习 题 一

A 组

1. 判别$\mathbf{Q}\left(\sqrt{5}\right)=\left\{a+b\sqrt{5} \mid a,b\in\mathbf{Q}\right\}$是否为数域？

解 是.

2. 设 $f(x)=x^3+x^2+x+1$， $g(x)=x^2+3x+2$，求 $f(x)+g(x)$， $f(x)-g(x)$， $f(x)g(x)$.

解

$$f(x)+g(x)=x^3+2x^2+4x+3\,,$$

$$f(x)-g(x)=x^3-2x-1\,,$$

$$f(x)g(x)=x^5+4x^4+6x^3+6x^2+5x+2\,.$$

3．设 $f(x)=(5x-4)^{1993}(4x^2-2x-1)^{1994}(8x^3-11x+2)^{1995}$，求 $f(x)$ 的展开式中各项系数的和.

解 由于 $f(x)$ 的各项系数的和等于 $f(1)$，所以

$$f(1)=(5-4)^{1993}(4-2-1)^{1994}(8-11+2)^{1995}=-1\,.$$

4. 求 $g(x)$ 除以 $f(x)$ 的商 $q(x)$ 与余式 $r(x)$.

(1) $f(x)=x^3-3x^2-x-1,\quad g(x)=3x^2-2x+1$；

(2) $f(x)=x^4-2x+5,\quad g(x)=x^2-x+2$.

解 (1) 用多项式除法得到

$$\begin{array}{r|r|l}
3x^2-2x+1 & x^3-\ 3x^2-\ x-1 & \dfrac{x}{3}-\dfrac{7}{9} \\
 & x^3-\dfrac{2}{3}x^2+\dfrac{x}{3} & \\
\cline{2-2}
 & -\dfrac{7}{3}x^2-\dfrac{4}{3}x-1 & \\
 & -\dfrac{7}{3}x^2+\dfrac{14}{9}x-\dfrac{7}{9} & \\
\cline{2-2}
 & -\dfrac{26}{9}x-\dfrac{2}{9} &
\end{array}$$

所以，$q(x)=\dfrac{1}{3}x-\dfrac{7}{9}$， $r(x)=-\dfrac{26}{9}x-\dfrac{2}{9}$.

(2) 用多项式除法得到

$$
\begin{array}{r|r|l}
x^2-x+2 & x^4 \qquad\qquad -2x+5 & x^2+x-1 \\
 & x^4-x^3+2x^2 \qquad\qquad & \\
\hline
 & x^3-2x^2-2x+5 & \\
 & x^3-x^2+2x \qquad & \\
\hline
 & -x^2-4x+5 & \\
 & -x^2+x-2 & \\
\hline
 & -5x+7 & \\
\end{array}
$$

所以，$q(x)=x^2+x-1,\quad r(x)=-5x+7$.

5．设 a,b 是两个不相等的常数，证明多项式 $f(x)$ 除以 $(x-a)(x-b)$ 所得余式为

$$\frac{f(a)-f(b)}{a-b}x+\frac{af(b)-bf(a)}{a-b}.$$

证明 依题意可设 $f(x)=(x-a)(x-b)q(x)+cx+d$ ，则

$$\begin{cases} f(a)=ca+d, \\ f(b)=cb+d. \end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} c=\big(f(a)-f(b)\big)\big/(a-b), \\ d=\big(af(b)-bf(a)\big)\big/(a-b). \end{cases}$$

故所得余式为

$$\frac{f(a)-f(b)}{a-b}x+\frac{af(b)-bf(a)}{a-b}.$$

6．问 m,p,q 适合什么条件时，$f(x)$ 能被 $g(x)$ 整除？

(1) $f(x)=x^3+px+q$ ，$g(x)=x^2+mx-1$；

(2) $f(x)=x^4+px^2+q$ ，$g(x)=x^2+mx+1$.

解 (1) 由整除的定义知，要求余式 $r(x)=0$. 所以先做多项式除法，

$$
\begin{array}{r|l|l}
x^2+mx-1 & x^3 \qquad\quad +px+q & x-m \\
 & x^3+mx^2-x & \\
\hline
 & \quad -mx^2+(p+1)x+q & \\
 & \quad -mx^2-\quad m^2x \quad +m & \\
\hline
 & (p+1+m^2)x+(q-m) & \\
\end{array}
$$

要求 $r(x)=(p+1+m^2)x+(q-m)=0$ ，所以 $(p+1+m^2)=0,\quad q-m=0$. 即 $p=-1-m^2,\quad q=m$ 时，可以整除.

