工科数学分析（上）复习卷（80 学时）

卷一

一、填空（每小题 3 分，共 15 分，将答案写出，不填解题过程）

1. 若 $x\to 0$ 时，$\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}f(x)}-1$ 与 $\arctan x^2$ 是同阶无穷小，$f(x)$ 与 x^a 是等价无穷小，则 $a=$________.

2. 设向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 满足 $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=2$，则 $\left[(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})\right]\cdot(\boldsymbol{c}+\boldsymbol{a})=$__________. (注：不做，此内容放在下册)

3. 曲线 $y=x^2e^{-x^2}$ 的渐近线方程是________________.

4. 定积分 $\int_{-1}^{1}(x+\sqrt{1-x^2})^2dx=$____________.

5.若 $f(x)=\int_0^{x^2}\dfrac{t-4}{t^3+2}dt$，则 $f(x)$ 的单增区间为__________，单减区间为_____________.

二、选择题（每小题 3 分，共 15 分，每小题给出四种选择，有且仅有一个是正确的，写出你认为正确的代号）.

1 .设 $\dfrac{d}{dx}f(x)=g(x),\ h(x)=x^2$，则 $\dfrac{d}{dx}f[h(x)]$ 等于［　］.

$(A)\ g(x^2)$；　$(B)\ 2xg(x)$；　$(C)\ x^2g(x^2)$；　$(D) 2xg(x^2)$.

2. 设曲线 $y=f(x)$ 与 $y=\sin x\ (或 y=\int_0^{\arctan x}e^{-t^2}dt)$ 在原点相切，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{nf(\dfrac{2}{n})}=$［　］.

(A) 1;　(B) 0;　(C) $\sqrt{2}$;　(D) 2

3. 曲线 $r=ae^{\lambda\theta},(a>0,\lambda>0)$,从 $\theta=0$ 到 $\theta=a$ 的一段弧长为 [　]

$(A)\ \int_0^a ae^{\lambda\theta}\sqrt{1+\lambda^2}d\theta$;　$(B)\ \int_0^a\sqrt{1+(a\lambda\, e^{\lambda\theta})^2}d\theta$;

$(C)\ \int_0^a\sqrt{1+(ae^{\lambda\theta})^2}d\theta$;　$(D)\ \int_0^a\sqrt{1+(a\lambda\, e^{\lambda\theta})^2}a\lambda\, e^{\lambda\theta}d\theta.$

4. 若 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续且 $f(-x)=f(x)$，在 $(-\infty,0)$ 内 $f'(x)>0$，$f''(x)<0$，则在 $(0,+\infty)$ 内有[　]

（A）$f'(x)>0, f''(x)<0$;　（B）$f'(x)>0, f''(x)>0$;

（C）$f'(x)<0, f''(x)<0$;　（D）$f'(x)<0, f''(x)>0$.

5. 设 $I_1=\int_1^{+\infty}\dfrac{1}{x(1+x)}\mathrm{d}x,\ I_2=\int_0^1\dfrac{1}{x(1+x)}\mathrm{d}x$，则[　　].

(A) I_1与I_2均收敛；　(B) I_1发散，I_2收敛；　(C) I_1与I_2均发散；　(D) I_1收敛，I_2发散.

三、计算下列各题（每小题 6 分，5 小题，共 30 分，要有解题过程）

1. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}[1+\ln(1+x)]^{\frac{2}{x}}$

2. 已知函数 $y=y(x)$ 由方程 $e^y+6xy+x^2-1=0$ 确定，求 $y''(0)$.

3. 设曲线 C 的方程为 $x=t^2+1, y=4t-t^2\ (t\ge 0)$,讨论曲线 C 的凹凸性.

4. 求不定积分 $\int\frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}dx$

5. 设 $f(x)=\begin{cases}1+x^2, & x<0\\ e^{-x}, & x\ge 0\end{cases}$， 求$\int_1^3 f(x-2)dx.$

四、（7 分）设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos x}{\sqrt{x}}, & x>0\\ x^2 g(x), & x\le 0\end{cases}$， 其中$g(x)$是有界函数， 讨论 $f(x)$在 $x=0$ 点的连续性和可导性.

