

# 《线性代数》复习提纲

## 第一章、行列式

1. 行列式的定义：用  $n^2$  个元素  $a_{ij}$  组成的记号称为  $n$  阶行列式。

(1) 它表示所有可能的取自不同行不同列的  $n$  个元素乘积的代数和；

(2) 展开式共有  $n!$  项，其中符号正负各半；

2. 行列式的计算

一阶  $|a|=a$  行列式，二、三阶行列式有对角线法则；

$N$  阶 ( $n \geq 3$ ) 行列式的计算：降阶法

定理： $n$  阶行列式的值等于它的任意一行（列）的各元素与其对应的代数余子式乘积的和。

方法：选取比较简单的一行（列），保留一个非零元素，其余元素化为 0，利用定理展开降阶。

特殊情况：上、下三角形行列式、对角形行列式的值等于主对角线上元素的乘积；

◇ 行列式值为 0 的几种情况：

I 行列式某行（列）元素全为 0； II 行列式某行（列）的对应元素相同；

III 行列式某行（列）的元素对应成比例； IV 奇数阶的反对称行列式。

3. 概念：全排列、排列的逆序数、奇排列、偶排列、余子式  $M_{ij}$ 、代数余子式  $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$

定理：一个排列中任意两个元素对换，改变排列的奇偶性。

奇排列变为标准排列的对换次数为基数，偶排列为偶数。

$n$  阶行列式也可定义： $D = \sum (-1)^t a_{q_1 1} a_{q_2 2} \dots a_{q_n n}$ ， $t$  为  $q_1 q_2 \dots q_n$  的逆序数

4. 行列式性质：

1、行列式与其转置行列式相等。

2、互换行列式两行或两列，行列式变号。若有两行(列)相等或成比例，则为行列式 0。

3、行列式某行（列）乘数  $k$ ，等于  $k$  乘此行列式。行列式某行（列）的公因子可提到外面。

4、行列式某行（列）的元素都是两数之和，则此行列式等于两个行列式之和。

5、行列式某行（列）乘一个数加到另一行（列）上，行列式不变。

6、行列式等于他的任一行（列）的各元素与其对应代数余子式的乘积之和。（按行、列展开法则）

7、行列式某一行（列）与另一行（列）的对应元素的代数余子式乘积之和为 0。

5. 克拉默法则：

：若线性方程组的系数行列式  $D \neq 0$ ，则方程有且仅有唯一解  $x_1 = \frac{D_1}{D}, x_2 = \frac{D_2}{D}, \dots, x_n = \frac{D_n}{D}$ 。

：若线性方程组无解或有两个不同的解，则系数行列式  $D=0$ 。

：若齐次线性方程组的系数行列式  $D \neq 0$ ，则其没有非零解。

：若齐次线性方程组有非零解，则其系数行列式  $D=0$ 。

$$6. \begin{vmatrix} r_1 & & & & \\ & r_2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & r_n & \end{vmatrix} = \prod_{r=r_1}^{r_n} r, \quad \begin{vmatrix} & & & & r_1 \\ & & & & \\ & & & r_2 & \\ & & \ddots & & \\ & r_n & & & \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod_{r=r_1}^{r_n} r$$

$$\begin{vmatrix} a & & & & b \\ & \ddots & & & \\ & & a & b & \\ & & c & d & \\ c & & & & d \end{vmatrix} = (ad-bc)^n, \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{n \geq i > j \geq 1} (x_i - x_j), \quad (\text{两式要会计算})$$

范德蒙德行列

题型：Page21（例 13）

## 第二章、矩阵

1. 矩阵的基本概念（表示符号、一些特殊矩阵——如单位矩阵、对角、对称矩阵等）；

2. 矩阵的运算

（1）加减、数乘、乘法运算的条件、结果；

（2）关于乘法的几个结论：

①矩阵乘法一般不满足交换律（若  $\mathbf{AB}=\mathbf{BA}$ ，称  $\mathbf{A}$ 、 $\mathbf{B}$  是可交换矩阵）；

②矩阵乘法一般不满足消去律、零因式不存在；

③若  $\mathbf{A}$ 、 $\mathbf{B}$  为同阶方阵，则  $|\mathbf{AB}|=|\mathbf{A}|*|\mathbf{B}|$ ；

