一 第二型曲线积分

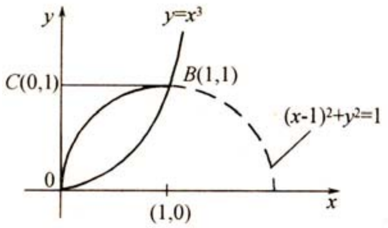
1 计算$\int_{(0,0)}^{(1,1)}(y^2+2xy)dx+(x^2+2xy)dy$，

（1）沿折线从$O(0,0)$到$C(0,1)$再到$B(1,1)$

（2）沿曲线$y=x^3$从$O(0,0)$到$B(1,1)$

（3）沿曲线$(x-1)^2+y^2=1$从$O(0,0)$到$B(1,1)$

解 积分路径如下所示



（1）直线段 OC 的方程为$x=0 \quad (0\le y\le 1)$，从而$dx=0$；直线段 CB 的方程为$y=1$ $(0\le x\le 1)$，从而$dy=0$。于是

$$\int_{(0,0)}^{(1,1)}(y^2+2xy)dx+(x^2+2xy)dy=\int_{OC}(x^2+2xy)dy+\int_{CB}(y^2+2xy)dx$$

$$=\int_0^1 0dy+\int_0^1(1+2x)dx=1+1=2$$

（2） 利用曲线弧的方程$y=x^2 \quad (0\le x\le 1)$将曲线积分化为关于变量 x 的定积分

$$\int_{(0,0)}^{(1,1)}(y^2+2xy)dx+(x^2+2xy)dy=\int_0^1(x^6+2x^4)dx+\int_0^1(x^2+2x^4)3x^2dx=2$$

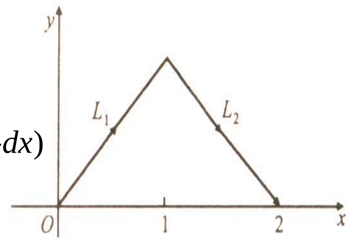
（3）与（2）类似，利用曲线弧的方程$(x-1)^2+y^2=1 \quad (0\le x\le 1)$将曲线积分化为关于变量 x 的定积分 $\int_{(0,0)}^{(1,1)}(y^2+2xy)dx+(x^2+2xy)dy=$

$$\int_0^1(2x-x^2+2x\sqrt{2x-x^2})dx+\int_0^1(x^2+2x\sqrt{2x-x^2})\frac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}}dx=2$$

2 计算$\int_L(x^2+y^2)dx+(x^2-y^2)dy$，其中 L 是$y=1-|1-x|$上从$x=0$到$x=2$的一段。

解 函数 $y=1-|1-x|=\begin{cases} x, x\le 1 \\ 2-x, x>1 \end{cases}$，$L=L_1+L_2$，$L_1$ 的方程是 $y=x, 0\le x\le 1, dy=dx$

L_2 的方程是 $y=2-x, 1\le x\le 2, dy=-dx$，于是



$$\int_L (x^2+y^2)dx+(x^2-y^2)dy$$
$$=\int_0^1 2x^2dx+0+\int_1^2[x^2+(2-x)^2]dx+\int_1^2[x^2-(2-x)^2](-dx)$$
$$=\frac{2}{3}+\int_1^2(2x^2-8x+8)dx=\frac{2}{3}+\frac{2}{3}=\frac{4}{3}$$

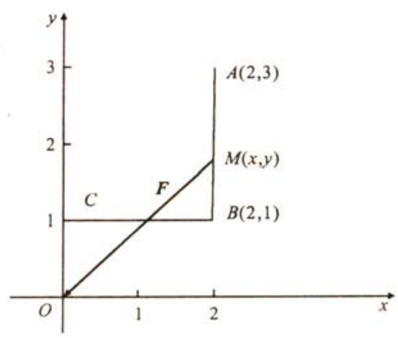
3 在 xOy 平面内，变量 $\overrightarrow{F}$ 在点 M(x,y)处的大小等于点 M 到原点 O(0,0)的距离，方向指向原点，求变力 $\overrightarrow{F}$ 从点 A(2,3)沿折线点 B(2,1)到点 C(0,1)所作的功。

