1，设 $f(u,v)$ 具有二阶连续偏导数，且满足 $\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}=1$，又 $g(x,y)=f[xy,\frac{1}{2}(x^2-y^2)]$ 求 $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}$。

解：$\frac{\partial g}{\partial x}=y\frac{\partial f}{\partial u}+x\frac{\partial f}{\partial v}$，$\frac{\partial g}{\partial y}=x\frac{\partial f}{\partial u}-y\frac{\partial f}{\partial v}$。故

$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}=y^2\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}+2xy\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}+x^2\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}+\frac{\partial f}{\partial v}$，$\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}=x^2\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}-2xy\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}+y^2\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}-\frac{\partial f}{\partial v}$，

所以 $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}=(x^2+y^2)(\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial v^2})=x^2+y^2$

2，设函数 $z=f(u)$，方程 $u=\varphi(u)+\int_y^x P(t)dt$ 确定 u 是 x,y 的函数，其中 $f(u),\varphi(u)$ 可微；$P(t),\varphi'(u)$ 连续，且 $\varphi'(u)\neq 1$，求 $P(y)\frac{\partial z}{\partial x}+P(x)\frac{\partial z}{\partial y}$。

解 $\frac{\partial z}{\partial x}=f'(u)\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}=f'(u)\frac{\partial u}{\partial y}$。

在方程 $u=\varphi(u)+\int_y^x P(t)dt$ 两边分别对 x,y 求偏导，有

$\frac{\partial u}{\partial x}=\varphi'(u)\frac{\partial u}{\partial x}+P(x),\frac{\partial u}{\partial y}=\varphi'(u)\frac{\partial u}{\partial y}-P(y)$

于是 $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{P(x)}{1-\varphi'(u)},\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{-P(y)}{1-\varphi'(u)}$

故 $P(y)\dfrac{\partial z}{\partial x}+P(x)\dfrac{\partial z}{\partial y}=P(y)f'(u)\dfrac{P(x)}{1-\varphi'(u)}+P(x)f'(u)\dfrac{-P(y)}{1-\varphi'(u)}=0$

3, 设函数 $z=z(x,y)$ 和 $x=x(y,z)$ 分别由方程 $xe^{y}+ye^{z}+ze^{x}=a$ 确定，分别求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\dfrac{\partial x}{\partial y}$。

解：设原方程确定函数 $z=z(x,y)$。先求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$。

解法一 用公式法。记 $F(x,y,z)=xe^{y}+ye^{z}+ze^{x}-a.$

Q $F_x=e^{y}+ze^{x}, F_z=ye^{z}+e^{x},$

$$\therefore \frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=-\frac{e^{y}+ze^{x}}{ye^{z}+e^{x}}$$

解法二 用直接法。视 z 是 x,y 的函数，在原方程两端对 x 求导，得

$$e^{y}+ye^{z}\frac{\partial z}{\partial x}+e^{x}\frac{\partial z}{\partial x}+ze^{x}=0,$$

$$\therefore \frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{e^{y}+ze^{x}}{ye^{z}+e^{x}}$$

解法三 用微分法。原方程两端球微分得

$$e^{y}dx+xe^{y}dy+e^{z}dy+ye^{z}dz+e^{x}dz+ze^{x}dx=0,$$

整理成 $dz=-\dfrac{e^{y}+ze^{x}}{ye^{z}+e^{x}}dx-\dfrac{e^{z}+xe^{y}}{ye^{z}+e^{x}}dy,$

与微分公式 $dz=\dfrac{\partial z}{\partial x}dx+\dfrac{\partial z}{\partial y}dy$ 比较 dx 系数，可得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{e^{y}+ze^{x}}{ye^{z}+e^{x}}$$

再设原方程确定函数 $x=x(y,z)$, 求 $\frac{\partial x}{\partial y}$

用直接法。原方程两端对 y 求导数，得

$$\frac{\partial x}{\partial y}e^{y}++xe^{y}+e^{z}+ze^{x}\frac{\partial x}{\partial y}=0,$$

$$\therefore \frac{\partial x}{\partial y}=-\frac{xe^{y}+e^{z}}{ze^{z}+e^{y}}$$

4, 设 $u=f(x,y,z)$ 有连续偏导数， $y=y(x)$ 和 $z=z(x)$ 分别由方程 $e^{xy}-y=0$ 和 $e^{z}-xz=0$ 所确定，求 $\frac{du}{dx}$。

解：$\frac{du}{dx}=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{dx}$

由 $e^{xy}-y=0$ 得 $e^{xy}(y+x\frac{dy}{dx})-\frac{dy}{dx}=0,\ \frac{dy}{dx}=\frac{ye^{xy}}{1-xe^{xy}}=\frac{y^{2}}{1-xy}$；

