习 题 三

A 组

1．填空题.

（1）设 $\boldsymbol{a}=(1,1,1)$，$\boldsymbol{b}=(-1,-1,-1)$，则 $\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}=$________，$\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}=$________.

解 -3, $\begin{pmatrix}-1&-1&-1\\-1&-1&-1\\-1&-1&-1\end{pmatrix}$.

（2）设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&2\\-3&-3\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&-\frac{1}{3}\\-1&\frac{1}{3}\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{AB}=$________，$\boldsymbol{BA}=$________.

解 $\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}3&3\\-3&-3\end{pmatrix}$.

（3）若 $\boldsymbol{\alpha}=(1,\ \ 2,\ \ 3)$，$\boldsymbol{\beta}=\left(1,\ \ \frac{1}{2},\ \ \frac{1}{3}\right)$，$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}$，则 $\boldsymbol{A}^n=$________.

解 $3^{n-1}\begin{pmatrix}1&\frac{1}{2}&\frac{1}{3}\\2&1&\frac{2}{3}\\3&\frac{3}{2}&1\end{pmatrix}$.

（4）设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{pmatrix}$，正整数 $n\geq 2$，则 $\boldsymbol{A}^n-2\boldsymbol{A}^{n-1}=$________.

解 $\boldsymbol{0}$.

（5）设 $\boldsymbol{\alpha}=(1,\ \ 0,\ \ -1)^{\mathrm{T}}$，矩阵 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$，$n$ 为正整数，则 $\left|k\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^n\right|=$________.

解 $k^2(k-2^n)$.

（6）设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶矩阵，且 $|\boldsymbol{A}|=2$，则 $\left||\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\right|=$________，$|\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*|=$________.

解 2^{n+1}，2^n.

（7）$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}^{-1} =$________.

解 $\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.

（8）设 $a_1 a_2 \cdots a_n \neq 0$，则 $\begin{pmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{pmatrix}^{-1} =$________，$\begin{pmatrix} & & & a_1 \\ & & a_2 & \\ & \iddots & & \\ a_n & & & \end{pmatrix}^{-1} =$________.

解 $\begin{pmatrix} \frac{1}{a_1} & & & \\ & \frac{1}{a_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \frac{1}{a_n} \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} & & & \frac{1}{a_n} \\ & & \frac{1}{a_{n-1}} & \\ & \iddots & & \\ \frac{1}{a_1} & & & \end{pmatrix}$.

（9）设 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$，则 $(\boldsymbol{A}^*)^{-1} =$________.

解 $\frac{1}{10}\boldsymbol{A}$.

（10）设矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$，矩阵 $\boldsymbol{B}$ 满足 $\boldsymbol{BA} = \boldsymbol{B} + 2\boldsymbol{E}$，则 $\boldsymbol{B} =$________，$|\boldsymbol{B}| =$________.

解 $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$，$2$.

（11）设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均为三阶矩阵，$\boldsymbol{AB} = 2\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$，则 $(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{E})^{-1} =$________.

解 $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

（12）设三阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $|\boldsymbol{A}| = \frac{1}{2}$，$|(3\boldsymbol{A})^{-1} - 2\boldsymbol{A}^*| =$________.

解 $-\frac{16}{27}$.

（13）设 $\boldsymbol{A}$ 为 m 阶方阵，$\boldsymbol{B}$ 为 n 阶方阵，$|\boldsymbol{A}| = a$，$|\boldsymbol{B}| = b$，$\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{0} \end{pmatrix}$，则 $|\boldsymbol{C}| =$________.

解　$(-1)^{mn}ab$.

（14）设三阶矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&1&0\\1&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，矩阵 $\boldsymbol{B}$ 满足关系式 $\boldsymbol{ABA}^*=2\boldsymbol{BA}^*+\boldsymbol{E}$，其中 $\boldsymbol{A}^*$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵，则 $|\boldsymbol{B}|=$________.

解 $\dfrac{1}{9}$.

（15）设4阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩为1，则其伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^*$ 的秩为________.

解　0.

（16）设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_1b_1&a_1b_2&\cdots&a_1b_n\\a_2b_1&a_2b_2&\cdots&a_2b_n\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_nb_1&a_nb_2&\cdots&a_nb_n\end{pmatrix}$，其中 $a_i\neq0$，$b_i\neq0$ $(i=1,2,\cdots,n)$，则 $\boldsymbol{A}$ 的秩 $R(\boldsymbol{A})=$________.

解　1.

（17）设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}k&1&1&1\\1&k&1&1\\1&1&k&1\\1&1&1&k\end{pmatrix}$，且 $R(\boldsymbol{A})=3$，则 $k=$________.

解　-3.

（18）设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}4&0\\-1&-2\end{pmatrix}$，则将 $\boldsymbol{A}$ 可以表示成以下三个初等矩阵的乘积________.

解　$\begin{pmatrix}4&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&-2\end{pmatrix}$.

2．选择题.

（1）设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵，$\boldsymbol{B}$ 是 $n\times p$ 矩阵，$\boldsymbol{C}$ 是 $p\times m$ 矩阵，m、n、p 互不相等，则下列运算没有意义的是________.

（A）$\boldsymbol{C}+(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}$；　（B）$\boldsymbol{ABC}$；　（C）$(\boldsymbol{BC})^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{A}$；　（D）$\boldsymbol{AC}^{\mathrm{T}}$.

解　D.

（2）设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵 $(m\neq n)$，$\boldsymbol{B}$ 是 $n\times m$ 矩阵，则下列________的运算结果是 n 阶方阵.

（A）$\boldsymbol{AB}$；　（B）$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{T}$；　（C）$\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$；　（D）$(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}$.

解　B.

（3）设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是 n 阶方阵，$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{0}$，则有________.

（A）$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}=\boldsymbol{0}$；（B）$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{0}$；（C）$|\boldsymbol{A}|=0$ 或 $|\boldsymbol{B}|=0$；（D）$|\boldsymbol{A}|+|\boldsymbol{B}|=0$.

解 C.

（4）设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 都是 n 阶矩阵，则必有________.

（A）$|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{A}|+|\boldsymbol{B}|$；（B）$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$；

（C）$|\boldsymbol{AB}|=|\boldsymbol{BA}|$；（D）$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{-1}=\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1}$.

解 C.

（5）设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是 n 阶方阵，下列结论正确的是________.

（A）若 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均可逆，则 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 可逆；（B）若 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均可逆，则 $\boldsymbol{AB}$ 可逆；

（C）若 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 可逆，则 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}$ 可逆；（D）若 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 可逆，则 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均可逆.

解 B.

（6）设 n 阶方阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 满足关系式 $\boldsymbol{ABC}=\boldsymbol{E}$，则必有________.

（A）$\boldsymbol{ACB}=\boldsymbol{E}$；（B）$\boldsymbol{CBA}=\boldsymbol{E}$；（C）$\boldsymbol{BAC}=\boldsymbol{E}$；（D）$\boldsymbol{BCA}=\boldsymbol{E}$.

解 D.

（7）设 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{A}^{-1}+\mathbf{B}^{-1}$ 均为 n 阶可逆矩阵，则 $(\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1})^{-1}$ 等于________

（A）$\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1}$；（B）$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$；（C）$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{B}$；（D）$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{-1}$.

解 C.

（8）设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 均为 n 阶矩阵，若 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{E}+\boldsymbol{AB}$，$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{CA}$，则 $\boldsymbol{B}-\boldsymbol{C}$ 为________.

（A）$\boldsymbol{E}$；（B）$-\boldsymbol{E}$；（C）$\boldsymbol{A}$；（D）$-\boldsymbol{A}$.

解 A.

（9）设矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{3\times3}$ 满足 $\boldsymbol{A}^*=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$，其中 $\boldsymbol{A}^*$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵，$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的转置矩阵．若 a_{11},a_{12},a_{13} 为三个相等的正数，则 a_{11} 为________.

（A）$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$；（B）3；（C）$\dfrac{1}{3}$；（D）$\sqrt{3}$.

解 A.

（10）设三阶矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$，若 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵的秩为 1，则必有________.

（A）$a=b$ 或 $a+2b=0$；（B）$a=b$ 或 $a+2b\neq0$；

（C）$a\neq b$ 且 $a+2b=0$；（D）$a\neq b$ 且 $a+2b\neq0$.

解　C.

（11）设 $\boldsymbol{A}^*$，$\boldsymbol{B}^*$ 分别为 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 对应的伴随矩阵，分块矩阵 $\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{B}\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{C}$ 的伴随矩阵 $\boldsymbol{C}^*=$________.