解： 据题意知，变力 $|\overrightarrow{F}|=\sqrt{x^2+y^2}$，其中 x 轴方向上的投影 P(x,y)＝－x，在 y 轴方向上的投影 Q(x,y)＝－y，即 $\overrightarrow{F}=-x\vec{i}--y\vec{j}$，由对坐标的曲线积分的物理意义可知，

$W=\int_{ABC}-xdx-ydy$，又因为直线段 AB 的方程是 x=2,起，始点对应参数 y=2 和

$y=1, dx=0$，直线段 BC 的方程是 y=1，起，始点对应参数 x=2 和 x=0，dy=0。所以

$$W=\int_{AB}-xdx-ydy+\int_{BC}-xdx-ydy=\int_1^3(-y)dy+\int_2^0(-x)dx=6$$



二 格林公式以及积分与路径无关

4：计算$\int_L (e^x \sin y - my)dx + (e^x \cos y - mx)dy$，

其中 L 是摆线 $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t)$ 上由点 $(0,0)$ 到点 $(\pi a, 2a)$ 的一段弧。

解： 此被积函数中有 $\sin y, \cos y$ 等因子，若将 $y = a(1 - \cos t)$ 代入，积分较困难，这时可补上若干条线段，使非封闭曲线首未连接，用格林公式，再减去沿这些辅助线段上的积分值。

$$\int_L (e^x \sin y - my)dx + (e^x \cos y - mx)dy =$$

$$\oint_{L+AB+BO} (e^x \sin y - my)dx + (e^x \cos y - mx)dy - \oint_{AB+BO} (e^x \sin y - my)dx + (e^x \cos y - mx)dy$$

因为 $P(x,y) = e^x \sin y - m, Q(x,y) = e^x \cos y - mx$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = e^x \cos y - m, \frac{\partial P}{\partial y} = e^x \cos y - m$$

$L + AB + BO$ 是区域 D 的负向边界。

又因为线段 AB 的方程是 $x = \pi a$ 和 $y = 0, dx = 0$，线段 BO 的方程是 y＝0，起，终点对应参数 $x = \pi a, 和 x = 0, dy = 0$。

$$所以原式 = -\iint_D (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})dxdy - \int_{AB} (e^x \sin y - my)dx + (e^x \cos y - mx)dy -$$

$$\int_{BO} (e^x \sin y - my)dx + (e^x \cos y - mx)dy = (-e^{\pi a} \sin y + m\pi ay)|_{2a}^{0} = e^{\pi a} \sin 2a - 2m\pi a^2$$

5 设 $\int_L xy^2 dx + y\varphi(x)dy$ 与积分路径无关，其中 $\varphi(x) \in C^1$，且 $\varphi(0) = 0$，计算 $\int_{(0,0)}^{(1,1)} xy^2 dx + y\varphi(x)dy$ 的值。

解法 1： 先确定 $\varphi(x)$，然后计算积分值。

由积分路径无关，有 $\frac{\partial (xy^2)}{\partial y} = \frac{\partial (x\varphi(x))}{\partial x}$，即 $2xy = y\varphi'(x)$，于是有 $\varphi(x) = \int 2xdx = x^2 + C$。再由 $\varphi(0) = 0$ 可知 C=0，故 $\varphi(x) = x^2$，从而

$$\int_{(0,0)}^{(1,1)} xy^2dx+y\varphi(x)dy=\int_{(0,0)(1,1):y=x,x\in[0,1]} xy^2dx+x^2ydy=\int_0^1 2x^3dx=\frac{1}{2}$$

