1 计算曲线积分$\oint_L (x^2+y^2+2z)ds$其中 L 为$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=R^2 \\ x+y+z=0 \end{cases}$

解：将 L 用参数方程表示，直接化为定积分为，以$z=-(x+y)$代入

$x^2+y^2+z^2=R^2$，有$x^2+y^2+xy=\frac{R^2}{2}$或$(\frac{\sqrt{3}}{2}x)^2+(\frac{x}{2}+y)^2=\frac{R^2}{2}$，即

$x=\sqrt{\frac{2}{3}}R\cos t, \frac{x}{2}+y=\frac{R}{\sqrt{2}}\sin t$

L 的参数方程为

$$\begin{cases} x=\sqrt{\frac{2}{3}}R\cos t \\ y=\frac{R}{\sqrt{2}}\sin t-\frac{R}{\sqrt{6}}\cos t, 0\le t\le 2\pi \\ ds=\sqrt{(x')^2+(y')^2+(z')^2}=Rdt \\ z=-\frac{R}{\sqrt{2}}\sin t-\frac{R}{\sqrt{6}}\cos t \end{cases}$$

$$\oint_L (x^2+y^2+2z)ds=\int_0^{2\pi}\left(\sqrt{\frac{2}{3}}R\cos t^2\right)^2+\left(\frac{R}{\sqrt{2}}\sin t-\frac{R}{\sqrt{6}}\cos t\right)^2$$

$$+2\left(-\frac{R}{\sqrt{2}}\sin t-\frac{R}{\sqrt{6}}\cos t\right)Rdt=\frac{2}{3}\pi R^3+\frac{2}{3}\pi R^3+0=\frac{4}{3}\pi R^3$$

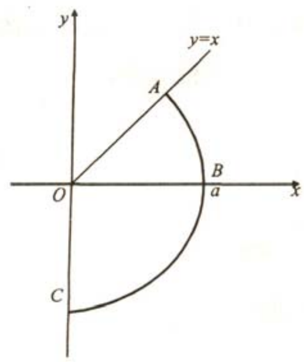
2 计算$\oint_L e^{\sqrt{x^2+y^2}}ds$，其中 L 为$r=a,\theta=-\frac{\pi}{2},\theta=\frac{\pi}{4}$($r,\theta$为极坐标）所围成的整个边界曲线。

解： L 是分段光滑曲线，$L=\overset{\frown}{OA}+\overset{\frown}{OB}+\overset{\frown}{OC}$，

又因为曲线$\overset{\frown}{OA}$的方程是$y=x,0\le x\le\frac{\sqrt{2}}{2}a$，故$ds=\sqrt{1+y'^2_x}dx=\sqrt{2}dx$，

曲线$\overset{\frown}{ABC}$的方程是$r=a,-\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{4}$，故$ds=\sqrt{r^2+r'^2_\theta}d\theta=ad\theta$

曲线$\overset{\frown}{CO}$的方程是$x=0,-a\le y\le 0$，故$ds=\sqrt{1+x_y'^2}dy=dy$。



从而$\oint_L e^{\sqrt{x^2+y^2}}ds=\oint_{\overset{\frown}{OA}+\overset{\frown}{ABC}+\overset{\frown}{OC}} e^{\sqrt{x^2+y^2}}ds$

$$=\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} e^{\sqrt{2}|x|}\sqrt{2}dx+\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} e^a d\theta+\int_{-a}^{0} e^{|y|}dy$$

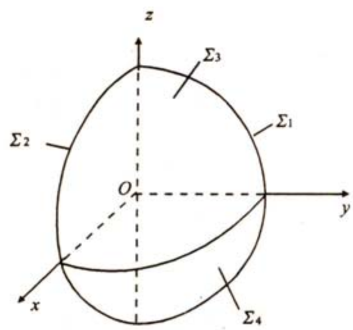
$$=e^{\sqrt{2}x}\Big|_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}a}+ae^a\theta\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}}-e^{-y}\Big|_{-a}^{0}$$

$$=2(e^a-1)+\frac{3}{4}\pi ae^a$$

3 计算$\oiint\limits_{\Sigma}(x^2+y^2+z^2)dS$，其中$\Sigma$是$x=0,y=0$及$x^2+y^2+z^2=a^2$

