# 2016 级《工科数学分析》(下)试题 A 参考答案

一．填空题（每小题 4 分，总 12 分。将答案按题号写在答题纸上，不写解题过程）

1、$y^2+2x-1=0$或 $x=\frac{1}{2}(1-y^2)$；2、$-12\cos 3-6\sin 3$；3、$-4$

二．选择题（每小题 4 分，总 12 分。每小题给出四种选择，有且仅有一个是正确的，将你认为正确的代号按题号写在答题纸上）

**1、B; 2、B; 3、D.**

三（8 分）、解：在方程两端对 $x$ 求偏导数得 $2u\frac{\partial u}{\partial x}+2z\frac{\partial z}{\partial x}-1=0$（2 分）

而 $\frac{\partial z}{\partial x}=y^2$，代入得

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1-2zy^2}{2u}.\text{（2 分）}$$

因此

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{2u(-2y^2\cdot y^2)-(1-2zy^2)\cdot 2\frac{\partial u}{\partial x}}{4u^2},\text{（2 分）}$$

将 $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1-2zy^2}{2u}$ 代入化简得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-\frac{4u^2y^4+(1-2zy^2)^2}{4u^3}.\text{ 或}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-\frac{4y^4(u^2+z^2)-4zy^2+1}{4u^3}\text{（2 分）}$$

四（8 分）、解：设 $P(x,y)$ 为椭圆上任意一点，则 $P(x,y)$ 到平面 $2x+3y-6=0$ 的距离为

$$d=\frac{|2x+3y-6|}{\sqrt{13}}\text{（2 分）}$$

求 $d$ 的最小值点即求 $d^2$ 的最小值。作

$$F(x,y,\lambda)=\frac{1}{13}(2x+3y-6)^2+\lambda(x^2+4y^2-4)\text{（2 分）}$$

（注：目标函数写成 $F(x,y,\lambda)=(2x+3y-6)^2+\lambda(x^2+4y^2-4)$ 也可以，以下计算过程稍有改变，但是结果不变！）

由 Lagrange 乘数法，有

$$\frac{\partial F}{\partial x}=0,\frac{\partial F}{\partial y}=0,\frac{\partial F}{\partial \lambda}=0$$

即 $\begin{cases} \dfrac{4}{13}(2x+3y-6)+2\lambda x=0 \\ \dfrac{6}{13}(2x+3y-6)+8\lambda y=0 \\ x^2+4y^2-4=0 \end{cases}$ （2 分）

解之得 2 个驻点坐标分别为：

$x_1=\dfrac{8}{5}, y_1=\dfrac{3}{5}$以及$x_2=-\dfrac{8}{5}, y_2=-\dfrac{3}{5}$

于是 $d\Big|_{(x_1,y_1)}=\dfrac{1}{\sqrt{13}}, d\Big|_{(x_2,y_2)}=\dfrac{11}{\sqrt{13}}$，由问题的实际意义知最短距离是存在的。因此

$(\dfrac{8}{5},\dfrac{3}{5})$即为所求点。（2 分）

五（8 分）、解：令 $F=z-e^z+2xy-3$（2 分）

则有

$F_x'(P)=2y|_P=4,\ F_y'(P)=2x|_P=2,\ F_z'(P)=(1-e^z)|_P=0.$（2 分）

故切平面方程为 $4(x-1)+2(y-2)+0\cdot(z-0)=0$

即 $2x+y-4=0$（2 分）

法线方程 $\dfrac{x-1}{4}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z-0}{0}$ 即 $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z-0}{0}$.（2 分）

六（8 分）、解：根据转动惯量计算公式：

$$I=\iiint_\Omega (x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dV\ .\text{（2 分）}$$

$\Omega$ 为球体 $x^2+y^2+z^2\le R^2$. 用球坐标计算 $I$ 可得

$$\begin{aligned} I&=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}\sin^3\varphi d\varphi\int_0^R r^5dr \quad \text{（4分）} \\ &=\frac{4}{9}\pi R^6 \quad \text{（2分）} \end{aligned}.$$

七（8 分）、解：作辅助面，以下曲面取下侧，

$$\Sigma_1: z=2，(x,y)\in D_{xy}: x^2+y^2\le 1\text{（2分）}$$

由 Gauss 公式可得，

$$I=\oiint\limits_{\Sigma+\Sigma_1}-\iint\limits_{\Sigma_1}$$

$$=\iiint_{\Omega}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z-(-1)\iint_{D_{xy}}4(-x^3)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \quad (2分)$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\rho\,\mathrm{d}\rho\int_2^{3-\rho^2}\mathrm{d}z-\int_0^{2\pi}\cos^3\theta\,\mathrm{d}\theta\int_0^1\rho^4\,\mathrm{d}\rho \quad (2分)$$

$$=\frac{\pi}{2}-0$$

$$=\frac{\pi}{2} \quad (2分)$$

八（8 分）解：

方法一：

函数 $y=|2-x|=\begin{cases}2-x,0\le x\le 2\\ x-2,2<x\le 4\end{cases}$，$L=L_1+L_2$，$L_1$ 的方程是 $y=2-x,0\le x\le 2,dy=-dx$