解法 2： 同解法 1，得 $\varphi(x)=x^2$，从而 $\int_{(0,0)}^{(1,1)} xy^2dx+y\varphi(x)dy=$

$$\int_{(0,0)}^{(1,1)} xy^2dx+yx^2dy=\int_{(0,0)}^{(1,1)} d(\frac{x^2y^2}{2})=\frac{x^2y^2}{2}|_{(0,0)}^{(1,1)}=\frac{1}{2}$$

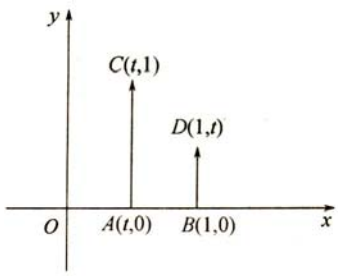
解法三 直接由积分与路径无关及 $\varphi(0)=0$，可得 $\int_{(0,0)}^{(1,1)} xy^2dx+y\varphi(x)dy=$

$$\int_{(0,0)(0,1)\cup(0,1)(1,1)} xy^2dx+y\varphi(x)dy=\int_{(0,0)}^{(1,1)} 0.y^2d0+y\varphi(0)dy+\int_{(0,0)}^{(1,1)} x.1^2dx+1.\varphi(x)d1$$

$$=\int_0^1 xdx=\frac{1}{2}$$

6 设 $\varphi(x,y)$ 在 xOy 平面上具有一阶连续偏导数，曲线积分 $\int_L 2xydx+\varphi(x,y)dy$ 与路径无关，且任意 t 恒有 $\int_{(0,0)}^{(t,1)} 2xydx+\varphi(x,y)dy=\int_{(0,0)}^{(1,t)} 2xydx+\varphi(x,y)dy$，求 $\varphi(x,y)$。

解：由曲线积分与路径无关的条件可知 $\frac{\partial\varphi}{\partial x}=\frac{\partial(2xy)}{\partial y}=2x$



所以 $\varphi(x,y)=x^2+c(y)$，其中 $c(y)$ 为待定系数。

如图所示，由于沿折线 OAC 积分

$$\int_{(0,0)}^{(t,1)} 2xydx+\varphi(x,y)dy=\int_0^1[t^2+c(y)]dy=t^2+\int_0^1 c(y)dy$$

故 $t^2+\int_0^1 c(y)dy=t+\int_0^t c(y)dy$ 两短关于变量 t 求导，得 $2t=1+c(t),c(t)=2t-1$，

即 $c(y)=2y-1$，所以 $\varphi(x,y)=x^2+2y-1$。

7（**难）设 $V(x,y)$ 在区域 D 中满足条件 $\frac{\partial^2V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2V}{\partial y^2}=0$，且 c 为 D 的边界曲线，试证明：

（1）$\oint_c \frac{\partial V}{\partial n}ds=0$

（2）$\oint_c V\frac{\partial V}{\partial n}ds=\iint_D\left((\frac{\partial V}{\partial x})^2+(\frac{\partial V}{\partial y})^2\right)dxdy$，其中 $\frac{\partial V}{\partial n}$ 为 c 的外法线方向的方向导数。

证明：设曲线 c 在点 (x,y) 处的切线方向向量为 $\{\cos\alpha,\cos\beta\}$，则曲线 c 在 (x,y) 处的外法线方向向量为 $\{\cos\beta,-\cos\alpha\}$。