五、（7 分）已知 $f(x)$的一个原函数为$\dfrac{\sin x}{x}$，求$\int x^3 f'(x)dx.$

六、（7 分）证明方程 $\ln x=\dfrac{x}{e}-2\sqrt{2}$ 在（$0,+\infty$）内有且仅有两个不同的实根.

七、（7 分）在半径为 R 的大圆中割出一个半径为 r 的同心小圆及与此小圆相切的一个弓形，问 r 为何值时，这割出的两部分的面积之和 A 最小。

或:设质量均匀分布的平面薄板由曲线$C:\begin{cases}x=5t^2+t\\ y=t^2-2t\end{cases}$与 x 轴所围成，试求其质量 m。

八、（每题 6 分共 12 分）

1. 证明 $x>0$ 时，不等式 $\ln(1+x)-\ln x>\dfrac{1}{1+x}$成立.

2. 设 $f(x)$在$[a, b]$上有二阶导数，且 $f(a)=f(b)=0,\ f'(a)f'(b)>0$， 证明

（1）存在$\xi\in(a,b)$，使得 $f(\xi)=0$；(2)存在$\eta\in(a,b)$, 使得 $f''(\eta)=0.$

答案:一. 1. 4； 2. 4； 3. $y=0$； 4. 2； 5. 在$(-2,0),(2,+\infty)$内单增,在$(-\infty,-2),(0,2)$内单减.

二. DCACD.　　三 .1. e^2； 2. -2； 3. $y''(x)=-t^{-3}<0\,(t>0)$，曲线是下凹的.

4.$\frac{1}{3}(1+x^2)^{3/2}-\sqrt{1+x^2}+c$； 5.$\frac{7}{3}-\frac{1}{e}$.

四. $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续可导，且 $f'(0)=0$. 五. $x^2\cos x-4x\sin x-6\cos x+c$.

七. $A(r)=\pi r^2+2\int_r^R\sqrt{R^2-y^2}dy$, $r=\dfrac{R}{\sqrt{\pi^2+1}}$时, A取最小值.

或 $dm=\rho\left|y\right|dx=\rho(2t-t^2)(10t+1)dt$， $m=\rho\int_0^2(2t-t^2)(10t+1)dt=\dfrac{44}{3}$

卷二

一、填空

1. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(x^3+\sin^2 x)\cos^2 x\mathrm{d}x=$_________.

2．曲线 $y=x^3+6x^2-16$ 的拐点坐标是_________

3. 设曲线 $y=f(x)=x^n$ 在点 $(1,1)$ 处的切线与 x 轴交点为 $(\xi_n,0)$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}f(\xi_n)=$_______.

4.抛物线 $y=0.4x^2$ 上的最大曲率 $K=$______.

5. $\int\sqrt{e^x-1}dx=$________________.

2. 或：已知 $|\boldsymbol{a}|=3,\ |\boldsymbol{b}|=5$，则 $\lambda=$____________时，$\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}-\lambda\boldsymbol{b}$ 互相垂直．(注：不做， 此内容放在下册)

二、选择题

1. 设在 $[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]$ 上 $f(x)>0,\ f'(x)<0,\ f''(x)>0$， $S_1=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x,\ S_2=f(b)(b-a),$

$S_3=\dfrac{f(a)+f(b)}{2}(b-a)$，则(　　)

（A） $S_1<S_2<S_3$；　（B） $S_2<S_1<S_3$；　（C） $S_3<S_1<S_2$；　（D） $S_2<S_3<S_1$.

2. 已知 $f'(1)=1$,则 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(1+x)+f(1+2\sin x)-2f(1-3\tan x)}{x}=$（　　）.

(A) 9; （B）3; （C）-3; （D）0.