④  $|\mathbf{kA}|=\mathbf{k}^n*|\mathbf{A}|$ 。只有方阵才有幂运算。

（3）转置：  $(\mathbf{kA})^T=\mathbf{kA}^T$ ，  $(\mathbf{AB})^T=\mathbf{B}^T\mathbf{A}^T$

（4）方阵的行列式：  $|\mathbf{A}^T|=|\mathbf{A}|$ ，  $|\mathbf{kA}|=\mathbf{k}^n|\mathbf{A}|$ ，  $|\mathbf{AB}|=|\mathbf{A}||\mathbf{B}|$

（5）伴随矩阵：  $\mathbf{AA}^*=\mathbf{A}^*\mathbf{A}=|\mathbf{A}|\mathbf{E}$ ，  $\mathbf{A}^*=(|\mathbf{A}|\mathbf{E})\mathbf{A}^{-1}$ ，  $\mathbf{A}^*$  的行元素是  $\mathbf{A}$  的列元素的代数余子式

（6）共轭矩阵：  $\overline{\mathbf{A}}=(\overline{a_{ij}})$ ，  $\overline{\mathbf{A}+\mathbf{B}}=\overline{\mathbf{A}}+\overline{\mathbf{B}}$ ，  $\overline{k\mathbf{A}}=k\overline{\mathbf{A}}$ ，  $\overline{\mathbf{AB}}=\overline{\mathbf{A}}\overline{\mathbf{B}}$

（7）矩阵分块法：  $\mathbf{A}+\mathbf{B}=\begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11}+\mathbf{B}_{11} & \cdots & \mathbf{A}_{1r}+\mathbf{B}_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ \mathbf{A}_{s1}+\mathbf{B}_{s1} & \cdots & \mathbf{A}_{sr}+\mathbf{B}_{sr} \end{pmatrix}$ ，  $\mathbf{A}^T=\begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11}^T & \cdots & \mathbf{A}_{s1}^T \\ \vdots & & \vdots \\ \mathbf{A}_{1r}^T & \cdots & \mathbf{A}_{sr}^T \end{pmatrix}$

3. 对称阵：方阵  $\mathbf{A}^T=\mathbf{A}$ 。 对称阵特点：元素以对角线为对称轴对应相等。

3. 矩阵的秩

（1）定义：非零子式的最大阶数称为矩阵的秩；

（2）秩的求法：一般不用定义求，而用下面结论：

矩阵的初等变换不改变矩阵的秩；阶梯形矩阵的秩等于非零行的个数（每行的第一个非零元所在列，从此元开始往下全为 0 的矩阵称为行阶梯阵）。

求秩：利用初等变换将矩阵化为阶梯阵得秩。

(3)  $0 \leq R(A_{m \times n}) \leq \min\{m, n\}$  ;  $R(A^T) = R(A)$  ; 若  $A \sim B$  , 则  $R(A) = R(B)$  ;

若  $P, Q$  可逆, 则  $R(PAQ) = R(A)$  ;  $\max\{R(A), R(B)\} \leq R(A, B) \leq R(A) + R(B)$  ;

若  $AB = C$ ,  $R(C) \leq \min\{R(A), R(B)\}$

#### 4. 逆矩阵

(1) 定义:  $A, B$  为  $n$  阶方阵, 若  $AB = BA = I$ , 称  $A$  可逆,  $B$  是  $A$  的逆矩阵（满足半边也成立）;

(2) 性质:  $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ ,  $(A')^{-1} = (A^{-1})'$ ; ( $A, B$  的逆矩阵, 你懂的)（注意顺序）

(3) 可逆的条件: ①  $|A| \neq 0$ ; ②  $r(A) = n$ ; ③  $A \rightarrow I$ ;

(4) 逆的求解: ① 伴随矩阵法  $A^{-1} = \frac{A^*}{|A|}$ ; ② 初等变换法 ( $A: I$ )  $\rightarrow$  (施行初等变换) ( $I: A^{-1}$ )

(5) 方阵  $A$  可逆的充要条件有: ① 存在有限个初等矩阵  $P_1, \dots, P_l$ , 使  $A = P_1 P_2 \dots P_l$  ②  $A \sim E$

### 第三章、初等变换与线性方程组

1、初等变换: ①  $(A) \xrightarrow{i \leftrightarrow j} (B)$ , ②  $(A) \xrightarrow{i \times k} (B)$ , ③  $(A) \xrightarrow{i + k \times j} (B)$  性质: 初等变换可逆。

