习 题 四

A 组

1．填空题

(1) 设 $\boldsymbol{x}=(2,3,7)^{\mathrm{T}}$， $\boldsymbol{y}=(4,0,2)^{\mathrm{T}}$， $\boldsymbol{z}=(1,0,2)^{\mathrm{T}}$，且 $2(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a})+3(\boldsymbol{y}+\boldsymbol{a})=\boldsymbol{z}$，则 $\boldsymbol{a}=$________

.

解 由 $2(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a})+3(\boldsymbol{y}+\boldsymbol{a})=\boldsymbol{z}$ 得

$$\boldsymbol{a}=-2\boldsymbol{x}-3\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z}=\begin{pmatrix}-15\\-6\\-18\end{pmatrix}.$$

(2) 单个向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 线性无关的充分必要条件是____________.

解 $\boldsymbol{\alpha}\neq\boldsymbol{0}$.

(3) 已知向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,1)$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(2,2,3)$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(1,3,t)$ 线性相关，则____________.

解 因为 $\begin{vmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1\\\boldsymbol{\alpha}_2\\\boldsymbol{\alpha}_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&0&1\\2&2&3\\1&3&t\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&0&0\\2&2&1\\1&3&t-1\end{vmatrix}=2t-5=0$，所以 $t=\dfrac{5}{2}$.

(4) 设有向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$，又 $\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{\beta}_1-\boldsymbol{\beta}_2$， $\boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{\beta}_1+2\boldsymbol{\beta}_2$， $\boldsymbol{\alpha}_3=5\boldsymbol{\beta}_1-2\boldsymbol{\beta}_2$，则向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性____________.

解 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 可由 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 线性表示，所以 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 的秩小于等于 2，从而可知 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关.

(5) 若向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关，则向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$， $\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$， $\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1$ 线性____________.

解 因为 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2\\\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3\\\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1\\\boldsymbol{\alpha}_2\\\boldsymbol{\alpha}_3\end{pmatrix}$，又 $\begin{vmatrix}1&1&0\\0&1&1\\1&0&1\end{vmatrix}=2\neq0$，所以矩阵 $\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}$ 可逆，从而

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1\\\boldsymbol{\alpha}_2\\\boldsymbol{\alpha}_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2\\\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3\\\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1\end{pmatrix},$$

即 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1$ 等价．故 $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$， $\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$, $\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1$ 线性相关.

(6) 设行向量组 $(2,1,1,1)$， $(2,1,a,a)$， $(3,2,1,a)$， $(4,3,2,1)$ 线性相关，且 $a\neq1$，则____________.

解 $a=\dfrac{1}{2}$.

(7) 设向量组$\boldsymbol{\alpha}_1=(a,0,c),\boldsymbol{\alpha}_2=(b,c,0),\boldsymbol{\alpha}_3=(0,a,b)$线性无关，则$a,b,c$必满足关系式 .

解 $abc\neq 0$.

(8) 设三阶矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&-2\\2&1&2\\3&0&4\end{pmatrix}$，三维列向量$\boldsymbol{\alpha}=(a,1,1)^{\mathrm{T}}$．已知$\boldsymbol{A\alpha}$与$\boldsymbol{\alpha}$线性相关，则$a=$______.

解 $a=-1$.

2．选择题

(1) n维向量组$\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_s$ $(3\leqslant s\leqslant n)$线性无关的充分必要条件是____________.

(A)存在一组全为零的数$k_1,k_2,\cdots,k_s$，使$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s=\boldsymbol{0}$；

(B)存在一组不全为零的数$k_1,k_2,\cdots,k_s$，使$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s\neq\boldsymbol{0}$；

(C) $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_s$中任意两个向量都线性无关；

(D) $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_s$中任意一个向量都不能由其余向量线性表示.

答 （D）．$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$线性相关的充分必要条件是：$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$中至少有一个向量可由其余$s-1$个向量线性表示．所以$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$线性无关的充分必要条件是：$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$中任意一个向量都不能由其余$s-1$个向量线性表示.

(2) 设有两个n维向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$、$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$，若存在两组不全为零的数$k_1,k_2,\cdots,k_s$；$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_s$，使$(k_1+\lambda_1)\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+(k_s+\lambda_s)\boldsymbol{\alpha}_s+(k_1-\lambda_1)\boldsymbol{\beta}_1+\cdots+(k_s-\lambda_s)\boldsymbol{\beta}_s=\boldsymbol{0}$；则____________.

(A) $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s+\boldsymbol{\beta}_s$，$\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s-\boldsymbol{\beta}_s$线性相关；

(B) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$、$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$均线性无关；

(C) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$、$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$均线性相关；

(D) $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s+\boldsymbol{\beta}_s$，$\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s-\boldsymbol{\beta}_s$线性无关.

答 （A）．因为

$$(k_1+\lambda_1)\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+(k_s+\lambda_s)\boldsymbol{\alpha}_s+(k_1-\lambda_1)\boldsymbol{\beta}_1+\cdots+(k_s-\lambda_s)\boldsymbol{\beta}_s=\boldsymbol{0},$$

$$\lambda_1(\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\beta}_1)+\cdots+\lambda_s(\boldsymbol{\alpha}_s-\boldsymbol{\beta}_s)+k_1(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\beta}_1)+\cdots+k_s(\boldsymbol{\alpha}_s+\boldsymbol{\beta}_s)=\boldsymbol{0},$$

所以$\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s-\boldsymbol{\beta}_s,\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s+\boldsymbol{\beta}_s$线性相关.

(3) 设向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$和向量组$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$为两个$n$维向量组（$m\geq 2$），且

$$\begin{cases} \boldsymbol{\alpha}_1 = \boldsymbol{\beta}_2 + \boldsymbol{\beta}_3 + \cdots + \boldsymbol{\beta}_m, \\ \boldsymbol{\alpha}_2 = \boldsymbol{\beta}_1 + \boldsymbol{\beta}_3 + \cdots + \boldsymbol{\beta}_m, \\ \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \boldsymbol{\alpha}_m = \boldsymbol{\beta}_1 + \boldsymbol{\beta}_2 + \cdots + \boldsymbol{\beta}_{m-1}, \end{cases}$$

则有____________.

(A) $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 的秩小于 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_m$ 的秩；

(B) $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 的秩大于 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_m$ 的秩；

(C) $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 的秩等于 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_m$ 的秩；

(D) 无法判定.

