^{-1}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{P}\boldsymbol{Q})(\boldsymbol{P}\boldsymbol{Q})^{\mathrm{T}}.$$

令 $\boldsymbol{U}=(\boldsymbol{P}\boldsymbol{Q})^{\mathrm{T}}$，则 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{U}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{U}$．而 $\boldsymbol{P},\boldsymbol{Q}$ 均可逆，所以 $\boldsymbol{U}$ 可逆．

18．设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 都是 $n$ 阶正定矩阵，证明 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 也是 $n$ 阶正定矩阵．

**证明** 由于 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A},\ \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}$，所以

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B},$$

即 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 是对称矩阵．

又 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 都是 $n$ 阶正定矩阵，即对任意的非零向量 $\boldsymbol{x}$，有

$$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}>0,\quad \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}>0,$$

因此 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}>0$，故 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 是 $n$ 阶正定矩阵．

19．设 $\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2$ 分别是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 $\lambda_1,\lambda_2$ 的特征向量，且 $\lambda_1\neq\lambda_2$，试证 $\boldsymbol{p}_1+\boldsymbol{p}_2$ 不可能是 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量．

**证明** 由条件有 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{p}_1=\lambda_1\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{A}\boldsymbol{p}_2=\lambda_2\boldsymbol{p}_2$．设 $\boldsymbol{p}_1+\boldsymbol{p}_2$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的某个特征值 $\lambda_0$ 的特征向量，则

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{p}_1+\boldsymbol{p}_2)=\lambda_0(\boldsymbol{p}_1+\boldsymbol{p}_2).$$

另一方面，$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{p}_1+\boldsymbol{p}_2)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{p}_1+\boldsymbol{A}\boldsymbol{p}_2=\lambda_1\boldsymbol{p}_1+\lambda_2\boldsymbol{p}_2$．因此，$(\lambda_1-\lambda_0)\boldsymbol{p}_1+(\lambda_2-\lambda_0)\boldsymbol{p}_2=\boldsymbol{0}$．由于 $\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2$ 线性无关，故 $\lambda_1=\lambda_0=\lambda_2$，矛盾．故 $\boldsymbol{p}_1+\boldsymbol{p}_2$ 不可能是 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量.

20. 已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=(1-a)x_1^2+(1-a)x_2^2+2x_3^2+2(1+a)x_1x_2$ 的秩为 2.

（1）求 $a$ 的值;

（2）求正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$，把 $f(x_1,x_2,x_3)$ 化成标准形;

（3）求方程 $f(x_1,x_2,x_3)=0$ 的解.

**解** （1）二次型对应矩阵为

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1-a & 1+a & 0\\ 1+a & 1-a & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}.$$

由二次型的秩为 2 知，$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}1-a & 1+a & 0\\ 1+a & 1-a & 0\\ 0 & 0 & 2\end{vmatrix}=0$，得 $a=0$.

（2）这里 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$，可求出其特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=2,\lambda_3=0$.

由 $(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，求得特征向量 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$. 由 $(0\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，求得特征向量 $\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$.

由于 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 已经正交，直接将 $\alpha_1,\alpha_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$ 单位化，得

$$\boldsymbol{\eta}_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\eta}_2=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\eta}_3=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}.$$

令 $\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3)$，即为所求的正交变换矩阵．由 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$，可化原二次型为标准形

$$f(x_1,x_2,x_3)=2y_1^2+2y_2^2.$$

（3）由 $f(x_1,x_2,x_3)=2y_1^2+2y_2^2=0$，得 $y_1=0, y_2=0, y_3=k$（$k$ 为任意常数）．从而所求解为

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}=(\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3)\begin{pmatrix}0\\0\\k\end{pmatrix}=k\boldsymbol{\eta}_3=\begin{pmatrix}c\\-c\\0\end{pmatrix},$$

其中 $c$ 为任意常数．

21．设 $\boldsymbol{A}$ 是 $n$ 阶实对称矩阵，且 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$，证明存在正交矩阵 $\boldsymbol{P}$ 使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_r & \\ & \boldsymbol{0}\end{pmatrix}$．

**证明**　根据定理，对于 $n$ 阶实对称矩阵，存在正交矩阵 $\boldsymbol{P}_1$ 使得 $\boldsymbol{P}_1^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_1=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}$，其中 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的 $n$ 个特征值．