等价: 若  $A$  经初等变换成  $B$ , 则  $A$  与  $B$  等价, 记作  $A \sim B$ , 等价关系具有反身性、对称性、传递性。

初等矩阵: 由单位阵  $E$  经过一次初等变换得到的矩阵。

定理: 对  $A_{m \times n}$  施行一次初等行变换, 相当于在  $A$  的左边乘相应的  $m$  阶初等矩阵; 对  $A_{m \times n}$  施行一次初等列变换, 相当于在  $A$  的右边乘相应的  $n$  阶初等矩阵。

等价的充要条件: ①  $R(A) = R(B) = R(A, B)$

②  $m \times n$  的矩阵  $A, B$  等价  $\Leftrightarrow$  存在  $m$  阶可逆矩阵  $P$ 、 $n$  阶可逆矩阵  $Q$ , 使得  $PAQ = B$ 。

#### 线性方程组解的判定

定理: (1)  $r(A, b) \neq r(A)$  无解; (2)  $r(A, b) = r(A) = n$  有唯一解;

(3)  $r(A, b) = r(A) < n$  有无穷多组解;

特别地: 对齐次线性方程组  $AX = 0$ , (1)  $r(A) = n$  只有零解; (2)  $r(A) < n$  有非零解;

再特别, 若为方阵, (1)  $|A| \neq 0$  只有零解; (2)  $|A| = 0$  有非零解

#### 2. 齐次线性方程组

(1) 解的情况:  $r(A) = n \Leftrightarrow$  只有零解 ;  $r(A) < n \Leftrightarrow$  有无穷多组非零解。

(2) 解的结构:  $X = c_1 a_1 + c_2 a_2 + \dots + c_{n-r} a_{n-r}$ 。

(3) 求解的方法和步骤:

①将增广矩阵通过行初等变换化为最简阶梯阵；②写出对应同解方程组；

③移项，利用自由未知数表示所有未知数；④表示出基础解系；⑤写出通解。

(4) 性质：

①若  $x = \xi_1$  和  $x = \xi_2$  是向量方程  $A^*x=0$  的解，则  $x = \xi_1 + \xi_2$ 、 $x = k\xi_1$  也是该方程的解。

②齐次线性方程组的解集的最大无关组是该齐次线性方程组的基础解系。

③若  $R(A_{m \times n}) = r$ ，则  $n$  元齐次线性方程组  $A^*x=0$  的解集  $S$  的秩  $R_s = n - r$ 。

### 3. 非齐次线性方程组

(1) 解的情况：①有解  $\Leftrightarrow R(A)=R(A,b)$ 。②唯一解  $\Leftrightarrow R(A)=R(A,b)=n$ 。③无限解  $\Leftrightarrow R(A)=R(A,b)<n$ 。

(2) 解的结构： $X=u+c_1a_1+c_2a_2+\cdots+c_{n-r}a_{n-r}$ 。

(3) 无穷多组解的求解方法和步骤：与齐次线性方程组相同。

(4) 唯一解的解法：有克莱姆法则、逆矩阵法、消元法（初等变换法）。

(5) ①若  $x = \eta_1$ 、 $x = \eta_2$  都是方程  $Ax=b$  的解，则  $x = \eta_1 - \eta_2$  是对应齐次方程  $Ax=0$  的解

②  $x = \eta$  是方程  $Ax=b$  的解， $x = \xi$  是  $Ax=0$  的解，则  $x = \xi + \eta$  也是  $Ax=b$  的解。

## 第四章、向量组的线性相关性

1.  $N$  维向量的定义(注：向量实际上就是特殊的矩阵——行矩阵和列矩阵；默认向量  $a$  为列向量)。

2. 向量的运算：

- (1) 加减、数乘运算（与矩阵运算相同）；
- (2) 向量内积  $\alpha' \beta = a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n$ ;
- (3) 向量长  $|\alpha| = \sqrt{\alpha' \alpha} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}$ ;
- (4) 向量单位化  $(1/|\alpha|)\alpha$ ;

### 3. 线性组合

(1) 定义：若  $b = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_m a_m$ ，则称  $b$  是向量组  $a_1, a_2, \dots, a_n$  的一个线性组合，或称  $b$  可以用向量组  $a_1, a_2, \dots, a_n$  的线性表示。

(2) 判别方法：将向量组合成矩阵，记  $A = (a_1, a_2, \dots, a_n)$

①  $B = (a_1, a_2, \dots, a_n, \beta)$ ，则： $r(A) = r(B) \Leftrightarrow b$  可以用向量组  $a_1, a_2, \dots, a_n$  线性表示。