$(x\ge 0,y\ge 0)$所围成的闭曲面。

解法一： 如图所示。积分曲面$\Sigma=\Sigma_1+\Sigma_2+\Sigma_3+\Sigma_4$



其中　$\Sigma_1: x=0, dS=\sqrt{1+x_y'^2+y_z'^2}dydz=dydz.$

Σ_1在yOz平面上的投影D_{yz}：$\begin{cases}y^2+z^2=a^2, y\ge 0,\\ x=0.\end{cases}$

$\Sigma_2: y=0, dS=\sqrt{1+y_x'^2+y_z'^2}dxdz=dxdz.$

Σ_2在xOz平面上的投影D_{xz}：$\begin{cases}x^2+z^2=a^2, x\ge 0,\\ y=0.\end{cases}$

$\Sigma_3: z=\sqrt{a^2-x^2-y^2},$

$$dS=\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}dxdy=\sqrt{1+\frac{x^2}{z^2}+\frac{y^2}{z^2}}dxdy=\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}dxdy.$$

Σ_3在xOy平面上的投影D_{xy}：$\begin{cases}x^2+y^2=a^2, x\ge 0, y\ge 0\\ z=0\end{cases}$,

$\Sigma_4: z=-\sqrt{a^2-x^2-y^2},$

$$dS=\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}dxdy=\sqrt{1+\frac{x^2}{z^2}+\frac{y^2}{z^2}}dxdy=\frac{a}{|z|}dxdy=\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}dxdy,$$

Σ_4 在 xOy 平面上的投影 D_{xy} 与 Σ_4 的投影相同。

$$\therefore \oiint_{\Sigma}(x^2+y^2+z^2)dS=\iint_{\Sigma_1+\Sigma_2+\Sigma_3+\Sigma_4}(x^2+y^2+z^2)dS$$

$$=\iint_{D_{yz}}(y^2+z^2)dydz+\iint_{D_{xz}}(x^2+z^2)dxdz+\iint_{D_{xy}}[x^2+y^2+(a^2-x^2-y^2)]dydz\bullet$$

$$\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}dxdy+\iint_{D_{xy}}[x^2+y^2+(a^2-x^2-y^2)]dydz\bullet\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}dxdy$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^a r^2\bullet rdr+\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^a r^2\bullet rdr+2a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^a\frac{1}{\sqrt{a^2-r^2}r}dr$$

$$=2\bullet\pi\bullet\frac{a^2}{4}+\pi\frac{a^4}{4}=\frac{3}{2}\pi a^4.$$

解法二： 此例在 Σ_3、Σ_4 上的积分有简便方法，注意到曲面 Σ_3、Σ_4 上，被积函数

$x^2+y^2+z^2=a^2$，记号 $\iint\limits_{\Sigma_3+\Sigma_4}dS$ 恰为曲面 Σ_3、Σ_4 的面积，它是球面积的 $\frac{1}{4}$。

$$\therefore \oiint_{\Sigma}(x^2+y^2+z^2)dS=\iint_{\Sigma_1+\Sigma_2}(x^2+y^2+z^2)dS+\iint_{\Sigma_3+\Sigma_4}(x^2+y^2+z^2)dS$$

$$=\frac{1}{2}\pi a^4+a^2\iint_{\Sigma_3+\Sigma_4}dS$$

$$=\frac{1}{2}\pi a^4+a^2\bullet\frac{1}{4}\bullet4\pi a^2=\frac{3}{2}\pi a^4$$

4 计算 $F(t)=\iint\limits_{x^2+y^2+z^2=t^2}f(x,y,z)dS$，其中

$$f(x,y,z)=\begin{cases}x^2+y^2, & z\ge\sqrt{x^2+y^2}\\ 0, & z<\sqrt{x^2+y^2}\end{cases}$$ 。

解：锥面 $z^2=x^2+y^2$ 与上半球面 $z=\sqrt{t^2-x^2-y^2}$ 的交线为

$$\begin{cases} z=\dfrac{\sqrt{2}}{2}t \\ x^2+y^2=\dfrac{t^2}{2} \end{cases}$$ （设 $t>0$），

由 $z=\sqrt{t^2-x^2-y^2}$，得

$$dS=\sqrt{1+(\frac{\partial z}{\partial x})^2+(\frac{\partial z}{\partial y})^2}dxdy=\sqrt{1+(\frac{-x}{\sqrt{t^2-x^2-y^2}})^2+(\frac{-y}{\sqrt{t^2-x^2-y^2}})^2}dxdy$$

$$=\frac{t}{\sqrt{t^2-x^2-y^2}}dxdy \text{。}$$

设 D 为 xOy 平面上得投影区域：$x^2+y^2\le\dfrac{t^2}{2}$，则

$$F(t)=\iint\limits_{x^2+y^2+z^2=t^2}f(x,y,z)dS=\iint\limits_{D}(x^2+y^2)\frac{t}{\sqrt{t^2-x^2-y^2}}dxdy$$

$$==\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{t}{\sqrt{2}}}r^2\frac{t}{\sqrt{t^2-r^2}}rdr \qquad \text{（令 } t^2-r^2=u\text{ ）}$$

$$=2\pi\int_{t^2}^{\frac{t^2}{2}}\frac{t}{\sqrt{u}}(t^2-u)(-\frac{1}{2})du=\frac{8-5\sqrt{2}}{6}\pi t^4 \text{。}$$