（2分）

$L_2$ 的方程是 $y=x-2,2\le x\le 4,dy=dx$（2分）

于是

$$\int_L(2x-y^2)dx+(x^2+2y)dy$$

$$=\int_0^2\left[2x-(2-x)^2\right]dx+\int_0^2\left[x^2+2(2-x)\right](-1)dx+\int_2^4[2x-(x-2)^2]dx+\int_2^4[x^2+2(x-2)]dx \quad (2分)$$

$$=\frac{80}{3} \quad (2分)$$

方法二：（利用格林公式求解）

添加辅助曲线 $L_1$： $y=2,\ x:4\to 0$（2分）

则

$$\int_L(2x-y^2)dx+(x^2+2y)dy$$

$$=\oint_{L+L_1}(2x-y^2)dx+(x^2+2y)dy-\int_{L_1}(2x-y^2)dx+(x^2+2y)dy \quad (2分)$$

$$=\iint\limits_D 2(x+y)dxdy-\int_{L_1}(2x-y^2)dx+(x^2+2y)dy$$

$$=\int_0^2 dy\int_{2-y}^{2+y}2(x+y)dx-\int_4^0(2x-4) \quad (2分)$$

$$=\frac{80}{3}-0$$

$$=\frac{80}{3} \quad (2分)$$

九（10 分）解：记 $P=-yf(x)$， $Q=f'(x)-\frac{1}{2}\sin 2x$， 由条件可知 $P_y=Q_x$， 即

$$-f(x)=f''(x)-\cos 2x$$

于是得到微分方程 $f''(x)+f(x)=\cos 2x$ .（2分）

特征方程 $\lambda^2+1=0$，特征根为 $\lambda_{1,2}=\pm i$，对应的齐次方程的通解为

$$f(x)=C_1\cos x+C_2\sin x\ .\text{（2分）}$$

由于 $0\pm 2i$ 不是特征根，故非齐次方程的特解取为

$$f^*(x)=a\cos 2x+b\sin 2x\text{，（2分）}$$

代入原方程可得 $a=-\frac{1}{3}, b=0$，特解为 $f^*(x)=-\frac{1}{3}\cos 2x$ . 因此，原方程的通解为

$$f(x)=C_1\cos x+C_2\sin x-\frac{1}{3}\cos 2x\ .\text{（2分）}$$

将 $f(0)=\frac{5}{3}, f'(0)=2$ 代入通解，可得 $C_1=2, C_2=2$，故所求函数为

$$f(x)=2\cos x+2\sin x-\frac{1}{3}\cos 2x\ .\text{（2分）}$$

十（6 分）解：$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{n3^n}{(n+1)3^{n+1}}\right|=\frac{1}{3}$，故该级数收敛半径为 3（1分）

收敛区间为 (-3, 3)，又 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$收敛，故 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n3^n}$ 的收敛域为 $[-3,3)$.（1分）

当 $x\in[-3,3)$ 时，

$$S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{3^n}=x^{-1}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x}{3}\right)^n=x^{-1}\frac{x}{3-x}=\frac{1}{3-x}\text{（2分）}$$

故

$$s(x)=\int\frac{1}{3-x}dx=-\ln|3-x|+C\text{（1分）}$$

由

$s(0)=0$ 有 $C=\ln 3$，故 $s(x)=\int\frac{1}{3-x}dx=\ln\frac{3}{3-x}$，$x\in[-3,3)$.（1分）

十一（6 分）解：$f(x)=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+4}\right)=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{(x-1)+2}-\frac{1}{(x-1)+5}\right)$（1分）

而 $\frac{1}{x+1}=\frac{1}{(x-1)+2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+\frac{x-1}{2}}=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-\frac{x-1}{2})^{n},|\frac{x-1}{2}|<1.$（2分）

同理有 $\frac{1}{x+4}=\frac{1}{(x-1)+5}=\frac{1}{5}\frac{1}{1-\left(-\frac{x-1}{5}\right)}=\frac{1}{5}\sum_{n=0}^{\infty}(-\frac{x-1}{5})^{n},|\frac{x-1}{5}|<1.$（2分）

于是函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处的幂级数展式为

$$f(x)=\frac{1}{3}\left[\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}(\frac{x-1}{2})^{n}-\frac{1}{5}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}(\frac{x-1}{5})^{n}\right]$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{3}\frac{5^{n+1}-2^{n+1}}{10^{n+1}}(x-1)^{n},|x-1|<2.$$

或 $=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{3}\left(\frac{1}{2^{n+1}}-\frac{1}{5^{n+1}}\right)(x-1)^{n},|x-1|<2.$（1分）

十二（6 分）证明： 由 $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=0$ 知 $f(0)=0, f'(0)=0.$ （1分）

$f(x)$在点$x=0$ 的某邻域内的一阶 Taylor 展开式为：

$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{1}{2!}f''(\theta x)x^{2}=\frac{1}{2}f''(\theta x)x^{2} \qquad (0<\theta<1).$ （2分）

再由题设， $f''(x)$ 在属于该邻域内（包含原点的一小区间$[-\delta,\delta]$）上连续，故由闭区间上

连续函数性质，必存在 $M>0$, 使$|f''(x)|\le M$ ， 于是$|f(x)|\le\frac{M}{2}x^{2}.$（1分）

令 $x=\frac{1}{n}$, 当 $n$ 充分大时，有 $\frac{1}{n}\in[-\delta,\delta]$ $|f(\frac{1}{n})|\le\frac{M}{2}\cdot\frac{1}{n^{2}}.$（1分）

因为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2}}$ 收敛，所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty}f(\frac{1}{n})$ 绝对收敛.（1分）