工科数学分析（下）试题 1

一、填空题（第小题 3 分，总 12 分。将答案填在题中横线上，不填解题过程）

1．过点 $(-1,-4,3)$，并垂直于直线 $l:\begin{cases}2x-4y+z=1\\x+3y=5\end{cases}$ 的平面方程为 ________ .

2．L 为 $x^2+y^2=1$ 的下半圆，则 $\int_L (x^2+y^2-3x)\mathrm{d}s=$ ____ .

3．设 S 为球面 $x^2+y^2+z^2=1$，则曲面积分 $\oiint\limits_S (x^2+y^2+z^2-2z)\mathrm{d}S$ 的值为____.

4．设数量场 $u=\ln\sqrt{x^2+y^2+z^2}$,则其梯度场的散度 $\mathrm{div}(\mathrm{grad}\,u)=$ ________ .

二、**选择题**（每小题 3 分，总 12 分。每小题给出四种选择，有且仅有一个是正确的，将正确的代号填在横线上）

1．二元函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ 在 $(0,0)$ 处____.

（A）连续,偏导数存在;　　（B）不连续,偏导数存在;

（C）连续,偏导数不存在;　　（D）不连续,偏导数不存在

2．函数 $u=xyz-2yz-3$ 在点 $(1,1,1)$ 沿 $\vec{l}=2\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k}$ 的方向导数为____.

（A）$1/\sqrt{5}$;　（B）$-1/\sqrt{5}$;　（C）1/3;　（D）$-1/3$

3．若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n,\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 都收敛，则下列选项中正确的是______.

（A）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)^2$ 收敛; (B）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)$ 收敛;（C）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n(a_n+b_n)$ 收敛;（D）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$ 收敛.

4．设 $f(x)=x^2,0\le x<1$，而 $s(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n\sin n\pi x(-\infty<x<\infty)$，其中 $b_n=2\int_0^1 f(x)\sin n\pi x\mathrm{d}x$，$(n=1,2,\cdots)$，则 $s(-\frac{1}{3})=$ _____ .

（A）$-\dfrac{1}{3}$;　（B）$-\dfrac{1}{9}$;　（C）$\dfrac{1}{9}$;　（D）$\dfrac{1}{3}$

5. 微分方程 $y''-y=e^x+1$ 的一个特解应有形式（式中 a,b 为常数）_________.

（A）ae^x+b　（B）axe^x+b　（C）axe^x+bx　（D）ae^x+bx

三、解答题(本题共 5 小题，总 30 分)

1.设$u=f(r,s,t)$具有连续的偏导数，且$r=y-z, s=z-x, t=x-y$，求$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}$。

2.求曲面$z=\frac{x^2}{2}+y^2$平行于平面$2x+2y-z=0$的切平面方程。

3.计算$\int_0^1 \mathrm{d}y\int_{\sqrt{y}}^1 e^{\frac{y}{x}}\mathrm{d}x$。

#计算二重积分$\iint_D y\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中$D$由直线$x=-2, y=0, y=2$以及曲线$x=-\sqrt{2y-y^2}$所围成.

4.将函数$\frac{2x+1}{x^2+x-2}$展开成$x-2$的幂级数，并指出它的收敛区间（不讨论端点）.

5. 设$[1+f(x)]ydx+f(x)dy=0$是全微分方程，其中f具有一阶连续导数，且$f(0)=0$. 求$f(x)$的表达式.

四、（10 分）求曲面$x^2+y^2+z^2=16$与$x^2+y^2+z^2+2x+2y+2z=24$的交线的最高和最低点的坐标。

五、（8 分） 设有质量为M，半径为 R 的非均匀球体，在点$P(x,y,z)$处的密度与该点到球心的距离成正比，比例系数为常数$k>0$. 求球体对它的直径的转动惯量I，并将I用M与 R 表示。

六、（8 分）计算曲面积分$I=\iint_\Sigma yz^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z+x^2z\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(x^2+y^2)z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中$\Sigma$为曲面$z=2-x^2-y^2$，$1\le z\le 2$的上侧.

