5. 定积分计算和证明的若干方法

(1). 利用函数特点进行换元或分部积分;

(2). 分段函数的定积分一般要分区间计算;

(3). 利用奇偶函数以及周期函数的性质计算定积分;

(4). 利用一些特殊等式计算定积分;

(5). 利用递推公式计算定积分.

6.利用函数特点进行换元或分部积分

例7.计算定积分 $I=\int_1^{\sqrt{3}}\frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}}.$

解: 作倒代换 $x=\frac{1}{t}$, 则 $dx=-\frac{1}{t^2}$, 且 $x=1$时, $t=1$;

$x=\sqrt{3}$时, $t=\sqrt{3}/3$, 于是

$$I=\int_1^{\sqrt{3}/3}\frac{-\frac{1}{t^2}dt}{\frac{1}{t^2}\sqrt{1+\frac{1}{t^2}}}=-\int_1^{\sqrt{3}/3}\frac{tdt}{\sqrt{1+t^2}}$$

$$=-\sqrt{1+t^2}\Big|_1^{\sqrt{3}/3}=\sqrt{2}-\frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

6.利用函数特点进行换元或分部积分(续1)

例8.计算定积分 $I=\int_2^4 \frac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{x+3}+\sqrt{9-x}}dx.$

解: 令 $x+3=9-t$, 则$dx=-dt$, 且$x=2$时, $t=4$; $x=4$时, $t=2$,

于是

$$I=-\int_4^2 \frac{\sqrt{9-t}}{\sqrt{t+3}+\sqrt{9-t}}dt=\int_2^4 \frac{\sqrt{9-x}}{\sqrt{x+3}+\sqrt{9-x}}dx$$

因此,

$$I=\frac{1}{2}\left[\int_2^4 \frac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{x+3}+\sqrt{9-x}}dx+\int_2^4 \frac{\sqrt{9-x}}{\sqrt{x+3}+\sqrt{9-x}}dx\right]$$

$$=\frac{1}{2}\int_2^4 dx=1.$$

6.利用函数特点进行换元或分部积分(续2)

例9.计算定积分$I=\int_0^a \arctan\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}dx.$

解: 先换元再分部积分. 令$x=a\cos t(0\le t\le\frac{\pi}{2})$, 则

$$\arctan\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}=\arctan\sqrt{\frac{1-\cos t}{1+\cos t}}=\frac{t}{2}.$$

于是

$$I=\int_0^a \arctan\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}dx=-a\int_0^{\pi/2}\frac{t}{2}d(\cos t)$$

$$=-a\left[\frac{t}{2}\cos t\right]_0^{\pi/2}+\frac{a}{2}\int_0^{\pi/2}\cos t dt$$

$$=\frac{a}{2}[\sin t]_0^{\pi/2}=\frac{a}{2}.$$

7.分段函数的定积分一般要分区间计算

例10.计算 $I=\int_0^2 f(x-1)dx$, 其中 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1+x}, & x\geq 0.\\ \dfrac{1}{1+e^x}, & x<0.\end{cases}$

解: 先换元，再分区间积分，

$$I=\int_0^2 f(x-1)dx=\int_{-1}^1 f(t)dt=\int_{-1}^0 f(t)dt+\int_0^1 f(t)dt$$

$$=\int_{-1}^0 \frac{1}{1+e^t}dt+\int_0^1\frac{1}{1+t}dt=\int_0^1\frac{e^t}{1+e^t}dt+\ln 2$$

$$=\left[\ln(1+e^t)\right]_0^1+\ln 2$$

$$=\ln(1+e).$$

7.分段函数的定积分一般要分区间计算(续)

例11.计算 $\int_0^{\pi}\sqrt{\sin^3 x-\sin^5 x}\,dx.$

解：因为 $\sqrt{\sin^3 x-\sin^5 x}=\sqrt{\sin^3 x(1-\sin^2 x)}=\sin^{3/2}x\left|\cos x\right|$

$$=\begin{cases}\sin^{3/2}x\cos x, & x\in[0,\dfrac{\pi}{2}];\\ -\sin^{3/2}x\cos x, & x\in(\dfrac{\pi}{2},\pi],\end{cases}$$

