DOI:10.16594/j.cnki.41-1302/g4.2011.01.005
2011年 1月 洛阳师范学院学报 Jan., 2011
第 30卷 第 1期 Journal of Luoyang Normal University Vol.30 No.1

抽象代数中的科学理性与数学美

王保红，魏屹东
（山西大学 科学技术哲学研究中心，山西 太原 030006）

摘 要：以抽象代数中的几大重要系统为考察对象，从抽象代数的建立与拓展、系统建构的逻辑基础切入，探讨抽象代数所蕴含的科学理性，并由此分析抽象代数所体现的数学结构的简单美、理论建构美和理论现实美，从而揭示抽象代数的臻美取向与人文底蕴。

关键词：抽象代数；科学理性；数学美
中图分类号：N031 文献标识码：A 文章编号：1009－4970（2011）01－0024－05
收稿日期：2010－10－06
基金项目：山西省高等学校哲学社会科学研究项目（200922040）。
作者简介：王保红（1973－），女，山西交城人，山西大学科学技术哲学研究中心博士生，太原师范学院数学系讲师，研究方向为科学史。魏屹东（1958－），山西永济人，山西大学科学技术哲学研究中心专职教授，哲学社会学学院教授，研究方向为科学哲学与科学史理论。

抽象是任何科学都具有的特征。数学尤其以抽象性为根本属性，而抽象代数又以抽象冠为自己的标签。抽象代数从伽罗瓦（Galois E.）和阿贝尔（Abel N. H.）开创以来，以绝对抽象的代数系统的结构为研究重心，实体化的公理转变成了形式化的公理而失去了“自明性”，数学的公理化方法所体现的理论简单性可以说更复杂了。代数学由抽象概念扩展为更抽象的概念以及高度抽象的推理论证的方式，使代数学排除了自由、价值、人文等终极意义的信念，完全置身于抽象的堡垒之中。本文试图通过抽象代数中几个重要的、典型的代数系统为切入点，探讨抽象代数中蕴涵的科学理性，并由此分析抽象代数所蕴涵的科学美，从而揭示抽象代数的人文底蕴。

一、抽象代数中的科学理性

抽象代数（Abstract algebra）亦称近世代数（Modern algebra），是在初等代数基础上，经过数系概念的推广与实施代数运算范围的扩大，在 18世纪末萌芽到 20世纪 30年代逐步形成的现代数学的主要分支之一。它将古典代数学中的元素、集合、运算和运算法则进行抽象，并由集合所赋予的运算及其所满足的公理体系的不同而形成各种不同的代数系统，如群、环、域、格、模（包括向量空间）等，力求用公理论方法处理、研究各个代数系统的结构及其性质。代数发展更加重视理性的概念性分析，并竭力用公理化方法处理或理解代数的问题，在高度抽象化的形式中体现简单性的表征，这正是数学理性的最好诠释。

1. 抽象代数建立与拓展中的科学理性

伽罗瓦是抽象代数的创始人之一。在数学家为寻求五次和五次以上的方程的根式解经过 200多年的努力而收效甚微的情况下，阿贝尔最先实现了方程理论上的突破，证明了五次和五次以上的方程不能有根式解，但最终未能刻画能用根式求解方程的特征问题。1830年伽罗瓦深入研究了一个方程能用根式求解所必须满足的本质条件，最终得出全新的超越函数值解法，彻底解决了代数方程可解性问题，给方程可解性问题提供了全面而透彻的解答，创立了第一个抽象系统“群”。继而提出的“Galois域”、“Galois群”和“Galois理论”都成为抽象代数研究的最重要的课题。Galois群理论被公认为 19世纪最杰出的数学成就之一。

1843年，哈米尔顿（Hamilton, E. V.）引进了四元数并奠定了向量代数和向量分析的基础，而四元数系又构成了实数域上有限维可除代数。1954年凯莱（Cayley A.）给出了有限抽象群的概念以及代数不变量的矩阵理论，还建立了八元数与非结合代数。同时，克利福德（Clifford, W. K.）将八元数及外代数推广到一般的克利福德代数，并将其成功应用于非欧几里得空间中运动的研究。戴德金（Dedekind, J. W. R.）于 1858年在代数数域中引入有限交换群和有限群。克莱因（Klein, C. F.）于 1872年建立了埃尔朗根纲领，为抽象群的确立奠定了基础。1893年韦伯给出了无限抽象群的定义。这些研究打开了抽象代数的大门。