七、（8 分）计算曲线积分$I=\oint_C \frac{x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$，其中$C$为不通过原点的分段光滑平面闭曲线, 取正向.

#. 计算$\int_L y(1+2x)\mathrm{d}x+(x^2+2x+y^2)\mathrm{d}y$，其中$L$是$x^2+y^2=2x$按逆时针方向从点$A(2,0)$到点$O(0,0)$的一段弧.

八、（8 分）求$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}x^n$的收敛域与和函数.　　#求级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}x^{2n-2}$的收敛域及和函数.

九、下列两题中任意选做一题

1.（8 分）设正项数列$\{a_n\}$单调减少，且级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$发散，试证明：$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{a_n+1}\right)^n$收敛.

2. （8 分）设有方程$x^n+nx-1=0$，其中 n 为正整数， 证明此方程存在唯一正实根x_n，并证明当$\alpha>1$时，级数$\sum_{n=1}^{\infty}x_n^{\alpha}$收敛.

工科数学分析（下）试题 2

一、填空题（每小题 4 分，总 16 分。将答案填在题中横线上，不填解题过程）

1. 设曲线$L: x=t^2-1, y=t+1, z=t^3$，则在曲线L上对应于$t=1$的点处的切线方程为____________ .

＃1. 设一平面过原点及点$(6,-3,2)$，且与平面$4x-y+2z=8$垂直，则此平面方程为____.

2．交换积分顺序$\int_0^1 \mathrm{d}x \int_{x^2}^{x} f(x,y)\mathrm{d}y=$__________________ .

3．设曲线C为球面$x^2+y^2+z^2=1$和平面$x+y+z=0$的交线, 则曲线积分$\oint_C (x^2+x-y)\mathrm{d}s=$______.

4．已知$u=xy^2-yz^3$，则$\mathbf{A}=\mathbf{grad}\,u=$__________，$\mathrm{div}\,\mathbf{A}=$________，$\mathbf{rot}\,\mathbf{A}=$________________ .

二、**选择题（每小题 4 分，总 16 分。**每小题给出四种选择，有且仅有一个是正确的，将正确的代号填在括号中）

1．函数$f(x,y)$在点(x_0,y_0)处的偏导数$f_x(x_0,y_0), f_y(x_0,y_0)$存在是函数$f$在该点可微的[　　]

(A)　充分而非必要条件；　　　　（B）必要而非充分条件；

（C）充分必要条件；　　　　　　（D）既非充分也非必要条件.

2．曲线$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1, z=0$绕$x$轴旋转而成的旋转曲面方程为[　　]

(A) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2+z^2}{b^2}=1$;　(B) $\dfrac{x^2+z^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$;　(C) $z=\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}$;　(D) $z=\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-1$.

3．设α为常数，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[\dfrac{\sin n\alpha}{n^2}-\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right]$，则必有[　　]

（A）绝对收敛；　（B）发散；　（C）条件收敛；　（D）收敛性与的取值有关.

4．设$f(x)=\begin{cases}2+x, & 0\le x<2\\ 0, & 2\le x<4\end{cases}$，$S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n \sin\dfrac{n\pi x}{4}(-\infty<x<+\infty)$，其中

$b_n=\dfrac{1}{2}\int_0^4 f(x)\sin\dfrac{n\pi x}{4}dx(n=1,2,\cdots)$，则$S(2)+S(-9)$等于 [　　]

（A）-1　　　（B）1　　　（C）5　　　（D）7

5. 正项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$收敛，常数$\lambda\in\left(0,\ \dfrac{\pi}{2}\right)$，则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(n\tan\dfrac{\lambda}{n}\right)a_{2n}$ [　　]

（A）条件收敛；　（B）绝对收敛；　（C）发散；　（D）敛散性与λ有关.

