极限的求法总结

简介：求极限方法举例，列举21种求极限的方法和相关问题

QQ群：498983899

1.代入法求极限

例1. $\lim\limits_{x \to 2}(x^2 + x - 2)$

例2. 设有多项式 $P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n$,

求 $\lim\limits_{x \to x_0} P_n(x)$.

$$\lim_{x \to x_0} P_n(x) = a_0(\lim_{x \to x_0} x)^n + a_1(\lim_{x \to x_0} x)^{n-1} + \cdots + a_n$$

$$= \boldsymbol{a_0 x_0^{\ n} + a_1 x_0^{\ n-1} + \cdots + a_n} = P_n(x_0).$$

例3. $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^2+5x-6}{3x^2+2}$

商的法则(代入法)

方法总结：

多项式函数与分式函数(分母不为0)用代入法求极限;

2.由无穷大量和无穷小量的关系求极限

例 求 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{4x-1}{x^2+2x-3}$.

解 $\because \lim\limits_{x\to1}(x^2+2x-3)=0$ **商的法则不能用**

又 $\because \lim\limits_{x\to1}(4x-1)=3\neq0,$

$\therefore \lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2+2x-3}{4x-1}=\dfrac{0}{3}=0.$

由无穷小与无穷大的关系,得 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{4x-1}{x^2+2x-3}=\infty.$

3.消去零因子法 $\left(\frac{0}{0}\text{型}\right)$

例4 求 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x^2+2x-3}$.

解 $x\to 1$时,分子,分母的极限都是零. $\left(\frac{0}{0}\text{型}\right)$

先约去不为零的无穷小因子$x-1$后再求极限.

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x^2+2x-3}=\lim_{x\to 1}\frac{(x+1)(x-1)}{(x+3)(x-1)}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{x+1}{x+3}=\frac{1}{2}.$$

(消去零因子法)

4.无穷小因子分出法求极限

例　求 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+3x^2+5}{7x^3+4x^2-1}$.

解　$x\to\infty$时, 分子,分母的极限都是无穷大.$\left(\dfrac{\infty}{\infty}型\right)$

先用x^3去除分子分母,分出无穷小,再求极限.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3+3x^2+5}{7x^3+4x^2-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{2+\dfrac{3}{x}+\dfrac{5}{x^3}}{7+\dfrac{4}{x}-\dfrac{1}{x^3}}=\frac{2}{7}.$$

(无穷小因子分出法)

QQ群：498983899

小结: 当$a_0 \neq 0, b_0 \neq 0, m$和$n$为非负整数时有

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \cdots + b_m} = \begin{cases} \dfrac{a_0}{b_0}, 当 n = m, \\ 0, 当 n < m, \\ \infty, 当 n > m, \end{cases}$$

无穷小分出法: 以分母中自变量的最高次幂除分子,分母,以分出无穷小量,然后再求极限.

练习1 求 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2+5x+1}{x^2-4x-8}$.

练习2 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n+1}{\sqrt{n^2+n}}$.

练习3 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(2x-3)^{20}(3x+2)^{30}}{(2x+1)^{50}}$

练习4 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(2x+1)^4\cdot(x-1)^{78}}{(x+1)^{82}}$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^4(2+\frac{1}{x})^4\cdot x^{78}(1-\frac{1}{x})^{78}}{x^{82}(1+\frac{1}{x})^{82}}=2^4=16$$

5.先变形再求极限

(利用求和化简，拆项技巧，合并化简等)

例 求 $\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\cdots+\frac{n}{n^2})$.

解 $n\to\infty$时,是无限多个无穷小之和.

