习　题　七

A　组

1．填空题

（1）向量组 $(1,1,0,-1),(1,2,3,0),(2,3,3,-1)$ 生成的向量空间的维数是________.

解　2．

（2）设全体三阶上三角形矩阵构成的线性空间为 V，则它的维数是________.

解　6．

（3）次数不超过 2 的多项式的全体构成线性空间 $P[x]_2$，其中的元素 $f(x)=x^2+x+1$ 在基 $1,x-1,(x-1)(x-2)$ 下的坐标是________.

解　$(3,4,1)^{\mathrm{T}}$.

（4）设 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ 是向量空间 V_3 的一个基，则向量 $\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ 在该基下的坐标是____.

解 $\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)^{\mathrm{T}}$.

（5）二维向量空间 $\mathbf{R}^2$ 中从基 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ 到另一个基 $\boldsymbol{\beta}_1=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\beta}_2=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ 的过渡矩阵是____.

解 $\begin{pmatrix}2&3\\-1&-2\end{pmatrix}$.

（6）三维向量空间中的线性变换 $T(x,y,z)=(x+y,x-y,z)$ 在标准基 $\boldsymbol{e}_1=(1,0,0)$，$\boldsymbol{e}_2=(0,1,0)$，$\boldsymbol{e}_3=(0,0,1)$ 下对应的矩阵是________.

解 $\begin{pmatrix}1&1&0\\1&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.

2．选择题

（1）下列说法中正确的是________.

（A）任何线性空间中一定含有零向量；

（B）由 r 个向量生成的子空间一定是 r 维的；

（C）次数为 n 的全体多项式对于多项式的加法和数乘构成线性空间；

（D）在 n 维向量空间 V 中，所有分量等于1的全体向量的集合构成 V 的子空间.

（2）下列说法中错误的是________.

（A）若向量空间 V 中任何向量都可以由向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性表示，则 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是 V 的一个基；

（B）若 n 维向量空间 V 中任何向量都可以由向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性表示，则 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是 V 的一个基；

（C）若 $n-1$ 维向量空间 V 中任何向量都可以由向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性表示，则 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 不是 V 的一个基；

（D）n 维向量空间 V 的任一个基必定含有 n 个向量.

（3） 下列3维向量的集合中，________是 $\mathbf{R}^3$ 的子空间.

（A） $\left\{(x_1,x_2,x_3)\middle| x_1\cdot x_2\cdot x_3\le 0; x_1,x_2,x_3\in\mathbf{R}\right\}$；

（B） $\left\{(x_1,x_2,x_3)\middle| {x_1}^2+{x_2}^2+{x_3}^2=1; x_1,x_2,x_3\in\mathbf{R}\right\}$；

（C） $\left\{(x_1,x_2,x_3)\middle| x_1=x_2=x_3; x_1,x_2,x_3\in\mathbf{R}\right\}$；

（D） $\left\{(x_1,x_2,x_3)\middle| x_1\ge x_2\ge x_3; x_1,x_2,x_3\in\mathbf{R}\right\}$.

（4）在 V_2 中，下列向量集合构成子空间的是________.

（A）$(0,0)$, $(0,1)$, $(1,0)$ 组成的集合；

（B）$(0,0)$ 组成的集合；

（C）所有形如 $(x,1)$ 的向量组成的集合；

（D）满足 $x+y=1$ 的所有 (x,y) 组成的集合.

（5）V_2 的下列变换________不是线性变换.

（A）$T(x,y)=(0,0)$；

（B）$T(x,y)=(ax+by,cx+dy)$，a,b,c,d 是实数；

（C）$T(x,y)=(x+y,1)$；

（D）$T(x,y)=(0,x-y)$.

解 （1）A；（2）A；（3）C；（4）B；（5）C.

3．验证：

（1）主对角线上元素之和等于0的2阶矩阵的全体 S_1；

（2）2 阶对称矩阵的全体 S_2，

对于矩阵的加法和乘数运算构成线性空间，并写出每个空间的一个基.

解 (1) 任取 $\boldsymbol{A}\in S_1, \boldsymbol{B}\in S_1$，

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a & c \\ d & -a \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} b & e \\ f & -b \end{pmatrix},$$

其中 a, b, c, d, e, f 表示任意实数，则对于任意的 $k, \lambda\in\mathbf{R}$，有线性运算的封闭性成立：

$$k\boldsymbol{A}+\lambda\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} ka+\lambda b & kc+\lambda e \\ kd+\lambda f & -ka-\lambda b \end{pmatrix}\in S_1 .$$

S_1 的一个基是 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

(2) 任取 $\boldsymbol{A}\in S_2, \boldsymbol{B}\in S_2$，对于任意的 $k, \lambda\in\mathbf{R}$，都满足运算成立：

$$(k\boldsymbol{A}+\lambda\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}=k\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}+\lambda\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}=k\boldsymbol{A}+\lambda\boldsymbol{B}\in S_2 .$$

S_2 的一个基是 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

4．验证：与向量 $(0,1,0)^{\mathrm{T}}$ 不平行的全体 3 维数组向量，对于数组向量的加法和乘数运算不构成线性空间.

