离散数学

Discrete Mathematics

第3讲 谓词逻辑 Predicate Logic（3）

- 推理形式
- 推理定律
- 推理规则
- 推理方法

推理形式

推理定律

1 命题逻辑中的蕴涵推理式，通过代入得到的谓词逻辑推理定律；由谓词逻辑中的等值式得到的推理定律

2 谓词逻辑特有的推理定律

(1) $(\forall x A(x)) \lor (\forall x B(x)) \Rightarrow \forall x(A(x) \lor B(x))$

(2) $\exists x(A(x) \land B(x)) \Rightarrow (\exists x A(x)) \land (\exists x B(x))$

(3) $\forall x(A(x) \to B(x)) \Rightarrow (\forall x A(x)) \to (\forall x B(x))$

(4) $\forall x(A(x) \to B(x)) \Rightarrow (\exists x A(x)) \to (\exists x B(x))$

多个量词的谓词公式的推理?

(1). $\forall x \forall y A(x, y) \Leftrightarrow \forall y \forall x A(x, y)$

(2). $\forall x \forall y A(x, y) \Rightarrow \exists y \forall x A(x, y)$

(3). $\forall y \forall x A(x, y) \Rightarrow \exists x \forall y A(x, y)$

(4). $\exists x \forall y A(x, y) \Rightarrow \forall y \exists x A(x, y)$

(5). $\exists y \forall x A(x, y) \Rightarrow \forall x \exists y A(x, y)$

(6). $\forall x \exists y A(x, y) \Rightarrow \exists y \exists x A(x, y)$

(7). $\forall y \exists x A(x, y) \Rightarrow \exists x \exists y A(x, y)$

(8). $\exists x \exists y A(x, y) \Leftrightarrow \exists y \exists x A(x, y)$

推理规则

- 命题逻辑中的推理规则
- 谓词逻辑中特有的规则

1. 全称量词消去规则（US）

（i）$\forall x A(x) \Rightarrow A(y)$ 或

（ii）$\forall x A(x) \Rightarrow A(c)$

2. 全称量词引入规则（UG）

$A(y) \Rightarrow \forall x A(x)$

3. 存在量词消去规则（ES）

$\exists x A(x) \Rightarrow A(c)$

4. 存在量词引入规则（EG）

$A(c) \Rightarrow \exists x A(x)$

universal instantiation, also called
Universal Specification or
Universal Elimination