答 (C). 因为 $\begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha}_1 \\ \boldsymbol{\alpha}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{\alpha}_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\beta}_1 \\ \boldsymbol{\beta}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{\beta}_m \end{pmatrix}$，又 $\begin{vmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{m-1}(m-1) \neq 0$，所以有

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{\beta}_1 \\ \boldsymbol{\beta}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{\beta}_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha}_1 \\ \boldsymbol{\alpha}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{\alpha}_m \end{pmatrix},$$

即 $\boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{\alpha}_m$ 与 $\boldsymbol{\beta}_1,\ \boldsymbol{\beta}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{\beta}_m$ 等价，从而知 $\boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{\alpha}_m$ 与 $\boldsymbol{\beta}_1,\ \boldsymbol{\beta}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{\beta}_m$ 的秩相等.

(4) 设有两个 n 维向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 和 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_m$ 均线性无关，则向量组

$\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m + \boldsymbol{\beta}_m$ ____________.

(A) 线性相关；　　　　　　　　　　(B) 线性无关；

(C) 可能线性相关也可能线性无关；　　(D) 既不线性相关，也不线性无关.

答 (C).

例如，$\boldsymbol{\alpha}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\alpha}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \boldsymbol{\beta}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\beta}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2$ 和 $\boldsymbol{\beta}_1,\ \boldsymbol{\beta}_2$ 都线性无关，但

$\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\beta}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\beta}_2$ 线性相关.

又如，$\boldsymbol{\alpha}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\alpha}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \boldsymbol{\beta}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\beta}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2$ 和 $\boldsymbol{\beta}_1,\ \boldsymbol{\beta}_2$ 都线性无关，

$\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\beta}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\beta}_2$ 也线性无关.

(5) 设有向量组 A：$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 与 B：$\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_t$ 均线性无关，且向量组 A 中的每个向量都不

能由向量组 B 线性表示，同时量组 B 中的每个向量也不能由向量组 A 线性表示，则向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$ 的线性相关性为____________.

(A) 线性相关； (B) 线性无关；

(C) 可能线性相关也可能线性无关； (D) 既不线性相关，也不线性无关.

答 (C).

例如，当 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$; $\boldsymbol{\beta}_1=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\beta}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$,则 $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$ 和 $\boldsymbol{\beta}_1$, $\boldsymbol{\beta}_2$ 都线性无关，且 $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$ 不能由 $\boldsymbol{\beta}_1$, $\boldsymbol{\beta}_2$ 线性表示，$\boldsymbol{\beta}_1$, $\boldsymbol{\beta}_2$ 也不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性表示．但 $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\beta}_1$, $\boldsymbol{\beta}_2$ 线性相关.

又例如 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}$; $\boldsymbol{\beta}_1=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\beta}_2=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix}$,则 $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$ 和 $\boldsymbol{\beta}_1$, $\boldsymbol{\beta}_2$ 都线性无关，且 $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$ 不能由 $\boldsymbol{\beta}_1$, $\boldsymbol{\beta}_2$ 线性表示，$\boldsymbol{\beta}_1$, $\boldsymbol{\beta}_2$ 也不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性表示．但 $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\beta}_1$, $\boldsymbol{\beta}_2$ 线性无关.

(6) 设向量组 I: $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 可由向量组 II: $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 线性表示，则____________.

（A）当 $r<s$ 时，向量组 II 必线性相关；

（B）当 $r>s$ 时，向量组 II 必线性相关；

（C）当 $r<s$ 时，向量组 I 必线性相关；

（D）当 $r>s$ 时，向量组 I 必线性相关.

答 (D).

(7) 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 均为 n 维向量，下列结论不正确的是____________.

(A) 若对于任意一组不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_s$，都有 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s\neq\boldsymbol{0}$，则 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关；

(B) 若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关，则对于任意一组不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_s$，都有 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s=\boldsymbol{0}$；

(C) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关的充分必要条件是此向量组的秩为 s；

(D) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关的必要条件是其中任意两个向量线性无关.

答 (B).

(8) 设 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 为满足 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$ 的任意两个非零矩阵，则必有____________.

(A) $\boldsymbol{A}$ 的列向量组线性相关，$\boldsymbol{B}$ 的行向量组线性相关；

(B) $\boldsymbol{A}$ 的列向量组线性相关，$\boldsymbol{B}$ 的列向量组线性相关；

(C) $\boldsymbol{A}$ 的行向量组线性相关，$\boldsymbol{B}$ 的行向量组线性相关；

(D) $\boldsymbol{A}$ 的行向量组线性相关，$\boldsymbol{B}$ 的列向量组线性相关.

答 (A).

3．将 $\boldsymbol{b}$ 表示为 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ 的线性组合.

(1) $\boldsymbol{a}_1=(1,1,-1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{a}_2=(1,2,1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{a}_3=(0,0,1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{b}=(1,0,-2)^{\mathrm{T}}$；

(2) $\boldsymbol{a}_1=(1,2,3)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{a}_2=(1,0,4)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{a}_3=(1,3,1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{b}=(3,1,11)^{\mathrm{T}}$.

解

（1） 令 $x_1\boldsymbol{a}_1+x_2\boldsymbol{a}_2+x_3\boldsymbol{a}_3=\boldsymbol{b}$，即

$$x_1\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}+x_3\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix}.$$

因为 $D=\begin{vmatrix}1&1&0\\1&2&0\\-1&1&1\end{vmatrix}=1\neq 0$，所以由 Cramer 法则，得

$$x_1=2,\ x_2=-1,\ x_3=1,$$

故 $\boldsymbol{b}=2\boldsymbol{a}_1-\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{a}_3$.

（2） 令 $x_1\boldsymbol{a}_1+x_2\boldsymbol{a}_2+x_3\boldsymbol{a}_3=\boldsymbol{b}$，即

$$x_1\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix}1\\0\\4\end{pmatrix}+x_3\begin{pmatrix}1\\3\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\1\\11\end{pmatrix}.$$

因为 $D=\begin{vmatrix}1&1&1\\2&0&3\\3&4&1\end{vmatrix}=3\neq 0$，所以由 Cramer 法则，得

$$x_1=0,\ x_2=\frac{8}{3},\ x_3=\frac{1}{3}.$$

故 $\boldsymbol{b}=0\boldsymbol{a}_1+\frac{8}{3}\boldsymbol{a}_2+\frac{1}{3}\boldsymbol{a}_3$.