(2) 方法同上．先做多项式除法，所得余式为

$$r(x)=m(2-p-m^2)x+(1+q-p-m^2),$$

所以 $m(2-p-m^2)=0$，$1+q-p-m^2=0$，即 $m=0$，$p=q+1$ 或 $p=2-m^2$，$q=1$ 时，可以整除．

7. 求 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的最大公因式：

(1) $f(x)=x^4+x^3-3x^2-4x-1$，$g(x)=x^3+x^2-x-1$；

(2) $f(x)=x^4-4x^3+1$，$g(x)=x^3-3x^2+1$；

(3) $f(x)=x^4-10x^2+1$，$g(x)=x^4-4\sqrt{2}x^3+6x^2+4\sqrt{2}x+1$．

解 (1) 用辗转相除法得到

$-\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}$	x^3+x^2-x-1	$x^4+x^3-3x^2-4x-1$	x
	$x^3+\frac{3}{2}x^2+\frac{1}{2}x$	$x^4+x^3-x^2-x$	
	$-\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{2}x-1$	$-2x^2-3x-1$	$\frac{8}{3}x+\frac{4}{3}$
	$-\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{4}x-\frac{1}{4}$	$-2x^2-2x$	
	$-\frac{3}{4}x-\frac{3}{4}$	$-x-1$	
		$-x-1$	
		0	

用等式写出来，就是

$$f(x)=xg(x)+(-2x^2-3x-1),$$

$$g(x)=\left(-\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\right)(-2x^2-3x-1)-\left(\frac{3}{4}x+\frac{3}{4}\right),$$

$$-2x^2-3x-1=\left(\frac{8}{3}x+\frac{4}{3}\right)\left(-\frac{3}{4}x-\frac{3}{4}\right),$$

所以 $\left(f(x),g(x)\right)=x+1$．

(2) 同样地，

$-\frac{1}{3}x+\frac{10}{9}$	x^3-3x^2+1	x^4-4x^3+1	$x-1$
	$x^3+\frac{1}{3}x^2-\frac{2}{3}x$	x^4-3x^3+x	
	$-\frac{10}{3}x^2+\frac{2}{3}x+1$	$-x^3-x+1$	
	$-\frac{10}{3}x^2-\frac{10}{9}x+\frac{20}{9}$	$-x^3+3x^2-1$	
	$\frac{16}{9}x-\frac{11}{9}$	$-3x^2-x+2$	$-\frac{27}{16}x-\frac{441}{256}$
		$-3x^2+\frac{33}{16}x$	
		$-\frac{49}{16}x+2$	
		$-\frac{49}{16}x+\frac{539}{256}$	
		$-\frac{27}{256}$	

所以$\left(f(x), g(x)\right)=1$.

(3) 同样用辗转相除法，可得 $\left(f(x), g(x)\right)=x^2-2\sqrt{2}x-1$.

8. 求$u(x),v(x)$使$u(x)f(x)+v(x)g(x)=\left(f(x), g(x)\right)$：

(1) $f(x)=x^4+2x^3-x^2-4x-2,\quad g(x)=x^4+x^3-x^2-2x-2$：

(2) $f(x)=4x^4-2x^3-16x^2+5x+9,\quad g(x)=2x^3-x^2-5x+4$：

(3) $f(x)=x^4-x^3-4x^2+4x+1,\quad g(x)=x^2-x-1$.

解 (1) 利用辗转相除法，可以得到

$$f(x)=g(x)+(x^3-2x),$$

$$g(x)=(x+1)(x^3-2x)+(x^2-2),$$

$$x^3-2x=x(x^2-2).$$

因而，$\left(f(x), g(x)\right)=x^2-2$，并且

$$\begin{aligned}\left(f(x), g(x)\right)=x^2-2&=g(x)-(x+1)(x^3-2x)\\&=g(x)-(x+1)\left(f(x)-g(x)\right)\\&=(-x-1)f(x)+(x+2)g(x),\end{aligned}$$

所以$u(x)=-x-1,\quad v(x)=x+2$

(2) 利用辗转相除法，可以得到

$$f(x)=2xg(x)-(6x^2+3x-9)\,,$$

$$g(x)=-(6x^2+3x-9)\left(-\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}\right)-(x-1)\,,$$

$$-(6x^2+3x-9)=-(x-1)(6x+9)\,.$$

因而，$\big(f(x),g(x)\big)=x-1$，并且

$$\begin{aligned}\big(f(x),g(x)\big)=x-1&=-(6x^2+3x-9)\left(-\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}\right)-g(x)\\&=\big(f(x)-2xg(x)\big)\left(-\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}\right)-g(x)\\&=\left(-\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}\right)f(x)+\left(\frac{2}{3}x^2-\frac{2}{3}x-1\right)g(x),\end{aligned}$$

所以$u(x)=-\frac{1}{3}x+\frac{1}{3},\quad v(x)=\frac{2}{3}x^2-\frac{2}{3}x-1$.