三、解答题(本题共 4 小题， 总 26 分)

1.（6 分）设 $z=f(x-y,xy)$，其中 f 有连续二阶偏导数，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

＃设 $u=f(x,y,z),\ \varphi(x^2,e^y,z)=0,\ y=\sin x$，其中 f,φ 都具有一阶连续偏导数且 $\dfrac{\partial\varphi}{\partial z}\neq 0$，求 $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$.

2.（6 分）设平面 π 过原点，且与直线 $\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z-1}{1}$ 及直线 $\begin{cases}x=1\\ y=-1+t\\ z=2+t\end{cases}$ 都平行，求平面 π 的方程.

3.（6 分）求函数 $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$ 在点 $\mathrm{M}(x_0,y_0,z_0)$ 处沿方向 $\vec{l}=(-1,-1,0)$ 的方向导数 $\left.\dfrac{\partial f}{\partial \vec{l}}\right|_M$.

4.（8 分）函数 $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$，$\vec{l}=(-1,-1,0)$，若点 $\mathrm{M}(x_0,y_0,z_0)$ 在曲面 $x^2+y^2+2z^2=1$ 上，试确定点 $\mathrm{M}(x_0,y_0,z_0)$ 的坐标使 $\left.\dfrac{\partial f}{\partial \vec{l}}\right|_M$ 取得最大值.

5．求微分方程 $y''-y=e^x+1$ 的通解.

或：求满足条件 $\int_0^1 f(tx)\mathrm{d}t=nf(x)-1(n>0,n\neq 1)$ 的连续函数 $f(x)$.

四、（7 分）设立体 Ω 由锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 及半球面 $z=1+\sqrt{1-x^2-y^2}$ 围成。已知 Ω 上任一点 (x,y,z) 处的密度与该点到 xoy 平面的距离成正比（比例系数为 $K>0$），试求立体 Ω 的质量.

五、（7 分）计算曲面积分 $I=\iint\limits_{\Sigma} xz\mathrm{d}y\mathrm{d}z-2\sin x\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 Σ 是旋转抛物面 $z=x^2+y^2(0\le z\le 1)$ 的下侧.

六、（7 分）计算曲线积分 $I=\int_{\widehat{ABO}}(x^2-e^x\cos y)\mathrm{d}x+(e^x\sin y+3x)\mathrm{d}y$，其中 ABO 是从点 $A(0,2)$ 沿右半圆周 $x=\sqrt{1-(y-1)^2}$ 经过点 $B(1,1)$ 到点 $O(0,0)$ 的弧段.

七、（7 分）求函数 $f(x)=\dfrac{4x+3}{2x^2+3x+1}$ 的 Maclaurin 展开式,并给出收敛域.

八、（8 分）求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n\cdot 2^n}$ 的收敛域及和函数.

九、（6 分）下列两题中任意选做一题

1．设函数 f,g,h 在区域 D：$x^2+y^2\le 1$ 上有二阶连续偏导数。

（1）证明积分等式：$\iint\limits_D(f'_x g+f'_y h)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\oint\limits_{\partial D}fg\mathrm{d}y-fh\mathrm{d}x-\iint\limits_D(fg'_x+fh'_y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 ∂D 为 D 的正向边界.

（2）若 f 在 D 上满足 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=1$，试求 $\iint\limits_D\left(x\dfrac{\partial f}{\partial x}+y\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

2．设级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\left|u_u-u_{n-1}\right|$ 收敛，且正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 收敛，证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n v_n^2$ 收敛.

工科数学分析（下）试题 3

一．选择题（每小题 4 分，共 12 分. 每小题给出四种选择，有且仅有一个是正确的，将你认为正确的代号填在横线上）

（1）下列常微分方程中哪一个不是全微分方程？（　　）。

（A）$(x^2-y)\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y=0$　　（B）$(x\cos y+\cos x)y'-y\sin x+\sin y=0$

（C）$(x^2+y^2)\mathrm{d}x+xy\mathrm{d}y=0$　　（D）$(1+e^{2y})\mathrm{d}x+2xe^{2y}\mathrm{d}y=0$

（2）下列极限中存在极限的是________.

