1 用定义证明：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{2^n}=0$ **(2)** $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-1}{4x^2-7x+3}=2.$

证 (1) 当 $n\geq 2$ 时，有 $|\frac{n}{2^n}-0|=\frac{n}{(1+1)^n}\leq\frac{n}{1+n+\frac{1}{2}n(n-1)}<\frac{2n}{n(n-1)}=\frac{2}{n-1}$。

$\forall\varepsilon>0$，要使 $\left|\frac{n}{2^n}-0\right|<\varepsilon$，只要 $\frac{2}{n-1}<\varepsilon$，即 $n>\frac{2}{\varepsilon}+1$，取 $N=\max\left\{[\frac{2}{\varepsilon}+1],2\right\}$，

当 $n>N$ 时，有 $\left|\frac{n}{2^n}-0\right|<\varepsilon$，故 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{2^n}=0$.

(2) $\forall\varepsilon>0$，由于 $|\frac{x^2-1}{4x^2-7x+3}-2|=\frac{7|x-1|}{|4x-3|}$，而

$|4x-3|=|4(x-1)+1|\geq 1-4|x-1|,$

当 $|x-1|<\frac{1}{8}$ 时，$1-4|x-1|>\frac{1}{2}$，故不妨设 $0<|x-1|<\frac{1}{8}$，从而

$$|\frac{x^2-1}{4x^2-7x+3}-2|=\frac{7|x-1|}{|4x-3|}\leq\frac{7|x-1|}{1-4|x-1|}<14|x-1|,$$

要使 $|\frac{x^2-1}{4x^2-7x+3}-2|<\varepsilon$，只要 $14|x-1|<\varepsilon$，取 $\delta=\min\{\varepsilon/14,1/8\}$，

当 $0<|x-1|<\delta$ 时，恒有 $|\frac{x^2-1}{4x^2-7x+3}-2|<14|x-1|<\varepsilon$。

所以， $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-1}{4x^2-7x+3}=2.$

2 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin(\sqrt{n^2+1}\pi).$

解

$$\lim_{n\to\infty}\sin(\sqrt{n^2+1}\pi)=\lim_{n\to\infty}\sin[(\sqrt{n^2+1}-n)\pi+n\pi]$$
$$=\lim_{n\to\infty}(-1)^n\sin(\sqrt{n^2+1}-n)\pi$$
$$=\lim_{n\to\infty}(-1)^n\sin\frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n}$$

因 $n\to\infty$ 时，$|(-1)^n|\le 1,\sin\dfrac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n}\to 0$，所以原式=0。

3 设 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$，$g(x)$ 在 x_0 的某一邻域内有界，证明：$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)g(x)=0$。

证　由题设知，$\exists\delta_1>0$，当 $x\in U(x_0,\delta_1)$，$\exists M>0$，使得 $|g(x)|\le M$。且由 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$ 知，$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta_2>0$，当 $x\in\mathring{U}(x_0,\delta_1)$，有 $|f(x)-0|=|f(x)|<\dfrac{\varepsilon}{M}$。取 $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}>0$，当 $x\in\mathring{U}(x_0,\delta_1)$，，有 $|f(x)g(x)-0|=|f(x)g(x)|<\dfrac{\varepsilon}{M}\cdot M=\varepsilon.$

故 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)g(x)=0$.

4 求下列极限

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2+e^{1/x}}{1+e^{4/x}}+\dfrac{\sin x}{|x|}\right)$；　　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\tan^n\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{2}{n}\right)$。

解　(1)　因当 $x\to 0^+$ 时，$e^{1/x}\to+\infty$；　$x\to 0^-$ 时，$e^{1/x}\to 0$，所以

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{2+e^{1/x}}{1+e^{4/x}}+\frac{\sin x}{|x|}\right)=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{2/e^{4/x}+e^{1/x}/e^{4/x}}{1/e^{4/x}+1}+\frac{\sin x}{x}\right)=0+1=1,$$

所以原式=1.

$$\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{2+e^{1/x}}{1+e^{4/x}}+\frac{\sin x}{|x|}\right)=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{2+e^{1/x}}{1+e^{4/x}}+\frac{\sin x}{-x}\right)=2-1=1,$$