证明 与向量 $(0,1,0)^{\mathrm{T}}$ 不平行的全体 3 维数组向量的集合记作 V，$\boldsymbol{\alpha}=(1,1,1)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\beta}=(1,0,1)^{\mathrm{T}}\in V$，

但 $\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}=(0,1,0)^{\mathrm{T}}\notin V$，所以 V 不是线性空间.

5．设 U 是线性空间 V 的一个子空间，证明：若 U 与 V 的维数相等，则 $U=V$.

证明 设 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 是 U 的一个基，因为 $U\subseteq V$，所以 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r\in V$. 对于任意的 $\boldsymbol{\alpha}\in V$，

必定可被 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 线性表示，否则与“U 与 V 的维数相等”矛盾. 由 $\boldsymbol{\alpha}$ 的任意性知 $V\subseteq U$，从而 $U=V$.

6. 判断 $\mathbf{R}^{2\times 2}$ 的下列子集是否构成子空间，说明理由.

(1) $W_1=\left\{\begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & b & c \end{pmatrix}\middle| a, b, c\in\mathbf{R}\right\}$；

(2) $W_1=\left\{\begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 0 & c & 0 \end{pmatrix}\middle| a+b+c=0, a, b, c\in\mathbf{R}\right\}$.

解 (1) 不构成. 由于

$$A=B=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\in W_1 \quad 但 \quad A+B=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\notin W_1,$$

即W_1对矩阵加法不封闭.

(2) 构成. 任取

$$A=\begin{pmatrix}a_1&b_1&0\\0&c_1&0\end{pmatrix}\in W_2,\quad B=\begin{pmatrix}a_2&b_2&0\\0&c_2&0\end{pmatrix}\in W_2,$$

有

$$a_1+b_1+c_1=0, a_2+b_2+c_2=0,$$

$$A+B=\begin{pmatrix}a_1+a_2&b_1+b_2&0\\0&c_1+c_2&0\end{pmatrix}.$$

于是

$$a_1+a_2+b_1+b_2+c_1+c_2=0,$$

$$A+B=\begin{pmatrix}a_1+a_2&b_1+b_2&0\\0&c_1+c_2&0\end{pmatrix}\in W_2.$$

对任意$k\in\mathbf{R}$，$kA=\begin{pmatrix}ka_1&kb_1&0\\0&kc_1&0\end{pmatrix}$，$ka_1+kb_1+kc_1=0$，所以$kA\in W_2$.

W_2对矩阵加法和数乘运算封闭，所以W_2构成子空间.

7. 判断$\mathbf{R}^{2\times2}$的下列子集是否构成子空间，说明理由.

(1) 由所有行列式为零的矩阵所组成的集合W_1；

(2) 由所有满足$A^2=A$的矩阵组成的集合W_2.

解 (1) 不构成. 取$A=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$，$A,B\in W_1$，但是

$A+B=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$, $|A+B|=1$, 因此$A+B\notin W_1$，加法不封闭.

(2) 不构成. 取单位矩阵$E=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$，$E^2=E$，$E\in W_2$，但$(2E)^2=4E\neq 2E$，所以$2E\notin W_2$，数乘不封闭.

8. 在$\mathbf{R}^3$中求向量$\alpha=(-2,7,6)^{\mathrm{T}}$在基$\alpha_1=(2,0,-1)^{\mathrm{T}},\alpha_2=(1,3,2)^{\mathrm{T}},\alpha_3=(-2,1,1)^{\mathrm{T}}$下的坐标.

解 设所求坐标为$(x_1,x_2,x_3)^{\mathrm{T}}$，则

$$\begin{pmatrix}-2\\7\\6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2x_1\\0\\-x_1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}x_2\\3x_2\\2x_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2x_3\\x_3\\x_3\end{pmatrix},$$

解得$(x_1,x_2,x_3)^{\mathrm{T}}=(-1,2,1)^{\mathrm{T}}$.

9．$\mathbf{R}^3$中两个基为

$$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,1)^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{\alpha}_2=(1,0,-1)^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{\alpha}_3=(1,0,1)^{\mathrm{T}};$$

$$\boldsymbol{\beta}_1=(1,2,1)^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{\beta}_2=(2,3,4)^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{\beta}_3=(3,4,5)^{\mathrm{T}},$$

求由基$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$到基$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$的过渡矩阵.