4．已知向量组 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_r$ 线性无关，且 $\boldsymbol{b}_1=\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2$，$\boldsymbol{b}_2=\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{a}_3$，…，$\boldsymbol{b}_r=\boldsymbol{a}_r+\boldsymbol{a}_1$. 证明当 r 为奇数时 $\boldsymbol{b}_1,\ \boldsymbol{b}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{b}_r$ 线性无关；当 r 为偶数时 $\boldsymbol{b}_1,\ \boldsymbol{b}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{b}_r$ 线性相关.

解 令 $x_1\boldsymbol{b}_1+x_2\boldsymbol{b}_2+\cdots+x_r\boldsymbol{b}_r=\boldsymbol{0}$，得

$$x_1(\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2)+x_2(\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{a}_3)+\cdots+x_r(\boldsymbol{a}_r+\boldsymbol{a}_1)=\boldsymbol{0},$$

$$(x_1+x_r)\boldsymbol{a}_1+(x_1+x_2)\boldsymbol{a}_2+\cdots+(x_{r-1}+x_r)\boldsymbol{a}_r=\boldsymbol{0}.$$

因为$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_r$线性无关，所以有

$$\begin{cases} x_1 + x_r = 0, \\ x_1 + x_2 = 0, \\ \quad \cdots\cdots\cdots \\ x_{r-1} + x_r = 0. \end{cases}$$

该方程组的系数行列D为

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 + (-1)^{r+1} = \begin{cases} 2, & r\text{为奇数}; \\ 0, & r\text{为偶数}. \end{cases}$$

当r为奇数时$D \neq 0$，方程组只有零解，即$\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{b}_r$线性无关；当$r$为偶数时$D = 0$，方程组有非零解，即$\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{b}_r$ 线性相关.

5．已知$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_r$线性无关，且$\boldsymbol{b}_1 = \boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{b}_2 = \boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2$，…，$\boldsymbol{b}_r = \boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2 + \cdots + \boldsymbol{a}_r$，证明$\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{b}_r$线性无关.

证明　因为$\begin{pmatrix} \boldsymbol{b}_1 \\ \boldsymbol{b}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{b}_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 \\ \boldsymbol{a}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_r \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$可逆，即

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 \\ \boldsymbol{a}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \boldsymbol{b}_1 \\ \boldsymbol{b}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{b}_r \end{pmatrix}.$$

从而$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_r$与$\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{b}_r$等价，于是得$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_r$线性无关.

6．设有两个n维向量组A：　$\boldsymbol{a}_i = (a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{in})$，$B$：　$\boldsymbol{b}_i = (a_{ip_1}, a_{ip_2}, \cdots, a_{ip_n})$，其中$i = 1, 2, \cdots, m$，而$p_1 p_2 \cdots p_n$是$1, 2, \cdots, n$这$n$个自然数的某个排列，证明向量组$A$与向量组$B$的线性相关性相同.

证明　令$x_1\boldsymbol{a}_1 + x_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + x_m\boldsymbol{a}_m = \boldsymbol{0}$，即

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \cdots + a_{m1}x_m = 0, \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{m2}x_m = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + \cdots + a_{mn}x_m = 0, \end{cases}$$

上下交换方程，可得

$$\begin{cases} a_{1p_1}x_1 + a_{2p_1}x_2 + \cdots + a_{mp_1}x_m = 0, \\ a_{1p_2}x_1 + a_{2p_2}x_2 + \cdots + a_{mp_2}x_m = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{1p_n}x_1 + a_{2p_n}x_2 + \cdots + a_{mp_n}x_m = 0. \end{cases}$$

即 $x_1\boldsymbol{b}_1 + x_2\boldsymbol{b}_2 + \cdots + x_m\boldsymbol{b}_m = \boldsymbol{0}$．因为 $x_1\boldsymbol{a}_1 + x_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + x_m\boldsymbol{a}_m = \boldsymbol{0}$ 与 $x_1\boldsymbol{b}_1 + x_2\boldsymbol{b}_2 + \cdots + x_m\boldsymbol{b}_m = \boldsymbol{0}$ 同解，所以 $\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$，…，$\boldsymbol{a}_m$ 与 $\boldsymbol{b}_1$，$\boldsymbol{b}_2$，…，$\boldsymbol{b}_m$ 的线性相关性相同.

7．m 个 r 维向量的每个向量添上 $n-r$ 个分量，成为 m 个 n 维向量．若 m 个 r 维向量线性无关，证明 m 个 n 维向量亦线性无关.

证明　设有 m 个 r 维向量

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{r1} \end{pmatrix},\ \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ \vdots \\ a_{r2} \end{pmatrix},\ \cdots,\ \boldsymbol{a}_m = \begin{pmatrix} a_{1m} \\ \vdots \\ a_{rm} \end{pmatrix},$$

因为 $\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$，…，$\boldsymbol{a}_m$ 线性无关，所以当

$$x_1\boldsymbol{a}_1 + x_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + x_m\boldsymbol{a}_m = \boldsymbol{0}$$

时，有且仅有 $x_1 = x_2 = \cdots = x_m = 0$，即方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1m}x_m = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \cdots + a_{rm}x_m = 0 \end{cases}$$

只有零解，从而方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1m}x_m = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \cdots + a_{rm}x_m = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nm}x_n = 0 \end{cases}$$

也只有零解．令

$$\boldsymbol{b}_1=\begin{pmatrix}a_{11}\\ \vdots\\ a_{r1}\\ \vdots\\ a_{n1}\end{pmatrix},\ \boldsymbol{b}_2=\begin{pmatrix}a_{12}\\ \vdots\\ a_{r2}\\ \vdots\\ a_{n2}\end{pmatrix},\ \cdots,\ \boldsymbol{b}_m=\begin{pmatrix}a_{1m}\\ \vdots\\ a_{rm}\\ \vdots\\ a_{nm}\end{pmatrix},$$

则当 $x_1\boldsymbol{b}_1+x_2\boldsymbol{b}_2+\cdots+x_m\boldsymbol{b}_m=\boldsymbol{0}$ 时，有 $x_1=x_2=\cdots=x_m=0$，所以 $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{b}_m$ 线性无关.

8．判别下列向量组的线性相关性.

(1)　$(1,1,0)$，$(0,1,1)$，$(3,0,0)$；

(2)　$(1,1,3)$，$(2,4,5)$，$(1,-1,0)$，$(2,2,6)$；

(3)　$(2,1)$，$(3,4)$，$(-1,3)$；

(4)　$(2,-1,7,3)$，$(1,4,11,-2)$，$(3,-6,3,8)$；

(5)　$(1,0,0,2)$，$(2,1,0,3)$，$(3,0,1,5)$.