(2)　$$\text{原式}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1+\tan\frac{2}{n}}{1-\tan\frac{2}{n}}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2\tan\frac{2}{n}}{1-\tan\frac{2}{n}}\right)^{\frac{1-\tan\frac{2}{n}}{2\tan\frac{2}{n}}\cdot\frac{2\tan\frac{2}{n}}{1-\tan\frac{2}{n}}\cdot n}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2\tan\frac{2}{n}}{1-\tan\frac{2}{n}}\cdot n},$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2\tan\frac{2}{n}}{1-\tan\frac{2}{n}}\cdot n=\lim_{n\to\infty}\frac{2\cdot\frac{2}{n}}{1-\tan\frac{2}{n}}\cdot n=4,$$ 所以原式 $=e^4$。

5 设 $x_1>0$，$x_{n+1}=\sqrt{3+2x_n}$（$n=1,2,\cdots$），证明:数列 $\{x_n\}$ 的极限存在，并求此极限。

［分析］若数列的第一项 x_1 给定，以后各项可依次用前一项按公式 $x_{n+1}=f(x_n)$ 求得，则称数列 $\{x_n\}$ 是由 $f(x)$ 定义的递推公式，如本题 $f(x)=\sqrt{3+2x}$。可用单调有界数列收敛准则判定该数列是否收敛，若已收敛，则其极限 A 必满足 $A=f(A)$，由此求出其极限。

证　由 $x_1>0$ 可知，$x_2=\sqrt{3+2x_1}>\sqrt{3}>0$，$x_3=\sqrt{3+2x_2}>\sqrt{3}>0$，依次推得 $x_n>0$（$n=1,2,\cdots$），当 $n\ge 2$ 时，有

$$x_{n+1}-x_n=\sqrt{3+2x_n}-\sqrt{3+2x_{n-1}}=\frac{2(x_n-x_{n-1})}{\sqrt{3+2x_n}+\sqrt{3+2x_{n-1}}}$$

这表明 $x_{n+1}-x_n$ 与 x_n-x_{n-1} 总是同号;从而数列 $\{x_n\}$ 的单调性由 x_2-x_1 的符号确定。

又因 $x_2-x_1=\sqrt{3+2x_1}-x_1=\dfrac{3+2x_1-x_1^2}{\sqrt{3+2x_1}+x_1}=\dfrac{(3-x_1)(1+x_1)}{\sqrt{3+2x_1}+x_1}$，

于是可得,当 $0<x_1<3$ 时，$x_2>x_1\Rightarrow x_3>x_2\Rightarrow\cdots\Rightarrow x_{n+1}>x_n\Rightarrow\cdots$，即 $\{x_n\}$ 是单调递增数列，$x_{n+1}=\sqrt{3+2x_n}>x_n$，得 $0<x_n<3$，即 $\{x_n\}$ 单调递增有上界;

当 $x_1=3$ 时，$x_2=x_1\Rightarrow x_3=x_2\Rightarrow\cdots\Rightarrow x_{n+1}=x_n\Rightarrow\cdots$，即 $x_n=3$（$n=1,2,\cdots$）;

当 $x_1>3$ 时，$x_2<x_1\Rightarrow x_3<x_2\Rightarrow\cdots\Rightarrow x_{n+1}<x_n\Rightarrow\cdots$，即 $\{x_n\}$ 是单调递减数列，且由 $x_n>0$（$n=1,2,\cdots$），$x_{n+1}=\sqrt{3+2x_n}$ 得，$x_n>\sqrt{3}$，即 $\{x_n\}$ 单调递减有下界.

综上所述，数列 $\{x_n\}$ 的极限存在，设其收敛到 A，对 $x_{n+1}=\sqrt{3+2x_n}$ 两边取极限，得 $\lim\limits_{n\to\infty}x_{n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{3+2x_n}$，得 $A=\sqrt{3+2A}$，解得 $A=3$(舍去-1)。数列 $\{x_n\}$ 的极限存在，并且极限为 3.