(3) 利用辗转相除法，可以得到

$$f(x)=(x^2-3)g(x)+(x-2)\,,$$

$$g(x)=(x+1)(x-2)+1\,.$$

因而$\big(f(x),g(x)\big)=1$，并且

$$\begin{aligned}\big(f(x),g(x)\big)=1&=g(x)-(x+1)(x-2)\\&=g(x)-(x+1)(f(x)-(x^2-3)g(x))\\&=(-x-1)f(x)+(x^3+x^2-3x-2)g(x),\end{aligned}$$

所以$u(x)=-x-1,\quad v(x)=x^3+x^2-3x-2$.

9. 设 $f(x)=x^3+(1+t)x^2+2x+2u,\quad g(x)=x^3+tx+u$ 的最大公因式是一个二次多项式，求t,u的值.

解 利用辗转相除法，可以得到

$$f(x)=g(x)+(1+t)x^2+(2-t)x+u\,,$$

$$g(x)=\left(\frac{1}{1+t}x+\frac{t-2}{(1+t)^2}\right)\left[(1+t)x^2+(2-t)x+u\right]+\left[\frac{(t^2+t-u)(1+t)+(t-2)^2}{(1+t)^2}x+\frac{u[(1+t)^2-(t-2)]}{(1+t)^2}\right]$$

由题意，$f(x)$ 与 $g(x)$ 的最大公因式是一个二次多项式，所以

$$\begin{cases}\dfrac{(t^2+t-u)(1+t)+(t-2)^2}{(1+t)^2}=0,\\ \dfrac{u[(1+t)^2-(t-2)]}{(1+t)^2}=0,\end{cases}$$

解得 $u=0, t=-4$.

10. 设 $(x-1)^2 \big| \left(Ax^4+Bx^2+1\right)$，求 A 和 B .

解 用 $(x-1)^2$ 去除 $f(x)=Ax^4+Bx^2+1$，得余式 $r_1(x)=(4A+2B)x+1-3A-B$，由题意要求知 $r_1(x)=0$，即

$$\begin{cases}4A+2B=0,\\ 1-3A-B=0,\end{cases}$$

解得 $A=1$, $B=-2$.

11. 证明：如果 $\left(f(x), g(x)\right)=1$，$\left(f(x), h(x)\right)=1$，那么 $\left(f(x), g(x)h(x)\right)=1$.

证明 由条件可知，存在 $u_1(x)$ 和 $v_1(x)$ 使得

$$u_1(x)f(x)+v_1(x)g(x)=1,$$

存在 $u_2(x)$ 和 $v_2(x)$ 使得

$$u_2(x)f(x)+v_2(x)h(x)=1.$$

用 $h(x)$ 乘以第一式得

$$u_1(x)f(x)h(x)+v_1(x)g(x)h(x)=h(x),$$

代入第二式得

$$u_2(x)f(x)+v_2(x)\left[u_1(x)f(x)h(x)+v_1(x)g(x)h(x)\right]=1,$$

即

$$\left[u_2(x)+u_1(x)v_2(x)h(x)\right]f(x)+[v_1(x)v_2(x)]g(x)h(x)=1,$$

所以 $\left(f(x), g(x)h(x)\right)=1$.

12. 证明：如果 $f(x)$ 与 $g(x)$ 不全为零，且

$$u(x)f(x)+v(x)g(x)=\left(f(x), g(x)\right),$$

那么 $\left(u(x), v(x)\right)=1$.

证明 由于$u(x)f(x)+v(x)g(x)=\big(f(x),g(x)\big)$，$f(x)$与$g(x)$不全为零，所以$\big(f(x),g(x)\big)\neq 0$．两边同时除以$\big(f(x),g(x)\big)\neq 0$，有

$$u(x)\frac{f(x)}{\big(f(x),g(x)\big)}+v(x)\frac{g(x)}{\big(f(x),g(x)\big)}=1,$$

所以$\big(u(x),v(x)\big)=1$．

13. 证明：如果$d(x)\big|f(x),d(x)\big|g(x)$，且$d(x)$为$f(x)$与$g(x)$的一个组合，那么$d(x)$是$f(x)$与$g(x)$的一个最大公因式.