（A）$\begin{pmatrix}|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^* & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & |\boldsymbol{B}|\boldsymbol{B}^*\end{pmatrix}$；　　（B）$\begin{pmatrix}|\boldsymbol{B}|\boldsymbol{B}^* & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^*\end{pmatrix}$；

（C）$\begin{pmatrix}|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{B}^* & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & |\boldsymbol{B}|\boldsymbol{A}^*\end{pmatrix}$；　　（D）$\begin{pmatrix}|\boldsymbol{B}|\boldsymbol{A}^* & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{B}^*\end{pmatrix}$.

解　D.

（12）设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 都是 n 阶非零矩阵，且 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{0}$，则 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 的秩________.

（A）必有一个等于零；　　（B）都小于 n；

（C）一个小于 n，一个等于 n；　　（D）都等于 n.

解　B.

（13）下列矩阵中，________不是初等矩阵.

（A）$\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$；　（B）$\begin{pmatrix}0&0&1\\0&-1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$；　（C）$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&3&0\\0&0&1\end{pmatrix}$；　（D）$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\5&0&1\end{pmatrix}$.

解　B.

（14）设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{31}+a_{11}&a_{32}+a_{12}&a_{33}+a_{13}\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{P}_1=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{P}_2=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$，则必有

（A）$\boldsymbol{AP}_1\boldsymbol{P}_2=\boldsymbol{B}$；　（B）$\boldsymbol{AP}_2\boldsymbol{P}_1=\boldsymbol{B}$；　（C）$\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$；　（D）$\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$.

解　C.

（15）设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶矩阵，将 $\boldsymbol{A}$ 的第 2 行加到第 1 行得 $\boldsymbol{B}$，再将 $\boldsymbol{B}$ 的第 1 列的 -1 倍加到第 2 列得 $\boldsymbol{C}$，记 $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，则________.

（A）$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$；　（B）$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{PAP}^{-1}$；　（C）$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AP}$；　（D）$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{PAP}^{\mathrm{T}}$.

解　B.

（16）设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 等价，则必有________.

（A）当 $|\boldsymbol{A}|=a(a\neq 0)$ 时，$|\boldsymbol{B}|=a$；　　（B）当 $|\boldsymbol{A}|=a(a\neq 0)$ 时，$|\boldsymbol{B}|=-a$；

（C）当$|\boldsymbol{A}|\neq 0$时，$|\boldsymbol{B}|=0$；　　　　（D）当$|\boldsymbol{A}|=0$时，$|\boldsymbol{B}|=0$.

解　D.

（17）设$\boldsymbol{A}$是3阶方阵，将$\boldsymbol{A}$的第1列与第2列交换得$\boldsymbol{B}$，再把$\boldsymbol{B}$的第2列加到第3列得$\boldsymbol{C}$，则满足$\boldsymbol{AQ}=\boldsymbol{C}$的可逆矩阵$\boldsymbol{Q}$为________.

（A）$\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\1&0&1\end{pmatrix}$；　（B）$\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&0&1\end{pmatrix}$；　（C）$\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&1&1\end{pmatrix}$；　（D）$\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.

解　D.

（18）设$\boldsymbol{A}$为n（$n\geq 2$）阶可逆矩阵，交换$\boldsymbol{A}$的第1行与第2行得矩阵$\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{A}^*,\boldsymbol{B}^*$分别为$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$的伴随矩阵，则________.

（A）交换$\boldsymbol{A}^*$的第1列与第2列得$\boldsymbol{B}^*$；　　（B）交换$\boldsymbol{A}^*$的第1行与第2行得$\boldsymbol{B}^*$；

（C）交换$\boldsymbol{A}^*$的第1列与第2列得$-\boldsymbol{B}^*$；　　（D）交换$\boldsymbol{A}^*$的第1行与第2行得$-\boldsymbol{B}^*$.

解　C.

3．已知矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&3\\-2&-1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2&0\\1&2\end{pmatrix}$，求$2\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$，$3\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{AB}$，$\boldsymbol{A}^3+2\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}$.

解

$$2\boldsymbol{A}=2\begin{pmatrix}1&3\\-2&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&6\\-4&-2\end{pmatrix};$$

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&3\\-2&-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2&0\\1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&3\\-1&1\end{pmatrix};$$

$$3\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{B}=3\begin{pmatrix}1&3\\-2&-1\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}2&0\\1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&9\\-8&-7\end{pmatrix};$$

$$\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix}1&3\\-2&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&0\\1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&6\\-5&-2\end{pmatrix};$$

$$\boldsymbol{A}^3+2\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}1&3\\-2&-1\end{pmatrix}^3+2\begin{pmatrix}1&3\\-2&-1\end{pmatrix}^2+\begin{pmatrix}1&3\\-2&-1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-15&-12\\8&-7\end{pmatrix}.$$

4．设$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&-1\\1&-1&1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&2&3\\-1&-2&4\\0&5&1\end{pmatrix}$，求$2\boldsymbol{AB}-3\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$.

解

$$2AB-3A=2\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&-1\\1&-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\-1&-2&4\\0&5&1\end{pmatrix}-3\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&-1\\1&-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3&7&13\\-3&-13&15\\1&21&-3\end{pmatrix};$$

$$A^{\mathrm{T}}B^{T}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&-1\\1&-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1&0\\2&-2&5\\3&4&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6&1&6\\0&-7&4\\2&5&-4\end{pmatrix}.$$

5．计算下列矩阵的乘积．

（1）$(a,\quad b,\quad c)\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$；

（2）$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}(x,\quad y,\quad z)$；

（3）$\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}(-1,\quad 2)$；

（4）$\begin{pmatrix}4&3&1\\1&-2&3\\5&7&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}7\\2\\1\end{pmatrix}$；

（5）$\begin{pmatrix}2&1&4&0\\1&-1&3&-4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&3&1\\0&-1&2\\-1&-3&1\\4&0&-2\end{pmatrix}$；

（6）$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\k&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\\a_{31}&a_{32}\end{pmatrix}$；

（7）$(x_1,\quad x_2,\quad x_3)\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{12}&a_{22}&a_{23}\\a_{13}&a_{23}&a_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$；

（8）$\begin{pmatrix}1&2&1&0\\0&1&0&1\\0&0&-2&1\\0&0&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&3&1\\0&1&2&-1\\0&0&2&-3\\0&0&0&3\end{pmatrix}$.

解

（1）原式$=ax+by+cz$；

（2）原式$=\begin{pmatrix}x^2&xy&xz\\xy&y^2&yz\\xz&yz&z^2\end{pmatrix}$；

（3）原式$=\begin{pmatrix}-3&6\\-2&4\\-1&2\end{pmatrix}$；

（4）原式$=\begin{pmatrix}35\\6\\49\end{pmatrix}$；

（5）原式$=\begin{pmatrix}-2&-7&8\\-18&-5&10\end{pmatrix}$；

（6）原式$=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31}+ka_{11} & a_{32}+ka_{12} \end{pmatrix}$；

（7）原式$= a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 \quad + 2a_{23}x_2x_3$；

（8）原式$=\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{E} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A}_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{E} & \boldsymbol{B}_1 \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{B}_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{B}_1+\boldsymbol{B}_2 \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A}_2\boldsymbol{B}_2 \end{pmatrix}$，其中

$$\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{B}_1+\boldsymbol{B}_2=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 9 & -4 \\ 2 & 2 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{B}_2=\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -4 & 9 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

所以，

$$\text{原式}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 9 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -4 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

6．设$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$，问

（1）$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$吗？

（2）$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^2=\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{B}^2$吗？

（3）$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})=\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{B}^2$吗？

解

（1）因为

$$\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{BA}=\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 6 \end{pmatrix},$$

所以，$\boldsymbol{AB}\neq\boldsymbol{BA}$.

（2）因为

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^2=\begin{pmatrix} 8 & 14 \\ 14 & 29 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{B}^2=\begin{pmatrix} 6 & 12 \\ 13 & 31 \end{pmatrix},$$

所以，$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^2\neq\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{B}^2$.

（3）因为

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})=\begin{pmatrix} 0 & -6 \\ 0 & -9 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{B}^2=\begin{pmatrix} -2 & -8 \\ -1 & -7 \end{pmatrix},$$

所以，$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})\neq \boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{B}^2$.

7．举例说明下列命题是错误的.

（1）若 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{0}$，则 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{0}$；

（2）若 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$，则 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{0}$ 或 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$；

（3）若 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{AY}$，且 $\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{0}$，则 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{Y}$.

解

（1）设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix}\neq\boldsymbol{0}$，但 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{0}$；

（2）设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{E}$，$\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{0}$，但 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$；

（3）设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{Y}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$，此时，$\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{0}$，$\boldsymbol{X}\neq\boldsymbol{Y}$，但 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{AY}$.

8．设 k 为正整数，求 $\boldsymbol{A}^k$，其中

（1）$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ \lambda & 1\end{pmatrix}$；　　（2）$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\lambda & 1 & 0\\ 0 & \lambda & 1\\ 0 & 0 & \lambda\end{pmatrix}$.