②  $B = (b_1, b_2, \dots, b_m)$ ，则： $B$  能由  $A$  线性表示  $\Leftrightarrow R(A) = R(A, B) \Leftrightarrow AX = B$  有解  $\Rightarrow R(B) \leq R(A)$ 。

(3) 求线性表示表达式的方法：矩阵  $B$  施行行初等变换化为最简阶梯阵，则最后一列元素就是表示的系数。

注：求线性表示的系数既是求解  $Ax = b$

### 4. 向量组的线性相关性

(1) 线性相关与线性无关的定义

设  $k_1 a_1 + k_2 a_2 + \dots + k_n a_n = 0$ ，若  $k_1, k_2, \dots, k_n$  不全为 0，称线性相关；若全为 0，称线性无关。

(2) 判别方法：

①  $r(a_1, a_2, \dots, a_n) < n$ ，线性相关； $r(a_1, a_2, \dots, a_n) = n$ ，线性无关。

② 若有  $n$  个  $n$  维向量，可用行列式判别： $n$  阶行列式  $|\{a_{ij}\}| = 0$ ，线性相关（ $\neq 0$  无关）

③  $A: a_1, a_2, \dots, a_n$ ， $B: a_1, a_2, \dots, a_n, a_{n+1}$ ，若  $A$  相关则  $B$  一定相关，若  $B$  相关  $A$  不一定相关；

若  $A$  无关， $B$  相关，则向量  $a_{n+1}$  必能由  $A$  线性表示，且表示式唯一。

注：含零向量的向量组必定相关。

### 5. 极大无关组与向量组的秩

(1) 定义：最大无关组所含向量个数称为向量组的秩

(2) 求法：设  $A = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ ，将  $A$  化为阶梯阵，则  $A$  的秩即为向量组的秩，而每行的第一个非零元所在列的向量就构成了极大无关组。

(3) 矩阵的秩等于它的行向量组的秩也等于它的列向量组的秩。

注：如何证明  $R(A^T A) = R(A)$ ， $P_{101}$ 。

## 第五章、相似矩阵及二次型

1、向量内积： $[x, y] = x^T y$ 。

内积性质： $[x, y] = [y, x]$ ， $[\lambda x, y] = \lambda [x, y]$ ， $[x + z, y] = [x, y] + [z, y]$ ；

: 当  $x=0$  时,  $[x,x]=0$ , 当  $x \neq 0$  时,  $[x,x]>0$

2、向量长度:  $\|x\| = \sqrt{[x,x]} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$

性质: 非负性  $\|x\| \geq 0$ 、齐次性  $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ 、三角不等式  $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$

3、正交:  $[x,y]=0$  称  $x$  与  $y$  正交。若  $x=0$ , 则  $x$  与任何向量都正交。

正交向量组是指一组两两正交的非零向量。

定理: 若  $m$  维向量  $a_1, a_2, \dots, a_n$  是正交向量组, 则  $a_1, a_2, \dots, a_n$  线性无关。

正交阵:  $A_n^T A_n = E, A^T = A^{-1}$ 。

性质: 若  $A$  为正交阵则  $A^T$  也是正交阵, 且  $|A| = \pm 1$ ; 若  $A, B$  都正交, 则  $AB$  正交。

规范正交基: 设  $m$  维向量  $a_1, a_2, \dots, a_n$  是向量空间  $V$  的一个基, 若  $a_1, a_2, \dots, a_n$  两两正交, 且都是单位向量, 则称  $a_1, a_2, \dots, a_n$  是  $V$  的一个规范正交基。

规范正交化: 施密特正交化过程:  $b_1 = a_1, b_2 = a_2 - \frac{[b_1, a_2]}{[b_1, b_1]} b_1, \dots$

$$b_n = a_n - \frac{[b_1, a_n]}{[b_1, b_1]} b_1 - \frac{[b_2, a_n]}{[b_2, b_2]} b_2 - \dots - \frac{[b_{n-1}, a_n]}{[b_{n-1}, b_{n-1}]} b_{n-1}$$