由于 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$，故 $\boldsymbol{A}$ 的特征值满足 $\lambda^2=\lambda$，即 $\lambda=0,1$．设 $R(\boldsymbol{A})=r$，则 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 这 $n$ 个数中有 $r$ 个 $1$，$n-r$ 个 $0$．调整 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 的顺序使得前 $r$ 个数为 $1$，后 $n-r$ 个为 $0$，相应地调整 $\boldsymbol{P}_1$ 的列，得到 $\boldsymbol{P}$，$\boldsymbol{P}$ 仍为正交矩阵，且

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_r & \\ & \boldsymbol{0}\end{pmatrix}.$$

22．设 $\boldsymbol{A}$ 是 $n$ 阶实对称矩阵，且 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{E}$，证明存在正交矩阵 $\boldsymbol{P}$ 使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_r & \\ & -\boldsymbol{E}_{n-r}\end{pmatrix}$．

**证明**　根据定理，对于 $n$ 阶实对称矩阵，存在正交矩阵 $\boldsymbol{P}_1$ 使得 $\boldsymbol{P}_1^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_1=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}$，其中 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的 $n$ 个特征值．

由于 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{E}$，故 $\boldsymbol{A}$ 的特征值满足 $\lambda^2=1$，即 $\lambda=1,-1$．设 $R(\boldsymbol{A})=r$，则 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 这 $n$ 个数中有 $r$ 个 $1$，$n-r$ 个 $-1$．调整 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 的顺序使得前 $r$ 个数为 $1$，后 $n-r$ 个为 $-1$，相应地，调整 $\boldsymbol{P}_1$ 的列得到 $\boldsymbol{P}$，$\boldsymbol{P}$ 仍为正交矩阵，且

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_r & \\ & -\boldsymbol{E}_{n-r}\end{pmatrix}.$$

23．设 $\boldsymbol{A}$ 是一个 $n$ 阶实对称矩阵，若对于任一 $n$ 维列向量都有 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=0$，则 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{0}$．

**证明** 设 $f=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$，取 $\boldsymbol{x}_i=(0,\cdots,0,1,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}}$（$\boldsymbol{x}_i$ 的第 $i$ 个坐标为1，其余都是0），则有

$$0=f=\boldsymbol{x}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_i=a_{ii}, \quad i=1,2,\cdots,n.$$

再取 $\boldsymbol{x}^{(i,j)}=(0,\cdots,0,1,0,\cdots,0,1,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}}$（$\boldsymbol{x}^{(i,j)}$ 的第 $i,j$ 个坐标为1，其余都是0，$i\neq j$），则有

$$0=f=(\boldsymbol{x}^{(i,j)})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^{(i,j)}=a_{ii}+a_{jj}+2a_{ij},$$

所以 $a_{ij}=0$.

综合可得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$.

24. 设 $\boldsymbol{D}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{C}\\ \boldsymbol{C}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{B}\end{pmatrix}$ 为正定矩阵，其中 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 分别为 $m$ 阶，$n$ 阶对称矩阵，$\boldsymbol{C}$ 为 $m\times n$ 矩阵.

（1）计算 $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}\boldsymbol{P}$，其中 $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_m & -\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{C}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{E}_n\end{pmatrix}$；

（2）利用（1）的结果判断矩阵 $\boldsymbol{B}-\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{C}$ 是否为正定矩阵，并证明你的结论.

**解** （1）由 $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_m & \boldsymbol{O}\\ -\boldsymbol{C}^{T}\boldsymbol{A}^{-1} & \boldsymbol{E}_n\end{pmatrix}$，有

$$\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_m & \boldsymbol{O}\\ -\boldsymbol{C}^{T}\boldsymbol{A}^{-1} & \boldsymbol{E}_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{C}\\ \boldsymbol{C}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{B}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_m & -\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{C}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{E}_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B}-\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{C}\end{pmatrix}.$$

（2）矩阵 $\boldsymbol{B}-\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{C}$ 是正定矩阵．由（1）的结果可知，矩阵 $\boldsymbol{D}$ 合同于矩阵

$$\boldsymbol{M}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B}-\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{C}\end{pmatrix}.$$

由 $\boldsymbol{D}$ 为正定矩阵可知，矩阵 $\boldsymbol{M}$ 为正定矩阵.

因矩阵 $\boldsymbol{M}$ 为对称矩阵，故 $\boldsymbol{B}-\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{C}$ 为对称矩阵．对 $\boldsymbol{x}=(0,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}}$ 及任意的 $\boldsymbol{y}=(y_1,y_2,\cdots,y_n)^{\mathrm{T}}\neq\boldsymbol{0}$，有

$$(\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}},\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}})\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{B}-\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{C}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}\\ \boldsymbol{y}\end{pmatrix}=\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{C})\boldsymbol{y}>0,$$

故 $\boldsymbol{B}-\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{C}$ 为正定矩阵.