1870年，克罗内克（Kronecker, L.）给出了有限 Abel群的抽象定义，开始使用“体”的说法，并研究了

代数体。1893年，韦伯定义了抽象的体。1910年，施坦尼茨（Steinitz，E.）展开了体的一般抽象理论，“域”这个名词也是戴德金较早引入，到 19世纪末 20世纪初，域才得到系统的发展。

同时，大数学家高斯的学生库默尔（Kummer，E. E.）在对费玛大定理的证明研究中，构造了“理想数”，在他的启发下，戴德金把“理想数”推广成“理想”，即实现了数到集合的推广，创立了抽象系统“环”。在“代数学之母”诺特（Noether，A. E.）的深刻扩张下，把“环”发展成为最基本的代数结构。诺特的这套理论也就是现代数学中的“环”和“理想”的系统理论，一般认为抽象代数形成的时间就是 1926年，从此代数学研究对象从研究代数方程根的计算与分布，进入到研究数字、文字和更一般元素的代数运算规律和各种代数结构，完成了古典代数到抽象代数的本质的转变。

到 20世纪 30年代，范·德·瓦尔登的《近世代数学》系统综合了从伽罗瓦起 100年来的抽象代数各方面的工作，是抽象代数发展重要的里程碑[1](P6)。抽象代数在深度和广度上得到了更加迅速的发展。用统一的方法去研究比较各代数结构而产生了泛代数，将同一种代数以及它们之间的同态映射合起来考虑，找到本质上的共性，就产生了范畴论。同时，以代数拓扑背景，以模为研究对象的同调代数独立发展起来。这些工作的绝大部分属于 20世纪，它们使一般化和抽象化的思想在现代数学中得到了充分的反映。并且抽象代数与数学其它分支相结合产生了代数几何、代数数论、代数拓扑、拓扑群等新的数学学科。

抽象代数严格的数学概念的确立与进一步抽象化概念的拓展，依赖于数系的推广和代数发展中问题的逐步突破。由含有一个代数运算的“群”到包含两个代数运算的“格模”等，以及在此系统基础上寻找共性而建立的范畴论等，这些严格的数学概念是累积的自然的延展，是数学发展的必然趋势。代数系统的建立与拓展过程都展示了数学严谨一致、秩序井然、融贯统一的科学理性。

2 代数系统建构中的科学理性

抽象代数各个独立的系统都有明确的数学定义，但代数系统总的概念有三个重要的组成部分：集合、运算法则和公理条件。代数系统其实就是一个给定的抽象集合 R，在集合中加入几个运算法则（P），再将运算法则要满足的条件 C以公理的形式给出，由 P与 C限制的集合 R就是它的代数结构，抽象代数的研究目的就是刻划作为系统的集合 R所具有的结构。代数系统共同的三个特质的逻辑基础是怎样的，它如何显示抽象代数的简单表征呢？接下来我们做进一步的分析。

集合是数学中不能精确定义的，但却是最基本的概念之一，可以描述为具有某种特殊性质的事物的全体。直线上点的全体就是实数集 R，平面上所有的点就是有序实数对（a，b)的全体，即二维向量集 R^2，空间中所有的点就是三元数组（a，b，c)的全体，即三维向量集 R^3，继续拓展下去，就是 n元数组的全体，即 R^n空间，将数域抽象化成任意数域、n元数组抽象成任意“向量”，就是一般意义上的数域 F上的线性空间 V。“虽然线性代数通常不是抽象代数课程的设置，但是它的演变与群、环、域等有紧密的联系。因此，向量空间就成为抽象代数的基本概念。”[2](P6)比如，整数的全体对于普通加法就构成了一个无限加法群。再如 $x^3=1$的三个根对于普通的乘法来说就作成一个有限乘法群[3](P37)。在群之后陆续建立的环、域、格、模等代数系统也都是数学研究中找到的具有特定性质的对象的全体。这样我们自然得到，系统最根本上就是一种抽象化的集合，在这个集合中的元素尽管我们仍称其为点，但它已经丧失了古典意义下点的属性，完全是由它的公理属性所界定，只要是满足系统结构要求的条件 C，就可以是系统的“点”。如群 G只含一个元 g，其乘法是 gg=g，则对于这个乘法来说 G作成一个群[3](P31)，点 g是抽象了的元素，其实质与普通的数 1对于普通乘法而言构成的群代数性质是一样的。