证明 由题意知$d(x)$是$f(x)$与$g(x)$的公因式. 再由条件设$d(x)=u(x)f(x)+v(x)g(x)$．又设$h(x)$为$f(x)$与$g(x)$的任一公因式，即$h(x)\big|f(x),h(x)\big|g(x)$，则由上式有 $h(x)\big|d(x)$．故而$d(x)$是$f(x)$与$g(x)$的一个最大公因式.

14. 证明：$\big(f(x)h(x),g(x)h(x)\big)=\big(f(x),g(x)\big)h(x)$，其中$h(x)$的首项系数为 1.

证明 显然$\big(f(x),g(x)\big)h(x)$是$f(x)h(x)$与$g(x)h(x)$的一个公因式．下面来证明它是最大公因式.

设$u(x),v(x)$满足$u(x)f(x)+v(x)g(x)=\big(f(x),g(x)\big)$，则

$$u(x)f(x)h(x)+v(x)g(x)h(x)=(f(x),g(x))h(x).$$

由上题结果知，$\big(f(x),g(x)\big)h(x)$是$f(x)h(x)$与$g(x)h(x)$的一个最大公因式，又首项系数为 1，所以

$$\big(f(x)h(x),g(x)h(x)\big)=\big(f(x),g(x)\big)h(x).$$

15. 设多项式$f(x)$与$g(x)$不全为零，证明$\left(\frac{f(x)}{\big(f(x),g(x)\big)},\frac{g(x)}{\big(f(x),g(x)\big)}\right)=1$.

证明 设$d(x)=\big(f(x),g(x)\big)$，则存在多项式$u(x),v(x)$，使

$$d(x)=u(x)f(x)+v(x)g(x).$$

因为$f(x)$与$g(x)$不全为零，所以$d(x)\neq 0$．上式两边同时除以$d(x)$，有

$$1=u(x)\frac{f(x)}{\big(f(x),g(x)\big)}+v(x)\frac{g(x)}{\big(f(x),g(x)\big)},$$

故$\left(\frac{f(x)}{\big(f(x),g(x)\big)},\frac{g(x)}{\big(f(x),g(x)\big)}\right)=1$成立.

16．分别在复数域、实数域和有理数域上分解 x^4+1 为不可约因式之积．

解 在实数域上的分解式为

$$x^4+1=(x^2+1)^2-2x^2=\left(x^2+\sqrt{2}x+1\right)\left(x^2-\sqrt{2}x+1\right).$$

在复数域上的分解式为

$$x^4+1=\left(x+\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)\left(x+\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right).$$

在有理数域上 x^4+1 是不可约多项式．否则，若 x^4+1 可约，有以下两种可能．

（1）x^4+1 有一次因式，从而它有有理根，但 $f(\pm1)\neq0$，所以 x^4+1 无有理根．

（2）x^4+1 无一次因式，设 $x^4+1=(x^2+ax+b)(x^2+cx+d)$，其中 a,b,c,d 为整数．于是 $a+c=0$，$b+d+ac=0$，$ad+bc=0$，$bd=1$，又分两种情况：

①$b=d=1$，又 $a=-c$，从而由 $b+d+ac=0$，得 $a^2=2$，矛盾；

②$b=d=-1$，则 $a^2=-2$，矛盾．

综合以上情况，即证．

17．求下列多项式的有理根：

(1) $f(x)=x^3-6x^2+15x-14$；

(2) $g(x)=4x^4-7x^2-5x-1$；

(3) $h(x)=x^5+x^4-6x^3-14x^2-11x-3$．

解 (1)由于 $f(x)$ 是首项系数为 1 的整系数多项式，所以有理根必为整数根，且为 -14 的因数．-14 的因数有：$\pm1,\ \pm2,\ \pm7,\ \pm14$，计算得到：

$$\begin{aligned}&f(1)=-4,\quad f(-1)=-36,\quad f(2)=0,\quad f(-2)=-72,\\&f(7)=140,\quad f(-7)=-756,\ f(14)=1764,\quad f(-14)=-4144,\end{aligned}$$

故 $x=2$ 是 $f(x)$ 的有理根．再由多项式除法可知，$x=2$ 是 $f(x)$ 的单根．

(2) 类似（1）的讨论可知，$g(x)$ 的可能的有理根为：$\pm1,\ \pm\dfrac{1}{2},\ \pm\dfrac{1}{4}$，计算得到

$$g(1)=-9,\ g(-1)=1,\ g\left(\frac{1}{2}\right)=-5,\ g\left(-\frac{1}{2}\right)=0,\ g\left(\frac{1}{4}\right)=-\frac{171}{64},\ g\left(-\frac{1}{4}\right)=-\frac{11}{64},$$