（A）$\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{xy}{x^2+y^2}$；（B）$\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$；（C）$\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}}$；（D）$\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$.

（3）设曲线 L 的方程为 $x=t$，$y=\dfrac{t^2}{2}$，$z=\dfrac{t^3}{3}$（$0\le t\le1$），线密度 $\rho=\sqrt{2y}$，则其质量 M 为（　）。

（A）$\int_0^1 t\sqrt{1+t^2+t^4}\mathrm{d}t$　　（B）$\int_0^1 2t^3\sqrt{1+t^2+t^4}\mathrm{d}t$

（C）$\int_0^1\sqrt{1+t^2+t^4}\mathrm{d}t$　　（D）$\int_0^1\sqrt{t}\sqrt{1+t^2+t^4}\mathrm{d}t$

（4）下列哪一个结论是正确的？（　）。

（A）级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ 绝对收敛　　（B）级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n n}{n+1}$ 收敛

（C）级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n^2}$ 条件收敛　　（D）级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1-\cos 2x}{n^2}$ 在 $(-\infty,\ +\infty)$ 上一致收敛

（5）　设 $z=f(x,y)=x^4+y^4-x^2-2xy-y^2$，由 $f_x(x,y)=0$ 和 $f_y(x,y)=0$ 求得临界点 $M_0(0,0)$，$M_1(1,1)$ 及 $M_2(-1,-1)$，则________.

（A）$f(M_0)$ 是极小值；　　（B）$f(M_0)$ 是极大值；

（C）$f(M_1)$ 与 $f(M_2)$ 都是极小值；　　（D）$f(M_1)$ 与 $f(M_2)$ 都是极大值.

二．填空题（每小题 4 分，共 12 分. 将答案填在题中横线上，不填解题过程）

（1）设 $f(x)=x^2$，（$0\le x<1$）。而 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n\sin n\pi x$，$x\in(-\infty,\ +\infty)$，

其中$b_n = 2\int_0^1 f(x)\sin n\pi x\mathrm{d}x$， $n = 1, 2, \cdots$。则$S(-\frac{1}{2})$等于______________。

（2）过点$(0, 2, 4)$且与两平面$x + 2z = 1$和$y - 3z = 2$平行的直线方程是________________ 。

（3）已知$F(x) = \int_{x^2}^{x} \frac{\sin(xy)}{y}\mathrm{d}y$，则 $F'(x) =$ _____________________ 。

（4）函数$f(x, y) = xe^y$在点$(1,1)$处的梯度为__________ ，在该点沿方向$\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j}$的方向导数为______.

（5）若级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛于A，则级数$\sum_{n=1}^{\infty}(3u_n - 2u_{n+1})$收敛于 ______ .

三.（7 分）1.设函数$z = \sin(xy) + \phi(x, \frac{x}{y})$，求$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$，其中$\phi(u, v)$有二阶偏导数。

2. 求微分方程$xy' + y = xe^x$满足$y\big|_{x=1} = 1$的特解。

3. 设$u(x, y)$的全微分$\mathrm{d}u = \left[e^x + f'(x)\right]y\mathrm{d}x + f'(x)\mathrm{d}y$，其中$f(x)$有二阶连续导数，$f(0) = 4$，

$f'(0) = 3$并且$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$，试求$f(x)$。

四.（7 分）证明曲面$xyz = a^3$上任意一点的切平面与三个坐标面所围成的四面体的体积为定值。

#证明曲面$f(x - az, y - bz) = 0$上任一点的切平面与直线$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{1}$平行(其中$a, b$是不为零的常数).