先变形再求极限.

$$\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\cdots+\frac{n}{n^2})=\lim_{n\to\infty}\frac{1+2+\cdots+n}{n^2}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}(1+\frac{1}{n})=\frac{1}{2}.$$

例 $$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1\times3}+\frac{1}{3\times5}+\ldots+\frac{1}{4n^2-1}\right)$$

拆项: $$\frac{1}{4n^2-1}=\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1\times3}+\frac{1}{3\times5}+\ldots+\frac{1}{4n^2-1}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{1}{2}$$

例 $\lim\limits_{x\to 1}(\frac{1}{x-1}-\frac{2}{x^2-1})$

$$\lim_{x\to 1}(\frac{1}{x-1}-\frac{2}{x^2-1})=\lim_{x\to 1}(\frac{x+1}{x^2-1}-\frac{2}{x^2-1})$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{x+1}=\frac{1}{2}$$

方法总结：

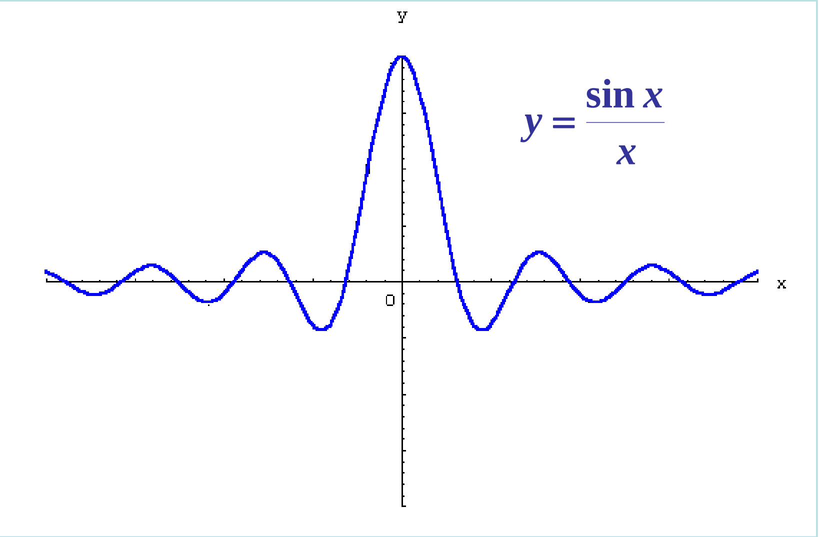
对于求无穷多项的极限和不符合四则运算的极限，先通过变形在求极限;

2005年数学三考研试题　（第三大题15小题8分）

(15) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1+x}{1-e^{-x}}-\frac{1}{x}\right).$

6.利用无穷小运算性质求极限

例 求 $\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}$.



解 当$x\to\infty$时, $\frac{1}{x}$为无穷小,

而$\sin x$是有界函数.

$$\therefore \lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=0.$$

练习1. 求$\lim\limits_{x\to 0} x^2 \sin\dfrac{1}{x}$.

练习2. 求$\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{1}{x}\sin x$.

练习3. 求$\lim\limits_{x\to 0} x\sin\dfrac{1}{x}$.

练习4. 求$\lim\limits_{x\to \infty} x\sin\dfrac{1}{x}$.

练习5. 求$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x}$.

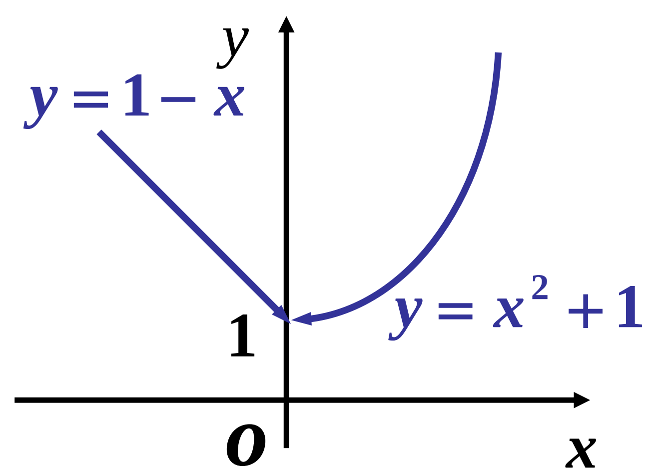
7.利用左右极限求分段函数极限

例 设 $f(x)=\begin{cases}1-x, & x<0\\ x^2+1, & x\geq 0\end{cases}$，求 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

解 $x=0$是函数的分段点，两个单侧极限为

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}(1-x)=1,$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}(x^2+1)=1,$$



左右极限存在且相等，

故 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=1$.