故 $x=-\dfrac{1}{2}$ 是 $g(x)$ 的有理根．再由多项式除法可知，$x=-\dfrac{1}{2}$ 是 $f(x)$ 的 2 重根．

(3) 类似地，$h(x)$ 的可能的有理根为：$\pm1,\pm3$，计算得到

$$h(1)=-28, h(-1)=0, h(3)=0, h(-3)=-96.$$

故 $x=-1$，$x=3$ 是 $h(x)$ 的有理根．再由多项式除法可知，$x=-1$ 是 $h(x)$ 的 4 重根，$x=3$ 是 $h(x)$ 的单根．

18．若实系数方程 $x^3+px+q=0$ 有一根 $a+bi$（a,b 为实数，$b\neq 0$），则方程 $x^3+px-q=0$ 有实根 $2a$．

证明 设原方程有三个根 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$．不失一般性，令 $\alpha_1=a+bi$，从而有 $\alpha_2=a-bi$，由根与系数的关系可知

$$0=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=(a+bi)+(a-bi)+\alpha_3,$$

所以 $\alpha_3=-2a$，即 $(-2a)^3+p(-2a)+q=0$，故 $(2a)^3+p(2a)-q=0$．这说明 $x^3+px-q=0$ 有实根 $2a$．

19．证明：如果 $(x-1)\big|f(x^n)$，那么 $(x^n-1)\big|f(x^n)$．

证明 因为 $(x-1)\big|f(x^n)$，所以 $f(1^n)=f(1)=0$．因此，令 $f(x)=(x-1)g(x)$，则有

$$f(x^n)=(x^n-1)g(x^n),$$

即 $(x^n-1)\big|f(x^n)$．

20．下列多项式在有理数域上是否可约？

（1）$f_1(x)=x^2+1$；

（2）$f_2(x)=x^4-8x^3+12x^2+2$；

（3）$f_3(x)=x^6+x^3+1$；

（4）$f_4(x)=x^p+px+1$，p 为奇素数；

（5）$f_5(x)=x^4+4kx+1$，k 为整数．

解 （1）$f_1(x)$ 的可能的有理根为：±1，而 $f(\pm1)=2$，所以它在有理数域上不可约．

（2）由 Eisenstein 判别法，取素数 $p=2$，则 2 不能整除 1，而 $2\big|(-8),\ 2\big|12,\ 2\big|2$，但是 2^2 不能整除 2，所以该多项式在有理数域上不可约．

（3）令 $x=y+1$，代入 $f_3(x)=x^6+x^3+1$ 有

$$g(y)=f_3(y+1)=y^6+6y^5+15y^4+21y^3+18y^2+9y+3.$$

取素数 $p=3$，由 Eisenstein 判别法知，$g(y)$ 在有理数域上不可约，所以 $f(x)$ 在有理数域上不可约．

(4) 令 $x=y-1$，代入 $f_4(x)=x^p+px+1$，得

$$g(y)=f_4(y-1)=y^p-C_p^1y^{p-1}+C_p^2y^{p-2}-\cdots-C_p^{p-2}y^2+(C_p^{p-1}+p)y-p,$$

取素数 p，由 Eisenstein 判别法知，$g(y)$ 在有理数域上不可约，所以 $f_4(x)$ 在有理数域上不可约.

(5) 令 $x=y+1$，代入 $f_5(x)=x^4+4kx+1$，得

$$g(y)=f_5(y+1)=y^4+4y^3+6y^2+(4k+4)y+4k+2,$$

取素数 $p=2$，由 Eisenstein 判别法知，$g(y)$ 在有理数域上不可约，所以 $f_5(x)$ 在有理数域上不可约.

B　组

1．设 $f(x)$，$g(x)$，$h(x)$ 是实数域上的多项式，

(1) 若 $f^2(x)=xg^2(x)+xh^2(x)$，则 $f(x)=g(x)=h(x)=0$．

(2) 在复数域上，上述命题是否成立？

证明 (1) 当 $g(x)=h(x)=0$ 时，有 $f^2(x)=0$，所以 $f(x)=0$，命题成立．如果 $g(x)$，$h(x)$ 不全为零，不妨设 $g(x)\neq 0$．当 $h(x)=0$ 时，$\partial\left(xg^2(x)+xh^2(x)\right)=1+2\partial g(x)$ 为奇数；当 $h(x)\neq 0$ 时，因为 $g(x)$，$h(x)$ 都是实系数多项式，所以 $xg^2(x)$ 与 $xh^2(x)$ 都是首项系数为正实数的奇次多项式，于是也有 $\partial(xg^2(x)+xh^2(x))$ 为奇数．而这时均有 $f^2(x)\neq 0$，且 $\partial f^2(x)=2\partial f(x)$ 为偶数，矛盾．因此有 $g(x)=h(x)=0$，从而有 $f(x)=0$．