（1） 由方向导数的定义以及两类曲线积分的关系和格林公式，有

$$\oint_c \frac{\partial V}{\partial n}ds=\oint_c\left(\frac{\partial V}{\partial x}\cos\beta+\frac{\partial V}{\partial y}(-\cos\alpha)\right)ds=\oint_c \frac{\partial V}{\partial x}dy-\frac{\partial V}{\partial y}dx$$

$$=\iint_D\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\right)dxdy=0$$

（2） 同样地，由方向导数的定义以及两类曲线积分的关系和格林公式，有

$$\oint_c V\frac{\partial V}{\partial n}ds=\oint_c\left(\frac{\partial V}{\partial x}\cos\beta+\frac{\partial V}{\partial y}(-\cos\alpha)\right)ds$$

$$=\oint_c (V\frac{\partial V}{\partial x})dV-(V\frac{\partial V}{\partial y})dx$$

$$=\iint_D\left((\frac{\partial V}{\partial x})^2+V\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+(\frac{\partial V}{\partial y})^2+V\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\right)dxdy$$

$$=\iint_D\left((\frac{\partial V}{\partial x})^2+(\frac{\partial V}{\partial y})^2+V(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2})\right)dxdy$$

$$=\iint_D\left((\frac{\partial V}{\partial x})^2+(\frac{\partial V}{\partial y})^2\right)dxdy$$

三 第二型曲面积分与 Gauss 公式

8 计算 $\iint\limits_{\Sigma}\frac{axdydz+(z+a)^2dxdy}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$，其中 Σ 为下半球面 $z=-\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 的上侧，a 为大于零的常数。

解： $I=\iint\limits_{\Sigma}\frac{axdydz+(z+a)^2dxdy}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\frac{1}{a}\iint\limits_{\Sigma}axdydz+(z+a)^2dxdy$

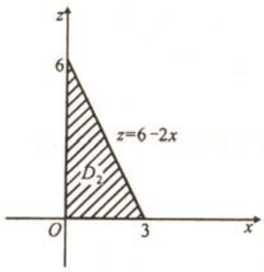
记 $S:z=0(x^2+y^2\le a^2)$ 取下侧

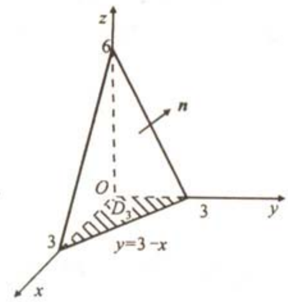
$$I=\frac{1}{a}[\oiint\limits_{\Sigma+S} axdydz+(z+a)^2dxdy-\iint\limits_{S} axdydz+(z+a)^2dxdy]$$

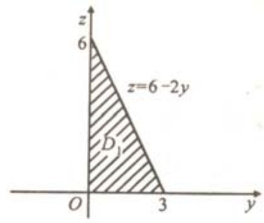
$$=\frac{1}{a}[-\iiint\limits_{\Omega}(3a+2z)dv+a^2\iint\limits_{D}dxdy]=\frac{1}{a}[-2\pi a^4-2\iiint\limits_{\Omega}zdv+\pi a^4]$$

$$=\frac{1}{a}[-\pi a^4-2\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^a rdr\int_{-\sqrt{a^2-r^2}}^{0}zdz]=-\frac{\pi}{2}a^3.$$

9 计算 $\iint\limits_{\Sigma} xydydz-x^2dzdx+(x+z)dxdy$，其中 Σ 是平面 $2x+2y+z=6$ 在第一卦限部分的上侧。







解法一：　根据对坐标的曲面积分的定义，此例实际上是要计算三个积分

即 $\iint\limits_{\Sigma} xydydz-x^2dzdx+(x+z)dxdy=\iint\limits_{\Sigma} xydydz-\iint\limits_{\Sigma} x^2dzdx+\iint\limits_{\Sigma}(x+z)dxdy$

先求 $\iint\limits_{\Sigma} xydydz$。因为积分表达式的末端是 $dydz$，故应解出曲面 Σ 的显函数 $x=x(y,z)$，并注意到 Σ 的侧，然后向 yOz 平面投影。由已知，Σ 为 $x=\frac{1}{2}(6-2y-z)$，注意 Σ 的上侧法向量 $\boldsymbol{n}$ 与 x 轴正向成锐角（见图 1），故投影区域 $D_1:0\le z\le 6-2y,0\le y\le 3$(见图 2)。于是

$$\iint\limits_{\Sigma} xydydz=\iint\limits_{D_1}\frac{1}{2}(6-2y-z)ydydz$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^3 ydy\int_0^{6-2y}[(6-2y)-z]dz=\frac{1}{4}\int_0^3 y(6-2y)^2dy=\frac{27}{4}$$