8.分子（母）有理化求极限

【说明】分子或分母有理化求极限，是通过有理化化去无理式。

例　求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+3}-\sqrt{x^2+1})$

$$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+3}-\sqrt{x^2+1})=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\sqrt{x^2+3}-\sqrt{x^2+1})(\sqrt{x^2+3}+\sqrt{x^2+1})}{\sqrt{x^2+3}+\sqrt{x^2+1}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{\sqrt{x^2+3}+\sqrt{x^2+1}}=0$$

例　求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+4}-2}{\sqrt{x^2+9}-3}$.

(分子分母有理化消去零因子)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+4}-2}{\sqrt{x^2+9}-3}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{x^2+4}-2)(\sqrt{x^2+4}+2)(\sqrt{x^2+9}+3)}{(\sqrt{x^2+4}+2)(\sqrt{x^2+9}-3)(\sqrt{x^2+9}+3)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^2(\sqrt{x^2+9}+3)}{x^2(\sqrt{x^2+4}+2)}=\frac{3}{2}$$

9.利用夹逼准则（两边夹法）则求极限

说明：两边夹法则需要放大和缩小不等式，常用的方法是都换成最大的和最小的。

例　求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)$.

解　$\because \frac{n}{\sqrt{n^2+n}}<\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}<\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$,

又 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}}=1$,

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}=1$,　**由夹逼定理得**

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)=1$.

说明：这种n项和的极限有时也可以转化为定积分来计算，这道题是不可以的。

例 $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^1 \frac{x^n \sin^3 x}{1+\sin^3 x}dx$

解： 当$0\le x\le 1$ 时，（积分不容易计算）

$$0\le \frac{x_n \sin^3 x}{1+\sin^3 x}\le x^n$$

故 $0\le \int_0^1 \frac{x^n \sin^3 x}{1+\sin^3 x}dx \le \int_0^1 x^n dx = \left.\frac{x^n}{n+1}\right|_0^1 = \frac{1}{n-1},$

因为 $\lim\limits_{x\to+\infty} 0 = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{n+1}=0$

所以 $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_0^1 \frac{x^n \sin^3 x}{1+\sin^3 x}dx = 0$

10. 用等价无穷小量代换求极限

常用的等价无穷小量:

当$x \to 0$时:

(1)$x \sim \sin x \sim \tan x \sim \arcsin x \sim \arctan x \sim \ln(1+x) \sim e^x - 1$;

(2)$1-\cos x \sim \dfrac{x^2}{2}$;

(3)$e^x - 1 \sim x$;

(4)$\ln(1+x) \sim x$;

(5)$a^x - 1 \sim x\ln a$;

(6)$(1+\beta x)^\alpha - 1 \sim \alpha\beta x$.

例：求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\ln(1+x)}{1-\cos x}$

解 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\ln(1+x)}{1-\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cdot x}{\frac{1}{2}x^2}=2$

练习： 1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(e^{2x}-1)\ln(1+x)}{1-\cos x}$ 2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x\sin x}-1}{\sqrt{1-\cos x^2}}$

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}$

2005年数学三考研试题 (第一大题填空题第1小题4分)

(1) $\lim\limits_{x\to\infty} x\sin\dfrac{2x}{x^2+1}$.

2009年数学三考研试题　(第二大题填空题第9小题4分)

(9) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e-e^{\cos x}}{\sqrt[3]{1+x^2}-1}$.

2008年数学三考研试题　(第三大题第15题10分)

(15) $$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\ln\frac{\sin x}{x}.$$

11. 应用两个重要极限求极限

两个重要极限是

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

和

$$\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^{x}=\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^{n}=\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$$

第一个重要极限过于简单且可通过等价无穷小来实现。

主要考第二个重要极限

例：求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^{x}$

【说明】第二个重要极限主要搞清楚凑的步骤：先凑出1，再凑 $+\dfrac{1}{x}$，最后凑指数部分。

解 $$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{2}{x-1}\right)^{x}=\lim_{x\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{x-1}{2}}\right)^{\frac{x-1}{2}}\left(1+\frac{2}{x-1}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^{2}=e^{2}$$

例 求 $\lim\limits_{x\to\infty}(1-\dfrac{1}{x})^{x}$.

解 原式 $=\lim\limits_{x\to\infty}[(1+\dfrac{1}{-x})^{-x}]^{-1}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{(1+\dfrac{1}{-x})^{-x}}=\dfrac{1}{e}$.