解　（1）由于

$$\boldsymbol{A}^2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2\lambda & 1\end{pmatrix},\qquad \boldsymbol{A}^3=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 3\lambda & 1\end{pmatrix},\qquad \cdots,$$

归纳得到 $\boldsymbol{A}^k=\begin{pmatrix}1 & 0\\ k\lambda & 1\end{pmatrix}$，再用归纳法证明之.

（2）计算得到

$$\boldsymbol{A}^2=\begin{pmatrix}\lambda^2 & 2\lambda & 1\\ 0 & \lambda^2 & 2\lambda\\ 0 & 0 & \lambda^2\end{pmatrix},\qquad \boldsymbol{A}^3=\begin{pmatrix}\lambda^3 & 3\lambda^2 & 3\lambda\\ 0 & \lambda^3 & 3\lambda^2\\ 0 & 0 & \lambda^3\end{pmatrix},\qquad \boldsymbol{A}^4=\begin{pmatrix}\lambda^4 & 4\lambda^3 & 6\lambda^2\\ 0 & \lambda^4 & 4\lambda^3\\ 0 & 0 & \lambda^4\end{pmatrix},\qquad \cdots,$$

归纳出

$$\boldsymbol{A}^k=\begin{pmatrix}\lambda^k & k\lambda^{k-1} & \frac{k(k-1)}{2}\lambda^{k-2}\\ 0 & \lambda^k & k\lambda^{k-1}\\ 0 & 0 & \lambda^k\end{pmatrix},$$

再用归纳法证明之.

9．设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3 & 2 & 0\\ 0 & 3 & 2\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}$，求满足 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$ 的矩阵 $\boldsymbol{B}$.

解　设

$$B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{31} & b_{32} \end{pmatrix},$$

则由 $AB=BA$ 可得

$$\begin{cases} 3b_{11} = 3b_{11}+2b_{21}, \\ 2b_{11}+3b_{12}=3b_{12}+2b_{22}, \\ 2b_{12}+3b_{13}=3b_{13}+2b_{23}, \\ 3b_{21} = 3b_{21}+2b_{31}, \\ 2b_{21}+3b_{22}=3b_{22}+2b_{32}, \\ 2b_{22}+3b_{23}=3b_{23}+2b_{33}, \\ 3b_{31} = 3b_{31}, \\ 2b_{31}+3b_{32}=3b_{32}, \\ 2b_{32}+3b_{33}=3b_{33}. \end{cases}$$

解之，可得

$$\begin{cases} b_{31}=b_{32}=b_{21}=0, \\ b_{11}=b_{22}=b_{33}, \\ b_{12}=b_{23}, \\ b_{13}=b_{13}. \end{cases}$$

因此，

$$B=\begin{pmatrix} x & y & z \\ 0 & x & y \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix}.$$

10．设 A, B 均为 n 阶矩阵，证明

（1）若 A 是对称矩阵，则 $B^{\mathrm{T}}AB$ 也是对称矩阵；

（2）若 A, B 都是对称矩阵，则 AB 是对称矩阵的充分必要条件是 $AB=BA$．

证明

（1）因为　$(B^{\mathrm{T}}AB)^{\mathrm{T}}=B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}(B^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=B^{\mathrm{T}}AB$，所以，$B^{\mathrm{T}}AB$ 也是对称矩阵．

（2）$(AB)^{\mathrm{T}}=AB \iff B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}=AB \iff BA=AB$．

11．设 A 是 n 阶对称矩阵，B 为 n 阶反对称矩阵，证明

（1）B^2 是对称矩阵；

（2）$AB-BA$ 是对称矩阵，$AB+BA$ 是反对称矩阵．

证明　（1）因为 $(B^2)^{\mathrm{T}}=B^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}}=(-B)(-B)=B^2$，所以，$B^2$ 是对称矩阵．

（2）因为

$$\left(AB-BA\right)^{\mathrm{T}}=\left(AB\right)^{\mathrm{T}}-\left(BA\right)^{\mathrm{T}}=B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}-A^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}}=\left(-B\right)A-A\left(-B\right)=AB-BA,$$

所以，$AB-BA$ 是对称矩阵.

因为

$$\left(AB+BA\right)^{\mathrm{T}}=\left(AB\right)^{\mathrm{T}}+\left(BA\right)^{\mathrm{T}}=B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}+A^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}}=\left(-B\right)A+A\left(-B\right)=-\left(AB+BA\right),$$

所以，$AB+BA$ 是反对称矩阵.

*12．对以下矩阵 A 和 B，分别求 $A\otimes B$ 和 $B\otimes A$.

（1）$A=\begin{pmatrix}-1&5\\3&4\end{pmatrix}$，　$B=\begin{pmatrix}-1&4\\2&-3\end{pmatrix}$；　　（2）$A=\begin{pmatrix}1&2\\0&-1\end{pmatrix}$，　$B=\begin{pmatrix}2&-1\\3&0\\1&1\end{pmatrix}$，

解 直接由定义计算.

（1）

$$A\otimes B=\begin{pmatrix}-B&5B\\3B&4B\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-4&-5&20\\-2&3&10&-15\\-3&12&-4&16\\6&-9&8&-12\end{pmatrix},$$

$$B\otimes A=\begin{pmatrix}-A&4A\\2A&-3A\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-5&-4&20\\-3&-4&12&16\\-2&10&3&-15\\6&8&-9&-12\end{pmatrix}.$$

（2）

$$A\otimes B=\begin{pmatrix}B&2B\\0B&-B\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&-1&4&-2\\3&0&6&0\\1&1&2&2\\0&0&-2&1\\0&0&-3&0\\0&0&-1&-1\end{pmatrix},$$

$$B\otimes A=\begin{pmatrix}2A&-A\\3A&0A\\A&A\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&4&-1&-2\\0&-2&0&1\\3&6&0&0\\0&-3&0&0\\1&2&1&2\\0&-1&0&-1\end{pmatrix}.$$

13．证明奇数阶反对称矩阵一定不满秩.

证明　设 A 是 n 阶反对称矩阵，则

$$A^{\mathrm{T}} = -A;$$
$$|A| = |A^{\mathrm{T}}| = |-A| = (-1)^n |A|;$$
$$[1-(-1)^n]|A| = 0.$$

因为n是奇数，所以$|A| = 0$，A不满秩.

14．设A为n阶矩阵$A^{\mathrm{T}}A = E$，$|A| < 0$，证明$|E + A| = 0$.

证明 因为

$$|E + A| = |A^{\mathrm{T}}A + A| = |A^{\mathrm{T}} + E|\ |A| = |A + E||A|$$

所以，

$$\left[1 - |A|\right]|E + A| = 0,$$

即$|E + A| = 0$.

15．求下列矩阵的逆矩阵.

（1）$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 2 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$； （2）$\begin{pmatrix} -11 & 2 & 2 \\ -4 & 0 & 1 \\ 6 & -1 & -1 \end{pmatrix}$； （3）$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

解

（1）$-\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} -11 & 4 & -8 \\ 4 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$； （2）$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 8 \end{pmatrix}$； （3）$\dfrac{1}{24}\begin{pmatrix} 24 & 0 & 0 & 0 \\ -12 & 12 & 0 & 0 \\ -12 & -4 & 8 & 0 \\ 3 & -5 & -2 & 6 \end{pmatrix}$.

16．利用逆矩阵解下列方程组，

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 2, \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 = 1, \\ 3x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 0. \end{cases}$$

解 原方程组写成矩阵形式有

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -3 \\ 3 & 2 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

因此，

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -3 \\ 3 & 2 & -5 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

17．设A为n阶可逆矩阵，且每一行元素之和都等于常数$a\,(a \neq 0)$，证明A的逆矩阵的每一行元素

之和为a^{-1}.

证明 由题意有

$$\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\a\\\vdots\\a\end{pmatrix}=a\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix},$$

因此，

$$\frac{1}{a}\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix}=\boldsymbol{A}^{-1}\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix},$$

上式说明结论成立.

18．设$\boldsymbol{A}^k=\boldsymbol{0}$，$k$为正整数，证明

$$(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})^{-1}=\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}+\cdots+\boldsymbol{A}^{k-1}.$$

证明 由

$$(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}+\cdots+\boldsymbol{A}^{k-1})=\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}+\cdots+\boldsymbol{A}^{k-1}-\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}^2-\cdots-\boldsymbol{A}^k=\boldsymbol{E}.$$

可知等式成立.