再求 $\iint\limits_{\Sigma} x^2dzdx$。解出 Σ 为 $y=\frac{1}{2}(6-2x-z)$，注意到 Σ 的上侧法向量 $\boldsymbol{n}$ 与 y 轴正向成锐角，故投影取正号，投影区域 $D_2:0\le z\le 6-2x,0\le x\le 3$（见图 3）。于是

$$\iint\limits_{\Sigma} x^2dzdx=\iint\limits_{D_2}x^2dzdx=\int_0^3 x^2dx\int_0^{6-2x}dz=\int_0^3 x^2(6-2x)dx=\frac{27}{2}$$

最后求$\iint\limits_{\Sigma}(x+z)dxdy$。解出$\Sigma$为$z=6-2x-2y$，注意到$\Sigma$的上侧法向量$\boldsymbol{n}$与$z$轴正向成锐角，投影区域$D_3: 0\le y\le 3-x, 0\le x\le 3$（见图 1）。于是

$$\iint\limits_{\Sigma}(x+z)dxdy=\iint\limits_{D_3}(x+6-2x-2y)dxdy$$

$$=\int_0^3 dx\int_0^{3-x}[(6-x)-2y)]dy=3\int_0^3(3-x)dx=\frac{27}{2}$$

$$\therefore\ \iint\limits_{\Sigma}xydydz-x^2dzdx+(x+z)dxdy=\frac{27}{4}-\frac{27}{2}+\frac{27}{2}=\frac{27}{4}\text{。}$$

解法二： 可将对坐标平面的曲面积分转换成对面积的曲面积分，然后进行计算

因为 $\int_{\Sigma}xydydz-x^2dzdx+(x+z)dxdy=\int_{\Sigma}[xy\cos\alpha-x^2\cos\beta+(x+z)\cos\gamma]ds$

其中$\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$时曲面$\Sigma$上侧法向量的余弦。

又因为曲面$\Sigma: z=6-2x-2y$上侧的法向量$\vec{n}=\{-z_x^{'},-z^{'},1\}$，

所以$\cos\alpha=\dfrac{-z_x^{'}}{\sqrt{1+z_x^{'2}+z_y^{'2}}}=\dfrac{-(-2)}{\sqrt{1+4+4}}=\dfrac{2}{3}$，

$$\cos\beta=\frac{-z_y^{'}}{\sqrt{1+z_x^{'2}+z_y^{'2}}}=\frac{-(-2)}{\sqrt{1+4+4}}=\frac{2}{3},\quad \cos\gamma=\frac{1}{\sqrt{1+z_x^{'2}+z_y^{'2}}}=\frac{1}{3}$$

$$ds=\sqrt{1+z_x^{'2}+z_y^{'2}}dxdy=3dxdy$$

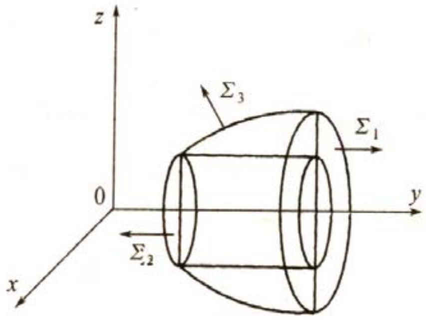
从而原式$=\iint_{\Sigma}[\frac{2}{3}xy-\frac{2}{3}x^2+\frac{1}{3}(x+z)]ds$

$$=\iint_{D_3}\frac{2}{3}xy-\frac{2}{3}x^2+\frac{1}{3}(x+6-2x-2y)].3dxdy$$

$$=\int_0^3 dx\int_0^{3-x}(2xy-2x^2+6-x-2y)dy=\frac{27}{4}$$

其中D_3同解法一中D_3

10 计算曲面积分$\oiint\limits_{\Sigma}\dfrac{e^{\sqrt{y}}}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy$，其中$\Sigma$为由曲面$y=x^2+y^2$与平面$y=1, y=2$，所围成立体表明的外侧。