6 证明：$\lim\limits_{n\to\infty}(\cos x\cos\dfrac{x}{2}\cdots\cos\dfrac{x}{2^n})=\dfrac{\sin 2x}{2x}$

证：$\because 2^{n+1}\sin\dfrac{x}{2^n}(\cos x\cos\dfrac{x}{2}\cdots\cos\dfrac{x}{2^n})=2^n\sin\dfrac{x}{2^{n-1}}(\cos x\cos\dfrac{x}{2}\cdots\cos\dfrac{x}{2^{n-1}})$

$$= \cdots = 2\sin x\cos x = \sin 2x,$$

$$\therefore \text{ 左式 } = \lim_{n\to\infty}\frac{\sin 2x}{2^{n+1}\sin(\frac{x}{2^n})} = \frac{\sin 2x}{2x}\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{x}{2^n}}{\sin(\frac{x}{2^n})} = \frac{\sin 2x}{2x} = \text{右式。}$$

注意：这里n为变量，x为参数。

7 求函数 $y = \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+x^n+(\frac{x^2}{2})^n} \quad (x \geq 0)$.

解 当$0 \leq x < 1$时，$1 \leq \sqrt[n]{1+x^n+(x^2/2)^n} \leq \sqrt[n]{3}$， 而$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{3} = 1$，故

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+x^n+(x^2/2)^n} = 1;$$

当$1 \leq x < 2$时，$x \leq \sqrt[n]{1+x^n+(x^2/2)^n} \leq \sqrt[n]{3}x$， 而$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{3} = 1$，故

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+x^n+(x^2/2)^n} = x;$$

当$x \geq 2$时，$\frac{x^2}{2} \leq \sqrt[n]{1+x^n+(x^2/2)^n} \leq \sqrt[n]{3}\frac{x^2}{2}$， 而$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{3}\frac{x^2}{2} = \frac{x^2}{2}$，故

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+x^n+(x^2/2)^n} = x^2/2, \quad \text{所以 } y = \begin{cases} 1, & 0 \leq x < 1 \\ x, & 1 \leq x < 2 \\ x^2/2, & x \geq 2 \end{cases}.$$

8 求下列极限

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\cdots(1+x^{2^n})$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2^3-1}{2^3+1}\right)\left(\frac{3^3-1}{3^3+1}\right)\cdots\left(\frac{n^3-1}{n^3+1}\right)$;

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{1}+\frac{1}{1+2}+\cdots+\frac{1}{1+2+\cdots+n})$.

解 (1) 原式

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1-x^2}{1-x}(1+x^2)\cdots(1+x^{2^n})=\lim_{n\to\infty}\frac{1-x^4}{1-x}(1+x^4)\cdots(1+x^{2^n})$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1-x^{2^n}}{1-x}(1+x^{2^n})=\lim_{n\to\infty}\frac{1-(x^{2^n})^2}{1-x}$$

$$=\begin{cases}\dfrac{1}{1-x}, & |x|<1\\ \infty, & |x|>1\\ \infty, & x=1\\ 0, & x=-1\end{cases}$$

(2) 因为 $\dfrac{k^3-1}{k^3+1}=\dfrac{k-1}{k+1}\cdot\dfrac{k^2+k+1}{k^2-k+1}$，$\prod\limits_{k=2}^{n}\dfrac{k-1}{k+1}=\dfrac{2}{n(n+1)}$，

并且, 注意到 $k^2+k+1=(k+1)^2-(k+1)+1$，从而 $\prod\limits_{k=2}^{n}\dfrac{k^2+k+1}{k^2-k+1}=\dfrac{n^2+n+1}{3}$，

因此 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2^3-1}{2^3+1}\right)\left(\dfrac{3^3-1}{3^3+1}\right)\cdots\left(\dfrac{n^3-1}{n^3+1}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2(n^2+n+1)}{3n(n+1)}=\dfrac{2}{3}$。

(3) 原式 $=2\lim\limits_{n\to\infty}[(1-\frac{1}{2})+(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1})]=2\lim\limits_{n\to\infty}(1-\frac{1}{n+1})=2.$

9 设 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{2007}}{x^n-(x-1)^n}=a\neq 0$，求 n，a .

10 求函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-x^{2n}}{1+x^{2n}}x$ 的间断点，并判别其类型.

【分析】 因函数 $f(x)$ 是以极限形式给出的, 故首先必须通过取极限求出 $f(x)$ 的表达式，再通过 $f(x)$ 的表达式讨论连续问题.