解（1）　因为 $\begin{vmatrix}1&1&0\\0&1&1\\3&0&0\end{vmatrix}=3\neq0$，所以（1，1，0)，(0，1，1)，(3，0，0）线性无关.

（2）　4 个 3 维向量一定线性相关.

（3）　3 个 2 维向量也一定线性相关.

（4）　因为

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&1&3\\-1&4&-6\\7&11&3\\3&-2&8\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&-4&6\\0&1&-1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},$$

所以 $R(\boldsymbol{A})=2$，所以向量组的秩也等于 2，故 3 个向量线性相关.

（5）　因为在矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&0&2\\2&1&0&3\\3&0&1&5\end{pmatrix}$ 中，有一个 3 阶子式 $\begin{vmatrix}1&0&0\\2&1&0\\3&0&1\end{vmatrix}=1\neq0$，所以 3 个向量线性无关.

9．利用初等行变换，求下列矩阵的列向量组的最大无关组.

（1）$\begin{pmatrix}25&31&17&43\\75&94&53&132\\75&94&54&134\\25&32&20&48\end{pmatrix}$；　　　　（2）$\begin{pmatrix}1&1&2&2&1\\0&2&1&5&-1\\2&0&3&-1&3\\1&1&0&4&-1\end{pmatrix}$.

解（1）　因为

$$(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4)=\begin{pmatrix}25&31&17&43\\75&94&53&132\\75&94&54&134\\25&32&20&48\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}25&31&17&43\\0&18&2&3\\0&1&3&5\\0&1&3&5\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}25&31&17&43\\0&1&2&3\\0&0&1&2\\0&0&1&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}25&31&17&43\\0&1&2&3\\0&0&1&2\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

所以$\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$，$\boldsymbol{a}_3$或$\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$，$\boldsymbol{a}_4$是最大无关组．

（2） 因为

$$(\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2,\ \boldsymbol{a}_3,\ \boldsymbol{a}_4,\ \boldsymbol{a}_5)=\begin{pmatrix}1&1&2&2&1\\0&2&1&5&-1\\2&0&3&-1&3\\1&1&0&4&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&2&2&1\\0&2&1&5&-1\\0&0&1&-1&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix},$$

所以$\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3$或$\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_4$或$\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_5$是最大无关组．

10．求下列向量组的秩，并求一个最大无关组．

（1）$\boldsymbol{a}_1=\begin{pmatrix}1\\2\\-1\\4\end{pmatrix},\boldsymbol{a}_2=\begin{pmatrix}9\\100\\10\\4\end{pmatrix},\boldsymbol{a}_3=\begin{pmatrix}-2\\-4\\2\\-8\end{pmatrix}$；

（2）$\boldsymbol{a}_1=\begin{pmatrix}1\\2\\1\\3\end{pmatrix},\boldsymbol{a}_2=\begin{pmatrix}4\\-1\\-5\\-6\end{pmatrix},\boldsymbol{a}_3=\begin{pmatrix}1\\-3\\-4\\-7\end{pmatrix}$．

解（1） 因为

$$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2,\ \boldsymbol{a}_3)=\begin{pmatrix}1&9&-2\\2&100&-4\\-1&10&2\\4&4&-8\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&9&-2\\0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},$$

所以向量组的秩等于 2．$\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2$或$\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3$都是最大无关组．

（2） 因为

$$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2,\ \boldsymbol{a}_3)=\begin{pmatrix}1&4&1\\2&-1&-3\\1&-5&-4\\3&-6&-7\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&4&1\\0&9&5\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},$$

所以向量组的秩等于 2．$\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2$或$\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_3$都是最大无关组．$\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3$也是最大无关组．

11．已知n维单位坐标向量$\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n$可由$n$维向量组$\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n$线性表示，证明$\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n$线性无关．

证明　　因为$\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n$可由$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$线性表示，所以$\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n$的秩小于或等于$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$的秩，即$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$的秩大于或等于$n$，从而可得$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$的秩等于$n$．故$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$线性无关.

12．证明n维向量组$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$线性无关的充分必要条件是，任一$n$维向量都可由$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$线性表示.

证明　必要性．已知$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$线性无关，又对于任意$n$维向量$\boldsymbol{a}$，有$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n, \boldsymbol{a}$线性相关，所以$\boldsymbol{a}$可以$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$线性表示（且表示式惟一）.

充分性．根据已知可得，$\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n$可由$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$线性表示，所以由 11 题可知，$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$线性无关.

13．向量组$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$的秩为$r_1$，向量组$\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_t$的秩为$r_2$，向量组$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s, \boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_t$的秩为$r_3$，证明$\max\{r_1, r_2\} \le r_3 \le r_1 + r_2$.

证明　因为$\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$可由$\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s, \boldsymbol{\beta}_1, \cdots, \boldsymbol{\beta}_t$线性表示，又$\boldsymbol{\beta}_1, \cdots, \boldsymbol{\beta}_t$也可由$\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s, \boldsymbol{\beta}_1, \cdots, \boldsymbol{\beta}_t$线性表示，所以得$r_1 \le r_3$且$r_2 \le r_3$，即$\max\{r_1, r_2\} \le r_3$.

设$\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$的最大无关组为$\boldsymbol{\alpha}_{n_1}, \boldsymbol{\alpha}_{n_2}, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{n_{r_1}}$，$\boldsymbol{\beta}_1, \cdots, \boldsymbol{\beta}_t$的最大无关组为$\boldsymbol{\beta}_{m_1}, \boldsymbol{\beta}_{m_2}, \cdots, \boldsymbol{\beta}_{m_{r_2}}$，则$\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$，$\boldsymbol{\beta}_1, \cdots, \boldsymbol{\beta}_t$可由$\boldsymbol{\alpha}_{n_1}, \boldsymbol{\alpha}_{n_2}, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{n_{r_1}}, \boldsymbol{\beta}_{m_1}, \boldsymbol{\beta}_{m_2}, \cdots, \boldsymbol{\beta}_{m_{r_2}}$线性表示，所以$r_3 \le r_1 + r_2$.

14．设$\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$是同型矩阵，证明$R(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}) \le R(\boldsymbol{A}) + R(\boldsymbol{B})$.