解法一 ：如图所示，$\Sigma=\Sigma_1+\Sigma_2+\Sigma_3$。设曲面$\Sigma_1$： $y=1$在xOz面上的投影区域为$D_1,\Sigma_2: y=1$在xOz面上的投影区域为D_2，在xOz面上投影为D_3，则

$$\iint_{\Sigma_1}\frac{e^{\sqrt{y}}}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdz=\iint_{D_1}\frac{e^{\sqrt{2}}}{\sqrt{x^2+z^2}}dxdz=e^{\sqrt{2}}\iint_{D_1}\frac{dxdz}{\sqrt{x^2+z^2}}$$

$$=e^{\sqrt{2}}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{2\pi}d\theta\int_{\varepsilon}^{\sqrt{2}}\frac{1}{r}rdr=2\sqrt{2}\pi e^{\sqrt{2}}$$

$$\iint_{\Sigma_2}\frac{e^{\sqrt{y}}}{\sqrt{x^2+z^2}}dxdz=-\iint_{D_2}\frac{e^{\sqrt{1}}}{\sqrt{x^2+z^2}}dxdz=-e\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{2\pi}d\theta\int_{\varepsilon}^{1}r\frac{dr}{r}=-2\pi e$$

$$\iint_{\Sigma_3}\frac{e^{\sqrt{y}}}{\sqrt{x^2+z^2}}dxdz=-\iint_{D_3}\frac{e^{\sqrt{x^2+z^2}}}{\sqrt{x^2+z^2}}dxdz=-\int_0^{2\pi}d\theta\int_1^{\sqrt{2}}e^{\gamma}r\frac{dr}{r}=-2\pi(e^{\sqrt{2}}-e)$$

所以$\oiint_{\Sigma}\frac{e^{\sqrt{y}}}{\sqrt{x^2+z^2}}dxdz=2\sqrt{2}\pi e^{\sqrt{2}}-2\pi e-2\pi(e^{\sqrt{2}}-e)=2\pi e^{\sqrt{2}}(\sqrt{2}-1)$。

解法二 ：利用高斯公式有

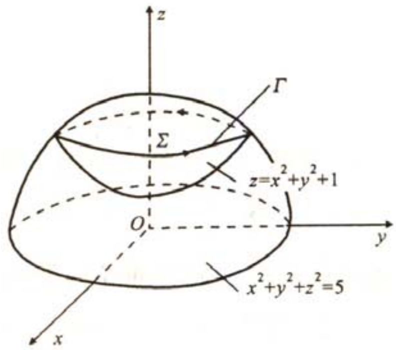
$$\text{原式}=\iiint_{V}\frac{\partial}{\partial \mathrm{y}}\left(\frac{e^{\sqrt{y}}}{\sqrt{x^2+z^2}}\right)dxdydz=\iiint_{V}\frac{1}{\sqrt{x^2+z^2}}\frac{1}{2\sqrt{y}}e^{\sqrt{y}}dxdydz$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{1}rdr\int_1^{2}\frac{1}{r}\frac{e^{\sqrt{y}}}{2\sqrt{y}}dy+\int_0^{2\pi}d\theta\int_1^{\sqrt{2}}rdr\int_{r^2}^{2}\frac{1}{r}\frac{e^{\sqrt{y}}}{2\sqrt{y}}dy$$

$$=2\pi.1.e^{\sqrt{y}}\Big|_1^2+2\pi\int_1^{\sqrt{2}}(e^{\sqrt{2}}-e^{r})dr=2\pi e^{\sqrt{2}}(\sqrt{2}-1)\text{。}$$

