中国地质大学（武汉）课程考核结课考试试卷

课程名称:《高等数学 A2》　　学年学期：2015-2016 学年第二学期

考试时长：120 分钟　　卷面总分：100 分

考试方式：闭卷考试☑　开卷考试 ☐　口试☐　其他☐

辅助工具：可用☐　工具名称：________________________　不可用☑

一、填空题(每小题 4 分，总 12 分，将答案按题号写在答题纸上，不写解题过程)

1. 微分方程$\begin{cases}(x+\sqrt{x^2+y^2})\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y=0\\ y\big|_{x=0}=1\end{cases}$的特解为_______.

2. 设数量场$u=\cos\left(x^2+y^2+z^2\right)$，则其梯度场的散度 $\operatorname{div}(\operatorname{grad} u)\big|_{(1,1,1)}=$_______.

3. 设 $f(x)=x^2,0\le x<\pi,$，而 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n\sin mx,-\infty<x<\infty$ 其中

   $b_n=\dfrac{2}{\pi}\int_0^x f(x)\sin nxdx,(n=1,2,3,\cdots)$, 则 $S(-2)$ 等于_______. (　　)

二、选择题(每小题 4 分，总 12 分. 每小题给出四种选择，有且仅有一个是正确的，将你认为正确的代号按题号写在答题纸上)

1. 二元函数 $z=f\left(x,y\right)$ 的全微分为 $dz=\left(2-x\right)dx-3ydy$.

   则函数 z 在点$\left(2,0\right)$处　　(　　)

   (*A*) 偏导存在但不一定连续　　(*B*) 取得极大值

   (*C*) 取得极小值　　(*D*) 不可能取得极值

2. 下列结论那一个是正确的　　(　　)

   (*A*) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\ln n}{n^{\frac{5}{4}}}$ 发散；　　(*B*) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n x^n}{n^2+x^2}$ 在 $x\in[0,1]$ 上一致收敛；

   (*C*) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\dfrac{n}{2n+1}\right)^{-n}$ 条件收敛　(*D*) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\ln\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)$.

3. 微分方程 $y'' + 4y = \cos 2x$ 的特解形式是 ( )

（A） $A\cos 2x$ （B） $A\cos 2x + B\sin 2x$

（C） $A\sin 2x$ （D） $x(A\cos 2x + B\sin 2x)$

三、(8 分) 设函数 $u = f(x,y,z)$ 由方程 $u^2 + z^2 + y^2 - x = 0$ 所确定，其中 $z = xy^2 - y$,

求 $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial^2}{\partial x}$.

四、(8 分) 在 xoy 平面上椭圆周 $x^2 + 4y^2 = 4$ 上求一点，使其到 xoy 平面上直线

$2x + 3y - 6 = 0$ 的最短.

五、(8 分) 求曲面 $z-e^{x}+2xy=3$ 在点 $P(1,2,0)$ 处的切平面方程与法线方程.

六、(8 分) 设有半径为 R 的非均匀球体，其球心位于坐标原点。密度为 $\rho=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，求该对 z 轴的转动惯量 I .

七、(8 分) 计算 $I=\iint_{\Sigma}\left(x^4 z+x\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z-2x^3yz\mathrm{d}z\mathrm{d}x-x^3z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 Σ 是曲面 $z=3-x^2-$

于 $2\le z\le 3$ 部分，取上侧.

八、(8 分) 计算 $\int_L \left(2x-y^2\right)dx+\left(x^2+2y\right)dy$, 其中 L 是 $y=|2-x|$ 上从 x=0 到 x=4 的一段.

九、(10 分) 设函数 $f(x)$ 具有二阶连续导数，且 $f(0)=\dfrac{5}{3}$， $f'(0)=2$，使曲线

$$\int -yf(x)\mathrm{d}x+\left[f'(x)-\frac{1}{2}\sin 2x\right]\mathrm{d}y$$ 与路径无关，求函数 $f(x)$.

十、(6 分) 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n3^n}$ 的收敛域及和函数.

十一、（6 分）将函数 $f(x)=\dfrac{1}{x^2+5x+4}$ 展开成为 $x-1$ 的幂级数，并求此级数的收敛域.