证明　将同型矩阵$\boldsymbol{A}_{m\times n}$，$\boldsymbol{B}_{m\times n}$表示为

$$\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n), \quad \boldsymbol{B} = (\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{b}_n)$$

则$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n+\boldsymbol{b}_n)$．因为$\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n+\boldsymbol{b}_n$可由$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$，$\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{b}_n$线性表示，所以$\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n+\boldsymbol{b}_n$的秩小于或等于$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$，$\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{b}_n$的秩．又根据 13 题可知，$\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n+\boldsymbol{b}_n$的秩小于或等于$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$的秩与$\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{b}_n$的秩之和，所以$R(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}) \le R(\boldsymbol{A}) + R(\boldsymbol{B})$.

15．判别下列向量集合V是否为向量空间？为什么？

(1) $V=\{\boldsymbol{x}=(x_1,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}\mid\sum_{i=1}^{n}x_i=0;\ x_i\in\mathbf{R},i=1,2,\cdots,n\}$；

(2) $V=\{\boldsymbol{x}=(x_1,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}\mid\sum_{i=1}^{n}x_i=1;\ x_i\in\mathbf{R},i=1,2,\cdots,n\}$；

(3) $V=\{\boldsymbol{x}=(x_1,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}\mid x_1=\cdots=x_n;\ x_i\in\mathbf{R},i=1,2,\cdots,n\}$．

解　（1）V 是向量空间．因为任取 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\in V$，

$$\boldsymbol{\alpha}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{\beta}=(y_1,y_2,\cdots,y_n)^{\mathrm{T}},$$

则

$$\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=(x_1+y_1,\ x_2+y_2,\ \cdots,\ x_n+y_n)^{\mathrm{T}}.$$

由于 $\sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)=\sum_{i=1}^{n}x_i+\sum_{i=1}^{n}y_i=0$，故 $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}\in V$．

又当 λ 为任意实数时，

$$\lambda\boldsymbol{\alpha}=(\lambda x_1,\ \lambda x_2,\ \cdots,\ \lambda x_n)^{\mathrm{T}},$$

由于 $\sum_{i=1}^{n}\lambda x_i=\lambda\sum_{i=1}^{n}x_i=0$，故 $\lambda\boldsymbol{\alpha}\in V$．

（2）V 不是向量空间．因为，若 $\boldsymbol{\alpha}\in V$，则有

$$\boldsymbol{\alpha}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}},$$

且 $\sum_{i=1}^{n}x_i=1$．对于 $\lambda=2$，有

$$\lambda\boldsymbol{\alpha}=2\boldsymbol{\alpha}=(2x_1,\ 2x_2,\ \cdots,\ 2x_n)^{\mathrm{T}},$$

其中 $\sum_{i=1}^{n}2x_i=2\sum_{i=1}^{n}x_i=2\neq1$，故 $\lambda\boldsymbol{\alpha}\notin V$．

（3）V 是向量空间．因为任取 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\in V$，则有

$$\boldsymbol{\alpha}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{\beta}=(y_1,y_2,\cdots,y_n)^{\mathrm{T}},$$

且 $x_1=x_2=\cdots=x_n$，$y_1=y_2=\cdots=y_n$．于是

$$\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=(x_1+y_1,\ x_2+y_2,\ \cdots,\ x_n+y_n)^{\mathrm{T}},$$

且 $x_1+y_1=x_2+y_2=\cdots=x_n+y_n$，所以 $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}\in V$．

又当 $\boldsymbol{\alpha}\in V$，λ 为任意实数，则有

$$\lambda\boldsymbol{\alpha}=(\lambda x_1,\ \lambda x_2,\ \cdots,\ \lambda x_n)^{\mathrm{T}},$$

且 $\lambda x_1=\lambda x_2=\cdots=\lambda x_n$，所以 $\lambda\boldsymbol{\alpha}\in V$.

16. 证明由 $\boldsymbol{\alpha}_1=(0,1,1)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\alpha}_2=(1,0,1)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\alpha}_3=(1,1,0)^{\mathrm{T}}$ 所生成的向量空间就是 $\mathbf{R}^3$.

证明 设 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 所生成的向量空间为

$$V=\{\boldsymbol{x}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3 \mid k_1,\ k_2,\ k_3\in\mathbf{R}\}.$$

任取 $\boldsymbol{\alpha}\in V$，则有 k_1, k_2, k_3，使得

$$\boldsymbol{\alpha}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3=(k_2+k_3,\ k_3+k_1,\ k_1+k_2)^{\mathrm{T}}.$$

可知 $\boldsymbol{\alpha}\in\mathbf{R}^3$，从而得 $V\subset\mathbf{R}^3$.

又任取 $\boldsymbol{\alpha}\in\mathbf{R}^3$，则 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}$ 线性相关，又因为 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，所以 $\boldsymbol{\alpha}$ 可用 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示且表示式惟一，即有惟一的 k_1, k_2, k_3，使得

$$\boldsymbol{\alpha}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3.$$

从而可知 $\boldsymbol{\alpha}\in V$，于是得 $\mathbf{R}^3\subset V$.

综上可知 $V=\mathbf{R}^3$.

17. 设 V_1 是由 $\boldsymbol{a}_1=(1,1,0,0)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{a}_2=(1,0,1,1)^{\mathrm{T}}$ 所生成的向量空间，V_2 是由 $\boldsymbol{b}_1=(2,-1,3,3)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{b}_2=(0,1,-1,-1)^{\mathrm{T}}$ 所生成的向量空间，试证 $V_1=V_2$.

证明 因为

$$(\boldsymbol{a}_1\ \ \boldsymbol{a}_2\ \ \boldsymbol{b}_1\ \ \boldsymbol{b}_2)=\begin{pmatrix}1&1&2&0\\1&0&-1&1\\0&1&3&-1\\0&1&3&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&2&0\\0&1&3&-1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

可见，$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ 及 $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2$ 都线性无关，但 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{b}_1$ 和 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{b}_2$ 都线性相关，且 $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{a}_1$ 和 $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{a}_2$ 也都线性相关，即 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ 可由 $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2$ 线性表示，$\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2$ 也可由 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ 线性表示，所以 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ 与 $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2$ 等价，从而 $V_1=V_2$.

18. 验证 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,-1,0)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(2,1,3)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(3,1,2)^{\mathrm{T}}$ 为 $\mathbf{R}^3$ 的一个基，并求 $\boldsymbol{\alpha}=(5,0,7)^{\mathrm{T}}$ 在这个基下的坐标.