3．如果 $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=-\infty$, 那么　（　　）.

（A）当 $x\to a^+$ 时， $f(x)$ 的极限存在;（B） $f(x)$ 在 $x=a$ 处右连续;

（C） $f(x)$ 在 $x=a$ 的右邻域内有界; （D）曲线 $y=f(x)$ 有渐近线 $x=a$.

4. 已知： $0<\varepsilon<\dfrac{b-a}{2}$, $f(x)$ 在 $(a-\varepsilon,b+\varepsilon)$ 上连续，则　（　　）.

（A） $f(x)$ 在 $(a-\varepsilon,b+\varepsilon)$ 上必有最值;（B） $f(x)$ 在 (a,b) 内无界;

（C） $f(x)$ 在 (a,b) 内一致连续;　（D） $f(x)$ 在 $(a+\varepsilon,b-\varepsilon)$ 上不连续.

5. 设函数 $f(x)$ 的 1 阶导数连续，且 $f'(x)>0$，令 $\Phi(x)=\int_0^x(2t-x)f(t)\mathrm{d}t$，则（　　）

（A） $\Phi(0)$ 是 $\Phi(x)$ 的极大值;　（B） $\Phi(0)$ 是 $\Phi(x)$ 的极小值;

（C）点 $(0, \Phi(0))$ 不是曲线 $y=\Phi(x)$ 的拐点;

（D）$\Phi(0)$ 不是 $\Phi(x)$ 的极值，点 $(0, \Phi(0))$ 是曲线 $y=\Phi(x)$ 的拐点.

三、**求解下列各题**

1．由拉格朗日中值定理有 $e^x-1=xe^{x\theta(x)}$，其中 $0<\theta(x)<1$．求 $\lim\limits_{x\to 0}\theta(x)$

2． $f(x)=x^2\ln(1+x)$，求 $f^{(n)}(0)\ (n\geq 3)$.

3. 求 $\int x^3e^{-x^2}dx$.　　(或 $\int_1^{+\infty}\frac{\ln x}{x^2}\mathrm{d}x$)

4．求曲线 $r=1-\cos\theta$ 上对应雨点 $\theta=\frac{\pi}{6}$ 处的切线方程.

5. 求 $\int\limits_0^1 f'(x)f''(x)dx$, 其中 $f(x)=(1+x)^{1+x}$

6. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 e^{-x}\sin nx\mathrm{d}x$

四、设 $f''(x)>0, x\in[a,b]$，证明 $f\left(\frac{a+b}{2}\right)\leq\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\leq\frac{1}{2}\left[f(a)+f(b)\right]$

五、求 $I_n=\int_0^{+\infty}x^ne^{-x}dx, n$ 为自然数.

六、求证从点 $A(5,0)$ 到抛物线 $y=\sqrt{x}$ 上点 $P(x,y)$ 的连线中最短者正是该抛物线的法线.

七、已知 $f(x)$ 在 $[0,\frac{\pi}{4}]$ 上单调可导,且满足方程 $\int_0^{f(x)}f^{-1}(t)dt=\int_0^x t\frac{\cos t-\sin t}{\sin t+\cos t}dt$,求 $f(x)$.

八、(1)设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续可微，且 $\left|f'(x)\right|<f(x)$.如果 $f(0)=1$，试证明：当 $x>0$ 时， $f(x)<e^x$.

(2) 设 $f''(x)\in C[-a,a]$，且 $f(0)=0$．（1）写出一阶 Maclaurin 公式，余项为 Lagrange 型；（2）证明：存在 $\xi\in(-a,a)$，使 $a^3f''(\xi)=3\int_{-a}^a f(x)dx$.

答案:一、1. $\frac{\pi}{8}$； 2.（-2，0）; 3. e^{-1}； 4. $K=\frac{4}{5}$； 5. $2\sqrt{e^x-1}-2\arctan\sqrt{e^x-1}+c$. $\lambda=\pm\frac{3}{5}$

二、B A D C D.