五.（7 分）设$x, y, z, t > 0$，求函数$u = x + y + z + t$在条件$xyzt = c^4$（c为正常数）下的最小值。

六.（7 分）求三重积分$\iiint\limits_{\Omega}(x^2 + y^2 + z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中$\Omega$是由曲线$\begin{cases} y^2 = 2z \\ x = 0 \end{cases}$绕$z$轴旋转一周而成的曲面

与$z = 4$所围成的立体。

七.（8 分）计算曲面积分$\iint\limits_{\Sigma} z\mathrm{d}S$，其中 Σ 为锥面$z = \sqrt{x^2 + y^2}$在柱体$x^2 + y^2 \le 2x$内的部分。

八.（8 分）设 L 是从点$A(-a, 0)$经上半椭圆$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ $(y \ge 0)$到点$B(a, 0)$的弧段，计算曲线积分

$$I = \int_L \frac{x - y}{x^2 + y^2}\mathrm{d}x + \frac{x + y}{x^2 + y^2}\mathrm{d}y \text{。.}$$

九.（8 分）计算曲面积分$\iint\limits_{\Sigma} yz\mathrm{d}z\mathrm{d}x$，其中$\Sigma$是椭球面$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$上半表面$(z \ge 0)$的上侧。

十．（8 分）判断级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!2^n\sin\frac{n\pi}{5}}{n^n}$是否收敛。若收敛，判断是条件收敛还是绝对收敛。

十一．（8 分）将函数$f(x)=\frac{1}{3+x}$展开为$(x-1)$的幂级数，并求其收敛域。

#.将函数$f(x)=2+|x|\ (-1\le x\le 1)$展开成以 2 为周期的 Fourier 级数，并求级数$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}$的和。

十二．（8 分）求幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n x^{n+1}}{n+1}$在$|x|<\frac{1}{2}$内的和函数。

工科数学分析（下）参考答案

试题 1

一、1. $\underline{3x-y-10z+29=0}$ ； 2. $\underline{\pi}$ ；3. $\underline{4\pi}$；4. $\underline{\frac{1}{x^2+y^2+z^2}}$.

二、B D D B B

三、1. $\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}=0$； 2. $2x+2y-z-3=0$； 3. $I=\frac{1}{2}$；# $4-\frac{\pi}{2}$.

4. $\frac{2x+1}{x^2+x-2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(1+\frac{1}{4^{n+1}})(x-2)^n$，$1<x<3$. 5. e^x-1

四、$(0,0,4)$与$(\frac{8}{3},\frac{8}{3},-\frac{4}{3})$ 五、$I=\frac{4}{9}k\pi R^6$. $M=k\pi R^4$，$I=\frac{4}{9}MR^2$. 六、$\frac{2\pi}{3}$ ；

七、$I=0$(提示：原点在C外及C内两种情况计算)；#. $\frac{\pi}{2}$(提示：添加直线段 O A 的使之为逆时针方向的封闭曲线C，$\int_L dy=\oint_C-\int_{\overline{OA}}$ ，其中$\oint_C$ 用格林公式计算)

八、收敛域为$(-1,1)$；$S(x)=\begin{cases}\frac{1}{1-x}+\frac{1}{x}\ln(1-x), & x\neq 0\text{且}|x|<1,\\ 0\,, & x=0.\end{cases}$

#.收敛域为$(-\sqrt{2},\sqrt{2})$；$S(x)=\left(\frac{x}{2-x^2}\right)'=\frac{2+x^2}{(2-x^2)^2}$， $-\sqrt{2}<x<\sqrt{2}$.

九、1. 提示：由数列$\{a_n\}$单调减少且$a_n\ge 0$，得$\lim_{n\to\infty}a_n$存在. 记$a=\lim_{n\to\infty}a_n$，则$a_n\ge a\ge 0$，

又已知$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$发散，知$a>0$.因此$\frac{1}{a+1}<1$,再由根值判别法知$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{a_n+1}\right)^n$收敛.