解 因为

$$\left|\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1 & \boldsymbol{\alpha}_2 & \boldsymbol{\alpha}_3\end{pmatrix}\right| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -6 \neq 0,$$

所以$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$线性无关，故$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$是$\mathbf{R}^3$的基.

对于$\boldsymbol{\alpha} = (5, 0, 7)^{\mathrm{T}}$，令

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + x_2\boldsymbol{\alpha}_2 + x_3\boldsymbol{\alpha}_3 = \boldsymbol{\alpha},$$

则有

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 5, \\ -x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ 3x_2 + 2x_3 = 7, \end{cases}$$

解之得$x_1 = 2,\ x_2 = 3,\ x_3 = -1$，所以$\boldsymbol{\alpha}$在基$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$下的坐标是$(2, 3, -1)$.

B　组

1．已知向量组$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$线性相关，向量组$\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4$线性无关，证明

(1) $\boldsymbol{\alpha}_1$可由$\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$线性表示；

(2) $\boldsymbol{\alpha}_4$不能由$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$线性表示．

证明　（1）因为$\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4$线性无关，所以$\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$线性无关；又因为$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$线性相关，所以$\boldsymbol{\alpha}_1$可由$\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$线性表示（且表示式惟一）．

（2）反证法，假设$\boldsymbol{\alpha}_4$可由$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$线性表示，又由（1）知，$\boldsymbol{\alpha}_1$可由$\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$线性表示．所以$\boldsymbol{\alpha}_4$可由$\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$线性表示，这与$\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4$线性无关相矛盾．于是得$\boldsymbol{\alpha}_1$不能由$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$线性表示．

2．设$\boldsymbol{A}$是n阶方阵，$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$是$n$维列向量，且$\boldsymbol{a}_1 \neq \boldsymbol{0}$，$\boldsymbol{A}\boldsymbol{a}_1 = \boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{A}\boldsymbol{a}_2 = \boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2$，$\boldsymbol{A}\boldsymbol{a}_3 = \boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{a}_3$．证明$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$线性无关．

证明　根据已知条件，得

$$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{a}_1 = \boldsymbol{0},\ (\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{a}_2 = \boldsymbol{a}_1,\ (\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{a}_3 = \boldsymbol{a}_2,$$

设

$$\lambda_1\boldsymbol{a}_1 + \lambda_2\boldsymbol{a}_2 + \lambda_3\boldsymbol{a}_3 = \boldsymbol{0},$$

上式两边左乘$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}$，得

$$\lambda_2\boldsymbol{a}_1 + \lambda_3\boldsymbol{a}_2 = \boldsymbol{0},$$

上式两边再左乘$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}$得

$$\lambda_3\boldsymbol{a}_1 = \boldsymbol{0},$$

因为$\boldsymbol{a}_1 \neq \boldsymbol{0}$，所以得$\lambda_3 = 0$．又由$\lambda_2\boldsymbol{a}_1 + \lambda_3\boldsymbol{a}_2 = \boldsymbol{0}$及$\lambda_1\boldsymbol{a}_1 + \lambda_2\boldsymbol{a}_2 + \lambda_3\boldsymbol{a}_3 = \boldsymbol{0}$可得，$\lambda_2 = \lambda_1 = 0$，所以$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$线性无关．

3．设 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots \boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关，$\boldsymbol{\beta} = \lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1 + \lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + \lambda_s\boldsymbol{\alpha}_s$，其中 $\lambda_i \neq 0$，证明 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{i-1}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha}_{i+1}, \cdots \boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关.

证明 令

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + \cdots + k_{i-1}\boldsymbol{\alpha}_{i-1} + k_i\boldsymbol{\beta} + k_{i+1}\boldsymbol{\alpha}_{i+1} + \cdots + k_s\boldsymbol{\alpha}_s = \boldsymbol{0},$$

则由 $\boldsymbol{\beta} = \lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1 + \lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + \lambda_s\boldsymbol{\alpha}_s$，得

$$(k_1 + k_i\lambda_1)\boldsymbol{\alpha}_1 + \cdots + (k_{i-1} + k_i\lambda_{i-1})\boldsymbol{\alpha}_{i-1} + k_i\lambda_i\boldsymbol{\alpha}_i + (k_{i+1} + k_i\lambda_{i+1})\boldsymbol{\alpha}_{i+1} + \cdots + (k_s + k_i\lambda_s)\boldsymbol{\alpha}_s = \boldsymbol{0},$$

从而有

$$\begin{cases} k_1 + k_i\lambda_1 = 0, \\ \quad \cdots\cdots\cdots \\ k_{i-1} + k_i\lambda_{i-1} = 0, \\ k_i\lambda_i = 0, \\ k_{i+1} + k_i\lambda_{i+1} = 0, \\ \quad \cdots\cdots\cdots \\ k_s + k_i\lambda_s = 0 \end{cases}$$

因为 $\lambda_i \neq 0$，所以得 $k_i = 0$，根据上述方程组又可得 $k_1 = \cdots = k_{i-1} = k_{i+1} = \cdots = k_s = 0$，即 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{i-1}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha}_{i+1}, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关.

4．设向量组 A：$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关，向量 $\boldsymbol{\beta}_1$ 可由向量组 A 线性表示，而向量 $\boldsymbol{\beta}_2$ 不能由向量组 A 线性表示．证明向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m, l\boldsymbol{\beta}_1 + \boldsymbol{\beta}_2$ 线性无关(其中 l 为常数).

证明 若 $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$, $\cdots$, $\boldsymbol{\alpha}_m$, $\boldsymbol{\beta}_2$ 线性相关，而 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关，由定理 2 可知 $\boldsymbol{\beta}_2$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\cdots$, $\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性表示，矛盾．所以 $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$, $\cdots$, $\boldsymbol{\alpha}_m$, $\boldsymbol{\beta}_2$ 线性无关.

因为 $\boldsymbol{\beta}_1$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\cdots$, $\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性表示，所以有一组数 $\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_m$ 使 $\boldsymbol{\beta}_1 = \mu_1\boldsymbol{\alpha}_1 + \cdots + \mu_m\boldsymbol{\alpha}_m$．又令

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_n\boldsymbol{\alpha}_m + k_{m+1}(l\boldsymbol{\beta}_1 + \boldsymbol{\beta}_2) = \boldsymbol{0},$$

则有

$$(k_1 + lk_{m+1}\mu_1)\boldsymbol{\alpha}_1 + \cdots + (k_m + lk_{m+1}\mu_m)\boldsymbol{\alpha}_m + k_{m+1}\boldsymbol{\beta}_2 = \boldsymbol{0},$$

从而有

$$\begin{cases} k_1 + lk_{m+1}\mu_1 = 0, \\ k_2 + lk_{m+1}\mu_2 = 0, \\ \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \\ k_m + lk_{m+1}\mu_m = 0, \\ k_{m+1} = 0. \end{cases}$$

解之得，$k_1 = k_2 = \cdots = k_m = k_{m+1} = 0$，所以$\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m, l\boldsymbol{\beta}_1 + \boldsymbol{\beta}_2$线性无关.