十二、（6 分）设 $f(x)$ 在点 $x=0$ 的某一邻域内具有二阶连续导数，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=0$，证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f\left(\dfrac{1}{n}\right)$ 绝对收敛.

中国地质大学（武汉）高等数学 $A2$

2016年 春 试题答案

一、填空题(每小题4分，总12分。将答案按题号写在答题纸上，不写解题过程)

1、 $y^2+2x-1=0$ 或 $x=\frac{1}{2}\left(1-y^2\right)$

2、 $-12\cos 3-6\sin 3$

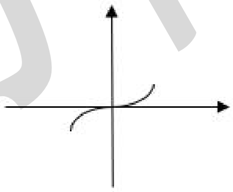
解：$gradu=-2\sin(x^2+y^2+z^2)-\cos(x^2+y^2+z^2)\cdot 4x^2-2\sin(x^2+y^2+z^2)$

$-\cos(x^2+y^2+z^2)\cdot 4y^2-2\sin(x^2+y^2+z^2)-\cos(x^2+y^2+z^2)\cdot 4z^2\Big|_{(1,1,1)}$

$=-2\sin 3-4\cos 3-2\sin 3-4\cos-2\sin 3-4\cos 3$

$=-6\sin 3-12\cos 3$

3、-4



解：$S(x)$ 可按正弦展开，$\therefore S(x)$ 是 $T=2\pi$ 的奇函数，$S(-2)=-4$

二、选择题(每小题4分，总12分。每小题给出四种选择，有且仅有一个是正确的，将你认为正确的代号按题号写在答题纸上)

1、B;

解：$\frac{\partial z}{\partial x}=2-x,\frac{\partial z}{\partial y}=-3y,\frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(2,0)}=0,\frac{\partial z}{\partial y}\Big|_{(2,0)}=0$

$A=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-1,B=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=0,C=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-3$

$AC-B^2=3>0,\text{且}A<0$

则 Z 在 $(2,0)$ 处取极大值，选 B

2、B；

解：$\sum_{n=1}^{n}\frac{(-1)^n x^n}{n^2+x^2}$为交错级数，当$x\in(0,1)$时，$\frac{x^n}{n^2+x^2}>\frac{x^{n+1}}{(n+1)^2+x^2}$，

且$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x^n}{n^2+x^2}=0$，收敛

3、D.

解：$y''+4y=\cos 2x, r^2+4=0, r^2=-4, r=\pm 2i$

$Y(x)=(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x)$

$y^*=x(A\cos 2x+B\sin 2x)$，选 D

三、(8 分)、解:在方程两端对 x 求偏导数得 $2u\frac{\partial u}{\partial x}+2z\frac{\partial z}{\partial x}-1=0$ (2 分)

而$\frac{\partial z}{\partial x}=y^2$，　代入得：$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1-2zy^2}{2u}$ (2 分)

因此：$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{2u\left(-2y^2\cdot y^2\right)-\left(1-2zy^2\right)\cdot 2\frac{\partial u}{\partial x}}{4u^2}$ (2 分)

将$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1-2zy^2}{2u}$代入化简得：$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-\frac{4u^2y^4+\left(1-2zy^2\right)^2}{4u^3}$或

$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-\frac{4y^4\left(u^2+z^2\right)-4zy^2+1}{4u^3}$ (2 分)

四、(8 分)、解:设$P(x,y)$为椭圆上任意一点，

则$P(x,y)$到平面$2x+3y-6=0$的距离为$d=\frac{|2x+3y-6|}{\sqrt{13}}$ (2 分)

求 d 的最小值点即求 d^2 的最小值。

作 $F(x,y,\lambda)=\frac{1}{13}(2x+3y-6)^2+\lambda\left(x^2+4y^2-4\right)$ （2 分）

（注：目标函数写成 $F(x,y,\lambda)=(2x+3y-6)^2+\lambda\left(x^2+4y^2-4\right)$ 也可以，

以下计算过程稍有改变，但是结果不变！）

由 *Lagrange* 乘数法，有 $\frac{\partial F}{\partial x}=0,\frac{\partial F}{\partial y}=0,\frac{\partial F}{\partial \lambda}=0$

即 $\begin{cases}\frac{4}{13}(2x+3y-6)+2\lambda x=0\\ \frac{6}{13}(2x+3y-6)+8\lambda y=0\\ x^2+4y^2-4=0\end{cases}$ （2 分）