19．已知$\boldsymbol{E}+\boldsymbol{AB}$可逆，试证$\boldsymbol{E}+\boldsymbol{BA}$也可逆，且

$$(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{BA})^{-1}=\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{AB})^{-1}\boldsymbol{A}.$$

证明 由题设有

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{BA})\left[\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}\left(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{AB}\right)^{-1}\boldsymbol{A}\right]&=\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}\left(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{AB}\right)^{-1}\boldsymbol{A}+\boldsymbol{BA}-\boldsymbol{BAB}\left(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{AB}\right)^{-1}\boldsymbol{A}\\&=\boldsymbol{E}+\boldsymbol{BA}-\boldsymbol{B}\left[\boldsymbol{E}+\boldsymbol{AB}\right]\left(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{AB}\right)^{-1}\boldsymbol{A}\\&=\boldsymbol{E}+\boldsymbol{BA}-\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{E}.\end{aligned}$$

因此，结论成立.

20. 设n阶矩阵$\boldsymbol{A}$满足$\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{A}-4\boldsymbol{E}=\boldsymbol{0}$，证明$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}$均可逆，并求$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})^{-1}$、$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})^{-1}$.

解 由已知等式可得

$$(\frac{1}{4}\boldsymbol{A})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})=\boldsymbol{E},$$

$$\frac{1}{2}(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})=\boldsymbol{E}.$$

因此，

$$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})^{-1}=\frac{1}{4}\boldsymbol{A},$$

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})^{-1}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}).$$

21．设三阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_i = i\boldsymbol{\alpha}_i\ (i=1, 2, 3)$，其中，列向量 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,\ 2,\ 2)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(2,\ -2,\ 1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(-2,\ -1,\ 2)^{\mathrm{T}}$，试求矩阵 $\boldsymbol{A}$．

解 由已条件有

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}_1\quad \boldsymbol{\alpha}_2\quad \boldsymbol{\alpha}_3)=(\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1\quad \boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2\quad \boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_3)=(\boldsymbol{\alpha}_1\quad 2\boldsymbol{\alpha}_2\quad 3\boldsymbol{\alpha}_3),$$

即

$$\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}1 & 2 & -2\\ 2 & -2 & -1\\ 2 & 1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 4 & -6\\ 2 & -4 & -3\\ 2 & 2 & 6\end{pmatrix}.$$

而

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 4 & -6\\ 2 & -4 & -3\\ 2 & 2 & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & -2\\ 2 & -2 & -1\\ 2 & 1 & 2\end{pmatrix}^{-1}=\frac{1}{9}\begin{pmatrix}1 & 4 & -6\\ 2 & -4 & -3\\ 2 & 2 & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & 2\\ 2 & -2 & 1\\ -2 & -1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{7}{3} & 0 & -\frac{2}{3}\\ 0 & \frac{5}{3} & -\frac{2}{3}\\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & 2\end{pmatrix}.$$

22．已知矩阵方程 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}+\boldsymbol{B}$，其中 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ -1 & 1 & 1\\ -1 & 0 & -1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & 0\\ 5 & -3\end{pmatrix}$，求矩阵 $\boldsymbol{X}$．

解 由题设可得 $\boldsymbol{X}=(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B}$．而

$$(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 1 & 0 & -1\\ 1 & 0 & 2\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3}\\ -1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3}\\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3}\end{pmatrix},$$

故有

$$\boldsymbol{X}=(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}3 & -1\\ 2 & 0\\ 1 & -1\end{pmatrix}.$$

23．设三阶方阵 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 满足关系式 $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}=6\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}$，且 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{4} & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{7}\end{pmatrix}$，试求矩阵 $\boldsymbol{B}$．

解 由题设可得

$$\left(A^{-1}-E\right)BA=6A,$$

$$B=6\left(A^{-1}-E\right)^{-1}AA^{-1}=6\left[A^{-1}\left(E-A\right)\right]^{-1}=6\left(E-A\right)^{-1}A.$$

另一方面，

$$(E-A)^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{3}{2} & & \\ & \frac{4}{3} & \\ & & \frac{7}{6}\end{pmatrix},$$

$$B=6\begin{pmatrix}\frac{3}{2} & & \\ & \frac{4}{3} & \\ & & \frac{7}{6}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & & \\ & \frac{1}{4} & \\ & & \frac{1}{7}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

24．已知三阶矩阵 A 的逆矩阵为 $A^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 3\end{pmatrix}$，求伴随矩阵 A^* 的逆矩阵.

解 利用 $A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*$ 得到 $E=A^{-1}A=\left(\frac{1}{|A|}A^*\right)A=A^*\left(\frac{1}{|A|}A\right)$，所以，

$$(A^*)^{-1}=\frac{1}{|A|}A=\left|A^{-1}\right|A.$$

而 $\left|A^{-1}\right|=2$，故

$$(A^*)^{-1}=2(A^{-1})^{-1}=2\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 3\end{pmatrix}^{-1}=2\begin{pmatrix}\frac{5}{2} & -1 & -\frac{1}{2}\\ -1 & 1 & 0\\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & -2 & -1\\ -2 & 2 & 0\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

25．设有 $P=\begin{pmatrix}-1 & -4\\ 1 & 2\end{pmatrix}$，$\Lambda=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -2\end{pmatrix}$，$P^{-1}AP=\Lambda$，求 A^{15}.

解 由条件可得

$$A^{15}=P\left(P^{-1}AP\right)^{15}P^{-1}=P\Lambda^{15}P^{-1}$$

$$=\begin{pmatrix}-1 & -4\\ 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -2\end{pmatrix}^{15}\begin{pmatrix}1 & 2\\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1-2^{16} & -2-2^{16}\\ 1+2^{15} & 2+2^{15}\end{pmatrix}.$$

26．求下列分块矩阵的乘积，其中 A, B, E 均为 n 阶矩阵.

（1） $A^{-1}\begin{pmatrix}A & E\end{pmatrix}$；　（2） $\begin{pmatrix}A & E\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix}A & E\end{pmatrix}$；　（3） $\begin{pmatrix}A\\ E\end{pmatrix}A^{-1}$；

（4） $\begin{pmatrix}A^{-1}\\ E\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A & E\end{pmatrix}$；　（5） $\begin{pmatrix}0 & E\\ E & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A\\ B\end{pmatrix}$；　（6） $\begin{pmatrix}E & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A\\ B\end{pmatrix}$.

解

（1） $\begin{pmatrix}E & A^{-1}\end{pmatrix}$；　（2） $\begin{pmatrix}A^{\mathrm{T}}A & A^{\mathrm{T}}\\ A & E\end{pmatrix}$；　（3） $\begin{pmatrix}E\\ A^{-1}\end{pmatrix}$；

（4） $\begin{pmatrix}E & A^{-1}\\ A & E\end{pmatrix}$；　（5） $\begin{pmatrix}B\\ A\end{pmatrix}$；　（6） $\begin{pmatrix}A\\ 0\end{pmatrix}$.

27．设 k 为正整数，

$$A=\begin{pmatrix}3 & 4 & 0 & 0\\ 4 & -3 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 4\\ 0 & 0 & 0 & 2\end{pmatrix},$$

求 $\left|A^{2k}\right|$，A^{2k}.

解

$$\left|A^{2k}\right|=\left|A\right|^{2k}=\left(\begin{vmatrix}3 & 4\\ 4 & -3\end{vmatrix}\times\begin{vmatrix}2 & 4\\ 0 & 2\end{vmatrix}\right)^{2k}=100^{2k}.$$

$$A^{2k}=\begin{pmatrix}A_1 & 0\\ 0 & A_2\end{pmatrix}^{2k}=\begin{pmatrix}A_1^{2k} & 0\\ 0 & A_2^{2k}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5^{2k} & 0 & 0 & 0\\ 0 & 5^{2k} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 4^k & k4^{k+1}\\ 0 & 0 & 0 & 4^k\end{pmatrix}.$$

28．设 A, B 分别为 r 阶和 S 阶可逆矩阵，求下列分块矩阵的逆矩阵.

（1） $\begin{pmatrix}0 & A\\ B & 0\end{pmatrix}$；　（2） $\begin{pmatrix}A & 0\\ C & B\end{pmatrix}$.