5 求摆线

$$x=a(t-\sin t), y=a(1-\cos t) \quad (0\le t\le\pi)$$

的弧的重心.

解：

$$x_t'=a(1-\cos t), y_t'=a\sin t$$

$$ds=\sqrt{2a^2(1-\cos t)}dt=2a\sin\frac{t}{2}dt$$

$$m=\int\limits_L ds=\int_0^{\pi}2a\sin\frac{t}{2}dt=4a$$

$$\overline{x}=\int_L xds/m=\int_0^{\pi}a(t-\sin t)\cdot 2a\sin\frac{t}{2}dt/4a$$

$$=2a^2[\int_0^{\pi}t\sin\frac{t}{2}dt-\int_0^{\pi}\sin t\sin\frac{t}{2}dt]/4a$$

$$=\frac{16}{3}a^2/4a=\frac{4}{3}a$$

$$\overline{y}=\int_L yds/m=\int_0^{\pi}a(1-\cos t)\cdot 2a\sin\frac{t}{2}dt/4a$$

$$=\frac{4}{3}a$$

6 求密度均匀的曲面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 被曲面 $x^2+y^2=ax$ 所割下部分的重心坐标。

解：设 ρ 为曲面的密度，曲面 Σ 的重心为（x_0,y_0,z_0）

$$x_0=\frac{\iint\limits_{\Sigma}x\rho dS}{\iint\limits_{\Sigma}\rho dS}=\frac{\iint\limits_{\Sigma}xdS}{\iint\limits_{\Sigma}dS}\qquad y_0=\frac{\iint\limits_{\Sigma}y\rho dS}{\iint\limits_{\Sigma}\rho dS}=\frac{\iint\limits_{\Sigma}ydS}{\iint\limits_{\Sigma}dS}\qquad z_0=\frac{\iint\limits_{\Sigma}z\rho dS}{\iint\limits_{\Sigma}\rho dS}=\frac{\iint\limits_{\Sigma}zdS}{\iint\limits_{\Sigma}dS}$$

曲面 Σ 是锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 上被柱面 $x^2+y^2=ax$ 所割出的部分，其方程为 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ ，它在 xoy 平面的投影为圆 $x^2+y^2=ax,\ \ z=0$ ，于是

$$\iint\limits_{\Sigma}dS=\iint\limits_{x^2+y^2\le ax}\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}dxdy=\sqrt{2}\iint\limits_{x^2+y^2\le ax}dxdy=\frac{\sqrt{2}}{4}\pi a^2$$

令 $\begin{cases}x=r\cos\theta+\dfrac{a}{2}\\ y=r\sin\theta\end{cases}$ ，则由重心坐标公式可得

$$x_0=\frac{\iint\limits_{\Sigma}x\rho dS}{\iint\limits_{\Sigma}dS}=\frac{4}{\sqrt{2}\pi a^2}\sqrt{2}\iint\limits_{x^2+y^2\le ax}xdxdy=\frac{4}{\pi a^2}\iint\limits_{x^2+y^2\le ax}xdxdy$$

$$=\frac{4}{\pi a^2}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{a}{2}}(\frac{a}{2}+r\cos\theta)rdr=\frac{a}{2}$$

$$y_0=\frac{\iint\limits_{\Sigma}ydS}{\iint\limits_{\Sigma}dS}=\frac{4}{\pi a^2}\iint\limits_{x^2+y^2\le ax}ydxdy=0$$

$$z_0 = \frac{\iint\limits_{\Sigma} zdS}{\iint\limits_{\Sigma} dS} = \frac{4}{\pi a^2}\iint\limits_{x^2+y^2\le ax} zdxdy = \frac{4}{\pi a^2}\iint\limits_{x^2+y^2\le ax}\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$$

$$= \frac{4}{\pi a^2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{a\cos\theta} r^2 dr = \frac{8a}{3\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\theta d\theta = \frac{16a}{9\pi}$$

故所求重心坐标为$(\frac{a}{2},0,\frac{16a}{9\pi})$。