三、1. $\frac{1}{2}$;　2. $f^{(n)}(0)=(-1)^{n-1}\frac{n!}{n-2}$;　3. $-\frac{1}{2}x^2e^{-x^2}-\frac{1}{2}e^{-x^2}+C$.($\int_1^{+\infty}\frac{\ln x}{x^2}dx=1$)

4. $x-y-\frac{3\sqrt{3}}{4}+\frac{5}{4}=0$;　5. $8(1+\ln 2)^2-\frac{1}{2}$;　6. 0.

四、提示:左边不等式利用泰勒公式(在点 $\boldsymbol{x_0=\frac{a+b}{2}}$ 展开);右边不等式利用单调性.

五、$I_n=\int_0^{+\infty}x^ne^{-x}dx=-x^ne^{-x}\Big|_0^{+\infty}+n\int_0^{+\infty}x^{n-1}e^{-x}dx=nI_{n-1}=n(n-1)I_{n-2}=\cdots=n!\int_0^{+\infty}e^{-x}dx=n!$.

六、 $f(x)=|PA|^2=(x-5)^2+(\sqrt{x})^2, x=\dfrac{9}{2}$时,即$P(\dfrac{9}{2},\dfrac{3}{\sqrt{2}})$时,距离最短,再证$k_{AP}=k_{法}|_P$.

七、 $f(x)=\ln(\sin x+\cos x), x\in[0,\dfrac{\pi}{4}]$.　　八、1.提示:只需证明$x>\ln f(x),(x>0)$即可.

卷三

一、填空（每小题 3 分，共 15 分，将答案填在题中横线上，不填解题过程）

1. 曲线$y=\dfrac{x+\sin x}{2x-2\cos x}$的水平渐进线是__________.

2. 函数$y=xe^{-x}$的图形的拐点是________________.

3. 定积分 $\int_{-1}^{1}(|x|+x)e^{-|x|}dx=$__________ .

4. 函数$f(x)$在区间I上有上界的定义是______________________________ .

　或:数集A的上确界定义是____ .

5. 质点以速度$v=t\sin t^2$米/秒作直线运动,则从$t_1=\sqrt{\pi/2}$到$t_2=\sqrt{\pi}$秒内,该质点所经过的路程是

________米.

或者：设$a=\{1,0,-1\},b=\{1,-2,0\},c=\{-1,2,-1\}$，则$(a\times b)\times c=$____________. (注：不做， 此内容放在下册)

二、选择题（每小题 3 分，共 15 分，每小题给出四种选择，有且仅有一个是正确的，将你认为正确的代号填入括号内）.

1. 设函数$g(x)$可微， $f(x)=e^{1+g(x)}, f'(1)=1, g'(1)=2$则$\boldsymbol{g(1)}$等于[　]

（A）$\ln 3-1$；　(B)　$-\ln 3-1$；　(C)　$-\ln 2-1$；　(D)$\ln 2-1$.

2. 设$f(x),g(x)$>0，且可导， $f'(x)g(x)-f(x)g'(x)<0$. 则当$a<x<b$时[　]

　(A)　$f(x)g(b)>f(b)g(x)$；　(B)　$f(x)g(a)>f(a)g(x)$；

　(C)　$f(x)g(x)>f(b)g(b)$　；(D)　$f(x)g(x)>f(a)g(a)$.

3. 设$f(x)$在$x=0$的某邻域内连续，且$f(0)=0$，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{1-\cos x}=3$，则在$x=0$处$f(x)$[　]

　(A) 取得极小值；　(B) 取得极大值；　(C)　不可导；　(D) 可导且$f'(0)\neq 0$

4. 设函数$f(x)=\int_0^x\dfrac{t^2}{\sqrt{4+t^2}}dt$， $g(x)=x-\sin x$，当$x\to 0$时， $f(x)$是$g(x)$的 [　]

　(A) 高阶无穷小;　(B)低阶无穷小;　(C)同阶非等价无穷小;　(D) 等价无穷小.