2. 提示：利用介值定理证明存在性，利用单调性证明惟一性。而正项级数的敛散性可用比较法判定。

试题 2

一、#1. $\underline{2x+2y-3z=0}$；1. $\underline{\frac{x}{2}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-1}{3}}$ ；2. $\underline{\int_0^1 \mathrm{d}y\int_y^{\sqrt{y}} f(x,y)\mathrm{d}x}$ ；3. $\underline{\frac{2\pi}{3}}$；

4. $\underline{\{y^2,2xy-z^3,-3yz^2\}}$，$\underline{2x-6yz}$，$\underline{\{0,0,0\}}$　　二、B A B A B

三、1. $\frac{\partial z}{\partial x}=f_1'+f_2'y$；$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-f_{11}''+(x-y)f_{12}''+xyf_{22}''+f_2'$.

$\# \frac{du}{dx}=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\cos x-\frac{\partial f}{\partial z}\frac{1}{\varphi_3'}(2x\varphi_1'+e^{\sin x}\cos x\cdot\varphi_2')$

2. $x-y+z=0$； 3. $\left.\frac{\partial f}{\partial \vec{l}}\right|_M=-\sqrt{2}(x_0+y_0)$； 4. $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2},0\right)$；5 $c_1e^x+c_2e^{-x}+\frac{1}{2}xe^x-1$，

$\# cx^{\frac{1-n}{n}}+\frac{1}{n-1}$

四、$m=K\iiint\limits_{\Omega} z\mathrm{d}V=\frac{7}{6}K\pi$ ；　五、提示：加$\sum_1 : z=1$取上侧$I=\oiint\limits_{\Sigma+\Sigma_1}-\iint\limits_{\Sigma_1}=\frac{\pi}{3}$

六、加线段$\overline{OA}: x=0(0\le y\le 2)$，$I=\oint_{\widehat{ABO}+\overline{OA}}-\int_{\overline{OA}}=-\frac{3}{2}\pi+\cos 2-1$

七、$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(1+2^{n+1})x^n$，$-\frac{1}{2}<x<\frac{1}{2}$. 八、收敛域为$[-2,2)$；$S(x)=\ln\frac{2}{2-x}$，$x\in[-2,2)$

九、1．提示：（1）用格林公式；（2）用（1）的结果

2．提示：由 $\sum_{n=2}^{\infty}|u_n-u_{n-1}|$ 收敛推出 $\lim_{n\to\infty}u_n$ 存在，从而 $|u_n|\le M$；又因正项级数 $\sum v_n$收敛$\Rightarrow 0\le v_n^2\le v_n$，从而级数 $\sum v_n{}^2$ 收敛，故 $|u_nv_n{}^2|\le Mv_n^2$，所以 $\sum u_nv_n{}^2$ 收敛.

试卷 3

一．C D A D C　　二．(1) $\underline{-\frac{1}{4}}$；（2）$\underline{\frac{x}{-2}=\frac{y-2}{3}=\frac{z-4}{1}}$；（3）$\underline{F'(x)=\frac{2}{x}\sin x^2-\frac{3}{x}\sin x^3}$；

(4) $\underline{e\boldsymbol{i}+e\boldsymbol{j}}$，$\underline{0}$ ；(5) $\underline{A+2u_1}$.

三．1. $\frac{\partial z}{\partial x}=y\cos(xy)+\phi_1'+\phi_2'\frac{1}{y}$ ，$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\cos(xy)-xy\sin(xy)-\frac{1}{y^2}\phi_2'-\frac{x}{y^2}\phi_{12}''-\frac{x}{y^3}\phi_{22}''$；

2. $y=e^x-\frac{e^x}{x}+\frac{1}{x}$； 3. $f(x)=2(1+e^x)+xe^x$

四．**提示**：记 $F(x,y,z)=xyz-a^3=0$，法向量 $\vec{n}=\{F_x,F_y,F_z\}_{p_0}=\{y_0z_0,x_0z_0,x_0y_0\}$

过点 p_0 的切平面方程为 $\frac{x}{x_0}+\frac{y}{y_0}+\frac{z}{z_0}=3$,从而四面体的体积 $V=\frac{1}{6}\left|27x_0y_0z\right|_0=\frac{9}{2}|a|^3$.