Universal Generalization or
Universal Introduction

1. 全称量词消除规则（US规则）

(i). $\forall x A(x) \Rightarrow A(y)$

(ii). $\forall x A(x) \Rightarrow A(c)$

成立的条件是：

(1). x是$A(x)$的自由变元；

(2). 在(i)中，y为不在$A(x)$中约束出现的变元，y可以在$A(x)$中自由出现，也可在证明序列中前面的公式中出现。

(3). 在(ii)中，c任意的个体常量，可以是证明序列中前面公式所指定的个体常量。

$\forall x(\exists x P(x) \vee Q(x))$

$\forall x \exists y(x>y)$

$\exists y(y>y)$

2 全称量词引入规则（UG规则）

$A(y) \Rightarrow \forall x A(x)$

成立的条件是：

(1). y在A(y)中自由出现，且任意y，A(y)为真；

(2). 替换y的x要选择在A(y)中不出现的变元符号；

$\exists z(z>y)$

$\forall z \exists z(z>z)$

3 存在量词引入规则（EG规则）

$A(c) \Rightarrow \exists x A(x)$

成立的条件是：

(1). c是特定的个体常量；

(2). 替换c的x要选择在A(c)中不出现的变元符号；

(1). $P(x)\rightarrow Q(c)$

(2). $(\exists x)(P(x)\rightarrow Q(x))$

在使用存在量词引入规则时，替换个体c的变元应选择在公式中没有出现的变元符号，正确的推理是：

(1). $P(x)\rightarrow Q(c)$

(2). $(\exists y)(P(x)\rightarrow Q(y))$

4 存在量词消除规则（ES规则）

$\exists x A(x) \Rightarrow A(c)$

成立的条件是：

(1). c是特定的个体常量，c不能在前面的公式序列中出现；

(2). c不在A(x)中出现；

(3). A(x)中自由出现的个体变元只有x。

(1)$(\forall x)(\exists y)(x > y)$ // P

(2).$(\exists y)(z > y)$ // US

(3).$(z > c)$ // ES

(4).$(\forall x)(x > c)$ // UG

(5).$c > c$ // US

由(2)得到(3)不能使用存在量词消除规则，因为(2)中含有除y以外的自由变元z。

示例

[1]. (1). $(\forall x)P(x)\rightarrow Q(x)$ // P

(2). $P(y)\rightarrow Q(y)$ // US

量词$\forall x$的辖域为$P(x)$，而非$P(x)\rightarrow Q(x)$，所以不能直接使用全称量词消除规则。

[2]. (1). $P(a)\rightarrow Q(b)$ // P

(2). $(\exists x)(P(x)\rightarrow Q(x))$ // EG

前提中的个体a和b不同，不能一次同时使用存在量词引入规则，正确的推理可以为：

(1). $P(a)\rightarrow Q(b)$ // P

(2). $\exists x(P(x)\rightarrow Q(b))$ // EG

(3). $\exists y\exists x(P(x)\rightarrow Q(y))$ // EG

[3]. (1). $P(x)\rightarrow Q(c)$ // P

(2). $(\exists x)(P(x)\rightarrow Q(x))$ // EG

在使用存在量词引入规则时，替换个体**c**的变元应选择在公式中没有出现的变元符号，正确的推理：

(1). $P(x)\rightarrow Q(c)$ // P

(2). $(\exists y)(P(x)\rightarrow Q(y))$ // EG

[4]. (1). $(\forall x)(P(x)\rightarrow Q(x))$ // P

(2). $P(a)\rightarrow Q(b)$ // US

在使用量词消除规则时，应使用个体替换量词所约束的变元在公式中的所有出现，正确的推理是：

(1). $(\forall x)(P(x)\rightarrow Q(x))$ // P

(2). $P(a)\rightarrow Q(a)$ // US

[5].(1). $(\exists x)P(x)$ // P

(2). $P(c)$ // ES

(3). $(\exists x)Q(x)$ // P

(4). $Q(c)$ // ES

第二次使用存在量词消除规则时，所指定的特定个体应该在证明序列以前的公式中不出现，正确的推理是：

(1). $(\exists x)P(x)$ // P

(2). $P(c)$ // ES

(3). $(\exists x)Q(x)$ // P

(4). $Q(d)$ // ES

[6].(1). $(\forall x)(\exists y)(x > y)$ // P

(2). $(\exists y)(z > y)$ // US

(3). $(z > c)$ // ES

(4). $(\forall x)(x > c)$ // UG

(5). $c > c$ // US

由(2)得到(3)不能使用存在量词消除规则，因为(2)中含有除y以外的自由变元z。

推理方法

直接法

间接法（反证法、CP规则）

示例 证明苏格拉底三段论："人都是要死的，苏格拉底是人，所以苏格拉底是要死的。"

解 个体域取全总个体域，令F(x)：x是人，G(x)：x是要死的，a:苏格拉底，则

前提：$\forall x(F(x)\rightarrow G(x))$，$F(a)$

结论：$G(a)$

推理形式：$\forall x(F(x)\rightarrow G(x))$，$F(a)\Rightarrow G(a)$

(1) $F(a)$ P

(3) $\forall x(F(x)\rightarrow G(x))$ P

(2) $F(a)\rightarrow G(a)$ US, (1)

(4) $G(a)$ T, I, (2), (3)

示例 将下列推理符号化并给出形式证明:

晚会上所有人都唱歌或跳舞了，因此或者所有人都唱歌了，或者有些人跳舞了。（个体域为参加晚会的人）

解 设P(x)：x唱歌了，Q(x)：x跳舞了，则

前提：$\forall x(P(x) \vee Q(x))$

结论：$\forall xP(x) \vee \exists xQ(x)$

推理形式：$\forall x(P(x) \vee Q(x)) \Rightarrow \forall xP(x) \vee \exists xQ(x)$

(1) $\neg(\forall xP(x)\vee\exists xQ(x))$ P(附加)
(2) $\exists x\neg P(x)\wedge\forall x\neg Q(x)$ R,E,(1)
(3) $\exists x\neg P(x)$ T,I,(2)
(4) $\neg P(a)$ ES,(3)
(5) $\forall x\neg Q(x)$ T,I,(2)
(6) $\neg Q(a)$ US,(5)
(7) $\forall x(P(x)\vee Q(x))$ P
(8) $P(a)\vee Q(a)$ US,(7)
(9) $Q(a)$ T,I,(4),(8)
(10) $Q(a)\wedge\neg Q(a)$ T,I,(6),(9),矛盾

因此，假设不成立，原推理形式正确。

示例 所有的有理数都是实数；所有的无理数也是实数；虚数不是实数。因此，虚数既不是有理数，也不是无理数。

解 个体域为全总域，需要引入的谓词包括：

Q(x)：x 是有理数；R(x)：x是实数；N(x)：x是无理数；C(x)：x是虚数。上述推理可符号化为：

前提：$\forall x(Q(x)\rightarrow R(x))$、$\forall x(N(x)\rightarrow R(x))$、$\forall x(C(x)\rightarrow \neg R(x))$

结论：$\forall x(C(x)\rightarrow (\neg Q(x) \wedge \neg N(x))$，

验证该结论的公式序列如下：

(1). $\forall x(Q(x)\rightarrow R(x))$ // P

(2). $Q(y)\rightarrow R(y)$ // US

(3). $\forall x(N(x)\rightarrow R(x))$ // P

(4). $N(y)\rightarrow R(y)$ // US

(5). $\forall x(C(x)\rightarrow \neg R(x))$ // P

(6). $C(y)\rightarrow \neg R(y)$ // US

(7). $C(y)$ // P(附加)