5. 曲线 $y=\ln(1-x^2)$上 $0\le x\le \frac{1}{2}$一段弧长 s =[　]

（A）$\int_0^{\frac{1}{2}}\sqrt{1+\left(\frac{1}{1-x^2}\right)}\mathrm{d}x$；　（B）$\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{1+x^2}{1-x^2}\mathrm{d}x$；

（C）$\int_0^{\frac{1}{2}}\sqrt{1+\frac{-2x}{1-x^2}}\mathrm{d}x$；　（D）$\int_0^{\frac{1}{2}}\sqrt{1+\left[\ln(1-x^2)\right]}\mathrm{d}x$.

三、计算下列各题（每小题 6 分，5 小题，共 30 分，要有解题过程）

1. 求$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos(e^{x^2}-1)}{\tan^3 x\cdot\sin x}$.　（ 或 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x+e^x\right)^{\frac{1}{x}}$ 或 $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}\right)^{\tan x}$ ）

2. 求$\int\frac{dx}{1+\cos^2 x}$.

3. 求$\int_0^1\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx$.

或：设 $y=y(x)$ 由$\begin{cases}x=\int_1^{1+2\ln t}\frac{e^u}{u}\mathrm{d}u\\ 2y-ty^2+e=5\end{cases}$ 所确定（$t>1$），求$\frac{dy}{dx}$

4. 求一曲线方程，这曲线过点$(3,\ 56)$，并且它在点(x,y)处的切线斜率等于$\frac{15x\sqrt{x+1}}{2}$.

5. 设　$f(x)=\begin{cases}xe^{-x}, & x\le 0\\ \sqrt{4-x^2}, & x>0\end{cases}$ ，　求$\int_0^3 f(x-1)dx.$

四、（8 分）已知$g(x)$在$x=0$处连续且二阶可导，$g(0)=0$，$g'(0)=4$，若$f(x)=\begin{cases}\frac{g(x)}{2x}, & x\ne 0\\ 2, & x=0\end{cases}$

讨论 $f(x)$在$x=0$处的连续性与可导性.

五、（8 分）已知$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx=\frac{\pi}{2}$，求广义积分$\int_0^{+\infty}\sin^2 x\cdot\frac{1}{x^2}dx$.

六、（8 分）若$0<x<1$，证明不等式$\frac{1-x}{1+x}<e^{-2x}$.

七、（8 分）设D_1是由抛物线$y=2x^2$和直线 $x=a,x=2$及$y=0$所围成的平面区域，D_2是由抛物线 $y=2x^2$和直线$y=0$，$x=a$所围成的平面区域，其中 $0<a<2$

(1) 试求D_1绕x轴旋转而成的旋转体体积V_1，D_2绕y轴旋转而成的旋转体体积V_2.

(2) 问 a 为何值时，V_1+V_2 取得最大值？并求此最大值。

八、证明题

1. 试利用 Lagrange（拉格朗日）微分中值定理证明：若函数 $f(x)=x+\sin x$，则：

（1） 存在常数 $L>0$，使得对任意的 $x_1,x_2\in(-\infty,+\infty)$，有 $|f(x_2)-f(x_1)|\le L|x_2-x_1|$ 成立.

（2） $f(x)=x+\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致连续。

2.（8 分）设 $f(x)$ 具有三阶连续导数，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^3}=1$.

（1） 试写出 $f(x)$ 的带有 Lagrange（拉格朗日）余项的二阶 Maclaurin（麦克劳林）公式证明：若 $f(1)=0$，则在（0，1）内至少存在一点 ξ，使 $f'''(\xi)=0$.

（2） 点 $(0,0)$ 是否为曲线 $y=f(x)$ 的拐点？试说明理由.

3. 设 $f(x)\in C[0,1]$，在 (0, 1) 内可导，且满足 $f(1)=2\int_0^{\frac{1}{2}}e^{x-x^2}f(x)dx$，试证明 $\exists\xi\in(0,1)$，使 $f'(\xi)=(2\xi-1)f(\xi)$.