解之得 2 个驻点坐标分别为:

$x_1=\frac{8}{5},y_1=\frac{3}{5}$ 以及 $x_2=-\frac{8}{5},y_2=-\frac{3}{5}$

于是 $d\Big|_{(x_1,y_1)}=\frac{1}{\sqrt{13}},d\Big|_{(x_2,y_2)}=\frac{11}{\sqrt{13}}$，由问题的实际意义知最矩距离是存在的。

因此 $\left(\frac{8}{5},\frac{3}{5}\right)$ 即为所求点。 （2 分）

五、（8 分）、**解**：令 $F=z-e^x+2xy-3$（2 分）

则有 $F_x'(P)=2y\big|_P=4,F_y'(P)=2x\big|_P=2,F_z'(P)=\left(1-e^x\right)\big|_P=0$. （2 分）

故切平面方程为 $4(x-1)+2(y-2)+0\cdot(z-0)=0$ 即 $2x+y-4=0$ （2 分）

法线方程 $\frac{x-1}{4}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-0}{0}$ 即 $\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-0}{0}$ （2 分）

六、（8 分）、**解**：根据转动惯量计算公式:

$$I=\iiint_{\Omega}\left(x^2+y^2\right)\sqrt{x^2+y^2+z^2}dV .$$ （2 分）

Ω 为球体 $x^2+y^2+z^2\le R$，用球坐标计算 I 可得

$$I=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}\sin^3\varphi d\varphi\int_0^R r^3dr$$ （4 分）

$$=\frac{4}{9}\pi R^6$$ （2 分）

七、（8 分）、解:作辅助面，以下曲面取下侧，

$$\Sigma_1:z=2,\quad (x,y)\in D_{xy}:x^2+y^2\le 1(2\xi)\big)$$ （2 分）

由 *Gauss* 公式可得：

$$I=\oiint_{\Sigma\ +\Sigma_1}-\iint_{\Sigma_1}\ =\iiint_{\Omega}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z-(-1)\iint_{D_0}4\left(-x^3\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$ （2 分）

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\rho\mathrm{d}\rho\int_2^{3-\rho^2}\mathrm{d}z-\int_0^{2\pi}\cos^3\theta\mathrm{d}\theta\int_0^1\rho^4\mathrm{d}\rho$$ （2 分）

$$=\frac{\pi}{2}-0$$

$$=\frac{\pi}{2}$$ （2 分）

八、（8 分）解:

方法一 ：函数 $y=|2-x|=\begin{cases}2-x,0\le x\le 2\\ x-2,2<x\le 4\end{cases}, L=L_1+L_2,$ 的方程是

$$y=2-x,0\le x\le 2,dy=-dx$$ （2 分）

L_2 的方程是 $y=x-2,2\le x\le 4,dy=dx$ （2 分）

于是 $\int_L\left(2x-y^2\right)dx+\left(x^2+2y\right)dy$

$$=\int_0^2\left[2x-(2-x)^2\right]x+\int_1^2\left[x^2+2(2-x)\right]-1\Big)dx$$

$$+\int_2^4\left[2x-(x-2)^2\right]dx+\int_2^4\left[x^2+2(x-2)\right]dx$$ （2 分）

$$=\frac{80}{3}$$ （2 分）

方法二：（利用格林公式求解）

添加辅助曲线 L_1：　$y=2, x:4\to 0$（2 分）

则 $\int_L \left(2x-y^2\right)dx+\left(x^2+2y\right)dy$

$=\oint_{L+L_1}\left(2x-y^2\right)dx+\left(x^2+2y\right)dy-\int_{L_1}\left(2x-y^2\right)dx+\left(x^2+2y\right)dy$　（2 分）

$=\iint\limits_D 2(x+y)dxdy-\int_{L_1}\left(2x-y^2\right)dx+\left(x^2+2y\right)dy$