解 （1）设

$$\begin{pmatrix}0 & A\\ B & 0\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}X_1 & X_2\\ X_3 & X_4\end{pmatrix},$$

其中，$\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_4$是$r$阶和$S$阶方阵，则有

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{0} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{X}_1 & \boldsymbol{X}_2 \\ \boldsymbol{X}_3 & \boldsymbol{X}_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{AX}_3 & \boldsymbol{AX}_4 \\ \boldsymbol{BX}_1 & \boldsymbol{BX}_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{E}_r & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{E}_s \end{pmatrix}.$$

比较最后两个分块矩阵，得到矩阵方程组

$$\begin{cases} \boldsymbol{AX}_3=\boldsymbol{E}_r, \\ \boldsymbol{AX}_4=\boldsymbol{0}, \\ \boldsymbol{BX}_1=\boldsymbol{0}, \\ \boldsymbol{BX}_2=\boldsymbol{E}_s. \end{cases}$$

解之，得到

$$\begin{cases} \boldsymbol{X}_3=\boldsymbol{A}^{-1}, \\ \boldsymbol{X}_4=\boldsymbol{0}, \\ \boldsymbol{X}_1=\boldsymbol{0}, \\ \boldsymbol{X}_2=\boldsymbol{B}^{-1}. \end{cases}$$

因此，

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{0} \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{0} & \boldsymbol{B}^{-1} \\ \boldsymbol{A}^{-1} & \boldsymbol{0} \end{pmatrix}.$$

（2）设

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{B} \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{X}_1 & \boldsymbol{X}_2 \\ \boldsymbol{X}_3 & \boldsymbol{X}_4 \end{pmatrix},$$

其中，$\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_4$是$r$阶和$S$阶方阵，则有

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{B} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{X}_1 & \boldsymbol{X}_2 \\ \boldsymbol{X}_3 & \boldsymbol{X}_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{AX}_1 & \boldsymbol{AX}_2 \\ \boldsymbol{CX}_1+\boldsymbol{BX}_3 & \boldsymbol{CX}_2+\boldsymbol{BX}_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{E}_r & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{E}_s \end{pmatrix}.$$

比较最后两个分块矩阵，得到矩阵方程组

$$\begin{cases} \boldsymbol{AX}_1=\boldsymbol{E}_r, \\ \boldsymbol{AX}_2=\boldsymbol{0}, \\ \boldsymbol{CX}_1+\boldsymbol{BX}_3=\boldsymbol{0}, \\ \boldsymbol{CX}_2+\boldsymbol{BX}_4=\boldsymbol{E}_s. \end{cases}$$

解之，得到

$$\begin{cases} \boldsymbol{X}_1=\boldsymbol{A}^{-1}, \\ \boldsymbol{X}_2=\boldsymbol{0}, \\ \boldsymbol{X}_3=-\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{CA}^{-1}, \\ \boldsymbol{X}_4=\boldsymbol{B}^{-1}. \end{cases}$$

因此，

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{B} \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}^{-1} & \boldsymbol{0} \\ -\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{CA}^{-1} & \boldsymbol{B}^{-1} \end{pmatrix}.$$

29．用矩阵的分块法求下列矩阵的逆矩阵．

（1）$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$；

（2）$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 8 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$；

（3）$\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 & 0 & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a & b \\ 0 & 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$；

（4）$\begin{pmatrix} 0 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} \\ a_n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$，$\prod_{i=1}^{n} a_i \neq 0$.

解

（1）$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ -2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$；

（2）$\begin{pmatrix} 4 & -\frac{3}{2} & 0 & 0 \\ -1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -4 & \frac{3}{2} & 1 & 0 \\ 3 & -\frac{7}{6} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$；

（3）$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0 & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -a & a^2-b \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$；

（4）将矩阵分块可得

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A}_1 \\ \boldsymbol{A}_2 & \boldsymbol{0} \end{pmatrix}.$$

这里，$\boldsymbol{A}_2^{-1} = (a_n)^{-1} = a_n^{-1}$，

$$\boldsymbol{A}_1^{-1} = \begin{pmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{n-1} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} a_1^{-1} & & & \\ & a_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{n-1}^{-1} \end{pmatrix}.$$

所以，

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{0} & A_2^{-1} \\ A_1^{-1} & \boldsymbol{0} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n^{-1} \\ a_1^{-1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a_2^{-1} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & a_{n-1}^{-1} & 0 \end{pmatrix}.$$

30．用初等变换求下列矩阵的秩

（1）$\begin{pmatrix} 4 & -1 & 3 & -2 \\ 3 & -1 & 4 & -2 \\ 3 & -2 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$；　（2）$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 5 & -1 \\ 2 & 0 & 3 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 4 & -1 \end{pmatrix}$；

（3）$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 5 \\ 5 & 4 & 3 & 3 & -1 \end{pmatrix}$；　（4）$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 8 & 3 & 7 \\ 2 & -3 & 0 & 7 & -5 \\ 3 & -2 & 5 & 8 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

解　（1）3；（2）3；（3）3；（4）3．

31．设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶可逆矩阵，将 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行和第 j 行互换后得到的矩阵记为 $\boldsymbol{B}$，

（1）证明 $\boldsymbol{B}$ 可逆；　（2）求 $\boldsymbol{AB}^{-1}$ ．

证明

（1）根据行列式的性质有，$|\boldsymbol{B}|=-|\boldsymbol{A}|\neq 0$，故 $\boldsymbol{B}$ 可逆.

（2）因为 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{E}(i,\ j)\boldsymbol{A}$，所以，

$$\boldsymbol{AB}^{-1}=\boldsymbol{A}\left[\boldsymbol{E}(i,\ j)\boldsymbol{A}\right]^{-1}=\boldsymbol{AA}^{-1}\boldsymbol{E}(i,j)^{-1}=\boldsymbol{E}(i,j).$$

32．用初等变换法求下列矩阵的逆矩阵.

（1）$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 8 \end{pmatrix}$；　（2）$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$；

（3）$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$；　（4）$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

解

（1）$\begin{pmatrix} -11 & 2 & 2 \\ -4 & 0 & 1 \\ 6 & -1 & -1 \end{pmatrix}$；（2）$\begin{pmatrix} \frac{7}{6} & \frac{2}{3} & -\frac{3}{2} \\ -1 & -1 & 2 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$；

（3）$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$；（4）$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & 6 \\ 2 & 1 & -6 & -10 \end{pmatrix}$.

*33．求下列矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的广义逆 $\boldsymbol{A}^{-}$.

（1）$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$；（2）$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$；（3）$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$；（4）$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

解 （1）对矩阵进行初等变换可得

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2+(-2)r_1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

可见 $R(\boldsymbol{A})=1$，用初等矩阵表示为

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

于是

$$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{Q}=\boldsymbol{E}_1,$$

$$\boldsymbol{A}^{-}=\begin{pmatrix} 1 & l_1 & l_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1-2l_1 & l_1 & l_2 \end{pmatrix},$$

其中 l_1, l_2 为任意复数.

（2）对矩阵进行初等变换可得

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_1 \leftrightarrow r_3]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

可见 $R(\boldsymbol{A})=1$，用初等矩阵表示为

$$\begin{pmatrix}0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\end{pmatrix}.$$

于是

$$\boldsymbol{P}=\boldsymbol{E}_1,\qquad \boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{A}^-=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\m_1\\m_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}m_2\\m_1\\1\end{pmatrix},$$

其中m_1, m_2为任意复数.

（3）对矩阵进行初等变换可得

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-1\\-1&2\end{pmatrix}\xrightarrow{r_2+r_1}\begin{pmatrix}1&-1\\0&1\end{pmatrix}\xrightarrow[c_2+c_1]{}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},$$

可见$R(\boldsymbol{A})=2$，用初等矩阵表示为

$$\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1\\-1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}.$$

于是

$$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix},\qquad \boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{A}^-=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&1\\1&1\end{pmatrix}.$$

（4）对矩阵进行初等变换可得

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&-1&1\end{pmatrix}\xrightarrow{r_2+(-1)r_1}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&-1&0\end{pmatrix}\xrightarrow[c_3+(-1)c_1]{}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\end{pmatrix}\xrightarrow{(-1)r_2}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix},$$

可见$R(\boldsymbol{A})=2$，用初等矩阵表示为

$$\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&1\\1&-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}.$$

于是

$$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\1&-1\end{pmatrix},\qquad \boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},$$

$$A^{-}=\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\m_1&m_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-m_1-m_2&m_2\\1&-1\\m_1+m_2&-m_2\end{pmatrix},$$

其中m_1, m_2为任意复数.

*34．求下列矩阵$\boldsymbol{A}$的 Moore－Penrose 广义逆$\boldsymbol{A}^{+}$，

（1）$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&-1\\0&-1&1\end{pmatrix}$；（2）$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2\\2&3\\4&6\end{pmatrix}$；

（3）$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&2\\2&1&5\\0&1&-1\\1&3&-1\end{pmatrix}$；（4）$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&1&2&-1\\-2&0&0&6\\4&-2&-4&-10\end{pmatrix}$.