答案:一、1. $\underline{y=\dfrac{1}{2}}$. 2. $\underline{(2,2e^{-2})}$. 3. $\underline{2(1-2e^{-1})}$. 5. $\underline{\dfrac{1}{2}}$. 二、C AADB.

三、1. $\dfrac{1}{2}$（或 e 或 1）; 2. $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\arctan\dfrac{\tan x}{\sqrt{2}}+C$; 3. $\dfrac{\pi}{4}$ （$\dfrac{y^2(1+2\ln t)}{4et(1-ty)}$）;

4. $y=3(\sqrt{x+1})^5-5(\sqrt{x+1})^3$; 5. $\pi-1$.

四、 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续；$f(x)$ 在 $x=0$ 处可导,且 $f'(0)=\dfrac{1}{4}g''(0)$

五、 $=\dfrac{\pi}{2}$. **六、提示:**即证 $(1-x)e^{2x}-(1+x)<0$.

七、 (1) $V_1=\pi\int_a^2(2x^2)^2dx=\dfrac{4\pi}{5}(32-a^5)$; $V_2=2\pi\int_0^a x(2x^2)dx=\pi a^4$.

(2) $a=1$ 时 V_1+V_2 取得最大值为 $\dfrac{129\pi}{5}$

八、证明提示 1. (1)由 Lagrange 微分中值定理 $|f(x_2)-f(x_1)|==|f'(\xi)(x_2-x_1)|<2|x_2-x_1|$.

（2）对于任给的 $\varepsilon>0$，取 $\delta=\dfrac{\varepsilon}{2}$，则对于任意的 x_1, $x_2\in(-\infty,+\infty)$，只要 $|x_2-x_1|<\delta$，则 $|f(x_2)-f(x_1)|\le 2|x_2-x_1|<2\delta=\varepsilon$， 从而由定义 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致连续.

2. $f(x)=\dfrac{f'''(\xi)}{3!}x^3$. 将 $f(1)=0$ 代入上式，则在 $(0,1)$ 内至少存在一点 ξ，使 $f'''(\xi)=0$

（2）解法一、由 $f''(x)=f'''(0)x+o(x)$，又易知 $f'''(0)=6$，在 $x=0$ 的充分小邻域内，当 $x>0$ 时，$f''(x)>0$；当 $x<0$ 时，$f''(x)<0$，故 $(0,0)$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点.

08 级《工科数学分析》（上）试题

一、填空题（$3'\times 5=$**15 分，将答案填在答题纸上，不填解题过程**）

1. 极限 $\lim\limits_{x\to 0}(x\sin\frac{1}{x}+\frac{1}{x}\sin x)=$________.

2. 函数 $y=f[\ln(\cos x)]$,其中 f 可微,则 $dy=$____________.

3. 设 $y=\dfrac{1}{x^2-3x+2}$，则 $y^{(10)}(0)=$__________.

4. $\int\dfrac{(1-x)^2}{\sqrt{x}}dx=$______________.

5. 质点以速度 $v=t\sin t^2$ 米/秒作直线运动,则从 $t_1=\sqrt{\pi/2}$ 到 $t_2=\sqrt{\pi}$ 秒内,该质点所经过的路程是________米.

二、（$3'\times 5=$**15 分，每小题仅有一个选择是正确的，将正确的代号填在答题纸上**）

1. 曲线 $y=\dfrac{1+e^{-x^2}}{1-e^{-x^2}}$(　　).

（A）没有渐近线;　　（B）仅有水平渐近线;

（C）仅有垂直渐近线;　（D）既有水平渐近线又有垂直渐近线

2. 设 $f(x)=2^x+3^x-2$，则当 $x\to 0$ 时, $f(x)$（　　）.