5．设有一个含m个向量的向量组$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$（m≥2），且$\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + \boldsymbol{\alpha}_m$，证明向量组$\boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\alpha}_m$线性无关的充分必要条件是$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$线性无关.

证明　因为

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\alpha}_1 \\ \boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\alpha}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\alpha}_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_3 + \cdots + \boldsymbol{\alpha}_m \\ \boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_3 + \cdots + \boldsymbol{\alpha}_m \\ \vdots \\ \boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + \boldsymbol{\alpha}_{m-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha}_1 \\ \boldsymbol{\alpha}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{\alpha}_m \end{pmatrix},$$

又$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{m-1}(m-1) \neq 0$，于是有

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha}_1 \\ \boldsymbol{\alpha}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{\alpha}_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\alpha}_1 \\ \boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\alpha}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\alpha}_m \end{pmatrix}$$

即$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$与$\boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\alpha}_m$等价．故$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$与$\boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\alpha}_m$的线性相关性相同，即$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$线性无关的充分必要条件为$\boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\alpha}_m$线性无关.

6．设向量组B：$\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{b}_r$能由向量组$A$：$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_s$　线性表示为

$$(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{b}_r) = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_s)\boldsymbol{K},$$

其中$\boldsymbol{K}$为$s \times r$矩阵，且向量组A线性无关，证明向量组B线性无关的充分必要条件是矩阵$\boldsymbol{K}$的秩$R(\boldsymbol{K}) = r$.

证明　令$\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{b}_r)$，$\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_s)$，并将$\boldsymbol{K}$按列分块为$\boldsymbol{K} = (\boldsymbol{k}_1, \boldsymbol{k}_2, \cdots, \boldsymbol{k}_r)$．

必要性．由于B组向量线性无关，有

$$r = R(\boldsymbol{B}) \leq R(\boldsymbol{K}) \leq r$$

故$R(\boldsymbol{K}) = r$.

充分性．设有一组数$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_r$使

$$\lambda_1 \boldsymbol{b}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{b}_2 + \cdots + \lambda_r \boldsymbol{b}_r = \boldsymbol{0},$$

则有

$$(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_s)\boldsymbol{K}\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\\ \vdots\\ \lambda_r\end{pmatrix} = (\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{b}_r)\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\\ \vdots\\ \lambda_r\end{pmatrix}$$
$$= \lambda_1 \boldsymbol{b}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{b}_2 + \cdots + \lambda_r \boldsymbol{b}_r = \boldsymbol{0}.$$

而$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_s$线性无关，所以

$$\boldsymbol{K}\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\\ \vdots\\ \lambda_r\end{pmatrix} = \boldsymbol{0},$$

即$\lambda_1 \boldsymbol{k}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{k}_2 + \cdots + \lambda_r \boldsymbol{k}_r = \boldsymbol{0}$，而$\boldsymbol{k}_1, \boldsymbol{k}_2, \cdots, \boldsymbol{k}_r$线性无关，故

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_r = 0.$$

说明$\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{b}_r$线性无关．

7．设有两个向量组A：$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$；$B$：$\boldsymbol{\beta}_1 = \boldsymbol{\alpha}_1 - \boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\beta}_2 = \boldsymbol{\alpha}_2 - \boldsymbol{\alpha}_3, \cdots, \boldsymbol{\beta}_{r-1} = \boldsymbol{\alpha}_{r-1} - \boldsymbol{\alpha}_r$，$\boldsymbol{\beta}_r = \boldsymbol{\alpha}_r + \boldsymbol{\alpha}_1$，证明向量组$A$的秩等于向量组$B$的秩．

证明　因为

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{\beta}_1\\ \boldsymbol{\beta}_2\\ \vdots\\ \boldsymbol{\beta}_r\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -1\\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1\\ \boldsymbol{\alpha}_2\\ \vdots\\ \boldsymbol{\alpha}_r\end{pmatrix},$$

由于

$$\begin{vmatrix}1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -1\\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1\end{vmatrix} = 2 \neq 0,$$

所以

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1\\ \boldsymbol{\alpha}_2\\ \vdots\\ \boldsymbol{\alpha}_r\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -1\\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}\boldsymbol{\beta}_1\\ \boldsymbol{\beta}_2\\ \vdots\\ \boldsymbol{\beta}_r\end{pmatrix},$$

即$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$与$\boldsymbol{\beta}_1$，$\boldsymbol{\beta}_2,\cdots$，$\boldsymbol{\beta}_r$等价，所以$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\cdots$，$\boldsymbol{\alpha}_r$与$\boldsymbol{\beta}_1$，$\boldsymbol{\beta}_2$，$\cdots$，$\boldsymbol{\beta}_r$有相同的秩.

8．设$\boldsymbol{A}$是n阶方阵，$\boldsymbol{\alpha}$是n维列向量，若$\boldsymbol{A}^{m-1}\boldsymbol{\alpha}\neq\boldsymbol{0}$，　　　$\boldsymbol{A}^m\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0}$，试证$\boldsymbol{\alpha}$,$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\alpha}$,$\cdots$，$\boldsymbol{A}^{m-1}\boldsymbol{\alpha}$线性无关（$m\geq 2$）.

证明　因为$\boldsymbol{A}^m\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0}$，所以$\boldsymbol{A}^{m+1}\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{A}^{m+2}\boldsymbol{\alpha}=\cdots=\boldsymbol{0}$．令

$$\lambda_0\boldsymbol{\alpha}+\lambda_1\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}+\lambda_2\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\alpha}+\cdots+\lambda_{m-1}\boldsymbol{A}^{m-1}\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0},$$

上式两边左乘$\boldsymbol{A}^{m-1}$，则有

$$\lambda_0\boldsymbol{A}^{m-1}\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0}.$$

因为$\boldsymbol{A}^{m-1}\boldsymbol{\alpha}\neq\boldsymbol{0}$，所以$\lambda_0=0$，从而有

$$\lambda_1\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}+\lambda_2\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\alpha}+\cdots+\lambda_{m-1}\boldsymbol{A}^{m-1}\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0},$$

上式两边左乘$\boldsymbol{A}^{m-2}$，则有

$$\lambda_1\boldsymbol{A}^{m-1}\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0},$$

从而，又得$\lambda_1=0$．以此类推，还可以得$\lambda_2=\cdots=\lambda_{m-1}=0$，所以$\boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\alpha}$，$\cdots$，$\boldsymbol{A}^{m-1}\boldsymbol{\alpha}$线性无关.