解　设$(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\boldsymbol{P}$，则

$$\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)^{-1}(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&0&0\\1&-1&1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&4\\1&4&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&3&4\\0&-1&-1\\-1&0&0\end{pmatrix}.$$

10．在$\mathbf{R}^3$中，取两个基

$$\boldsymbol{e}_1=(1,0,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{e}_2=(0,1,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{e}_3=(0,0,1)^{\mathrm{T}};$$

$$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(1,1,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=(1,1,1)^{\mathrm{T}},$$

（1）求由基$\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$到基$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$的过渡矩阵；

（2）已知由基$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$到基$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$的过渡矩阵为$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}$，求$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$；

（3）已知$\boldsymbol{\alpha}$在基$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$下的坐标为$(1,2,3)^{\mathrm{T}}$，求$\boldsymbol{\alpha}$在基$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$下的坐标.

解　（1）因为$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$，所以基$\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$到基$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$的过渡矩阵为

$$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

（2）由于$(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，故

$\boldsymbol{\beta}_1=(1,0,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}_2=(0,1,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}_3=(0,0,1)^{\mathrm{T}}$.

（3）设$\boldsymbol{\alpha}$在基$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$下的坐标为$(x_1,x_2,x_3)^{\mathrm{T}}$，则有$\boldsymbol{\alpha}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$，又

$$\boldsymbol{\alpha}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},$$

从而

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\-1\\3\end{pmatrix}.$$

11．在$\mathbf{R}^3$中取两个基

$$\begin{cases}\boldsymbol{e}_1=(1,0,0,0)^{\mathrm{T}},\\\boldsymbol{e}_2=(0,1,0,0)^{\mathrm{T}},\\\boldsymbol{e}_3=(0,0,1,0)^{\mathrm{T}},\\\boldsymbol{e}_4=(0,0,0,1)^{\mathrm{T}},\end{cases}\qquad\begin{cases}\boldsymbol{\alpha}_1=(2,1,-1,1)^{\mathrm{T}},\\\boldsymbol{\alpha}_2=(0,3,1,0)^{\mathrm{T}},\\\boldsymbol{\alpha}_3=(5,3,2,1)^{\mathrm{T}},\\\boldsymbol{\alpha}_4=(6,6,1,3)^{\mathrm{T}}.\end{cases}$$

（1）求前一个基到后一个基的过渡矩阵；

（2）求向量$(x_1,x_2,x_3,x_4)^{\mathrm{T}}$在后一个基下的坐标；

（3）求在两个基下有相同坐标的向量.

解 (1) 因为$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)=(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{e}_4)\begin{pmatrix}2&0&5&6\\1&3&3&6\\-1&1&2&1\\1&0&1&3\end{pmatrix}$，所以前一个基到后一个基的过渡矩阵为$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&0&5&6\\1&3&3&6\\-1&1&2&1\\1&0&1&3\end{pmatrix}$.

(2) 设向量$(x_1,x_2,x_3,x_4)^{\mathrm{T}}$在后一个基下的坐标为$(y_1,y_2,y_3,y_4)^{\mathrm{T}}$，则

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\\y_4\end{pmatrix}=\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\\y_4\end{pmatrix},$$

所以，

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \boldsymbol{A}^{-1}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 & 6 \\ 1 & 3 & 3 & 6 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \frac{1}{27}\begin{pmatrix} 12 & 9 & -27 & -33 \\ 1 & 12 & -9 & -23 \\ 9 & 0 & 0 & -18 \\ -7 & -3 & 9 & 26 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}.$$

(3) 设向量$\boldsymbol{\alpha} = (x_1, x_2, x_3, x_4)^{\mathrm{T}}$在两个基下有相同的坐标，则

$$\boldsymbol{\alpha} = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_4)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \boldsymbol{E}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\alpha} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \boldsymbol{A}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix},$$

所以 $(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{E})\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \boldsymbol{0}$，解得$\boldsymbol{\alpha} = k(1, 1, 1, -1)^{\mathrm{T}}, \quad k \in \mathbf{R}$.

12．说明xOy平面上变换$T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \boldsymbol{A}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$的几何意义，其中

(1) $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$； (2) $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$；

(3) $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$； (4) $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

解 (1) $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \boldsymbol{A}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix}$，关于$y$轴对称；

(2) $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \boldsymbol{A}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix}$，投影到$y$轴；

(3) $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \boldsymbol{A}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$，关于直线$y = x$对称；

(4) $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \boldsymbol{A}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix}$，顺时针旋转$90^\circ$.