运算法则是一种特殊的代数运算，在代数系统中常常指集合 A×A的任何一个元素（a_1，a_2)在法则 F下在本集合 A中有唯一的元素 d与之对应，称这个法则就是代数运算，集合 A对于代数运算 F而言是封闭的。运算法则本质上就是一种具体化了的特殊映射，是集合与集合之间发生的某种关系，是对 a_1和 a_2进行运算或是 a_1和 a_2发生关系而得到结果 d。最基本的数学运算法则加、减、乘、除以及集合的交与并都是把两个元素对应成了一个元素。1+2=3就表明这三个数在法则“+”下有了关系，而 4×5=20是这三个数在法则“×”下有了关系。可见，代数运算的本质不是作用的对象，而是具体的运算法则。抽象代数的各个系统定义中的运算法则可以抽象地认为是“四则运算”推广到集合中去，虽然它们已经不是通常意义下的运算。在某一抽象集合的元素之间建立了具有一定性质的关系，就意味着集合有了结构，而对这一结构的性质刻画就是系统满足的“公理”。

公理条件是对系统所研究的对象的限制，用以规范系统统一的结构。具体表现为各种运算律。最常见的基本运算律有加法交换律、加法结合律、乘法交换律、乘法结合律和乘法与加法之间的分配律。从上面给出的代数系统的定义可以看出，各个系统满足不同

的运算律。确立一个集合，规定了其中对象的运算法则，而且要求这些对象满足一定的公理条件，即运算律，才可以说这个集合为特定系统。然而随着点与运算的抽象化，其公理条件不再是“自知之明”的，也不再是真理，只是对于讨论的集合对象如果满足公理条件，它就必然适合从此推演出的性质，在这个意义上限制了系统讨论的对象。

这样，系统的结构完全由它的运算法则（映射）和公理条件所确定，把数、运算法则抽象化规范化就构成了各种不同的系统，将各个系统追本溯源，可以看出系统的逻辑起点是集合与映射，也构成现代数学的逻辑起点，纷繁多变的系统在逻辑基础上是一致的，这就使得更加抽象概括性概念下的抽象代数在最根本上实现了简单表征，体现了代数学深刻的科学理性。

二、抽象代数中的数学美

1. 代数结构的简单美

在最基本的逻辑层次——集合和映射基础上抽象而成的各大代数系统，由于其抽象出的数学概念不再是原来的客观事物，从抽象概念逐级演绎出的推理论证的方式，排除了自由、价值、人文等生活中的终极意义的信念，完全置身于抽象的堡垒之中。面对这样的抽象系统，还原其物理及客观属性首先就需要对它本身结构的认识，而结构分析法是现代数学最基本的方法，试图找到系统之间的结构关系，即实现系统的同构、同态、同伦、同调等，它们成为结构分析的目的与手段，是结构分析有力的工具。对于上文提到的代数系统，这里只通过同构来研究和分析系统，可以识别和审视系统研究中的简单性原则。

同构也称同构映射，是现代数学很重要的一个基本概念，如果某个代数系统 R和同种代数系统 R^*之间存在保持运算的一、一对应 φ时，称 φ为同构映射，并称 R与 R^*同构。表示为 $R\cong R^*$。同构关系是一种等价关系，这时两个代数系统具有完全相同的代数性质，同构的两个代数系统有相同的数学构造，在代数性质上可以视为同等。如果找出两个系统在什么情况下是同构的，那么它们在同构之下的不变量就是我们可以找的共同的性质，说明这两个系统没有差别。并在此基础上，将研究对象依照完全组的不变量进行分类。实现对代数系统的一种刻划。

例如向量空间 F^2，其上所有的点 α都可以用二元数组（a，b）、即在平面直角坐标系中 X、Y轴的坐标来表示，此时（a，b）$=a(1,0)+b(0,1)=a\varepsilon_1+b\varepsilon_2$，$\varepsilon_1$、$\varepsilon_2$为单位向量，任意 F^2的向量均可以表示成 ε_1、ε_2的线性组合，而 ε_1、ε_2不在一条直线，称为线性无关，推广即得任何两个不在一条直线上的 α、β均线性无关，都可以表示 F^2的任何向量，即 $\alpha=x\alpha+y\beta$，称 α、β为 F_2的基底，可见 F_2完全有它的基底所确定，任何 2维线性空间都和 F^2同构，而 F^2的代数性质和几何意义就非常清晰了。但对于群结构的分类、表示、实现等问题太复杂了，如把群分类为有限群、无限群、交换群、非交换群等等，然后看看每一类有多少不同的群，可惜到现在为止完全解决了的群是非常有限的。