解（1）利用初等变换可以将$\boldsymbol{A}$分解得到

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2\\0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2\\0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&-1\end{pmatrix},$$

$R(\boldsymbol{A})=2$．取

$$\boldsymbol{F}=\begin{pmatrix}1&2\\0&-1\end{pmatrix},\qquad \boldsymbol{G}=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&-1\end{pmatrix},$$

则

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}^{+}&=\overline{\boldsymbol{G}^{\mathrm{T}}}\left(\overline{\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}}\boldsymbol{A}\overline{\boldsymbol{G}^{\mathrm{T}}}\right)^{-1}\overline{\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}}\\&=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\1&-1\end{pmatrix}\times\left(\begin{pmatrix}1&0\\2&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&-1\\0&-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\1&-1\end{pmatrix}\right)^{-1}\begin{pmatrix}1&0\\2&-1\end{pmatrix}\\&=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2&3\\1&0\\1&3\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

（2）由于$R(\boldsymbol{A})=2$，所以

$$\boldsymbol{A}^{+}=\left(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\right)^{-1}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$$

$$=\left(\begin{pmatrix}1&2&4\\2&3&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\2&3\\4&6\end{pmatrix}\right)^{-1}\begin{pmatrix}1&2&4\\2&3&6\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-3&\frac{2}{5}&\frac{4}{5}\\2&-\frac{1}{5}&-\frac{2}{5}\end{pmatrix}.$$

（3）类似于（2）可得

$$\boldsymbol{A}^{+}=\frac{1}{22}\begin{pmatrix}54&22&-14&12\\-23&11&8&1\\-17&-11&4&-5\end{pmatrix}.$$

（4）利用初等变换可以将 $\boldsymbol{A}$ 分解得到

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&1&0\\-2&0&0\\4&-2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0&-3\\0&1&2&-1\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},$$

$R(\boldsymbol{A})=2$．取

$$\boldsymbol{F}=\begin{pmatrix}0&1\\-2&0\\4&-2\end{pmatrix},\qquad \boldsymbol{G}=\begin{pmatrix}1&0&0&-3\\0&1&2&-1\end{pmatrix},$$

则

$$\boldsymbol{A}^{+}=\overline{\boldsymbol{G}^{\mathrm{T}}}\left(\overline{\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}}\boldsymbol{A}\overline{\boldsymbol{G}^{\mathrm{T}}}\right)^{-1}\overline{\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}}$$

$$=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\0&2\\-3&-1\end{pmatrix}\times\frac{1}{1836}\begin{pmatrix}6&-12\\65&176\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&-2&4\\1&0&-2\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{1836}\begin{pmatrix}-12&-12&48\\176&-130&-92\\352&-260&-184\\-140&166&-52\end{pmatrix}.$$

*35．设矩阵 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}(t)=\begin{pmatrix}2t&-2&\cos t\\e^{t}&4t^{3}&6\end{pmatrix}$，求 $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}t}$．

解 由定义可计算得到

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}t}=\begin{pmatrix}2 & 0 & -\sin t\\ e^t & 12t^2 & 0\end{pmatrix}.$$

*36. 设有矩阵

$$\boldsymbol{A}(t)=\begin{pmatrix}1 & t^2\\ t & 0\end{pmatrix},$$

求$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}(t)}{\mathrm{d}t}$和$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}^{-1}(t)}{\mathrm{d}t}$.

解 由矩阵导数的定义可得

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}(t)}{\mathrm{d}t}=\begin{pmatrix}0 & 2t\\ 1 & 0\end{pmatrix}.$$

由于

$$\boldsymbol{A}^{-1}(t)=\frac{1}{|\boldsymbol{A}(t)|}\boldsymbol{A}^*(t)=\begin{pmatrix}0 & \frac{1}{t}\\ \frac{1}{t^2} & -\frac{1}{t^3}\end{pmatrix},$$

故

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}^{-1}(t)}{\mathrm{d}t}=\begin{pmatrix}0 & -\frac{1}{t^2}\\ -\frac{2}{t^3} & \frac{3}{t^4}\end{pmatrix}.$$

*37. 设 $f=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$，其中

$$\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\\ \vdots\\ x_n(t)\end{pmatrix},\qquad \boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_{11}(t) & a_{12}(t) & \cdots & a_{1n}(t)\\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \cdots & a_{2n}(t)\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \cdots & a_{nn}(t)\end{pmatrix},$$

且 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$，证明$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{X}+2\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{X}}{\mathrm{d}t}$.

证明 由矩阵导数的定义与性质可得

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}&=\frac{\mathrm{d}\left(\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}\right)}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}+\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\frac{\mathrm{d}\left(\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}\right)}{\mathrm{d}t}\\ &=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}+\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{X}+\boldsymbol{A}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{X}}{\mathrm{d}t}\right)\\ &=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{X}+\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}+\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{X}}{\mathrm{d}t}\\ &=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{X}+2\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{X}}{\mathrm{d}t}.\end{aligned}$$

*38．对于下列矩阵 $\boldsymbol{A}(t)$，计算 $\int \boldsymbol{A}(t)\mathrm{d}t$ 和 $\int_0^x \boldsymbol{A}(t)\mathrm{d}t$.

（1）$\boldsymbol{A}(t)=\begin{pmatrix}\cos t & 6t^2 & 0\\ 1 & t & 2e^t\end{pmatrix}$；　　（2）$\boldsymbol{A}(t)=\begin{pmatrix}e^{2t} & te^t & 1\\ e^{-t} & 2e^{2t} & 0\\ 3t & 0 & 0\end{pmatrix}$.

解　由定义直接计算.

（1）

$$\int \boldsymbol{A}(t)\mathrm{d}t=\begin{pmatrix}\int\cos t\mathrm{d}t & \int 6t^2\mathrm{d}t & \int 0\mathrm{d}t\\ \int 1\mathrm{d}t & \int t\mathrm{d}t & \int 2e^t\mathrm{d}t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sin t & 2t^3 & 0\\ t & \frac{1}{2}t^2 & 2e^t\end{pmatrix}+\boldsymbol{C}_{2\times3},$$

$$\int_0^x \boldsymbol{A}(t)\mathrm{d}t=\begin{pmatrix}\int_0^x\cos t\mathrm{d}t & \int_0^x 6t^2\mathrm{d}t & \int_0^x 0\mathrm{d}t\\ \int_0^x 1\mathrm{d}t & \int_0^x t\mathrm{d}t & \int_0^x 2e^t\mathrm{d}t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sin x & 2x^3 & 0\\ x & \frac{1}{2}x^2 & 2e^x-2\end{pmatrix}.$$

（2）

$$\int \boldsymbol{A}(t)\mathrm{d}t=\begin{pmatrix}\int e^{2t}\mathrm{d}t & \int te^t\mathrm{d}t & \int 1\mathrm{d}t\\ \int e^{-t}\mathrm{d}t & \int 2e^{2t}\mathrm{d}t & \int 0\mathrm{d}t\\ \int 3t\mathrm{d}t & \int 0\mathrm{d}t & \int 0\mathrm{d}t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}e^{2t} & (t-1)e^t & t\\ -e^{-t} & e^{2t} & 0\\ \frac{3}{2}t^2 & 0 & 0\end{pmatrix}+\boldsymbol{C}_{3\times3},$$

$$\int_0^x \boldsymbol{A}(t)\mathrm{d}t=\begin{pmatrix}\int_0^x e^{2t}\mathrm{d}t & \int_0^x te^t\mathrm{d}t & \int_0^x 1\mathrm{d}t\\ \int_0^x e^{-t}\mathrm{d}t & \int_0^x 2e^{2t}\mathrm{d}t & \int_0^x 0\mathrm{d}t\\ \int_0^x 3t\mathrm{d}t & \int_0^x 0\mathrm{d}t & \int_0^x 0\mathrm{d}t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\left(e^{2x}-1\right) & 1+(x-1)e^x & x\\ 1-e^{-x} & e^{2x}-1 & 0\\ \frac{3}{2}x^2 & 0 & 0\end{pmatrix}+\boldsymbol{C}_{3\times3}.$$

B　组

1．设 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 为两个 n 阶矩阵，则 $\boldsymbol{AB}$ 与 $\boldsymbol{BA}$ 的主对角线上的元素之和相等.

证明　设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$，$\boldsymbol{B}=(b_{ij})$，$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AB}$，$\boldsymbol{D}=\boldsymbol{BA}$，则 $\boldsymbol{C}$ 的主对角线上元素为

$$c_{ii}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{ki}, \qquad (i=1, 2, \cdots, n)$$

$\boldsymbol{D}$ 的主对角线上元素为

$$d_{jj}=\sum_{k=1}^{n}b_{jk}a_{kj}, \qquad (j=1, 2, \cdots, n)$$

而

$$\sum_{i=1}^{n}c_{ii}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{ki}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}b_{ji},$$

$$\sum_{j=1}^{n}d_{jj}=\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}a_{kj}b_{jk}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}b_{ji},$$

因此，

$$\sum_{i=1}^{n}c_{ii}=\sum_{j=1}^{n}d_{jj}.$$

2．设 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 满足关系式 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}^2=\boldsymbol{B}$ 和 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^2=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$，证明 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{0}$.