由 $e^{z}-xz=0$ 得 $e^{z}\frac{dz}{dx}-z-x\frac{dz}{dx}=0,\ \frac{dz}{dx}=\frac{z}{e^{z}-x}=\frac{z}{zx-x}$ 于是

$$\frac{du}{dx}=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{y^{2}}{1-xy}\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{z}{xz-x}\frac{\partial f}{\partial z}$$

5, 设 $y=y(x),z=z(x)$ 是由方程 $z=xf(x+y)$ 和 $F(x,y,z)=0$ 所确定的函数，其中 f 和 F 分别具有一阶连续导数和一阶连续偏导数，求 $\frac{dz}{dx}$。

解：分别在$z=xf(x+y)$和$F(x,y,z)=0$的两端对x求导，得

$$\begin{cases}\dfrac{dz}{dx}=f+x(1+\dfrac{dy}{dx})f' \\ F_x+F_y\dfrac{dy}{dx}+F_z\dfrac{dz}{dx}=0\end{cases}$$ 整理后得 $$\begin{cases}-xf'\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{dz}{dx}=f+xf' \\ F_y\dfrac{dy}{dx}+F_z\dfrac{dz}{dx}=-F_x\end{cases}$$ 由此解得

$$\frac{dz}{dx}=\frac{(f+xf')F_y-xf'F_x}{F_y+xf'F_z}\text{（}F_y+xf'F_z\neq 0\text{）}$$

6,在椭球面$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$上求一点，使该点处的法向量与三个坐标轴的正向成等角。

解　该曲面方程是由稳式给出的。

记$F(x,y,z)=\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}-1,$

则$F_x=\dfrac{2x}{a^2}$，$F_y=\dfrac{2y}{b^2}$，$F_z=\dfrac{2z}{c^2}$。

已知过椭球面上任一点$M_0(x_0,y_0,z_0)$处的法向量：

$$n=\{F_x,F_y,F_z\}_{M_0}=\left\{\frac{2x_0}{a^2},\frac{2y_0}{b^2},\frac{2z_0}{c^2}\right\}。$$

因为法向量与三个坐标轴正向的夹角α,β,γ相等，故$\cos\alpha=\cos\beta=\cos\gamma$。

又Q $\cos\alpha=\dfrac{1}{|n|}\cdot\dfrac{2x_0}{a^2}$，$\cos\beta=\dfrac{1}{|n|}\cdot\dfrac{2y_0}{b^2}$，　$\cos\gamma=\dfrac{1}{|n|}\cdot\dfrac{2z_0}{c^2}$,

故有 $$\frac{2x_0}{a^2}=\frac{2y_0}{b^2}=\frac{2z_0}{c^2}\qquad(1)$$

且 $$\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}+\frac{z_0^2}{c^2}=1\qquad(2)$$

令 $$\frac{2x_0}{a^2}=\frac{2y_0}{b^2}=\frac{2z_0}{c^2}=\lambda$$

解出x_0, y_0, z_0代入(2)式，得 $\lambda = \pm\dfrac{2}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

$\therefore$点M_0为$\left(\dfrac{a^2}{r},\dfrac{b^2}{r},\dfrac{c^2}{r}\right)$及$\left(-\dfrac{a^2}{r},-\dfrac{b^2}{r},-\dfrac{c^2}{r}\right)$，其中$r=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$

7, 证明曲面$f(\dfrac{x-a}{z-c},\dfrac{y-b}{z-c})=0$上任意一点处的切面过某定点。

证明：设切点为$M_0(x_0,y_0,z_0)$。记$F(x,y,z)=f(\dfrac{x-a}{z-c},\dfrac{y-b}{z-c})$，

则点M_0处的法向量

$$n=\left\{F_x,F_y,F_z\right\}_{M_0}=\left\{\frac{1}{z_0-c}f_1',\frac{1}{z_0-c}f_2',-\frac{x_0-a}{(z_0-c)^2}f_1'-\frac{y_0-b}{(z_0-c)^2}f_2'\right\}。$$

从而切平面方程是

$$\frac{1}{z_0-c}f_1'(x-x_0)+\frac{1}{z_0-c}f_2'(y-y_0)-[\frac{x_0-a}{(z_0-c)^2}f_1'-\frac{y_0-b}{(z_0-c)^2}f_2'](z-z_0)=0$$

即 $f_1'(x-x_0)+f_2'(y-y_0)-(\dfrac{x_0-a}{(z_0-c)}f_1'-\dfrac{y_0-b}{(z_0-c)}f_2')(z-z_0)=0$

将 $x=a, y=b, z=c$ 代入之，可知点(a,b,c)在平面上，鉴于点M_0 的任意性知点(a,b,c)是一个定点，$\therefore$原命题成立。