练习 1 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\dfrac{1}{x^{2}}\right)^{x}$

2 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x+2a}{x-a}\right)^{x}=8$ ，求 a

2012年数学三考研试题　(第二答题填空题第9小题)

9. $$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}(\tan x)^{\frac{1}{\cos x-\sin x}}$$

解：原式$=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\left[(1+(\tan x-1))^{\frac{1}{\tan x-1}}\right]^{\frac{\tan x-1}{\cos x-\sin x}}$

$$=e^{\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\cos}\cdot\frac{\sin x-\cos x}{\cos x-\sin x}}=e^{-\sqrt{2}}.$$

12. 应用数列的单调有界收敛准则求极限

【分析】一般利用单调增加有上界或单调减少有下界数列必有极限的准则来证明数列极限的存在。

例　设 $a>0$，$x_1>0$，$x_{n+1}=\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{a}{x_n}\right)\quad(n=1,2,3,\cdots)$

（1）证明 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n$ 存在；（2）求 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n$.

解: (1) $x_{n+1}=\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{a}{x_n}\right)\geq\sqrt{x_n\cdot\frac{a}{x_n}}=\sqrt{a}>0\Rightarrow x_n\geq\sqrt{a}$

即 $\{x_n\}$ 有下界， 由此得

$$x_{n+1}-x_n=\frac{1}{2}(x_n+\frac{a}{x_n})-x_n=\frac{a-x_n^2}{2x_n}\leq 0$$

既 $\left\{x_n\right\}$ 单调下降，因此 $\lim\limits_{x\to+\infty}x_n$ 存在。

（2）设 $\lim\limits_{x\to+\infty}x_n=\beta$, 由（1）$\beta\geq\sqrt{a}>0$

对递推公式两端取极限，得 $\beta=\frac{1}{2}(\beta+\frac{2}{\beta})$

解得 $\beta=\pm\sqrt{a}$ （舍去负值），所以 $\beta=\sqrt{a}.$

练习　设 $x_1=\sqrt{A}\ (A>0)$，$x_2=\sqrt{A+\sqrt{A}}$，$\cdots$，$x_n=\sqrt{A+\sqrt{A+\cdots+\sqrt{A}}}\ (n=1,2,\cdots)$，

求 $\lim\limits_{x\to+\infty} x_n$。

解：（1）先证$\{x_n\}$单调增加且有上界，

$$\text{因为} x_2=\sqrt{A+\sqrt{A}}=\sqrt{A+x_1}>x_1，$$

假设当$n-k$时，有$x_k>x_{k-1}$，那么由$A+x_k>A+x_{k-1}$，知$\sqrt{A+x_k}>\sqrt{A+x_{k-1}}$，即

$x_{k-1}>x_2$，故对$n=k+1$也成立，由数学归纳原理知$\{x_n\}$单调增加。

再证数列$\{x_n\}$有界，因为$x_1=\sqrt{A}<\sqrt{A}+1$，设当$n=k$时，有$x_k<\sqrt{A}+A$，那么当$n=k+1$时，

$$x_{k+1}=\sqrt{A+x_k}<\sqrt{A+\sqrt{A}+1}<\sqrt{A-2\sqrt{A}+1}=\sqrt{(\sqrt{A}+1)^2}=\sqrt{A}+1$$

因此$\{x_n\}$有上界，从而数列$\{x_n\}$则敛。

（2）再求$\lim\limits_{x\to+\infty}x_n$，设$\lim\limits_{x\to+\infty}x_n=a$，将$x_{n+1}=\sqrt{A+X_n}$ $(n=1,2,\cdots)$两端取极限，得

$a=\sqrt{A+a}$，解得$a=\dfrac{1}{2}(1\pm\sqrt{1+4A})$，由（1）知$a>0$，因此$a=\dfrac{1}{2}(1+\sqrt{1+4A})$。