$=\int_0^2 dy\int_{2-y}^{2+y}2(x+y)dx-\int_4^0(2x-4)$　（2 分）

$=\frac{80}{3}-0$

$=\frac{80}{3}$　（2 分）

九、（10 分）解：记 $P=-yf(x), Q=f'(x)-\frac{1}{2}\sin 2x,$　由条件可如 $P_y=Q_x$

即 $-f(x)=f''(x)-\cos 2x$，于是得到微分方程 $f''(x)+f(x)=\cos 2x$.　（2 分）

特征方程 $\lambda^2+1=0$，特征根为 $\lambda_{1,2}=\pm i$，对应的齐次方程的通解为

$f(x)=C_1\cos x+C_2\sin x$　（2 分）

由于 $0\pm 2i$ 不是特征根，故非齐次方程的特解取为

$f^*(x)=a\cos 2x+b\sin 2x,$　（2 分）

代入原方程可得 $a=-\frac{1}{3}, b=0,$ 特解为 $f^*(x)=-\frac{1}{3}\cos 2x$

因此，原方程的通解为 $f(x)=C_1\cos x+C_2\sin x-\frac{1}{3}\cos 2x$　（2 分）

将 $f(0)=\frac{5}{3}, f'(0)=2$ 代入通解，可得 $C_1=2, C_2=2,$ 故所求函数为

$f(x)=2\cos x+2\sin x-\frac{1}{3}\cos 2x$　（2 分）

十、（6 分）解：$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{n3^n}{(n+1)3^{n+1}}\right|=\frac{1}{3}$，故该级数收敛半径为 3　（1 分）

收敛区间为$(-3,3)$，又$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$收敛，

故$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n3^n}$的收敛域为$[-3,3)$ （1 分）

当$x\in[-3,3)$时，$S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{3^n}=x^{-1}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x}{3}\right)^n=x^{-1}\frac{x}{3-x}=\frac{1}{3-x}$ （2 分）

故$s(x)=\int\frac{1}{3-x}dx=-\ln|3-x|+C$ （1 分）

由$s(0)=0$有$C=\ln 3$，故$s(x)=\int\frac{1}{3-x}dx=\ln\frac{3}{3-x}$，　$x\in[-3,3)$ （1 分）

十一、（6 分）解：$f(x)=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+4}\right)=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{(x-1)+2}-\frac{1}{(x-1)+5}\right)$ （1 分）

而$\frac{1}{x+1}=\frac{1}{(x-1)+2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+\frac{x-1}{2}}=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{x-1}{2}\right)^n,\left|\frac{x-1}{2}\right|<1$. （2 分）

同理有$\frac{1}{x+4}=\frac{1}{(x-1)+5}=\frac{1}{5}\frac{1}{1-\left(-\frac{x-1}{5}\right)}=\frac{1}{5}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{x-1}{5}\right)^n,\left|\frac{x-1}{5}\right|<1$. （2 分）

于是函数$f(x)$在$x=1$处的幂级数展式为

$$f(x)=\frac{1}{3}\left[\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{x-1}{2}\right)^n-\frac{1}{5}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{x-1}{5}\right)^n\right]$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3}\frac{5^{n+1}-2^{n+1}}{10^{n+1}}(x-1)^n,|x-1|<2$$

或$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3}\left(\frac{1}{2^{n+1}}-\frac{1}{5^{n+1}}\right)(x-1)^n,|x-1|<2$ （1 分）

十二、（6 分）证明：由$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=0$知$f(0)=0,f'(0)=0$. （1 分）

$f(x)$ 在点 $x=0$ 的某邻域内的一阶 *Taylor* 展开式为:

$$f(x)=f(0)+f^{'}(0)x+\frac{1}{2!}f^{''}(\theta x)x^{2}=\frac{1}{2}f^{''}(\theta x)x^{2} \quad (0<\theta<1)$$ （2 分）

再由题设，$f^{''}(x)$ 在属于该邻域内(包含原点的一小区间 $[-\delta,\delta]$ 上连续，故由闭区间上连续函数性质，必存在 $M>0$，使 $\left|f''(x)\right|\le M$，于是 $\left|f(x)\right|\le\frac{M}{2}x^{2}$. （1 分）

令 $x=\frac{1}{n}$，当 n 充分大时， 有 $\frac{1}{n}\in[-\delta,\delta]$ $\left|f\left(\frac{1}{n}\right)\right|\le\frac{M}{2}\cdot\frac{1}{n^{2}}$ （1 分）

因为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2}}$ 收敛，所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty}f\left(\frac{1}{n}\right)$ 绝对收敛 （1 分）