9．已知向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$的秩为 3，向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$的秩为 3，而向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_5$的秩为 4．证明向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_5-\boldsymbol{\alpha}_4$的秩为 4.

证明　　因为$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$的秩为 3，所以$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$线性无关．又由$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\alpha}_4$的秩为 3，可得$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\alpha}_4$线性相关．故$\boldsymbol{\alpha}_4$可由$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$线性表示，即存在一组数$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$．使

$$\boldsymbol{\alpha}_4=\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1+\lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2+\lambda_3\boldsymbol{\alpha}_3.$$

令$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3+k_4(\boldsymbol{\alpha}_5-\boldsymbol{\alpha}_4)=\boldsymbol{0}$，则有

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3+k_4[\boldsymbol{\alpha}_5-(\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1+\lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2+\lambda_3\boldsymbol{\alpha}_3)]=\boldsymbol{0},$$

得$(k_1-k_4\lambda_1)\boldsymbol{\alpha}_1+(k_2-k_4\lambda_2)\boldsymbol{\alpha}_2+(k_3-k_4\lambda_3)\boldsymbol{\alpha}_3+k_4\boldsymbol{\alpha}_5=\boldsymbol{0}$．因为$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\alpha}_5$的秩为 4，所以

$\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$, $\boldsymbol{\alpha}_3$, $\boldsymbol{\alpha}_5$ 线性无关．从而有

$$\begin{cases} k_1 - k_4\lambda_1 = 0, \\ k_2 - k_4\lambda_2 = 0, \\ k_3 - k_4\lambda_3 = 0, \\ k_4 = 0. \end{cases}$$

解之得 $k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = 0$．于是可知 $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$, $\boldsymbol{\alpha}_3$, $\boldsymbol{\alpha}_5 - \boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关.

10．已知向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots \boldsymbol{\alpha}_m$ 中任一向量 $\boldsymbol{\alpha}_i$ 都不是它前面 i-1 个向量的线性组合，且 $\boldsymbol{\alpha}_1 \neq \boldsymbol{0}$，证明 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots \boldsymbol{\alpha}_m$ 的秩为 m .

证明　令 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_m\boldsymbol{\alpha}_m = \boldsymbol{0}$.

首先证明 $k_m = 0$．反证法，假设 $k_m \neq 0$，则有

$$\boldsymbol{\alpha}_m = \left(-\frac{k_1}{k_m}\right)\boldsymbol{\alpha}_1 + \cdots + \left(-\frac{k_{m-1}}{k_m}\right)\boldsymbol{\alpha}_{m-1} .$$

这与题设矛盾．所以得 $k_m = 0$.

同理可证 $k_{m-1} = \cdots = k_2 = 0$，最后得

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1 = \boldsymbol{0} .$$

又因为 $\boldsymbol{\alpha}_1 \neq \boldsymbol{0}$，所以又得 $k_1 = 0$.

综上得 $k_1 = k_2 = \cdots = k_m = 0$，故 $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$, $\cdots$, $\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关，即 $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$, $\cdots$, $\boldsymbol{\alpha}_m$ 的秩为 m .

11．设 $A:\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots \boldsymbol{\alpha}_n$； $B:\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_n$ 都是 n 维空间 V 的基.

$$W = \left\{ \boldsymbol{\alpha} \mid \boldsymbol{\alpha} = \sum_{i=1}^{n} x_i\boldsymbol{\alpha}_i; \sum_{i=1}^{n} x_i(\boldsymbol{\alpha}_i - \boldsymbol{\beta}_i) = \boldsymbol{0}, x_i \in \mathbf{R}, i = 1, 2, \cdots, n \right\}$$

证明 W 是 V 的子空间.

证明　任取 $\boldsymbol{\alpha} \in W$，则有

$$\boldsymbol{\alpha} = x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + x_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{\alpha}_n$$

因为 $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$, $\cdots$, $\boldsymbol{\alpha}_n$ 是 n 维向量，所以 $\boldsymbol{\alpha}$ 也是 n 维向量，即 $\boldsymbol{\alpha} \in V$，故 $W \subset V$.

又设 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in W$，则有

$$\boldsymbol{\alpha} = x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + \cdots + x_n\boldsymbol{\alpha}_n \text{ 且 } \boldsymbol{\alpha} = x_1\boldsymbol{\beta}_1 + \cdots + x_n\boldsymbol{\beta}_n ,$$

$$\boldsymbol{\beta} = y_1\boldsymbol{\alpha}_1 + \cdots + y_n\boldsymbol{\alpha}_n \text{ 且 } \boldsymbol{\beta} = y_1\boldsymbol{\beta}_1 + \cdots + y_n\boldsymbol{\beta}_n,$$

从而

$$\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta} = (x_1 + y_1)\boldsymbol{\alpha}_1 + \cdots + (x_n + y_n)\boldsymbol{\alpha}_n,$$

且

$$\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta} = (x_1 + y_1)\boldsymbol{\beta}_1 + \cdots + (x_n + y_n)\boldsymbol{\beta}_n,$$

于是可知$\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta} \in W$.

又对于$\boldsymbol{\alpha} \in V$及实数$\lambda$，有

$$\boldsymbol{\alpha} = x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + \cdots + x_n\boldsymbol{\alpha}_n \text{ 且 } \boldsymbol{\alpha} = x_1\boldsymbol{\beta}_1 + \cdots + x_n\boldsymbol{\beta}_n,$$

从而

$$\lambda\boldsymbol{\alpha} = \lambda x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + \cdots + \lambda x_n\boldsymbol{\alpha}_n \text{ 且 } \lambda\boldsymbol{\alpha} = \lambda x_1\boldsymbol{\beta}_1 + \cdots + \lambda x_n\boldsymbol{\beta}_n,$$

即$\lambda\boldsymbol{\alpha} \in W$.

所以W是向量空间，且是V的子空间.