继群之后逐步建立的其他代数系统结构研究，也常常使用同构和同态等工具，只是如环、域、模等结构比向量空间、群的要复杂的多。如向量空间的拓展就是模，因此其与线性空间的基本一致。再如许多域的分析可以转化为它的自同构的群，从而使研究变得简单。代数系统研究中的理性思维具体为：竭力找到系统之间的结构关系，实现同态、同构等意义下的简单形态，这也是研究代数系统的方法论准则。

2. 代数理论建构之美

从上文对抽象代数的几大系统的分析，无论系统结构在深度和广度上如何拓展，系统最基本的属性就是集合，而由代数运算和公理条件所限定的结构，就像是在集合这样的“皮”上粘附了“毛”，将本来互不相关的、彼此独立的各个元素互相紧紧地联系起来。这样元素之间有了大小之分、有了远近关系、有了运算的可能，就是使系统有了“结构”。

由此可知，首先，代数系统的逻辑起点是一致的，集合和映射以及必要的公理条件是所有系统都具备的要素。不同的系统有统一的逻辑起点，统一的系统又各有差异，差异中见统一、统一中有差异，这正是抽象代数建构的美的本质。再次是代数系统的建立都是希望用统一的抽象的方法去整体考察，并不考虑各个独立的元素。逻辑一致、统一协调、整体把握正是抽象代数建立的一种理性美。

我们认识抽象代数建立与拓展中逻辑基础的简单一致，以及为了研究系统之间的结构关系，实现同态、同构等意义下的简单形态的理性思维。其实就是从共性上把握对象间的本质，品味数学表达与分析中的质朴、和谐、涵盖美的数学内在美，体验数学的联系带来的深刻美学价值。

3. 代数理论现实美

数学如同任何其他科学一样面临着这个问题：明白他派什么用场是明智的。特别是数学发展到高度抽象的近现代数学时期。这就使逻辑抽象实现的纯数学领域渴望找到其直接或间接的实践意义，尽管数学家纯粹的思维实现的只是数学体系内部逻辑发展的必然性，这样必然走向理论先行的超验的道路上，而现代物理学在寻求自身发展的时候找到了可以依赖的工

具——数学，为数学把握了实在，回归了价值美。

群论的产生最初是在探讨高次方程的求解时，发现了方程的根的对称性和平等性是解决全部问题的关键。但当伽罗瓦理论创立的时候，并没有引起数学界的重视，致使这位年经的数学家如流星般陨落。但随着科学的发展，直到电子计算机的问世和应用，抽象代数的研究成果和方法才应用到工程技术中，如代数编码学、语言代数学、代数自动化理论等领域。同时它们又是离散代数的重要组成部分，对组合数学的突起和发展产生了重要的影响。

所以，“归根到底，数学的生命力的源泉在于它的概念和结论尽管极为抽象，但却如我们坚信的那样，它们是从现实中来的，并且在其他科学中，在技术中，在全部生活实践中都有广泛的应用，这一点，对于了解数学是最重要的。”[5](P3)数学与现实世界之间最奇特也是最鲜明的关系，就在于好的数学终究有用。

三、抽象代数的人文底蕴

综观数学史发展的历程，每一个伟大成就的获得都伴随着那个时代伟大的数学家而被人们所铭记。数学家群体通过他们对数学敏锐的洞察力和从事科学事业的坚韧品格，一直深深地影响着数学的发展。而一个人之所以成为数学家，就是因为在复杂的研究境况中抓住对象的本性和特质，把孤立的片面的结论归结为整体，用统一的方法和简单的原则来实现数学的发展，体现了数学家在研究实践中的臻美取向。

从上文讨论的抽象代数的建立与拓展中，我们知道抽象代数的创始人伽罗瓦最先深刻并彻底解决了代数方程可解性问题，并创立了代数系统“群”。继而域、环、体、格、模等代数系统逐步建立并得到完善。但这样高度抽象化使得人们认为数学变成了纯粹的人造的智力结构，是数学家所特有的超常智力的产物，是数学家为了形成首尾一致的连贯的理论，而“创作”出没有的数据，并以此建立一个自治的理论体系。“在数学中，人类的心智能够看清，创造一套在其看来有趣或有用的知识是自由的。数学之源是心智本身的逐步发展。”[4](P227)我们探询数学家的审美意识，认识数学家的在推动数学发展所做的贡献，并不是认为数学是人造的，完全是人类思想的产物，只是数学家在特定的时期，接触了最前沿的数学，认识了数学的困惑，以他对数学敏锐的洞察力而抓住了解决问题的关键，实现了数学的突破。这是历史的产物，是数学家如健牛般竭尽全力工作的结果，决不是凭空臆造的。否则就会陷入直觉主义的泥潭。