证明　由题设可得

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^2=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\Rightarrow \boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{B}^2+\boldsymbol{BA}+\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$$
$$\Rightarrow \boldsymbol{AB}+\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{0}.$$

而

$$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{AB})=-\boldsymbol{ABA}$$
$$=(-\boldsymbol{AB})\boldsymbol{A}=\boldsymbol{BAA}=\boldsymbol{BA}^2=\boldsymbol{BA},$$

所以，$2\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{0}$，即 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{0}$.

3．设 n 阶方阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 满足 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$，证明 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 可交换，且 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{E})^{-1}$.

证明 由 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 可得 $\boldsymbol{AB}-\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=\boldsymbol{0}$，于是

$$\boldsymbol{AB}-\boldsymbol{AE}-\boldsymbol{EB}+\boldsymbol{E}^2=\boldsymbol{E},$$

$$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{E})=\boldsymbol{E}.$$

上式说明 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}$ 与 $\boldsymbol{B}-\boldsymbol{E}$ 互为逆矩阵，因此，

$$(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})=\boldsymbol{E},$$

即

$$\boldsymbol{BA}-\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}+\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E},$$
$$\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{AB},$$

故 $\boldsymbol{AB}$ 与 $\boldsymbol{BA}$ 可交换.

另一方面，由条件可得

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{E})=\boldsymbol{B},$$

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{E})^{-1}.$$

4．设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵，$\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E}=\boldsymbol{0}$，$\lambda$ 为任一实数，试证 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{A}+\lambda\boldsymbol{E}$ 均可逆，并求之.

证明 由 $\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E}=0$ 可得

$$\boldsymbol{A}\left[-\frac{1}{2}(\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E})\right]=\boldsymbol{E},$$
$$\boldsymbol{A}^{-1}=-\frac{1}{2}\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}.$$

另一方面

$$(\boldsymbol{A}+\lambda\boldsymbol{E})[\boldsymbol{A}+(2-\lambda)\boldsymbol{E}]=[\lambda(2-\lambda)-2]\boldsymbol{E}.$$

由于 $\lambda(2-\lambda)-2=-\lambda^2+2\lambda-2=-(\lambda-1)^2-1\neq 0$，所以，

$$|\boldsymbol{A}+\lambda\boldsymbol{E}|\,|\boldsymbol{A}+(2-\lambda)\boldsymbol{E}|=|\lambda(2-\lambda)-2|^n\neq 0.$$

因此，$\boldsymbol{A}+\lambda\boldsymbol{E}$ 可逆，并且

$$(\boldsymbol{A}+\lambda\boldsymbol{E})^{-1}=\frac{1}{-\lambda^2+2\lambda-2}[\boldsymbol{A}+(2-\lambda)\boldsymbol{E}].$$

5．设 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}-\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$ 为非零列矩阵， 证明

（1）$\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$ 的充要条件是 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=1$；

（2）若 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=1$，则 $\boldsymbol{A}$ 不可逆.

证明 （1）根据假设有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}&\Leftrightarrow \boldsymbol{E}-2\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}+(\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x})\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{E}-\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\\&\Leftrightarrow \boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x})\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\\&\Leftrightarrow (\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x})=1;\end{aligned}$$

（2）假设 $\boldsymbol{A}$ 可逆，则有

$$\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}\Rightarrow \boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}\Rightarrow \boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{0}.$$

此时，$x_i=0,(i=1,2,\cdots,n)$，与 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=1$ 矛盾．故 $\boldsymbol{A}$ 不可逆.

6．设 $\boldsymbol{A}$ 为 $n(n>2)$ 阶非零实矩阵，$\boldsymbol{A}_{ij}$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的元素 a_{ij} 对应的代数余子式，$\boldsymbol{A}_{ij}=a_{ij}$，证明

（1）$\boldsymbol{A}$ 可逆； （2）$|\boldsymbol{A}|=1$.

证明 （1）根据假设有

$$\boldsymbol{A}^*=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{21}&\cdots&a_{n1}\\a_{12}&a_{22}&\cdots&a_{n2}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{1n}&a_{2n}&\cdots&a_{nn}\end{pmatrix}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}},$$

所以有 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*=\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$．根据条件可设 $a_{i_0j_0}\neq 0$，此时，$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 的第 i_0 行第 i_0 列元素为

$$|\boldsymbol{A}|=a_{i_01}^2+a_{i_02}^2+\cdots+a_{i_0n}^2>0.$$

因此，$\boldsymbol{A}$ 可逆.

（2）由 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$ 得到 $|\boldsymbol{A}|^2=|\boldsymbol{A}|^n$．因为前面已经证明 $|\boldsymbol{A}|>0$，所以，$|\boldsymbol{A}|=1$.

7．设 $\boldsymbol{A}^*$ 是 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵，证明 $|\boldsymbol{A}^*|=|\boldsymbol{A}|^{n-1}$.

证明 对于 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$，总有 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$.

（1）若 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$，则 $|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{A}^*|=|\boldsymbol{A}|^n$，$|\boldsymbol{A}^*|=|\boldsymbol{A}|^{n-1}$.

（2）若 $|\boldsymbol{A}|=0$，假设 $|\boldsymbol{A}^*|\neq 0$，则 $(\boldsymbol{A}^*)^{-1}$ 存在，

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*(\boldsymbol{A}^*)^{-1}=|\boldsymbol{A}|(\boldsymbol{A}^*)^{-1}=\boldsymbol{0}.$$

此时，$\boldsymbol{A}^* = \boldsymbol{0}$，$\left|\boldsymbol{A}^*\right| = 0$，与假设矛盾，所以$\left|\boldsymbol{A}^*\right| = 0$.

综合上述讨论可得$\left|\boldsymbol{A}^*\right| = \left|\boldsymbol{A}\right|^{n-1}$.

8．设$\boldsymbol{A}$为n阶可逆矩阵，$\boldsymbol{A}^*$为$\boldsymbol{A}$的伴随矩阵，证明：

（1）$(\boldsymbol{A}^*)^{\mathrm{T}} = (\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^*$；　（2）$(\boldsymbol{A}^*)^* = \left|\boldsymbol{A}\right|^{n-2}\boldsymbol{A}$.

证明

（1）由$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^* = \left|\boldsymbol{A}\right|\boldsymbol{E}$可得$\boldsymbol{A}^{-1} = \dfrac{1}{\left|\boldsymbol{A}\right|}\boldsymbol{A}^*$．另一方面，

$$(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^* = \left|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\right|\boldsymbol{E} = \left|\boldsymbol{A}\right|\boldsymbol{E},$$

$$(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^* = \left|\boldsymbol{A}\right|(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{-1} = \left|\boldsymbol{A}\right|(\boldsymbol{A}^{-1})^{\mathrm{T}} = \left|\boldsymbol{A}\right|\frac{1}{\left|\boldsymbol{A}\right|}(\boldsymbol{A}^*)^{\mathrm{T}} = (\boldsymbol{A}^*)^{\mathrm{T}}$$

（2）由$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^* = \left|\boldsymbol{A}\right|\boldsymbol{E}$可得$\left|\boldsymbol{A}^*\right| = \left|\boldsymbol{A}\right|^{n-1}$．另一方面，

$$\begin{aligned}
&(\boldsymbol{A}^*)(\boldsymbol{A}^*)^* = \left|\boldsymbol{A}^*\right|\boldsymbol{E},\\
&\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*(\boldsymbol{A}^*)^* = \left|\boldsymbol{A}^*\right|\boldsymbol{A},\\
&\left|\boldsymbol{A}\right|(\boldsymbol{A}^*)^* = \left|\boldsymbol{A}^*\right|\boldsymbol{A},\\
&(\boldsymbol{A}^*)^* = \left|\boldsymbol{A}\right|^{n-2}\boldsymbol{A}.
\end{aligned}$$

9．设$\boldsymbol{A}$为n阶方阵，且$\left|\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}\right| \neq 0$，试证

$$(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})^* = (\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})^*(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}).$$

证明　因为

$$\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^2 = (\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}) = (\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}),$$

所以，

$$(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})^*(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})^* = (\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})^*(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})^*.$$

将$(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})^* = (\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})^*(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}) = \left|\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}\right|\boldsymbol{E}$代入上式有

$$\left|\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}\right|(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})^*(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}) = \left|\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}\right|(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})^*,$$

$$(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})^*(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}) = (\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})^*.$$

10．设$\boldsymbol{A}$是一个n阶矩阵，$R(\boldsymbol{A}) = 1$，证明

（1）$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}(b_1,\ b_2,\ \cdots,\ b_n)$；　　　　（2）$\boldsymbol{A}^2=k\boldsymbol{A}$.