(2) 在复数域上，上述命题不成立．例如，设 $f(x)=0$，$g(x)=x^n$，$h(x)=\mathrm{i}x^n$，其中 n 为自然数，有 $f^2(x)=xg^2(x)+xh^2(x)$，但 $g(x)\neq 0$，$h(x)\neq 0$．

2．设 $f(x),\ g(x),\ h(x)\in P[x]$，满足

$$(x^2+1)h(x)+(x-1)f(x)+(x+2)g(x)=0,$$
$$(x^2+1)h(x)+(x+1)f(x)+(x-2)g(x)=0.$$

证明 $(x^2+1)\big|\left(f(x),\ g(x)\right)$．

证明 两式相加得到

$$2(x^2+1)h(x)+2x(f(x)+g(x))=0.$$

由 $(x^2+1,\ x)=1$ 可知

$$(x^2+1)\big|\left(f(x)+g(x)\right).$$

两式相减得到

$$-2f(x)+4g(x)=0,\quad f(x)=2g(x).$$

故 $\left(x^2+1\right)\big|f(x)$，$\left(x^2+1\right)\big|g(x)$，即 $\left(x^2+1\right)\big|\left(f(x),\ g(x)\right)$．

3．设 $g_1(x)g_2(x)\big|f_1(x)f_2(x)$，证明

(1) 若 $f_1(x)\big|g_1(x)$，$f_1(x)\neq 0$，则 $g_2(x)\big|f_2(x)$；

(2) 若 $g_2(x)\big|f_1(x)f_2(x)$，是否有 $g_2(x)\big|f_2(x)$？

解 (1) 因为 $g_1(x)g_2(x)\big|f_1(x)f_2(x)$，$f_1(x)\big|g_1(x)$，故存在多项式 $h(x)$，$h_1(x)$ 使得

$$f_1(x)f_2(x)=g_1(x)g_2(x)h(x),\quad g_1(x)=f_1(x)h_1(x).$$

于是 $f_1(x)f_2(x)=f_1(x)h_1(x)g_2(x)h(x)$．由于 $f_1(x)\neq 0$，故有 $f_2(x)=h_1(x)g_2(x)h(x)$，即 $g_2(x)\big|f_2(x)$．

(2) 否．例如取 $g_1(x)=x-2$， $g_2(x)=x^2-1$， $f_1(x)=(x-1)(x-2)$， $f_2(x)=(x+1)(x+2)$．虽然 $g_1(x)g_2(x)\big|f_1(x)f_2(x)$ 且 $g_2(x)\big|f_1(x)f_2(x)$，但 $g_2(x)$ 不能整除 $f_2(x)$．

4．当 k 为何值时， $f(x)=x^2+(k+6)x+4k+2$ 和 $g(x)=x^2+(k+2)x+2k$ 的最大公因式是一次的？并求出此时的最大公因式.

解 显然 $g(x)=(x+k)(x+2)$．

当 $\big(f(x),g(x)\big)=x+2$ 时， $f(-2)=4-2(k+6)+4k+2=0$，则 $k=3$．

当 $\big(f(x),g(x)\big)=x+k$ 时，$f(-k)=k^2-k(k+6)+4k+2=0$，则 $k=1$．这时 $\big(f(x),g(x)\big)=x+1$．

5．证明：对于任意正整数 n，都有 $\big(f(x),g(x)\big)^n=\big(f^n(x),g^n(x)\big)$．

证明 由题意可知 $f(x)$ 与 $g(x)$ 不全为零．令

$$\big(f(x),g(x)\big)=d(x),$$

则 $d(x)\neq 0$，从而 $\left(\dfrac{f(x)}{d(x)},\dfrac{g(x)}{d(x)}\right)=1$，所以对任意正整数 n，有 $\left(\left(\dfrac{f(x)}{d(x)}\right)^n,\left(\dfrac{g(x)}{d(x)}\right)^n\right)=1$，于是有