13.用对数恒等式 $\lim f(x)^{g(x)}$ 求极限

例：求极限 $\lim\limits_{x\to 0}[1+\ln(1+x)]^{\frac{2}{x}}$

解法1: $\lim\limits_{x\to 0}[1+\ln(1+x)]^{\frac{2}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}e^{\frac{2}{x}\ln[1+\ln(1+x)]}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\ln[1+\ln(1+x)]}{x}}$

$$=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\ln(1+x)}{x}}=e^{2}.$$

解法2: 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}[1+\ln(1+x)]^{\frac{2}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}[1+\ln(1+x)]^{\frac{1}{\ln(1+x)}\frac{2\ln(1+x)}{x}}$

$$=\lim_{x\to 0}[1+\ln(1+x)]^{\frac{1}{\ln(1+x)}\frac{2\ln(1+x)}{x}}=\lim_{x\to 0}\{[1+\ln(1+x)]^{\frac{1}{\ln(1+x)}}\}^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\ln(1+x)}{x}}=e^{2}$$

解法3: $$\lim_{x\to 0}[1+\ln(1+x)]^{\frac{2}{x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}(1+\ln(1+x)-1)\frac{2}{x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\ln(1+x)}{x}}$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x}{x}} = e^{2}.$$

注1： 对于1^{∞} 型未定式$\lim f(x)^{g(x)}$的极限，也可用公式

$$\lim f(x)^{g(x)}(1^{\infty}) = e^{\lim(f(x)-1)g(x)}$$

因为 $\lim f(x)^{g(x)} = e^{\lim g(x)\ln(f(x))}$

$$= e^{\lim g(x)\ln(1+f(x)-1)} = e^{\lim(f(x)-1)g(x)}$$

注2：对于1^{∞}型未定式$\lim f(x)^{g(x)}$的极限也可以利用第二个重要极限。

例：求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^3}\left[\left(\frac{2+\cos x}{3}\right)^x-1\right]$

解法1：原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{x\ln\left(\frac{2+\cos x}{3}\right)}-1}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\left(\frac{2+\cos x}{3}\right)}{x^2}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(2+\cos x)-\ln 3}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2+\cos x}\cdot(-\sin x)}{2x}$$

$$=-\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{1}{2+\cos x}\cdot\frac{\sin x}{x}=-\frac{1}{6}$$

解法2: 原式 $=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x\ln\left(\frac{2+\cos x}{3}\right)}-1}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(\frac{2+\cos x}{3}\right)}{x^2}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+\frac{\cos x-1}{3})}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{3x^2}=-\frac{1}{6}$$

2011年数学一考研试题 (第三答题解答题第15题10分)

15. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\ln(1+x)}{x}\right)^{\frac{1}{e^x-1}}$.

QQ群：498983899

2013年数学二考研试题　(第二答题填空题第9小题)

$$9.\lim_{x\to 0}[2-\frac{\ln(1+x)}{x}]^{\frac{1}{x}}$$

$$9.\lim_{x\to 0}[2-\frac{\ln(1+x)}{x}]^{\frac{1}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}(2-\frac{\ln(1+x)}{x}-1)\frac{1}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\ln(1+x)}{x^2}}$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\frac{1}{1+x}}{2x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{x}{1+x}}{2x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{2(1+x)}}=e^{\frac{1}{2}}.$$

QQ群：498983899

14. 将数列极限转化成函数极限求解

例：求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n\sin\frac{1}{n}\right)^{n^2}$

【说明】这是 1^{∞}形式的极限，由于数列极限不能使用洛必达法则，若直接求解有一定难度，若转化成函数极限，可通过13提供的方法结合洛必达法则求解。

【解】考虑辅助极限

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x\sin\frac{1}{x}\right)^{x^2}=\lim_{x\to+\infty}e^{x^2\left(x\sin\frac{1}{x}-1\right)}=\lim_{y\to0^+}e^{\frac{1}{y^2}\left(\frac{1}{y}\sin y-1\right)}=e^{-\frac{1}{6}}$$

所以 $$\lim_{n\to\infty}\left(n\sin\frac{1}{n}\right)^{n^2}=e^{-\frac{1}{6}}$$

根据:《数学分析》里面的归结原则，又称为海涅定理，

意思就是函数极限可以用数列极限刻画。

归结原则（Heine定理）：设 f 在 $U^\circ(x_0;\delta')$ 内有定义，$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在的充要条件是：对任何含于 $U^\circ(x_0;\delta')$ 且以 x_0 为极限的数列 $\{x_n\}$，极限 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)$ 都存在且相等。

15. 求极限式中的常数

例1. 设 $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^2 + ax + 2}{x + 1} = b$, 试确定$a, b$, 并求此极限。

2010年数学三考研试题　(第三答题解答题第1题4分)

1. 若$\lim\limits_{x \to 0}\left(\frac{1}{x}-\left(\frac{1}{x}-a\right)e^{x}\right)=1$,则$a=$ ______ .