所以根据定积分的区间可加性可得

$$\int_0^{\pi}\sqrt{\sin^3 x-\sin^5 x}\,dx=\int_0^{\pi/2}\sin^{3/2}x\cos x\,dx-\int_{\pi/2}^{\pi}\sin^{3/2}x\cos x\,dx.$$

$$=\int_0^{\pi/2}\sin^{3/2}x\,d(\sin x)-\int_{\pi/2}^{\pi}\sin^{3/2}x\,d(\sin x).$$

$$=\left[\frac{2}{5}\sin^{5/2}x\right]_0^{\pi/2}-\left[\frac{2}{5}\sin^{5/2}x\right]_{\pi/2}^{\pi}=\frac{4}{5}.$$

8.利用奇、偶函数及周期函数的性质计算定积分

例12. 设 $f(x)$为连续函数，证明：

(1) 设 $f(x)$为奇函数, 则$F(x)=\int_a^x f(t)dt$ 为偶函数；

(2) 设 $f(x)$为偶函数, 则$G(x)=\int_0^x f(t)dt$ 为奇函数；

(3) 若 $f(x)$以 l 为周期, 则当$\int_0^l f(x)dx=0$ 时, $H(x)=\int_a^x f(t)dt$

仍以 l 为周期.

证： **(1)** 由奇函数的性质可得

$$F(-x)=\int_a^{-x} f(t)dt=\int_a^x f(t)dt+\int_x^{-x} f(t)dt=\int_a^x f(t)dt=F(x).$$

因此，$F(x)$是偶函数.

8.利用奇、偶函数及周期函数的性质计算定积分(续1)

(2) 由偶函数的性质可得

$$G(-x)=\int_0^{-x} f(t)dt=\int_0^{x} f(t)dt+\int_x^{-x} f(t)dt$$

$$=\int_0^{x} f(t)dt-2\int_0^{x} f(t)dt=-G(x).$$

因此, $G(x)$是奇函数.

(3) 由周期函数的性质可得

$$H(x+l)=\int_a^{x+l} f(t)dt=\int_a^{x} f(t)dt+\int_x^{x+l} f(t)dt$$

$$=\int_a^{x} f(t)dt+\int_0^{l} f(t)dt=H(x).$$

因此, $H(x)$仍以 l 为周期.

8.利用奇、偶函数及周期函数的性质计算定积分(续2)

例13. 计算 $I=\int_{-\pi}^{5\pi}(\cos x\cos 2x\cos 3x+\sin x\sin 2x\sin 3x)dx.$

解： 因为被积函数以 2π 为周期, 积分区间长度为3个周期，所以

$$I=\int_{-\pi}^{5\pi}(\cos x\cos 2x\cos 3x+\sin x\sin 2x\sin 3x)dx.$$

由于sin$x$sin2$x$sin3x和cos$x$cos2$x$cos3x分别是$[-\pi,\pi]$上的奇、偶函数, 因此

$$I=3\int_{-\pi}^{\pi}\cos x\cos 2x\cos 3x dx=6\int_{0}^{\pi}\cos x\cos 2x\cos 3x dx$$

$$=3\int_{0}^{\pi}\cos x(\cos 5x+\cos x)dx=3\int_{0}^{\pi}(\cos x\cos 5x+\cos^2 x)dx$$

$$=\frac{3}{2}\int_{0}^{\pi}(\cos 6x+\cos 4x+\cos 2x+1)dx=\frac{3}{2}\int_{0}^{\pi}dx=\frac{3}{2}\pi.$$

9.利用一些特殊等式计算定积分

利用定积分的性质，我们容易得到下面的特殊等式

(1) 若 $f(x)$在$[0, a]$上可积，则

$$\int_0^a f(x)dx = \int_0^{a/2} f(x)dx + \int_0^{a/2} f(a-x)dx,$$

$$\int_0^a f(x)dx = \int_0^a f(a-x)dx.$$

(2) 若 $f(x)$在$[-a, a]$上可积，则

$$\int_{-a}^a f(x)dx = \int_0^a [f(x) + f(-x)]dx.$$

上述等式可以简化一些定积分的计算.