$$u(x)\left(\frac{f(x)}{d(x)}\right)^n+v(x)\left(\frac{g(x)}{d(x)}\right)^n=1,$$

即

$$u(x)f^n(x)+v(x)g^n(x)=d^n(x).$$

又由 $d(x)\big|f(x)$， $d(x)\big|g(x)$，有 $d^n(x)\big|f^n(x)$， $d^n(x)\big|g^n(x)$，因此 $d^n(x)$ 是 $f^n(x)$ 与 $g^n(x)$ 的首项系数为 1 的最大公因式，从而有

$$\big(f^n(x),g^n(x)\big)=d^n(x)=\big(f(x),g(x)\big)^n.$$

6. 设 $f_1(x)=af(x)+bg(x),\ g_1(x)=cf(x)+dg(x)$，且 $ad-bc\neq 0$，证明

$$\big(f(x),g(x)\big)=\big(f_1(x),g_1(x)\big).$$

证明 设 $\big(f(x),g(x)\big)=d(x)$，则 $d(x)\big|f(x),d(x)\big|g(x)$．由于

$$f_1(x)=af(x)+bg(x),\quad g_1(x)=cf(x)+dg(x),$$

故 $d(x)\mid f_1(x), d(x)\mid g_1(x)$．又设 $h(x)\mid f_1(x), h(x)\mid g_1(x)$，由上式及 $ad-bc\neq 0$，可得

$$f(x)=\frac{d}{ad-bc}f_1(x)-\frac{b}{ad-bc}g_1(x),\quad g(x)=\frac{-c}{ad-bc}f_1(x)+\frac{a}{ad-bc}g_1(x),$$

从而 $h(x)\mid f(x), h(x)\mid g(x)$，于是 $h(x)\mid d(x)$，即 $d(x)$ 也是 $f_1(x)$ 和 $g_1(x)$ 的最大公因式，即

$$\left(f(x),g(x)\right)=\left(f_1(x),g_1(x)\right).$$

7．设 $f(x)=d(x)f_1(x)$，$g(x)=d(x)g_1(x)$，且 $f(x)$ 与 $g(x)$ 不全为零，证明 $d(x)$ 是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的一个最大公因式的充分必要条件是 $\left(f_1(x),g_1(x)\right)=1$．

证明 必要性．若 $d(x)$ 是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的一个最大公因式，则存在多项式 $u(x),v(x)$ 使

$$u(x)f(x)+v(x)g(x)=d(x),$$

于是

$$u(x)d(x)f_1(x)+v(x)d(x)g_1(x)=d(x).$$

由 $f(x)$ 与 $g(x)$ 不全为零知 $d(x)\neq 0$，因此有

$$u(x)f_1(x)+v(x)g_1(x)=1,$$

即 $\left(f_1(x),g_1(x)\right)=1$．

充分性．若 $\left(f_1(x),g_1(x)\right)=1$，则存在多项式 $u(x),v(x)$，使

$$u(x)f_1(x)+v(x)g_1(x)=1.$$

两边同时乘 $d(x)$ 有

$$u(x)f(x)+v(x)g(x)=d(x).$$

由 $d(x)$ 是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的一个公因式知，$d(x)$ 是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的一个最大公因式．

8．设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是两个多项式，证明 $\left(f(x),\ g(x)\right)=1$ 当且仅当 $\left(f(x)+g(x),\ f(x)g(x)\right)=1$．

证明 必要性．设 $\left(f(x),g(x)\right)=1$，若 $f(x)+g(x)$ 与 $f(x)g(x)$ 不互素，则有不可约公因式 $p(x)$，使

$$p(x)\mid f(x)g(x),$$

所以 $p(x)\mid f(x)$ 或 $p(x)\mid g(x)$．不妨设 $p(x)\mid f(x)$，由 $p(x)\mid\left(f(x)+g(x)\right)$ 可知 $p(x)\mid g(x)$，因此 $p(x)$ 是 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的公因式，与 $f(x),g(x)$ 互素矛盾，故 $f(x)+g(x)$ 与 $f(x)g(x)$ 互素．

充分性．设$(f(x)+g(x),\ f(x)g(x))=1$，则存在$u(x), v(x)$使

$$\big(f(x)+g(x)\big)u(x)+f(x)g(x)v(x)=1,$$

$$f(x)u(x)+g(x)\big(u(x)+f(x)v(x)\big)=1,$$

上式说明$\big(f(x), g(x)\big)=1$．

9. 如果$(x^2+x+1)\big|f_1(x^3)+xf_2(x^3)$，那么$(x-1)\big|f_1(x)$，$(x-1)\big|f_2(x)$．

证明 x^2+x+1的两个根为$\varepsilon_1=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$和$\varepsilon_2=\dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}$，所以，$\varepsilon_1{}^3=\varepsilon_2{}^3=1$．