13．n阶对称矩阵的全体V对于矩阵的线性运算构成一个$\dfrac{n(n+1)}{2}$维线性空间．给定n阶矩阵$\boldsymbol{P}$，以$\boldsymbol{A}$表示V中的任一元素，变换

$$T(\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$$

称为合同变换．证明合同变换T是V中的线性变换．

证明 设$\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in V$，$k \in \mathbf{R}$，则

$A^{\mathrm{T}}=A, B^{\mathrm{T}}=B$，所以 $(A+B)^{\mathrm{T}}=A+B$，$(kA)^{\mathrm{T}}=kA$．从而 $A+B$ 与 kA 是对称矩阵．又因为

$$T(A+B)=P^{\mathrm{T}}(A+B)P=P^{\mathrm{T}}AP+P^{\mathrm{T}}BP=T(A)+T(B),$$

$$T(kA)=P^{\mathrm{T}}(kA)P=kP^{\mathrm{T}}AP=kT(A),$$

所以 T 是 V 中的线性变换．

14．设 $\mathbf{R}^3$ 中 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是一个基，且线性变换 T 在此基下的矩阵为 $A=\begin{pmatrix}4&6&0\\-3&-5&0\\-3&-6&1\end{pmatrix}$，

（1）证明 $-\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3,-2\alpha_1+\alpha_2$ 也是 $\mathbf{R}^3$ 的一个基；

（2）求线性变换 T 在此基下的矩阵．

证明 （1）令 $\beta_1=-\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3,\beta_2=\alpha_3,\beta_3=-2\alpha_1+\alpha_2$，可解得

$$\alpha_1=\beta_1-\beta_2-\beta_3,\quad \alpha_2=2\beta_1-2\beta_2-\beta_3,\quad \alpha_3=\beta_2,$$

这说明了 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 和 β_1，β_2,β_3 可以相互线性表示，从而它们等价，所以 β_1,β_2,β_3 是 $\mathbf{R}^3$ 的一个基．

（2）设线性变换 T 在基 β_1,β_2,β_3 下的矩阵是 B，并设从基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 到基 β_1,β_2,β_3 的过渡矩阵是 P，则 $B=P^{-1}AP$，由条件知 $P=\begin{pmatrix}-1&0&-2\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$，得 $P^{-1}=\begin{pmatrix}1&2&0\\-1&-2&1\\-1&-1&0\end{pmatrix}$，从而

$$B=P^{-1}AP=\begin{pmatrix}-2&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

15．函数集合 $V_3=\{\alpha=(a_2x^2+a_1x+a_0)e^x \mid a_2,a_1,a_0\in\mathbf{R}\}$ 对于函数的线性运算构成三维线性空间．在 V_3 中取一个基 $\alpha_1=x^2e^x,\alpha_2=xe^x,\alpha_3=e^x$，求微分运算 D 在这个基下的矩阵．

解 因为

$$D(\alpha_1)=x^2e^x+2xe^x=\alpha_1+2\alpha_2+0\alpha_3,$$

$$D(\alpha_2)=e^x+xe^x=0\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3,$$

$$D(\alpha_3)=e^x=0\alpha_1+0\alpha_2+\alpha_3,$$

所以微分运算 D 在这个基下的矩阵为 $\begin{pmatrix}1&0&0\\2&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}$.

16．二阶对称矩阵的全体$V_3=\left\{A=\begin{pmatrix}x_1 & x_2\\ x_2 & x_3\end{pmatrix}\middle| x_1,x_2,x_3\in\mathbf{R}\right\}$对于矩阵的线性运算构成三维线性空间．在$V_3$中取一个基$A_1=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},A_2=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix},A_3=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$，在$V_3$中定义合同变换

$$T(A)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}A\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix},$$

求T在基A_1,A_2,A_3下的矩阵．

解　因为

$$T(A_1)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}A_1\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}=A_1+A_2+A_3,$$

$$T(A_2)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}A_2\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}=A_2+2A_3,$$

$$T(A_3)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}A_3\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=A_3,$$

$$(T(A_1),T(A_2),T(A_3))=(A_1,A_2,A_3)\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & 2 & 1\end{pmatrix},$$

所以T在基A_1,A_2,A_3下的矩阵为$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & 2 & 1\end{pmatrix}$.