(8). $\neg R(y)$ // 分离规则，(6)和(7)

(9). $\neg Q(y)$ // 拒取式，(8)和(2)

(10). $\neg N(y)$ // 拒取式，(8)和(4)

(11). $\neg Q(y) \wedge \neg N(y)$ // 合取的引入

(12). $C(y)\rightarrow(\neg Q(y) \wedge \neg N(y)$ // T, I (7)和(11)

(13). $\forall x(C(x)\rightarrow (\neg Q(x) \wedge \neg N(x))$ //UG

示例 每个旅客或者坐头等舱或者坐二等舱；每个旅客当且仅当他富裕时坐头等舱；有些旅客富裕但并非所有的旅客都富裕。因此，有些旅客坐二等舱。

解 个体域为全总域，引入下列谓词：$P(x)$：x是旅客；$Q(x)$：x坐头等舱；$R(x)$：x坐二等舱；$S(x)$：x是富裕的。

原推理可符号化为：

前提：$\forall x(P(x)\rightarrow(Q(x)\vee R(x)))$、$\forall x(P(x)\rightarrow(Q(x)\leftrightarrow S(x)))$、$\exists x(P(x)\wedge S(x))$、$\neg(\forall x(P(x)\rightarrow S(x)))$

结论：$\exists x(P(x)\wedge R(x))$，验证该结论的公式序列如下：

(1). $\neg(\forall x(P(x)\rightarrow S(x)))$ // P

(2). $\exists x(P(x)\wedge\neg S(x))$ // T, I (2)

(3). $P(c)\wedge\neg S(c)$ // ES

(4). $P(c)$ // T, I (3)

(5). $\neg S(c)$ // T, I (3)

(6). $\forall x(P(x)\rightarrow(Q(x)\vee R(x)))$ // P

(7). $P(c)\rightarrow(Q(c)\vee R(c))$ // US, (6)

(8). $Q(c)\vee R(c)$ // T, I (4)(7)

(9). $\forall x(P(x)\rightarrow(Q(x)\leftrightarrow S(x)))$ //P

(10). $P(c)\rightarrow(Q(c)\leftrightarrow S(c))$ // US(9

(11). $Q(c)\leftrightarrow S(c)$ // T, I (4)(11

(12). $Q(c)\rightarrow S(c)$ // T, I(11)

(13). $\neg Q(c)$ // T, I (12)(5)

(14). $R(c)$ // T, I (13)(8)

(15). $P(c)\wedge R(c)$ // T, I(4)(14

(16). $\exists x(P(x)\wedge R(x))$ // EG

练习 每一个大学生不是文科生就是理科生；有的大学生爱好文学；小张不是文科生但他爱好文学。因此，如果小张是大学生，他就是理科生；

解：个体域取全总域，要引入的谓词包括：

P(x)： x 是一个大学生；Q(x)： x是文科生；S(x)： x 是理科生；T(x)： x 爱好文学。

要引入的个体常量是：c ： 小张。

因此上述推理可符号化为：

前提：$\forall x(P(x)\rightarrow(Q(x)\vee S(x)))$、$\exists x(P(x)\wedge T(x))$、$\neg Q(c)\wedge T(c)$

结论：$P(c)\rightarrow S(c)$，

验证该结论的公式序列为：

(1). $\neg Q(c) \wedge T(c)$ // P

(2). $\forall x(P(x) \rightarrow (Q(x) \vee S(x)))$ // P

(3). $P(c) \rightarrow (Q(c) \vee S(c))$ // US (2)

(4). $P(c)$ // P（附加）

(5). $Q(c) \vee S(c)$ // T, I (3)(4)

(6). $\neg Q(c)$ // T, I (1)

(7). $S(c)$ // T, I (5)(6)

(8). $P(c) \rightarrow S(c)$ //CP

示例

Consider the following problem. Suppose we believe that everybody loves somebody. And suppose we believe that everyone loves a lover. Please prove that Jack loves Jill.

$$\forall y. \exists z.\ loves(y,z)$$

$$\forall x. \forall y.(\exists z.loves(y,z) \rightarrow loves(x,y))$$

$$loves(jack,jill)$$

1. $\forall y. \exists z.loves(y,z)$	Premise
2. $\forall x. \forall y.(\exists z.loves(y,z) \rightarrow loves(x,y))$	Premise
3. $\exists z.loves(jill,z)$	US (1)
4. $\forall y.(\exists z.loves(y,z) \rightarrow loves(jack,y))$	US (2)
5. $\exists z.loves(jill,z) \rightarrow loves(jack,jill)$	US (4)
6. loves(jack,jill)	T, I (5),(3)

练习

Consider the following problem. Suppose we believe that everybody loves somebody. And suppose we believe that everyone loves a lover. Please prove that everyone loves everyone.

小结

谓词公式：个体、谓词、量词

范式

等值演算

逻辑推理