当然数学家在数学研究中必然掺杂着一定的非理性因素，实现自身研究中的臻美取向。正像大数学家罗素曾说过的，对系统和内在联系的深情钟爱，也许是智能性冲动的最内在的本质，再没有别的地方像数学一样得到自由的显露。也正是数学家对数学所特有的这份深情钟爱，以及获得的超乎寻常的智力上的满足感，形成了他们坚韧品格和超凡耐力。正是数学家群体通过数学的创造，实现了一种美学理想，伸张了一种价值观念，回归数学深刻的人文属性。

数学到了 19世纪抽象代数和非欧几何的产生，使数学走向了高度抽象化而远离了自然科学的范畴。数学理论的概念性、数学语言的形式化、数学推理的演绎性，这些抽象的手法逐步升华，并达到更高的层次，似乎代数学是在抽象的堡垒中孤立地发展，与应用数学的联系变得模糊甚至消失。其结果是加大了数学和人文学科的割裂。

韦伯斯特大学词典对美的定义是：一个人或一种事物具有的品质或品质的综合，它愉悦感官或使思想和精神得到愉快的满足。当代数学发展到抽象代数时，建立在初等数论基础上的各大代数系统在数学家精致抽象下，一方面实现了理论构建上一致、简单、整齐、和谐的深刻美，爱因斯坦就曾说过，物理理论的美就要求我们来论证，吸收了那么多智力活动的数学概念具有美的品质。如同抽象概念“群”却巧妙的描述了物理定律的对称性，难道它还不具备美的品质？另一方面在对理论的解释中实践了简单性原则，找到同型的结构来刻划复杂的系统，这样体现的还原美，它使数学家及与科学群体获得了精神上的满足，从而更加深刻地影响数学。外尔（H. Weyl）指出“数学不是外行们所见的那样严厉与刻板；然而，我们在它处于约束和自由的交汇点中找到自己，这正是人的本性”[6](P59)。正因为我们坚信数学家在数学研究中体现了审美情趣和臻美取向，这本身就实现了抽象代数的人文价值。

另外，从抽象代数的物理意义之美中我们知道，代数系统的建立确实都依赖逐级抽象的概念体系，抽象化的表征更加使得近世代数的现实意义变得模糊甚至消失，但就是这样理论先行的思维建构，最后或者未来都可以找到它们的现实的物理意义和物理应用。因此，抽象代数最终是服务于现实世界的，数学家的超前思维最终会在物理学的现实应用中得到实在回归。赫尔曼也曾指出数学和音乐一样，是深植于人的本性中的创造，不是作为独立的技术成就，而是作为人类存在整体的一部分才是它得价值所在。数学的目标是受制于、服务于更高的人性的目的。只要承认数学是人类的科学，是人类的事业，是历史的过程，就展示了数学最深刻、最广泛的人文底蕴。

[参 考 文 献]

[1] 数学辞海(第二卷)[Z]. 北京: 中国科学技术出版社, 2002.

[2] Israel Kleiner. A History of Abstract Algebra[M]. Berlin: Birkhuser Boston, 2007.

[3] 张禾瑞. 近世代数基础[M]. 北京: 高等教育出版社, 1985.

[4] M 克莱茵. 数学与知识的探求[M]. 刘志勇译. 上海: 复旦大学出版社, 2005.

[5] A D 亚历山大洛夫, 等. 数学——它的内容, 方法和意义[M]. 北京: 科学出版社, 2004.

[6] Michael Weyl. 心蕴诗魂的数学家与父亲[J], 数学译林, 2006 (1).

[责任编辑　尚东涛]

Scientific Rationality and Mathematical Beauty in Abstract Algebra

WANG Bao-hong, WEI Yi-dong

(Research Center for Philosophy of Science and Technology, Shanxi University, Taiyuan 030006, China)

Abstract: This paper studies the important systems in abstract algebra and starts with the establishment and expansion of abstract algebra and the logic foundation of system organization, to discuss the scientific rationality of abstract algebra, and then to analyze the simplicity beauty of mathematical structures, beauty of theoretical structure and that of theoretical reality, and wherefrom to revel the perfect beauty orientation and humanistic connotation.

Key Words: abstract algebra; scientific rationality; mathematical beauty