9.利用一些特殊等式计算定积分(续1)

例14. 计算 $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2 x}{\sin x+\cos x}dx.$

解： 利用(1)中第二式的结果可得

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2 x}{\sin x+\cos x}dx$$

于是

$$I=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin x+\cos x}dx=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sin x+\cos x}dx$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}{\sin^2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}dx$$

9.利用一些特殊等式计算定积分(续2)

$$=\frac{1}{2\sqrt{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin\left(x+\pi/4\right)}{\left[1-\cos\left(x+\pi/4\right)\right]\left[1+\cos\left(x+\pi/4\right)\right]}dx$$

$$=\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left|\frac{1-\cos\left(x+\pi/4\right)}{1+\cos\left(x+\pi/4\right)}\right|_0^{\pi/2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\ln(1+\sqrt{2}).$$

例15. 设 $f(x)$在[0,1]上连续，证明：

(1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)dx;$

(2) $\int_0^{\pi} xf(\sin x)dx=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)dx$, 并计算 $\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx.$

证: (1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f\left[\sin(\frac{\pi}{2}-x)\right]dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)dx.$

9.利用一些特殊等式计算定积分(续3)

(2) $\int_0^{\pi} xf(\sin x)dx = \int_0^{\pi}(\pi - x)f[\sin(\pi - x)]dx$

$$= \int_0^{\pi}(\pi - x)f(\sin x)dx = \pi\int_0^{\pi} f(\sin x)dx - \int_0^{\pi} xf(\sin x)dx,$$

故 $\int_0^{\pi} xf(\sin x)dx = \dfrac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)dx.$

因而，利用上式可得

$$\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{1+\cos^2 x}dx$$

$$= -\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\frac{d(\cos x)}{1+\cos^2 x}$$

$$= -\frac{\pi}{2}[\arctan(\cos x)]_0^{\pi} = \frac{\pi^2}{4}.$$

9.利用一些特殊等式计算定积分(续4)

例16. 计算$I=\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\frac{\sin^2 x}{1+e^{-x}}dx.$

解: $I=\int_0^{\pi/4}\left[\frac{\sin^2 x}{1+e^{-x}}+\frac{\sin^2(-x)}{1+e^{-(-x)}}\right]dx$

$$=\int_0^{\pi/4}\sin^2 x\left[\frac{e^x}{1+e^x}+\frac{1}{1+e^x}\right]dx=\int_0^{\pi/4}\sin^2 x dx$$

$$=\int_0^{\pi/4}\frac{1-\cos 2x}{2}dx=\left[\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\sin 2x\right]_0^{\pi/4}=\frac{\pi-2}{8}.$$

10.利用递推公式计算定积分

例17. 设n为正整数, 计算 $I_n=\int_0^{\pi/2}\frac{\sin(2n+1)\theta}{\sin\theta}d\theta.$

解: 注意到 $\sin(2n\pm1)\theta=\sin 2n\theta\cos\theta\pm\cos 2n\theta\sin\theta$

于是

$$\sin(2n+1)\theta-\sin(2n-1)\theta=2\cos 2n\theta\sin\theta,$$

$$\sin(2n+1)\theta=\sin(2n-1)\theta+2\cos 2n\theta\sin\theta.$$

因此,

$$I_n=\int_0^{\pi/2}\frac{\sin(2n-1)\theta}{\sin\theta}d\theta+2\int_0^{\pi/2}\cos 2n\theta d\theta$$

$$=\int_0^{\pi/2}\frac{\sin(2n-1)\theta}{\sin\theta}d\theta=I_{n-1},$$

依此类推，可得

$$I_n=I_{n-1}=I_{n-2}=\cdots=\int_0^{\pi/2}\frac{\sin(2-1)\theta}{\sin\theta}d\theta=\frac{\pi}{2}$$