证明　（1）由于 $R(\boldsymbol{A})=1$，不失一般性，可设其余各行都是第一行的倍数，

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_1b_1 & a_1b_2 & \cdots & a_1b_n\\ a_2b_1 & a_2b_2 & \cdots & a_2b_n\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_nb_1 & a_nb_2 & \cdots & a_nb_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}(b_1,\ b_2,\ \cdots,\ b_n).$$

（2）显然，

$$\boldsymbol{A}^2=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}(b_1,\ b_2,\ \cdots,\ b_n)\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}(b_1,\ b_2,\ \cdots,\ b_n)$$

$$=(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}(b_1,\ b_2,\ \cdots,\ b_n)=k\boldsymbol{A}.$$

其中，$k=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n$.

11．设 $\boldsymbol{A}$ 为 2 阶矩阵，如果 $\boldsymbol{A}^l=\boldsymbol{0}$，$l\geq 2$，证明 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{0}$.

证明　因为

$$\boldsymbol{A}^l=\boldsymbol{0}\Rightarrow|\boldsymbol{A}|^l=0\Rightarrow|\boldsymbol{A}|=0,$$

所以，$R(\boldsymbol{A})=0$ 或 1.

若 $R(\boldsymbol{A})=0$，则 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{0}\Rightarrow\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{0}$.

若 $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{A})=1$，则 $\boldsymbol{A}$ 中必存在一个元素 $a_{ij}\neq 0$．而由第 10 题的结论有 $\boldsymbol{A}^2=k\boldsymbol{A}$，进一步有

$$\boldsymbol{A}^l=k^{l-1}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{0},$$

所以，$k=0$．因此，$\boldsymbol{A}^2=k\boldsymbol{A}=\boldsymbol{0}$.

综合以上讨论可知结论成立.

12．设有关系式 $(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{B})\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{C}^{-1}$，其中

$$B=\begin{pmatrix}1&2&-3&-2\\0&1&2&-3\\0&0&1&2\\0&0&0&1\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}1&2&0&1\\0&1&2&0\\0&0&1&2\\0&0&0&1\end{pmatrix},$$

试求矩阵 $\boldsymbol{A}$.

解 由题设有

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\left(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{B}\right)^{-1}\boldsymbol{C}^{-1}=\left[\boldsymbol{C}\left(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{B}\right)\right]^{-1}=\left(2\boldsymbol{C}-\boldsymbol{B}\right)^{-1}.$$

可计算出

$$\left(2\boldsymbol{C}-\boldsymbol{B}\right)^{-1}=\begin{pmatrix}1&-2&1&0\\0&1&-2&1\\0&0&1&-2\\0&0&0&1\end{pmatrix}.$$

所以,

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\-2&1&0&0\\1&-2&1&0\\0&1&-2&1\end{pmatrix}.$$

13. 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&-1\\-1&1&1\\1&-1&1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{A}^*$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵，矩阵 $\boldsymbol{X}$ 满足 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^{-1}+2\boldsymbol{X}$，求矩阵 $\boldsymbol{X}$.

解 由已知条件得到

$$(\boldsymbol{A}^*-2\boldsymbol{E})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^{-1},$$
$$(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*-2\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{E},$$
$$(|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}-2\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{E},$$
$$\boldsymbol{X}=(|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}-2\boldsymbol{A})^{-1}.$$

而

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}1&1&-1\\-1&1&1\\1&-1&1\end{vmatrix}=4,$$

$$|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}-2\boldsymbol{A}=2\begin{pmatrix}1&-1&1\\1&1&-1\\-1&1&1\end{pmatrix},$$

所以,

$$X=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&-1&1\\1&1&-1\\-1&1&1\end{pmatrix}^{-1}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}.$$

14．设矩阵 A 的伴随矩阵 $A^*=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&-3&0&8\end{pmatrix}$，且 $ABA^{-1}=BA^{-1}+3E$，求矩阵 B．

解 由 $AA^*=|A|E$ 得，$|A^*|=|A|^{4-1}=8$，$|A|=2$，并且

$$A=|A|\left(A^*\right)^{-1}=2\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&-3&0&8\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}2&0&0&0\\0&2&0&0\\-2&0&2&0\\0&\frac{3}{4}&0&\frac{1}{4}\end{pmatrix}$$

而由题设有 $B=3(A-E)^{-1}A$，故

$$B=3\left(A-E\right)^{-1}A=3\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\-2&0&1&0\\0&\frac{3}{4}&0&-\frac{3}{4}\end{pmatrix}^{-1}A$$

$$=3\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\2&0&1&0\\0&1&0&-\frac{4}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&0&0&0\\0&2&0&0\\-2&0&2&0\\0&\frac{3}{4}&0&\frac{1}{4}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6&0&0&0\\0&6&0&0\\6&0&6&0\\0&3&0&-1\end{pmatrix}.$$

15．已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&1&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$，且矩阵 X 满足 $AXA+BXB=AXB+BXA+E$，求 X．

解 由题意得

$$AX(A-B)+BX(B-A)=E,$$

即

$$(A-B)X(A-B)=E.$$

由于$|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}|=\begin{vmatrix}1 & -1 & -1\\0 & 1 & -1\\0 & 0 & 1\end{vmatrix}\neq 0$，$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}$ 可逆，且

$$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\0 & 1 & 1\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

故

$$\boldsymbol{X}=\left[(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})^{-1}\right]^2=\begin{pmatrix}1 & 2 & 5\\0 & 1 & 2\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

16．设$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & a & \cdots & a\\a & 1 & \cdots & a\\\vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\a & a & \cdots & 1\end{pmatrix}$是$n$阶方阵$(n\geq 3)$，求$R(\boldsymbol{A})$.

解

$$\boldsymbol{A}\xrightarrow[r_n-r_1]{\substack{r_2-r_1\\r_3-r_1\\\cdots}}\begin{pmatrix}1 & a & a & \cdots & a\\a-1 & 1-a & 0 & \cdots & 0\\a-1 & 0 & 1-a & \cdots & 0\\\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\a-1 & 0 & 0 & \cdots & 1-a\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{c_1+c_2\\c_1+c_3\\\cdots\\c_1+c_n}]{}\begin{pmatrix}1+(n-1)a & a & a & \cdots & a\\0 & 1-a & 0 & \cdots & 0\\0 & 0 & 1-a & \cdots & 0\\\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\0 & 0 & 0 & \cdots & 1-a\end{pmatrix}.$$

当$a=1$时，显然$R(\boldsymbol{A})=1$.

当$a\neq 1$且$a\neq\dfrac{1}{1-n}$时，$R(\boldsymbol{A})=n$.

当$a=\dfrac{1}{1-n}$时，有一个阶子式

$$\begin{vmatrix}1-a & 0 & \cdots & 0\\0 & 1-a & \cdots & 0\\\vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\0 & 0 & \cdots & 1-a\end{vmatrix}=(1-a)^{n-1}\neq 0,$$

而$|\boldsymbol{A}|=0$，故$R(\boldsymbol{A})=n-1$.

综合得到

$$R(\boldsymbol{A})=\begin{cases}1, & a=1;\\ n-1, & a=\dfrac{1}{1-n};\\ n, & a\neq\dfrac{1}{1-n},\ 1.\end{cases}$$

17．设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶非奇异矩阵，$\boldsymbol{\alpha}$ 为 $n\times1$ 矩阵（列向量），b 为常数，记 $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{E} & \boldsymbol{0}\\ -\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{*} & |\boldsymbol{A}|\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{\alpha}\\ \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} & b\end{pmatrix}$，其中 $\boldsymbol{E}$ 为 n 阶单位矩阵，

（1）计算并化简 $\boldsymbol{PQ}$；

（2）证明 $\boldsymbol{Q}$ 可逆的充分必要条件是 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\alpha}\neq b$．

解

（1）由于 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{*}=\boldsymbol{A}^{*}\boldsymbol{A}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$，故

$$\begin{aligned}\boldsymbol{PQ}&=\begin{pmatrix}\boldsymbol{E} & \boldsymbol{0}\\ -\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{*} & |\boldsymbol{A}|\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{\alpha}\\ \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} & b\end{pmatrix}\\ &=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{\alpha}\\ -\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{*}\boldsymbol{A}+|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} & -\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{*}\boldsymbol{\alpha}+b|\boldsymbol{A}|\end{pmatrix}\\ &=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{\alpha}\\ \boldsymbol{0} & |\boldsymbol{A}|(b-\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\alpha})\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

（2）由于

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{PQ}|&=\begin{vmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{\alpha}\\ \boldsymbol{0} & |\boldsymbol{A}|(b-\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\alpha})\end{vmatrix}\\ &=|\boldsymbol{A}|^{2}(b-\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\alpha}),\end{aligned}$$

而 $|\boldsymbol{PQ}|=|\boldsymbol{P}|\,|\boldsymbol{Q}|=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{Q}|$，$|\boldsymbol{A}|\neq0$，因此，

$$|\boldsymbol{Q}|=|\boldsymbol{A}|(b-\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\alpha}).$$

于是

$$|\boldsymbol{Q}|\neq0\Leftrightarrow\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\alpha}\neq b.$$