(A) 0　　(B) 1　　(C) 2　　(D) 3

练习1. 已知 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(a+b)x+b}{\sqrt{3x+1}-\sqrt{x+3}}=4$，试确定$a, b$.

练习2. 已知 $\lim\limits_{x\to +\infty}(\sqrt{2x^2+4x-1}-ax-b)=0$，试确定$a, b$.

16. 利用导数的定义求极限

2013年数学一考研试题 (第二答题填空题第9小题)

(9) 设函数$y = f(x)$由方程$y - x = e^{x(1-y)}$确定，

则$\lim\limits_{n\to\infty} n\left(f\left(\frac{1}{n}\right)-1\right) =$ ________.

答案 1

2013年数学一考研试题　(第一答题选择题第 1 小题)

(1) 已知极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\arctan x}{x^k}=c$, 其中$k,c$为常数，且$c\neq 0$，则（　）

$(A)\ k=2,c=-\dfrac{1}{2}$　　$(B)\ k=2,c=\dfrac{1}{2}$

$(C)\ k=3,c=-\dfrac{1}{3}$　　$(D)\ k=3,c=\dfrac{1}{3}$

答案

1.　D

2013年数学三考研试题　(第二大题填空题第9小题)

(2). 设函数$y=f(x)$与$y=x^2-x$在点(1,0)处有公共切线，

则$\lim\limits_{n\to\infty} nf\left(\dfrac{n}{n+2}\right)=$ ________.

答案

-2

QQ群：498983899

2013年数学三考研试题 (第一大题选择题第 1 小题)

(1) 当$x \to 0$时，用$o(x)$表示比x高阶的无穷小，则下列式子中错误的是（　）

(A) $xo(x^2) = o(x^3)$　　(B) $o(x)o(x^2) = o(x^3)$

(C) $o(x^2) + o(x^2) = o(x^2)$　　(D) $o(x) + o(x^2) = o(x^2)$

答案

1. D

2013年数学二考研试题　(第一大题选择题第2小题)

(2). 设函数$y=f(x)$由方程$\cos(xy)+\ln y-x=1$确定，

则$\lim\limits_{n\to\infty}n\left(f\left(\dfrac{2}{n}\right)-1\right)=$________.

$(A)\ 2$　　$(B)\ 1$　　$(C)\ -1$　　$(D)\ -2$

QQ群：498983899

17. 应用洛必达法则求极限

【说明】$\frac{\infty}{\infty}$ 或 $\frac{0}{0}$ 型的极限，可通过洛必达法则来求。

例：求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\cos 2x-\ln(1+\sin^2 x)}{x^2}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\cos 2x-\ln(1+\sin^2 x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{-2\sin 2x}{\cos 2x}-\frac{\sin 2x}{1+\sin^2 x}}{2x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}\left(\frac{-2}{\cos 2x}-\frac{1}{1+\sin^2 x}\right)=-3$$

【注】许多变上限函数的积分表示的极限，常用洛必达法则求解

例：设函数 $f(x)$ 连续，且 $f(0)\neq 0$，求极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x (x-t)f(t)dt}{x\int_0^x f(x-t)dt}.$$

【解】由于 $\int_0^x f(x-t)dt \overset{x-t=u}{=} \int_x^0 f(u)(-du)=\int_0^x f(u)du$

于是，$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^x (x-t)f(t)dt}{x\int_0^x f(x-t)dt}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\int_0^x f(t)dt-\int_0^x tf(t)dt}{x\int_0^x f(u)du}$