10.利用递推公式计算定积分(续1)

例18. 设n为非负整数, 计算积分$I_n=\int_0^1(1-x^2)^n dx.$

解: 由分部积分法，可得

$$I_n=\left[x(1-x^2)^n\right]_0^1+2n\int_0^1 x^2(1-x^2)^{n-1}dx$$

$$=2n\int_0^1(x^2-1)(1-x^2)^{n-1}dx+2n\int_0^1(1-x^2)^{n-1}dx$$

$$=-2nI_n+2nI_{n-1}.$$

于是 $I_n=\dfrac{2n}{2n+1}I_{n-1}.$ 而 $I_0=\int_0^1 dx=1,$ 故

$$I_n=\frac{2n}{2n+1}I_{n-1}=\frac{2n}{2n+1}\cdot\frac{2(n-1)}{2n-1}I_{n-2}=\cdots.$$

$$=\frac{2n}{2n+1}\cdot\frac{2(n-1)}{2n-1}\cdots\frac{2}{3}\cdot 1=\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}.$$

10.利用递推公式计算定积分(续2)

例19. 设n为正整数, 计算积分$I_n=\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}dx.$

解: 注意到被积函数的特点，有

$$I_n+I_{n-1}=\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}dx+\int_0^1 \frac{x^{n-1}}{1+x}dx=\int_0^1 x^{n-1}\left(\frac{x}{1+x}+\frac{1}{1+x}\right)dx$$

$$=\int_0^1 x^{n-1}dx=\frac{1}{n},$$

于是

$$I_n=\frac{1}{n}-I_{n-1}=\frac{1}{n}-\left(\frac{1}{n-1}-I_{n-2}\right)=\frac{1}{n}-\frac{1}{n-1}+I_{n-2}$$

$$=\frac{1}{n}-\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n-2}-I_{n-3}=\cdots$$

$$=\frac{1}{n}-\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n-2}-\cdots+(-1)^{n-1}+(-1)^n\ln 2.$$

11.内容小结

(1) 基本积分法 $\begin{cases} \text{换元积分法} \\ \text{分部积分法} \end{cases}$

换元必换限
配元不换限
边积边代限

(2) 定积分计算和证明的若干方法

12.思考与练习

1. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^x \sin^{100}(x-t)\,\mathrm{d}t = \underline{\quad \sin^{100} x \quad}$

提示：令 $u = x - t$, 则

$$\int_0^x \sin^{100}(x-t)\,\mathrm{d}t = -\int_x^0 \sin^{100} u\,\mathrm{d}u$$

2. 设 $f''(x)$ 在 $[0,1]$ 连续, 且 $f(0)=1, f(2)=3, f'(2)=5$,

求 $\int_0^1 x f''(2x)\,\mathrm{d}x$.

解: $\int_0^1 x \underline{f''(2x)\,\mathrm{d}x} = \frac{1}{2}\int_0^1 x\,\mathrm{d}f'(2x)$ (分部积分)

$$= \frac{1}{2}\left[x f'(2x)\Big|_0^1 - \int_0^1 f'(2x)\,\mathrm{d}x \right]$$

$$= \frac{5}{2} - \frac{1}{4} f(2x)\Big|_0^1 = 2$$

13.备用题

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有连续的二阶导数，且 $f(a)=f(b)=0$，试证 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_a^b (x-a)(x-b)f''(x)\,\mathrm{d}x$.

证：右端 $=\frac{1}{2}\int_a^b (x-a)(x-b)\,\mathrm{d}f'(x)$ $\boxed{\text{分部积分积分}}$

$$=\frac{1}{2}[(x-a)(x-b)f'(x)]\Big|_a^b-\frac{1}{2}\int_a^b f'(x)(2x-a-b)\,\mathrm{d}x$$

$$=-\frac{1}{2}\int_a^b (2x-a-b)\,\mathrm{d}f(x)$$ $\boxed{\text{再次分部积分}}$

$$=-\frac{1}{2}[(2x-a-b)f(x)]\Big|_a^b+\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\text{左端}$$