因为$(x^2+x+1)\big|\big(f_1(x^3)+xf_2(x^3)\big)$，所以$(x-\varepsilon_1)(x-\varepsilon_2)\big|f_1(x^3)+xf_2(x^3)$，故有

$$\begin{cases} f_1(\varepsilon_1{}^3)+\varepsilon_1 f_2(\varepsilon_1{}^3)=0, \\ f_1(\varepsilon_2{}^3)+\varepsilon_2 f_2(\varepsilon_2{}^3)=0, \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} f_1(1)+\varepsilon_1 f_2(1)=0, \\ f_1(1)+\varepsilon_2 f_2(1)=0. \end{cases}$$

解得$f_1(1)=f_2(1)=0$，从而$(x-1)\big|f_1(x)$，$(x-1)\big|f_2(x)$．

10. 若$f(x)\big|f(x^n)$，则$f(x)$的根只能是零或单位根．

证明 因为$f(x)\big|f(x^n)$，故存在多项式$q(x)$，使$f(x^n)=f(x)q(x)$．设a为$f(x)$的任一根，即$f(a)=0$，则$f(a^n)=f(a)q(a)=0$．也就是说，当a为$f(x)$的一根时，a^n也为$f(x)$的一根．依此类推，可知$a, a^n, a^{n^2}, \cdots$也是$f(x)$的根．由于$f(x)$的根的个数有限，故必定存在正整数s, t(不妨设$s>t$)，使得$a^{n^s}=a^{n^t}$，$a^{n^t}(a^{n^s-n^t}-1)=0$．于是有$a^{n^t}=0$即$a=0$，或者$(a^{n^s-n^t}-1)=0$，即a为单位根．

11. 设$f(x)$是一个整系数多项式，且$f(0), f(1)$都是奇数，则$f(x)$没有整数根．

证明 设$f(x)=a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0$，假设$f(x)$有整数根$\alpha$，则$x-\alpha$整除$f(x)$，即

$$f(x)=(x-\alpha)q(x),$$

其中商式$q(x)$也是一个整系数多项式．

事实上，设$q(x)=b_{n-1}x^{n-1}+\cdots+b_1x+b_0$，代入上式并比较两端同次幂系数，得

$$a_n=b_{n-1},\ a_{n-1}=b_{n-2}-\alpha b_{n-1},\ \cdots,\ a_1=b_0-\alpha b_1,\ a_0=-\alpha b_0,$$

因为 $f(x)$ 是一个整系数多项式，所以，$b_{n-1},\cdots,b_1,b_0$ 也是整数，

令 $x=0, x=1$ 分别代入展开式，得

$$f(0)=-\alpha q(0),\quad f(1)=(1-\alpha)q(1).$$

由于 $f(0), f(1)$ 都是奇数，则 α 及 $\alpha-1$ 都必须是奇数，这是不可能的，所以，$f(x)$ 不能有整数根.

12．证明对于任意非负整数 n，都有 $\left(x^2+x+1\right)\Big|\left(x^{n+2}+(x+1)^{2n+1}\right)$.

证明 设 α 是 x^2+x+1 的任一根，即 $\alpha^2+\alpha+1=0$，$\alpha+1=-\alpha^2$，$\alpha^3=1$．由此得

$$\alpha^{n+2}+(\alpha+1)^{2n+1}=\alpha^{n+2}+(-\alpha^2)^{2n+1}=\alpha^{n+2}(1-\alpha^{3n})=0,$$

即 α 也是 $x^{n+2}+(x+1)^{2n+1}$ 的根．又因为 x^2+x+1 无重根，因此 $\left(x^2+x+1\right)\Big|\left(x^{n+2}+(x+1)^{2n+1}\right)$.

13．假设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是两两不同的整数，证明：多项式 $f(x)=(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)-1$ 在有理数域上不可约.

证明 用反证法．假设 $f(x)$ 在有理数域上可约，则有整系数多项式 $g_1(x), g_2(x)$，使得

$$f(x)=g_1(x)g_2(x).$$

于是

$$f(a_i)=g_1(a_i)g_2(a_i),\quad i=1,2,\cdots,n.$$

因此，$g_1(a_i)=1, g_2(a_i)=-1$ 或 $g_1(a_i)=-1, g_2(a_i)=1$．这样总有 $g_1(a_i)=-g_2(a_i)$，从而由推论 2 知 $g_1(x)=-g_2(x)$，所以 $f(x)=-g_1^2(x)$．这与 $f(x)$ 的首项系数为 1 相矛盾，故 $f(x)$ 在有理数域上不可约.