17．设A是一个正定矩阵，向量$\alpha=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，$\beta=(y_1,y_2,\cdots,y_n)$．在$\mathbf{R}^n$中定义内积$[\alpha,\ \beta]$为$[\alpha,\ \beta]=\alpha A\beta^{\mathrm{T}}$．证明在这个定义之下，$\mathbf{R}^n$是一个 Euclid 空间．

证明　按定义证明满足以下四条性质即可．

（1）对称性　$[\alpha,\ \beta]=\alpha A\beta^{\mathrm{T}}=(\alpha A\beta^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=\beta A^{\mathrm{T}}\alpha^{\mathrm{T}}=\beta A\alpha^{\mathrm{T}}=[\beta,\ \alpha]$.

（2）线性加性　$[\alpha+\beta,\gamma]=(\alpha+\beta)A\gamma^{\mathrm{T}}=\alpha A\gamma^{\mathrm{T}}+\beta A\gamma^{\mathrm{T}}=[\alpha,\gamma]+[\beta,\gamma]$.

（3）线性齐性　$[k\alpha,\ \beta]=(k\alpha)A\beta^{\mathrm{T}}=k(\alpha A\beta^{\mathrm{T}})=k[\alpha,\ \beta]$.

（4）非负性　由于A是正定矩阵，所以$[\alpha,\alpha]=\alpha A\alpha^{\mathrm{T}}$是个正定二次型，从而$[\alpha,\alpha]\geq 0$，当且仅当$\alpha=0$时$[\alpha,\alpha]=0$．

18．设V是一个n维 Euclid 空间，$\alpha\neq 0$是

V 中一固定向量，证明：$V_1=\{x \mid [x,\alpha]=0, x\in V\}$是$V$ 的一个子空间.

证明 因为$\theta\in V_1$，所以V_1非空．再证V_1对两种运算封闭.

任给$x_1, x_2\in V_1$，即$[x_1,\alpha]=0,[x_2,\alpha]=0$，根据$V$ 的线性加性有$[x_1+x_2,\alpha]=[x_1,\alpha]+[x_2,\alpha]=0+0=0$，从而可知$x_1+x_2\in V_1$．另一方面，由$[kx_1,\alpha]=k[x_1,\alpha]=0$可知，$kx_1\in V_1$.

此即证得$V_1=\{x \| [x,\alpha]=0, x\in V\}$是$V$ 的一个子空间.

B 组

1．求二阶矩阵构成的线性空间$\mathbf{R}^{2\times2}$中元素$A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 2 & -3\end{pmatrix}$在基$G_1=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$，$G_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}$，

$\boldsymbol{G}_3=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{G}_4=\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}$下的坐标.

解 设$\boldsymbol{A}=k_1\boldsymbol{G}_1+k_2\boldsymbol{G}_2+k_3\boldsymbol{G}_3+k_4\boldsymbol{G}_4$，则

$$\begin{cases} k_2+k_3+k_4=0,\\ k_1+k_3+k_4=1,\\ k_1+k_2+k_4=2,\\ k_1+k_2+k_3=-3,\end{cases}$$

解得$k_1=0,k_2=-1,k_3=-2,k_4=3$，所求坐标为$(0,-1,-2,3)^{\mathrm{T}}$.

2．在二阶矩阵构成的线性空间$\mathbf{R}^{2\times2}$中，

（1）求基

$$\boldsymbol{E}_1=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\boldsymbol{E}_2=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\boldsymbol{E}_3=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\boldsymbol{E}_4=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$$

到基

$$\boldsymbol{F}_1=\begin{pmatrix}2&1\\-1&1\end{pmatrix},\boldsymbol{F}_2=\begin{pmatrix}0&3\\1&0\end{pmatrix},\boldsymbol{F}_3=\begin{pmatrix}5&3\\2&1\end{pmatrix},\boldsymbol{F}_4=\begin{pmatrix}6&6\\1&3\end{pmatrix}$$

的过渡矩阵；

（2）分别求向量$\boldsymbol{M}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{pmatrix}$在基$\boldsymbol{E}_1$，$\boldsymbol{E}_2$，$\boldsymbol{E}_3$，$\boldsymbol{E}_4$和基$\boldsymbol{F}_1,\boldsymbol{F}_2,\boldsymbol{F}_3,\boldsymbol{F}_4$下的坐标；

（3）求一个非零向量$\boldsymbol{A}$，使得$\boldsymbol{A}$在这两个基下的坐标相等.