QQ群：498983899

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(t)dt + xf(x) - xf(x)}{\int_0^x f(u)du + xf(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(t)dt}{\int_0^x f(u)du + xf(x)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{\int_0^x f(t)dt}{x}}{\dfrac{\int_0^x f(u)du}{x} + f(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x f(t)dt}{x}}{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x f(u)du}{x} + \lim\limits_{x\to 0} f(x)} = \frac{f(0)}{f(0)+f(0)} = \frac{1}{2}.$$

2011年数学三考研试题　(第三大题解答题第15题10分)

15. $$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+2\sin x}-x-1}{x\ln(1+x)}.$$

2012年数学三考研试题(第三大题解答题第15小题10分)

15. $$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-e^{2-2\cos x}}{x^4}.$$

18. 应用定积分的定义求极限

【说明】用定积分的定义把极限转化为定积分来计算，是把

$f(x)$ 看成$[0,1]$ 定积分。

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(f\left(\frac{1}{n}\right)+f\left(\frac{2}{n}\right)+\cdots+f\left(\frac{n}{n}\right)\right)=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\frac{1}{n}=\int_0^1 f(x)dx$$

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i$$

例：求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1^2}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2^2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n^2}}\right)$

解：原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{1}{n}\right)^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{2}{n}\right)^2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{n}{n}\right)^2}}\right)$

$$=\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx=-\frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}$$

2012年数学二考研试题 (第二答题填空题第10小题)

（10）计算 $\lim\limits_{x\to\infty} n\left(\dfrac{1}{1+n^2}+\dfrac{1}{2^2+n^2}+\cdots+\dfrac{1}{n^2+n^2}\right)=$______。

【解析】：原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{1+\left(\dfrac{i}{n}\right)^2}=\int_0^1\dfrac{dx}{1+x^2}=\arctan x\Big|_0^1=\dfrac{\pi}{4}$.

练习：用定积分表示下列极限:

$$(1)\ \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{1+\frac{i}{n}} \qquad (2)\ \lim_{n\to\infty}\frac{1^p+2^p+\cdots+n^p}{n^{p+1}}$$

解:

$$(1)\ \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{1+\frac{i}{n}}=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{1+\underbrace{\boxed{\frac{i}{n}}}_{\xi_i}}\cdot\underbrace{\boxed{\frac{1}{n}}}_{\Delta x_i}$$

$$=\int_0^1\sqrt{1+x}\,\mathrm{d}x$$

$$(2)\ \lim_{n\to\infty}\frac{1^p+2^p+\cdots+n^p}{n^{p+1}}=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\Big(\underbrace{\boxed{\frac{i}{n}}}_{\xi_i}\Big)^p\underbrace{\boxed{\frac{1}{n}}}_{\Delta x_i}$$

$$=\int_0^1 x^p\,\mathrm{d}x$$

练习： $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sqrt[n]{n(n+1)\cdots(2n-1)}.$

$$=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n(n+1)\cdots(2n-1)}{n^n}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n(n+1)\cdots(2n-1)}{n^n}\right)^{\frac{1}{n}}=e^{\int_0^1\ln(1+x)dx}.$$

练习：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n}k^{\alpha+1}}{n\sum_{k=1}^{n}k^{\alpha}}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n}k^{\alpha+1}}{n\sum_{k=1}^{n}k^{\alpha}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(\frac{k}{n})^{\alpha+1}}{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(\frac{k}{n})^{\alpha}}$$

19. 利用中值定理求极限

（1）. 利用微分中值定理求极限

1. 设 $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x)=k$，求 $\lim\limits_{x\to\infty}[f(x+a)-f(x)]$.

2. 求$\lim\limits_{n\to\infty} n^2\left(\arctan\dfrac{a}{n}-\arctan\dfrac{a}{n+1}\right)$, $(a\neq 0)$.