(A) 与 x 是同阶非等价无穷小;　　（B）与 x 是等价无穷小;

（C）是 x 的高阶无穷小;　　（D）是 x 的低阶无穷小.

3．已知连续函数 $f(x)=-f(-x)$, 且在 $(0,+\infty)$ 内, $f'(x)>0, f''(x)>0$ 那么（　　）.

（A） $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极小值；　　（B） $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极大值；

（C） $(0,f(0))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点；　（D）以上结论都不对.

4. 设 $f(x)\in C[a,b]$，在积分中值公式 $\int_a^b f(x)dx=f(\xi)(b-a)$ 中, ξ 是(　　).

（A）区间 $[a,b]$ 内任一点；　　（B）在 $[a,b]$ 内至少存在的某一点；

（C）区间 $[a,b]$ 内唯一的一点；　（D）区间 (a,b) 的中点.

5. 设 $I_1=\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x(1+x)}$, $I_2=\int_0^1\frac{dx}{x(1+x)}$, 下列结论正确的是（　　）

（A）I_1 与 I_2 均收敛;　　（B）I_1 与 I_2 均发散;

（C）I_1 收敛，I_2 发散;　　（D）I_1 发散，I_2 收敛.

三、**求解下列各题（每小题 6 分，5 小题，共 30 分，要有解题过程）**

1．求 $\lim\limits_{x\to 0}(2\sin x+\cos x)^{\frac{1}{x}}$.

2．设曲线 C 的方程为 $x=t^2+1, y=4t-t^2\ (t\geq 0)$,讨论曲线 C 的凹凸性.

3. 设函数 $y=y(x)$ 是由方程 $x^2+y^2-ye^{xy}=2$ 所确定的隐函数, 求曲线 $y=y(x)$ 在点 $(0,2)$ 处的切线方程.

4．设 $f(x)=\begin{cases} xe^{-x}, & x\leq 0 \\ \sqrt{4-x^2}, & x>0 \end{cases}$， 求 $\int_0^3 f(x-1)\mathrm{d}x$.

5. 求微分方程 $ydx-(x-2y)dy=0$ 满足条件 $y|_{x=1}=1$ 的解.　　(**注**：不做，微分方程已放到下册)

或：设 $\frac{\cos x}{x}$ 是 $f(x)$ 的原函数，求 $\int\frac{\cos x}{x}f(x)\mathrm{d}x$.

四、(9 分)设函数 $f(x)=\begin{cases} \frac{a(1-\cos x)}{x}, & x<0 \\ 0, & x=0 \\ \frac{\int_0^{x^3}\cos t\mathrm{d}t}{x^2}, & x>0 \end{cases}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上处处可导，试确定常数 a 的值.

五、（8 分）已知 $f(x)$ 在 $[0,\frac{\pi}{4}]$ 上单调可导,且满足方程 $\int_0^{f(x)} f^{-1}(t)\mathrm{d}t=\int_0^x t\frac{\cos t-\sin t}{\sin t+\cos t}\mathrm{d}t$,求 $f(x)$.

六、（9 分）设 D_1 是由曲线 $y=\ln x$ 和直线 $x=a$ 及 $y=0$ 所围成的平面区域, D_2 是由曲线 $y=\ln x$ 和直线 $x=a$ 及 $y=1$ 所围成的平面区域，其中 $1<a<e$. D_1 及 D_2 绕 x 轴旋转而成的旋转体的体积分别记作 V_1 与 V_2.在区间 $[1,\mathrm{e}]$ 上求一点 a，使 V_1+V_2 取得最小值.

七、（8 分）设 $0<a<b$, 求证：$\ln\frac{b}{a}>\frac{2a}{a^2+b^2}(b-a)$.

八、（6 分）设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上可微, 当 $0\leq x<1$ 时, $0<f(1)<f(x)$, 且 $f'(x)\neq f(x)$. 试证: 存在唯一一点 $\xi\in(0,1)$, 使得 $f(\xi)=\int_0^{\xi} f(t)\mathrm{d}t$.