解 （1）因为

$$\boldsymbol{F}_1=2\boldsymbol{E}_1+\boldsymbol{E}_2-\boldsymbol{E}_3+\boldsymbol{E}_4,$$

$$\boldsymbol{F}_2=0\boldsymbol{E}_1+3\boldsymbol{E}_2+\boldsymbol{E}_3+0\boldsymbol{E}_4,$$

$$\boldsymbol{F}_3=5\boldsymbol{E}_1+3\boldsymbol{E}_2+2\boldsymbol{E}_3+\boldsymbol{E}_4,$$

$$\boldsymbol{F}_4=6\boldsymbol{E}_1+6\boldsymbol{E}_2+\boldsymbol{E}_3+3\boldsymbol{E}_4,$$

即

$$(\boldsymbol{F}_1,\boldsymbol{F}_2,\boldsymbol{F}_3,\boldsymbol{F}_4)=(\boldsymbol{E}_1,\ \boldsymbol{E}_2,\ \boldsymbol{E}_3,\ \boldsymbol{E}_4)\begin{pmatrix}2&0&5&6\\1&3&3&6\\-1&1&2&1\\1&0&1&3\end{pmatrix},$$

所以，基$\boldsymbol{E}_1$，$\boldsymbol{E}_2$，$\boldsymbol{E}_3$，$\boldsymbol{E}_4$到基$\boldsymbol{F}_1,\boldsymbol{F}_2,\boldsymbol{F}_3,\boldsymbol{F}_4$的过渡矩阵为

$$
\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 & 6 \\ 1 & 3 & 3 & 6 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.
$$

（2）显然 $\boldsymbol{M}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}=a_{11}\boldsymbol{E}_1+a_{12}\boldsymbol{E}_2+a_{21}\boldsymbol{E}_3+a_{22}\boldsymbol{E}_4$，得到 $\boldsymbol{M}$ 在基 $\boldsymbol{E}_1$，$\boldsymbol{E}_2$，$\boldsymbol{E}_3$，$\boldsymbol{E}_4$ 下的坐标为 $(a_{11},a_{12},a_{21},a_{22})^{\mathrm{T}}$．设 $\boldsymbol{M}$ 在基 $\boldsymbol{F}_1,\boldsymbol{F}_2,\boldsymbol{F}_3,\boldsymbol{F}_4$ 下的坐标为 $(y_1,y_2,y_3,y_4)^{\mathrm{T}}$，则

$$
\boldsymbol{M}=(\boldsymbol{E}_1,\ \boldsymbol{E}_2,\ \boldsymbol{E}_3,\ \boldsymbol{E}_4)\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ a_{21} \\ a_{22} \end{pmatrix}=(\boldsymbol{F}_1,\boldsymbol{F}_2,\boldsymbol{F}_3,\boldsymbol{F}_4)\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}=(\boldsymbol{E}_1,\ \boldsymbol{E}_2,\ \boldsymbol{E}_3,\ \boldsymbol{E}_4)\boldsymbol{P}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix},
$$

得

$$
\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}=\boldsymbol{P}^{-1}\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ a_{21} \\ a_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{4}{9} & \frac{1}{3} & -1 & -\frac{11}{9} \\ \frac{1}{27} & \frac{4}{9} & -\frac{1}{3} & -\frac{23}{27} \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & -\frac{2}{3} \\ -\frac{7}{27} & -\frac{1}{9} & \frac{1}{3} & \frac{26}{27} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ a_{21} \\ a_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{4}{9}a_{11}+\frac{1}{3}a_{12}-a_{21}-\frac{11}{9}a_{22} \\ \frac{1}{27}a_{11}+\frac{4}{9}a_{12}-\frac{1}{3}a_{21}-\frac{23}{27}a_{22} \\ \frac{1}{3}a_{11}-\frac{2}{3}a_{22} \\ -\frac{7}{27}a_{11}-\frac{1}{9}a_{12}+\frac{1}{3}a_{21}+\frac{26}{27}a_{22} \end{pmatrix}.
$$

（3）解方程

$$
\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ a_{21} \\ a_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{4}{9}a_{11}+\frac{1}{3}a_{12}-a_{21}-\frac{11}{9}a_{22} \\ \frac{1}{27}a_{11}+\frac{4}{9}a_{12}-\frac{1}{3}a_{21}-\frac{23}{27}a_{22} \\ \frac{1}{3}a_{11}-\frac{2}{3}a_{22} \\ -\frac{7}{27}a_{11}-\frac{1}{9}a_{12}+\frac{1}{3}a_{21}+\frac{26}{27}a_{22} \end{pmatrix},
$$

得 $a_{11}=a_{12}=a_{21}=-a_{22}$，所以

$$
\boldsymbol{A}=k\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},\quad k\neq 0.
$$

3．设 T 是四维线性空间 V 的线性变换，T 在 V 的基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 下的矩阵为

$$A=\begin{pmatrix}-1&-2&-2&-2\\2&6&5&2\\0&0&-1&-2\\0&0&2&6\end{pmatrix}$$

求T在V的基$\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\beta}_2=-\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\beta}_3=-\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\beta}_4=-\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4$下的矩阵.