（2） 利用积分中值定理求极限

简单积分中值定理

如果函数 $f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，

则在积分区间$[a,b]$上至少存在一个点 ξ，

使$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a).\qquad (a \le \xi \le b)$

1. 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x dx=0.$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}\sin^n x dx+\int_{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x dx,\left(0<\varepsilon<\frac{\pi}{2}\right)$$

$$0\le\int_0^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}\sin^n x dx\le\sin^n\xi\ (\frac{\pi}{2}-\varepsilon)\to 0$$

$$0\le\int_{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x dx\le\int_{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}}1dx\to 0$$

积分中值定理

如果函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续， $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上不变号且可积，则在积分区间 $[a,b]$ 上至少存在一个点 ξ，

使 $\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi)\int_a^b g(x)dx \qquad (a<\xi<b)$

2. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_n^{n+P}\frac{\sin x}{x}dx$ (P为一正常数)

$$\lim_{n\to\infty}\int_n^{n+P}\frac{\sin x}{x}dx=\sin\xi\int_n^{n+P}\frac{1}{x}dx=\sin\xi\ln\frac{n+P}{n}$$

20. 应用泰勒公式求极限

例：求极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{a^x+a^{-x}-2}{x^2}$，$(a>0)$.

解：
$$a^x=e^{x\ln a}=1+x\ln a+\frac{x^2}{2}\ln^2 a+o(x^2),$$

$$a^{-x}=1-x\ln a+\frac{x^2}{2}\ln^2 a+o(x^2);$$

$$a^x+a^{-x}-2=x^2\ln^2 a+o(x^2).$$

$$\therefore \lim_{x\to0}\frac{a^x+a^{-x}-2}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{x^2\ln^2 a+o(x^2)}{x^2}=\ln^2 a.$$

例：求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}(\frac{1}{x}-\cot x).$

解: $$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}(\frac{1}{x}-\cot x)=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\frac{\sin x-x\cos x}{x\sin x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x-\frac{x^3}{3!}+o(x^3)-x[1-\frac{x^2}{2!}+x(x^2)]}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!})x^3+o(x^3)}{x^3}=\frac{1}{3}.$$

例：设 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin 6x + xf(x)}{x^3}\right)=0$，求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{6+f(x)}{x^2}$.

解：错误做法

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 6x + xf(x)}{x^3}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{6x + xf(x)}{x^3}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{6+f(x)}{x^2}=0$$

（方法1） $\sin 6x = 6x - \dfrac{1}{3!}(6x)^3 + o(x^3).$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 6x + xf(x)}{x^3}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{6x-36x^3+o(x^3)+xf(x)}{x^3}$$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{6+f(x)}{x^2}-36+0=0$，因此 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{6+f(x)}{x^2}=36.$

（方法2） $$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 6x + xf(x)}{x^3}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 6x-6x+6x+xf(x)}{x^3}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 6x-6x}{x^3}+\lim_{x\to 0}\frac{6+f(x)}{x^2}=-36+\lim_{x\to 0}\frac{6+f(x)}{x^2}=0,$$

因此 $$\lim_{x\to 0}\frac{6+f(x)}{x^2}=36.$$

练习:

1. $\lim\limits_{x\to\infty}[x-x^2\ln(1+\frac{1}{x^2})]$.

2. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x\sin x-x(1+x)}{x^3}$.

3. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}$.

21. 应用级数的收敛性求极限

例 求$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{e^x}{(n+1)!}x^{n+1}$,其中$x$为任意常数.

解 由绝对值的性质可知:$\left|\dfrac{e^x}{(n+1)!}x^{n+1}\right|\le\dfrac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}e^{|x|}$

下面考虑级数$\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}e^{|x|}$收敛,

由比值判别法可知：

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{|x|^{n+2}e^{|x|}}{(n+2)!}\cdot\frac{(n+1)!}{|x|^{n+1}e^{|x|}} = \lim_{n\to\infty}\frac{|x|}{n+2} = 0 < 1$$

故级数$\sum_{\mathrm{n=0}}^{+\infty}\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}e^{|x|}$收敛，一般项$u_n(x)=\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}e^{|x|}$趋于零

从而有$\lim_{n\to\infty}\frac{e^x}{(n+1)!}x^{n+1}=0.$

练习:

1. $u_n=\dfrac{n^n}{(n!)^2},n=1,2,\ldots,$求$\lim\limits_{n\to\infty}u_n$.

2. $u_n=1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1\cdot 3}{2\cdot 4}-\dfrac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}+\cdots+(-1)^n\dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$,求$\lim\limits_{n\to\infty}u_n$.

解2：$f(x)=1-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^2-\dfrac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^3+\cdots+(-1)^n\dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^n+\cdots$

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x}},x\in[-1,1]$$