＃**提示**：求出曲面上任意一点处的法向量为 $\vec{n}=\{f_1',f_2',-af_1'-bf_2'\}$，直线的方向向量 $\vec{l}=\{a,b,1\}$，则 $\vec{n}\cdot\vec{l}=0$，所以切平面与直线平行.

五． $u_{\min}=4c$ (提示:利用拉格朗日乘数法,构造 $L=x+y+z+t+\lambda(xyzt-c^4)$， $x,y,z,t>0$，令 $L_x=L_y=L_z=L_t=0$，解得所求)

六．原式 $=\int_0^4 \mathrm{d}z\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{2z}}(r^2+z)r\mathrm{d}r=4\pi\int_0^4 z^2dz=\frac{256}{3}\pi$

七． $\iint\limits_{\Sigma} z\mathrm{d}S=\iint\limits_{D_{xy}}\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\sqrt{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2\cos\theta}r^2dr=\frac{32}{9}\sqrt{2}$.

其中 D_{xy}： $x^2+y^2\le 2x$ ， $\mathrm{d}S=\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\sqrt{2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

八．因为 $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{y^2-x^2-2xy}{(x^2+y^2)^2}=\frac{\partial P}{\partial x},x^2+y^2\ne 0$，故积分与路径无关.取积分路径 C 是从 A 经上半圆 $x^2+y^2=a^2(y\ge 0)$ 到 B 的弧段，则曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases}x=a\cos\theta\\ y=a\sin\theta\end{cases}\quad 0\le\theta\le 2\pi$

原式

$$=\int_C P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\frac{1}{a^2}\int_C(x-y)\mathrm{d}x+(x+y)\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{a^2}\int_0^{\pi}a(\cos\theta-\sin\theta)(-a\sin\theta)d\theta+a(\cos\theta+\sin\theta)(a\cos\theta)d\theta$$

$$=-\pi$$

九．加平面 Σ_1： $z=0$ 的下侧，用高斯公式，

原式 $=(\oiint\limits_{\Sigma+\Sigma_1}-\iint\limits_{\Sigma_1})yzdzdx=\iiint\limits_{\Omega}zdxdydz-0=\int_0^c zdz\iint\limits_D dxdy=\int_0^c ab\pi(1-\frac{z^2}{c^2})zdz=\frac{\pi}{4}abc^2$

十．由 $\left|\frac{n!2^n\sin\frac{n\pi}{5}}{n^n}\right|\le\frac{n!2^n}{n^n}\triangleq u_n$，又 $\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{2}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}\to\frac{2}{e}<1$ ，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，故原级数绝对收敛。

十一． $f(x)=\frac{1}{3+x}=\frac{1}{4+(x-1)}=\frac{1}{4}\frac{1}{1+\frac{x-1}{4}}=\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(-\frac{x-1}{4})^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4^{n+1}}(x-1)^n$；

因为 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\frac{1}{4}$，故收敛半径 $R=4$，$x=5$ 处发散，$x=-3$ 处发散。所以收敛域是：$(-3,5)$。

＃． $f(x)=\frac{5}{2}-\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(2n+1)\pi x}{(2n+1)^2},\quad x\in(-\infty,\infty)$，$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$.

十二．记和函数 $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n x^{n+1}}{n+1}$，$|x|<\frac{1}{2}$ 时，$S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}2^n x^n=\frac{2x}{1-2x}$，积分得

$$S(x)=\int_0^x\frac{2x}{1-2x}dx=-x-\frac{1}{2}\ln(1-2x)$$