2017 年高等数学 A1 期末试卷答案

一填空题

1. $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial x}$； 2. $\frac{1}{e\sqrt{5}}$； 3. $e^{xy}\left(1+xy\right)\cos z$； 4. $12a$； 5. $(-1,1)$

二选择题

B； C；B；C；D。

三

11. 证明：由于 $a_n>0, b_n>0$，故 $\frac{a_{n+1}}{a_n}\le\frac{b_{n+1}}{b_n}\Leftrightarrow\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}\le\frac{a_n}{b_n}$

说明 $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}$ 是以个单调减少的数列，并且有 $\frac{a_n}{b_n}\le\frac{a_1}{b_1}$，从而 $a_n\le\frac{a_1}{b_1}b_n$

而 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 都是正项级数，由比较判别法知：

若 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛；

并且可得：若 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散，则 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 发散.

12.【证明】因为 y_1、y_2、y_3 是线性方程 $y'+P(x)y=Q(x)$ 的三个不同特解，

所以 y_3-y_1、y_3-y_1 是线性齐次方程 $y'+P(x)y=0$ 的两个不同特解，

而 $y'+P(x)y=0$ 的通解为 $y=Ce^{-\int P(x)dx}$，所以存在两个非零常数 C_1、C_2 使

$$y_3-y_1=C_1e^{-\int P(x)dx}，\quad y_2-y_1=C_2e^{-\int P(x)dx}$$

所以 $\frac{y_3-y_1}{y_2-y_1}=\frac{C_1}{C_2}$ 是常数。

13. 【证明】令 $v=x+at, w=x-at$，则 $u=\varphi(v)+\psi(w)$

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial u}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial t}=a\varphi'_v-a\psi'_w=a(\varphi'-\psi')$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial}{\partial t}(\frac{\partial u}{\partial t})=a(a\varphi''+a\psi'')=a^2(\varphi''+\psi'')$$

而 $\frac{\partial u}{\partial x}=\varphi'(v)+\psi'(w)$，$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\varphi''+\psi''$

$$\therefore\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

14. 【解】方程两边分别对 x, y 求偏导得

$$(4x+8z)+(2z+8x-1)\frac{\partial z}{\partial x}=0，\quad 4y+(2z+8x-1)\frac{\partial z}{\partial y}=0 \qquad (1)$$

令 $\frac{\partial z}{\partial x}=0$，$\frac{\partial z}{\partial y}=0$ 得 $(\frac{16}{7},0,-\frac{8}{7})$ 和 $(-2,0,1)$

（1）两边分别对 x, y 求偏导得 $\begin{cases}4+(2z+8x-1)\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+16\frac{\partial z}{\partial x}+2(\frac{\partial z}{\partial x})^2=0\\ 4+(2z+8x-1)\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+2(\frac{\partial z}{\partial y})^2=0\\ (2z+8x-1)\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+8\frac{\partial z}{\partial y}+2\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}=0\end{cases}$，

13. （1 式前者对 y 求偏导得方程的第三式）

当 $\frac{\partial z}{\partial x}=0$，$\frac{\partial z}{\partial y}=0$ 时 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\frac{4}{2z+8x-1}$，$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\frac{4}{2z+8x-1}$，$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=0$

对驻点 $(\frac{16}{7},0)$，所以 $AC-B^2>0$，$A<0$，即在 $(\frac{16}{7},0)$ 有极大值 $-\frac{8}{7}$；

对驻点 $(-2,0)$，所以 $AC-B^2>0$，$A<0$，即在 $(-2,0)$ 有极小值 1.

15. （1）解 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}(x^2+y^2)^{x^2y^2}=\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\exp\{x^2y^2\ln(x^2+y^2)\}$，又 $\lim\limits_{x\to0^+}x\ln x=0$，所以有

$\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}(x^2+y^2)\ln(x^2+y^2)\overset{x^2+y^2=t}{=}\lim\limits_{t\to0^+}t\ln t=0$。又 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}=\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{1}{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}}=0$，所以，

$\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}x^2y^2\ln(x^2+y^2)=0$ 从而 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}(x^2+y^2)^{x^2y^2}=1$

（2）解：原式 $=\int_{-1}^{0}e^xdx\int_{-x-1}^{x+1}e^ydy+\int_0^1e^xdx\int_{x+1}^{-x+1}e^ydy$

$$=\int_{-1}^{0}e^x\left[e^y\right]_{-x-1}^{x+1}dy+\int_0^1e^x\left[e^y\right]_{x-1}^{-x+1}dx$$

$$=\int_{-1}^{0}\left(e^{2x+1}-e^{-1}\right)dx+\int_0^1\left(e-e^{2x-1}\right)dx=\left[\frac{1}{2}e^{2x+1}-e^{-1}x\right]_{-1}^{0}+\left[ex-\frac{1}{2}e^{2x-1}\right]_0^1=e-e^1$$

16. 证：应用分部积分法，得

$$\int_0^1\left(\int_0^x f(t)dt\right)dx=[x\int_0^x f(t)dt]_0^1-\int_0^1 xf(x)dx=\int_0^1 f(t)dt-\int_0^1 xf(x)dx=\int_0^1(1-x)f(x)dx$$

17. 解：曲面方程 $z=1-x--y$，在 xoy 面上的投影为 $D_{xy}=\{(x,y)\mid 0\le x\le 1, 0\le y\le 1-x\}$，

则

$$\iint_{\Sigma} z^2dxdy=\iint_{D_{xy}}(1-x-y)^2dxdy=\int_0^1dx\int_0^{1-x}(1-x-y)^2dy=\frac{1}{12}$$

18.解：$\Sigma_1: z=1\ x^2+y^2\le 1$， $dS=dxdy,\ D_{xy}: x^2+y^2\le 1$

$\Sigma_2: z=\sqrt{x^2+y^2}\ (0\le z\le 1)$， $dS=\sqrt{2}dxdy.\ D_{xy}: x^2+y^2\le 1$

原式 $=\iint_{\Sigma_1}(x^2+y^2)dS+\iint_{\Sigma_2}(x^2+y^2)dS$

$=\iint_{D_{xy}}(x^2+y^2)dxdy+\sqrt{2}\iint_{D_{xy}}(x^2+y^2)dxdy$

$=(1+\sqrt{2})\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 r^3dr=\frac{1+\sqrt{2}}{2}\pi$