解 $(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)\boldsymbol{P}$，其中

$$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1&-1&0&0\\0&1&-1&0\\0&0&1&-1\\0&0&0&1\end{pmatrix},$$

所求矩阵

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1&3&0&0\\2&4&0&0\\0&0&1&3\\0&0&2&4\end{pmatrix}.$$

4. 设$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$是$\mathbf{R}^n$的一个基.

(1) 证明$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$，$\cdots$，$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+\boldsymbol{\alpha}_n$也是$\mathbf{R}^n$的一个基；

(2) 求由基$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$到基$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+\boldsymbol{\alpha}_n$的过渡矩阵；

(3) 求向量$\boldsymbol{\alpha}$在基$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$下的坐标$(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$和在基$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$，$\cdots$，$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+\boldsymbol{\alpha}_n$下的坐标$(y_1,y_2,\cdots,y_n)^{\mathrm{T}}$间的变换公式.

解 (1) 因为

$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+\boldsymbol{\alpha}_n)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\begin{pmatrix}1&1&\cdots&1\\0&1&\cdots&1\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\cdots&1\end{pmatrix},$$

所以$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1&1&\cdots&1\\0&1&\cdots&1\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\cdots&1\end{pmatrix}$，$|\boldsymbol{P}|=1\neq0$，$\boldsymbol{P}$可逆，从而向量组$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$，$\cdots$，$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+\boldsymbol{\alpha}_n$与向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$等价，而$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$是$\mathbf{R}^n$的一个基，所以$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$，$\cdots$，$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+\boldsymbol{\alpha}_n$也是$\mathbf{R}^n$的一个基.

(2) 由基$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$到基$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$，$\cdots$，$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+\boldsymbol{\alpha}_n$的过渡矩阵为

$$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1&1&\cdots&1\\0&1&\cdots&1\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\cdots&1\end{pmatrix}.$$

(3) 坐标变换公式为

$$\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}=\boldsymbol{P}^{-1}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&\cdots&1\\0&1&\cdots&1\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\cdots&1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1&0&\cdots&0&0&0\\0&1&-1&\cdots&0&0&0\\0&0&1&\ddots&0&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\ddots&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&1&-1&0\\0&0&0&\cdots&0&1&-1\\0&0&0&\cdots&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}.$$

5. 设$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$是$V$的一个基，且$(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\boldsymbol{A}$，证明$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$是$V$的一个基的充分必要条件是矩阵$\boldsymbol{A}$为可逆矩阵.

证明 由于$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$线性无关，注意到

$$k_1\boldsymbol{\beta}_1+k_2\boldsymbol{\beta}_2+\cdots+k_n\boldsymbol{\beta}_n=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n)\begin{pmatrix}k_1\\k_2\\\vdots\\k_n\end{pmatrix}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}k_1\\k_2\\\vdots\\k_n\end{pmatrix},$$

可得

$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$是$V$的一个基$\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$线性无关

$\Leftrightarrow$ $k_1\boldsymbol{\beta}_1+k_2\boldsymbol{\beta}_2+\cdots+k_n\boldsymbol{\beta}_n=\boldsymbol{0}$时，必定有$k_1=k_2=\cdots=k_n=0$

$\Leftrightarrow$ $(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}k_1\\k_2\\\vdots\\k_n\end{pmatrix}=0$时，必定有$k_1=k_2=\cdots=k_n=0$

$\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}k_1\\k_2\\\vdots\\k_n\end{pmatrix}=\boldsymbol{0}$时，必定有$k_1=k_2=\cdots=k_n=0$

$\Leftrightarrow$ 齐次线性方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$只有零解

$\Leftrightarrow$ $|\boldsymbol{A}|\neq 0$

$\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{A}$是可逆矩阵.

6. 设V_1, V_2是线性空间V的两个不同的子空间，且$V_1 \neq V$，$V_2 \neq V$，证明在V中存在向量$\boldsymbol{\alpha}$，使得$\boldsymbol{\alpha} \notin V_1, \boldsymbol{\alpha} \notin V_2$同时成立.

证明 由于$V_1 \neq V$，$V_2 \neq V$，于是在V中存在向量$\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$，使得$\boldsymbol{\alpha} \notin V_1, \boldsymbol{\beta} \notin V_2$成立.

若$\boldsymbol{\alpha} \notin V_2$，则$\boldsymbol{\alpha}$即为所求.

若$\boldsymbol{\alpha} \in V_2$，则对任意数$k$，有$k\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta} \notin V_2$. 否则，由于$\boldsymbol{\alpha} \in V_2$和$k\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta} \in V_2$，可得$(k\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta}) - k\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\beta} \in V_2$，与假设矛盾.