8, 设直线$L:\begin{cases}x+y+b=0\\x+ay-z-3=0\end{cases}$在平面$\pi$上，而平面$\pi$与曲面$z=x^2+y^2$相切于点$(1,-2,5)$，求$a,b$之值。

解：设过L的平面方程为

$$x+ay-z-3+\lambda(x+y+b)=0$$

即 $(1+\lambda)x+(a+\lambda)y-z-3+\lambda b=0$

曲面$z=x^2+y^2$在点$(1,-2,5)$处的法向量$n=\{2,-4,-1\}$，由题设知

$$\frac{1+\lambda}{2}=\frac{a+\lambda}{-4}=\frac{-1}{-1}$$

易得$\lambda=1,a=-5$

又点$(1,-2,5)$在π上，故$(1+\lambda)-2(a+\lambda)-8+\lambda b=0$

故得$b=-2$。

9,在椭圆$x^2+4y^2=4$上求一点，使其到直线$2x+3y-6=0$的距离最短。

解：设$P(x,y)$为椭圆上任意一点，则$P(x,y)$到直线$2x+3y-6=0$的距离为

$$d=\frac{|2x+3y-6|}{\sqrt{13}}$$

求d的最小值点即求d^2的最小值。作

$$F(x,y,\lambda)=\frac{1}{13}(2x+3y-6)^2+\lambda(x^2+4y^2-4)$$

由 Lagrange 乘数法，有

$$\frac{\partial F}{\partial x}=0,\frac{\partial F}{\partial y}=0,\frac{\partial F}{\partial \lambda}=0$$

即$\begin{cases}\frac{4}{13}(2x+3y-6)+2\lambda x=0\\ \frac{6}{13}(2x+3y-6)+8\lambda y=0\\ x^2+4y^2-4=0\end{cases}$

解之得

$$x_1=\frac{8}{5},y_1=\frac{3}{5};x_2=-\frac{8}{5},y_2=-\frac{3}{5}$$

于是$d\Big|_{(x_1,y_1)}=\frac{1}{\sqrt{13}},d\Big|_{(x_2,y_2)}=\frac{11}{\sqrt{13}}$，由问题的实际意义知最短距离是存在的。因此

$(\frac{8}{5},\frac{3}{5})$即为所求点。

10, 在第一卦限内作椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 的切平面，使切平面与三个坐标面所围成的四面体体积最小，求切点坐标.

解　设 $P(x_0,y_0,z_0)$ 为椭球面上一点，　令 $F(x,y,z)=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1$,

则 $F'_x|_P=\frac{2x_0}{a^2}$，　$F'_y|_P=\frac{2y_0}{b^2}$，　$F'_z|_P=\frac{2z_0}{c^2}$，过 $P(x_0,y_0,z_0)$ 的切平面方程为

$\frac{x_0}{a^2}(x-x_0)+\frac{y_0}{b^2}(y-y_0)+\frac{z_0}{c^2}(z-z_0)=0$,化简为 $\frac{x\cdot x_0}{a^2}+\frac{y\cdot y_0}{b^2}+\frac{z\cdot z_0}{c^2}=1$,
该切平面在三个轴上的截距各

$x=\frac{a^2}{x_0}$，$y=\frac{b^2}{y_0}$，$z=\frac{c^2}{z_0}$,

所围四面体的体积　$V=\frac{1}{6}xyz=\frac{a^2b^2c^2}{6x_0y_0z_0}$

在条件 $\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}+\frac{z_0^2}{c^2}=1$ 下求 V 的最小值，　令　$u=\ln x_0+\ln y_0+\ln z_0$,

$$G(x_0,y_0,z_0)=\ln x_0+\ln y_0+\ln z_0+\lambda\left(\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}+\frac{z_0^2}{c^2}-1\right),$$

由 $\begin{cases} G'_{x_0}=0,\quad G'_{y_0}=0,\quad G'_{z_0}=0 \\ \frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}+\frac{y_0^2}{c^2}-1=0 \end{cases}$,

即 $\begin{cases} \frac{1}{x_0}+\frac{2\lambda x_0}{a^2}=0 \\ \frac{1}{y_0}+\frac{2\lambda y_0}{b^2}=0 \\ \frac{1}{z_0}+\frac{2\lambda z_0}{c^2}=0 \\ \frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}+\frac{z_0^2}{c^2}-1=0 \end{cases}$　　可得 $x_0=\frac{a}{\sqrt{3}}$，$y_0=\frac{b}{\sqrt{3}}$，$z_0=\frac{c}{\sqrt{3}}$

当切点坐标为($\frac{a}{\sqrt{3}}$，$\frac{b}{\sqrt{3}}$，$\frac{c}{\sqrt{3}}$)时，　四面体的体积最小 $V_{\min}=\frac{\sqrt{3}}{2}abc$.