第八章习题课

1、若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 都收敛，则下列选项中正确的是[　]

（A）$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)^2$ 收敛;　　（B）$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)$ 收敛;

（C）$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(a_n+b_n)$ 收敛;　（D）$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$ 收敛.

2、设 α 为常数，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}[\frac{\sin n\alpha}{n^2}-\frac{1}{\sqrt{n}}]$，则必有[　]

（A）绝对收敛；　（B）发散；（C）条件收敛；　（D）收敛性与的取值有关.

3、设 $f(x)=\begin{cases}2+x, & 0\le x<2\\ 0, & 2\le x<4\end{cases}$，$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{4}(-\infty<x<+\infty)$，其中

$b_n=\frac{1}{2}\int_0^4 f(x)\sin\frac{n\pi x}{4}dx(n=1,2,\cdots)$，则 $S(2)+S(-9)$ 等于[　]

（A）-1　　（B）1　　（C）5　　（D）7

4、正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，常数 $\lambda\in\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(n\,\mathrm{tg}\frac{\lambda}{n}\right)a_{2n}$ [　]

（A）条件收敛；　（B）绝对收敛；　（C）发散；　（D）敛散性与 λ 有关.

5、设 $f(x)=x^2, 0\le x<1$，而 $s(x)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\pi x(-\infty<x<\infty)$，

其中 $b_n=2\int_0^1 f(x)\sin n\pi x dx$，$(n=1,2,\cdots)$，则 $s(-\frac{1}{3})=$[　]

（A）$-\frac{1}{3}$;　（B）$-\frac{1}{9}$;　（C）$\frac{1}{9}$;　（D）$\frac{1}{3}$

6、将函数 $\frac{2x+1}{x^2+x-2}$ 展开成 $x-2$ 的幂级数，并指出它的收敛区间（不讨论端

点）.

（答案：$\dfrac{2x+1}{x^2+x-2}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n(1+\dfrac{1}{4^n})(x-2)^n$，$1<x<3$）

7、求$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{n+1}x^n$的收敛域与和函数.

(答案提示: 收敛域为$(-1,1)$；$S(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1-x}+\dfrac{1}{x}\ln(1-x), & x\neq 0\text{且}|x|<1,\\ 0\text{，} & x=0.\end{cases}$)

8、求级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n-1}{2^n}x^{2n-2}$的收敛域及和函数.

（答案提示：收敛域为$(-\sqrt{2},\sqrt{2})$；$S(x)=\left(\dfrac{x}{2-x^2}\right)'=\dfrac{2+x^2}{(2-x^2)^2}$，$-\sqrt{2}<x<\sqrt{2}$.）

9、设正项数列$\{a_n\}$单调减少，且级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$发散，试证明$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\dfrac{1}{a_n+1})^n$收敛.

10、设级数$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\left|u_u-u_{n-1}\right|$收敛，且正项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$收敛，证明级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n v_n^2$收敛.

11、设奇函数$f(x)$的周期为2π，且$f(\pi-x)=f(x)$，证明：$f(x)$的傅立叶系数$a_0=0$，$a_n=0$，$b_{2n}=0\,(n=1,2,\cdots)$。

12、讨论级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin(n\pi+\dfrac{1}{\ln n})$的敛散性.

13、已知$u_n=\int_0^1 x^2(1-x)^n dx$，证明：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛.

（9 提示：由数列$\{a_n\}$单调减少且$a_n \geq 0$，得$\lim\limits_{n\to\infty} a_n$存在．记$a=\lim\limits_{n\to\infty} a_n$，则$a_n \geq a \geq 0$，又已知$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$发散，知$a>0$.因此$\dfrac{1}{a+1}<1$,再由根值判别法知$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\dfrac{1}{a_n+1})^n$收敛.）

（10 提示：由$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\left|u_n-u_{n-1}\right|$收敛推出$\lim\limits_{n\to\infty} u_n$存在，从而$\left|u_n\right| \leq M$；又因正项级数$\sum v_n$收敛$\Rightarrow 0 \leq v_n^2 \leq v_n$，从而级数$\sum v_n{}^2$收敛，故$\left|u_n v_n{}^2\right| \leq M v_n^2$，所以$\sum u_n v_n{}^2$收敛。）

（11 提示：因为$f(x)$是奇函数，必有，

$$a_0=a_n=0，\quad b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} f(x)\sin 2nx dx+\frac{2}{\pi}\int_{\pi/2}^{\pi} f(x)\sin 2nx dx，$$

在第二项中，

$$\begin{aligned}&\int_{\pi/2}^{\pi} f(x)\sin 2nx dx \overset{x=\pi-t}{=\!=\!=\!=} \int_{\pi/2}^{0} f(\pi-t)\sin 2n(\pi-t)dt \\ &=-\int_0^{\pi/2} f(x)\sin 2nx dx\end{aligned}，$$

所以，$b_n=0$。）

（12 答案提示：$u_n=\int\limits_0^1 x^2(1-x)^n dx \underset{t=1-x}{=\!=\!=\!=} \int\limits_0^1(1-t)^2 t^n dt=\dfrac{1}{n+1}-\dfrac{1}{n+2}=\dfrac{1}{(n+1)(n+2)}$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$收敛）