11 计算$\oint_{\Gamma}x^2yzdx+(x^2+y^2)dy+(x+y+1)dz$，其中$\Gamma$为曲面$x^2+y^2+z^2=5$和$z=x^2+y^2+1$的交线，$\Gamma$的方向为面朝 z 轴正向看去的逆时针。

解法一： 如图所示。取曲面Σ为$z=2, x^2+y^2\le 1$的上侧，则Σ是以Γ为边界的有向光滑曲面，且符合右手规则，由斯托克斯公式知



$$\oint_\Gamma x^2yzdx+(x^2+y^2)dy+(x+y+1)dz$$

$$=\iint_\Sigma \begin{vmatrix} dxdy & dzdx & dxdy \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ x^2yz & x^2+y^2 & x+y+1 \end{vmatrix}$$

$$=\iint_\Sigma (1-0)dydz+(x^2y-1)dzdx+(2x-x^2z)dxdy$$

因为曲面$\Sigma: z=2, x^2+y^2\le 1$在$yOz$面和$xOz$面上的投影皆是 0，其在$xOy$面上的投影区域 D 是：$x^2+y^2\le 1$，投影取正号，所以

$$原式=0+0+\iint_D (2x-2x^2)dxdy=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 2(r^2\cos\theta-r^3\cos^2\theta)dr$$

$$=2\int_0^{2\pi}[\frac{1}{3}\cos\theta-\frac{1}{8}(1+\cos 2\theta)]d\theta=-\frac{\pi}{2}$$

解法二： 联立曲面方程$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=5 \\ z=x^2+y^2+1 \end{cases}$，解出$\begin{cases} z=2 \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$，写出$\Gamma$的参数方程

$x=\cos\theta, y=\sin\theta, z=2(0\le\theta\le 2\pi)$

则 $dz=-\sin\theta d\theta, dy=\cos\theta d\theta, dz=0$。故

$$\oint_\Gamma x^2yzdx+(x^2+y^2)dy+(x+y+1)dz$$

$$=\int_0^{2\pi}[2\cos^2\theta\sin\theta(-\sin\theta)+(\cos^2\theta+\sin^2\theta)\cos\theta]d\theta$$

$$=-\frac{1}{4}\int_0^{2\pi}(1-\cos 4\theta-4\cos\theta)d\theta=-\frac{\pi}{2}。$$

四 Stokes 公式

12 $\oint_\Gamma 3ydx-xzdy+yz^2dz$, 其中$\Gamma$为圆周$x^2+y^2=2z, z=2$, 若从 z 轴正向看去，这圆周取逆时针方向。

解一： 取Σ为平面$x+y+z=0$被Γ所围成的部分的上侧，Σ的单位法矢量为$\left\{\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right\}$

$$\oint_\Gamma ydx+zdy+xdz=\iint_\Sigma \begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y & z & x \end{vmatrix} dS$$

$$=\iint_\Sigma\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)dS$$

$$=-\sqrt{3}\iint_\Sigma dS=-\sqrt{3}\pi a^2.$$

解二： $$\oint_\Gamma 3ydx-xzdy+yz^2dz=\iint_\Sigma \begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 3y & -xz & yz^2 \end{vmatrix}$$

$$=\iint_\Sigma (z^2+x)dydz-(z+3)dxdy$$

其中Σ是平面$z=2$被Γ所围成的部分的上侧，因为Σ 在 yoz 面上的投影区域为线段，所以

$$\oint_\Gamma 3ydx-xzdy+yz^2dz=\iint_\Sigma (z^2+x)dydz=0$$

又Σ 在 xoy 面上的投影区域为$x^2+y^2\leq 4$，所以

$$\iint_\Sigma -(z+3)dxdy=-\iint_{D_{xy}}(2+3)dxdy=-20\pi.$$