正交变换:  $P$  为正交阵,  $y = Px$  称为正交变换。有  $\|y\| = \|x\|$

4、矩阵的特征值和特征向量

①定义: 对方阵  $A$ , 若存在非零向量  $x$  和数  $\lambda$  使  $Ax = \lambda x$ , 则称  $\lambda$  是矩阵  $A$  的特征值, 向量  $x$  称为矩阵  $A$  的对应于特征值  $\lambda$  的特征向量。

②特征值和特征向量的求解: 求出特征方程  $|A - \lambda E| = 0$  的根即为特征值, 将特征值  $\lambda$  代入对应齐次线性方程组  $(A - \lambda E)x = 0$  中求出方程组的所有非零解即为特征向量。

③重要结论与定理:

(1)  $A$  可逆的充要条件是  $A$  的特征值不等于 0; (2)  $A$  与  $A$  的转置矩阵  $A'$  有相同的特征值;

(3) 不同特征值对应的特征向量线性无关。 (4) 对  $A_n = (a_{ij})$  的特征值有:  $\sum_i \lambda_i = \sum_i a_{ii}; \prod_i \lambda_i = |A|$ 。

(5) 若  $\lambda$  是  $A$  的特征值, 则  $\lambda^k$  是  $A^k$  的特征值,  $\varphi(\lambda)$  是  $\varphi(A)$  的特征值。(6)  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$  是方阵  $A$  的  $m$  个特征值, 对应特征向量是  $p_1, p_2, \dots, p_m$ , 若  $\lambda_i$  互不相等, 则  $p_i$  互不相关。

5、矩阵的相似

①定义: 同阶方阵  $A, B$ , 若有可逆阵  $P, P^{-1}AP = B$ , 则  $A$  与  $B$  相似。  $P$  为把  $A$  变为  $B$  的相似变换矩阵。

②若  $n$  阶矩阵  $A$  与对角阵  $\Lambda$  相似, 则对角阵元素  $\lambda_i$  即是  $A$  的  $n$  个特征值。

若  $f(\lambda)$  是矩阵  $A$  的特征多项式, 则  $f(A)=0$ 。

$A_n$  与对角阵相似  $\Leftrightarrow A$  有  $n$  个线性无关的特征向量。

若  $A_n$  的  $n$  个特征值互不相等, 则  $A$  与对角线对视。

③求  $A$  与对角矩阵  $\Lambda$  相似的方法与步骤 (求  $P$  和  $\Lambda$ ): 求出所有特征值; 求出所有特征向量;

若所得线性无关特征向量个数与矩阵阶数相同，则 **A** 可对角化（否则不能对角化），将这 **n** 个线性无关特征向量组成矩阵即为相似变换的矩阵 **P**，依次将对应特征值构成对角阵即为  $\Lambda$ 。

④通过正交变换求与实对称矩阵 **A** 相似的对角阵：方法与③相同，但要将所得特征向量正交化且单位化。

6、二次型

①二次型：**n** 元二次多项式  $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum a_{ij}x_i x_j$  称为二次型。若  $a_{ij}=0(i \neq j)$ ，则称为二次型的**标准型**。如果标准型的系数为 1、-1 或 0，则为**规范型**。

合同：**A**、**B** 为 **n** 阶矩阵，若有可逆阵 **C**，使  $B = C^T A C$ ，则 **A** 与 **B** 合同。

②二次型**标准化**：配方法和正交变换法。正交变换法步骤与上面对角化完全相同，这是由于对正交矩阵 **Q**， $Q^{-1} = Q'$ ，即正交变换既是相似变换又是合同变换。

③任意给定二次型  $f = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}x_i x_j$  ( $a_{ij} = a_{ji}$ )，总有正交变换  $x = Py$ ，使 **f** 化为标准型  $f = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \dots + \lambda_n y_n^2$ ，其中  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  是  $A = (a_{ij})$  的特征值。

④任给 **n** 元二次型  $f(x) = x^T A x$  ( $A^T = A$ )，总有可逆变换  $x = Cz$ ，使  $f(Cz)$  为规范型。

7. 二次型或对称矩阵的正定性：

(1) 惯性定理：二次型的可逆变换的标准型中的正系数个数不变。概念：正、负惯性指数……

(2) 设二次型  $f(x) = x^T A x$ ，如对于任何  $x \neq 0$ ，有  $f(x) > 0$ ，则称 **f** 为正定二次型，称对称阵 **A** 是正定的。

(3) 正定的充要条件：①**A** 的所有特征值都是正数，即标准型系数全为正，即正惯性指数为 **n**。

②**A** 的所有顺序主子式都大于 0；