解 求极限得 $f(x)=\begin{cases}-x, |x|>1\\ 0, \quad |x|=1\\ x, \quad |x|<1\end{cases}$，

$\because$ $f(1-0)=\lim\limits_{x\to 1^-}x=1\neq f(1+0)=\lim\limits_{x\to 1^+}(-x)=-1$，$\therefore$ $x=1$ 为 $f(x)$ 的跳跃间断点.

又$\because$ $f(-1-0)=\lim\limits_{x\to -1^-}(-x)=1\neq f(-1+0)=\lim\limits_{x\to -1^+}x=-1$，

∴　$x=-1$ 也为 $f(x)$ 的跳跃间断点.

11 求下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to 0}(\dfrac{a^x+b^x+c^x}{3})^{\frac{1}{x}}$（$a>0$，$b>0$，$c>0$）；　　(2) $\lim\limits_{x\to 0^+}(\cos\sqrt{x})^{\frac{\pi}{x}}$.

解　(1) 令 $(\dfrac{a^x+b^x+c^x}{3})^{\frac{1}{x}}=y$, 于是

$$\lim_{x\to 0}\ln y=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln(\frac{a^x+b^x+c^x}{3})=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln(1+\frac{a^x+b^x+c^x-3}{3})=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\frac{a^x+b^x+c^x-3}{3}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{3x}+\lim_{x\to 0}\frac{b^x-1}{3x}+\lim_{x\to 0}\frac{c^x-1}{3x}=\lim_{x\to 0}\frac{x\ln a}{3x}+\lim_{x\to 0}\frac{x\ln b}{3x}+\lim_{x\to 0}\frac{x\ln c}{3x}$$

$$=\frac{1}{3}\ln(abc),$$

因此　$$\lim_{x\to 0}y=\lim_{x\to 0}(\frac{a^x+b^x+c^x}{3})^{\frac{1}{x}}=e^{\frac{1}{3}\ln(abc)}=\sqrt[3]{abc}.$$

(2) $$\lim_{x\to 0^+}(\cos\sqrt{x})^{\frac{\pi}{x}}=\lim_{x\to 0^+}\left\{[1+(\cos\sqrt{x}-1)]^{\frac{1}{\cos\sqrt{x}-1}}\right\}^{\frac{(\cos\sqrt{x}-1)\pi}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{(\cos\sqrt{x}-1)\pi}{x}}=e^{-\frac{\pi}{2}}.$$

12　设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[0,2a]$ 上连续，且 $f(0)=f(2a)$，证明存在 $c\in[0,a]$，使得 $f(c)=f(a+c)$.

【分析】　欲证 $f(c)=f(a+c)$，即证 $f(c)-f(a+c)=0$，也即证 $f(x)-f(x+a)=0$ 在 $[0,a]$ 中存在着零点.

证　令 $F(x)=f(x)-f(x+a)$，由于 $f(0)=f(2a)$，于是

$$F(0)=f(0)-f(a),\qquad F(a)=f(a)-f(2a)=f(a)-f(0)=-F(0),$$

可得　$F(0)F(a)\le 0$．当 $F(0)F(a)=0$ 时，取 $c=0$ 时，$f(c)=f(a+c)$；

当 $F(0)F(a)<0$ 时，根据零点定理可知，至少存在一点 $c\in(0,a)$，使得 $F(c)=0$，即 $f(c)=f(a+c)$ 成立.

13 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, $f(a)=f(b)$, 证明存在 $x_0\in[a,b]$, 使

$$f(x_0)=f(x_0+\frac{b-a}{2}).$$

证 令 $F(x)=f(x)-f(x+\frac{b-a}{2})$, 则 $F(x)$ 在 $[a,\frac{b+a}{2}]$ 上连续, 且

$$F(a)=f(a)-f(\frac{a+b}{2}),\qquad F(\frac{a+b}{2})=f(\frac{a+b}{2})-f(b).$$

由 $f(a)=f(b)$ 知, 若 $f(a)=f(\frac{a+b}{2})$, 则取 $x_0=a$ (或 $x_0=\frac{b+a}{2}$), 命题得证.

若 $f(a)=f(b)\neq f(\frac{a+b}{2})$, 则 $F(a)F(b)<0$. 由介值定理可知, 存在 $x_0\in(a,\frac{b+a}{2})$,

$$使\ F(x_0)=0,\qquad 即\ f(x_0)=f(x_0+\frac{b-a}{2}).$$