于是，取$k_1 \neq k_2$，则$k_1\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta} \in V_1$与$k_2\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta} \in V_1$不能同时成立，否则

$$(k_1\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta}) - (k_2\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta}) = (k_1 - k_2)\boldsymbol{\alpha} \in V_1,$$

有$\boldsymbol{\alpha} \in V_1$，矛盾.

故$k_1\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta} \notin V_1$与$k_2\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta} \notin V_1$至少有一个成立，不妨设$k_1\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta} \notin V_1$，又$k_1\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta} \notin V_2$，因此$k_1\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta}$即为所求.

7. 设$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$与$\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_n$是$n$维线性空间$V$的两个基，证明

（1）在两组基下坐标完全相同的全体向量的集合V_1是V的子空间；

（2）设基$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$到基$\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_n$的过渡矩阵是$\boldsymbol{P}$，若$R(\boldsymbol{E} - \boldsymbol{P}) = r$，则$\dim V_1 = n - r$；

（3）若V中的每个向量在这两个基下的坐标完全相同，则$\boldsymbol{\alpha}_1 = \boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\alpha}_2 = \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n = \boldsymbol{\beta}_n$.

证明 （1）设$\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in V_1$，即

$$\boldsymbol{\alpha} = x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + x_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{\alpha}_n = x_1\boldsymbol{\beta}_1 + x_2\boldsymbol{\beta}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{\beta}_n,$$

$$\boldsymbol{\beta} = y_1\boldsymbol{\alpha}_1 + y_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + y_n\boldsymbol{\alpha}_n = y_1\boldsymbol{\beta}_1 + y_2\boldsymbol{\beta}_2 + \cdots + y_n\boldsymbol{\beta}_n.$$

则

$$\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta} = (x_1 + y_1)\boldsymbol{\alpha}_1 + (x_2 + y_2)\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + (x_n + y_n)\boldsymbol{\alpha}_n = (x_1 + y_1)\boldsymbol{\beta}_1 + (x_2 + y_2)\boldsymbol{\beta}_2 + \cdots + (x_n + y_n)\boldsymbol{\beta}_n,$$

$$k\boldsymbol{\alpha} = kx_1\boldsymbol{\alpha}_1 + kx_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + kx_n\boldsymbol{\alpha}_n = kx_1\boldsymbol{\beta}_1 + kx_2\boldsymbol{\beta}_2 + \cdots + kx_n\boldsymbol{\beta}_n,$$

即$\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta}$，$k\boldsymbol{\alpha}$在这两个基下的坐标也完全相同，于是$\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta} \in V_1$，$k\boldsymbol{\alpha} \in V_1$，从而$V_1$是$V$的子空间.

（2）设$\boldsymbol{\alpha}$是V_1中任一向量，则

$$\boldsymbol{\alpha}=x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{\alpha}_n=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{\alpha}=x_1\boldsymbol{\beta}_1+x_2\boldsymbol{\beta}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{\beta}_n=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}.$$

于是，$\boldsymbol{\alpha}$ 在两个基下的坐标存在关系

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}，\quad \boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}，$$

即 $(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{P})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$. 由于 $R(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{P})=r$，故此齐次线性方程组的解向量的全体构成 $n-r$ 维空间，从而 $\boldsymbol{\alpha}$ 的全体即 V_1 的维数是 $n-r$.

（3）$\boldsymbol{\alpha}_i\ (i=1,2,\cdots,n)$ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 下的坐标为 $(0,0,\cdots,0,1,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}}$（第 i 个分量为 1，余皆为 0），即

$$\boldsymbol{\alpha}_i=0\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+0\boldsymbol{\alpha}_{i-1}+1\boldsymbol{\alpha}_i+0\boldsymbol{\alpha}_{i+1}+\cdots+0\boldsymbol{\alpha}_n，\quad i=1,2,\cdots,n.$$

而由条件，$\boldsymbol{\alpha}_i\ (i=1,2,\cdots,n)$ 在基 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$ 下的坐标也是 $(0,0,\cdots,0,1,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}}$，即

$$\boldsymbol{\alpha}_i=0\boldsymbol{\beta}_1+\cdots+0\boldsymbol{\beta}_{i-1}+1\boldsymbol{\beta}_i+0\boldsymbol{\beta}_{i+1}+\cdots+0\boldsymbol{\beta}_n，\ i=1,2,\cdots,n，$$

从而有 $\boldsymbol{\alpha}_i=\boldsymbol{\beta}_i$，$i=1,2,\cdots,n$.