

基于层次分析法的就餐窗口选择问题

骆天奇

摘要: 对食堂每个窗口在不同指标进行量化, 并通过层次分析法计算权重, 根据计算结果来决定去哪个窗口就餐。

关键词: 应用数学 合理决策 层次分析法 贪心算法

Choice of dining window based on analytic hierarchy process

Luo Tianqi

Shanting Summary: Each window in the canteen in different indicators to quantify, and through the analytic hierarchy process to calculate the weight, according to the results of the calculation to decide which window to eat.

Key words: Application of mathematical rational decision hierarchy process greedy algorithm

目录

0 引言	2
1 层次分析法 ^[1]	2
1.1 层次分析法简介	2
1.2 层次分析法基本步骤	2
2 针对就餐问题的层次分析法	3
2.1 建立层次结构模型	3
2.2 构造成对比矩阵	3
2.2.1 准则对目标的对比矩阵	3
2.2.2 方案对准则的权向量	3
2.3 计算权向量并做一致性检验	4
2.4 计算组合权向量	5
3 贪心算法 ^[2]	5
3.1 贪心算法简介	5
3.2 贪心算法基本步骤	5
4 针对就餐问题的贪心算法	5
4.1 建立数学模型	5
4.2 拆分子问题	5
4.3 得到局部问题最优解	6
4.4 整合最优解	6
5 模型求解	6
6 参考文献	6

0 引言

就餐是日常生活中不可缺少的一环，随着生活水平的日益提高，我们对食物的要求越来越高，于是产生了各式各样的餐饮行业。我校食堂也有着数十个餐口，每次就餐都面临多种多样的选择，决定去哪个餐口就餐成了一件值得讨论的事。

针对以上问题，本论文采用层次分析法通过不同指标对每个窗口进行量化，科学的决定应去哪个窗口就餐。

由于每个人对餐口的衡量标准不同，本论文只针对个人情况进行分析讨论。

1 层次分析法^[1]

1.1 层次分析法简介

层次分析法(The analytic hierarchy process)简称 AHP，在 20 世纪 70 年代中期由美国运筹学家托马斯·塞蒂(T. L. saaty)正式提出。它是一种定性和定量相结合的、系统化、层次化的分析方法。由于它在处理复杂的决策问题上的实用性和有效性，很快在世界范围得到重视。它的应用已遍及经济计划和管理、能源政策和分配、行为科学、军事指挥、运输、农业、教育、人才、医疗和环境等领域。

1.2 层次分析法基本步骤

1、建立层次结构模型。在深入分析实际问题的基础上，将有关的各个因素按照不同属性自上而下地分解成若干层次，同一层的诸因素从属于上一层的因素或对上层因素有影响，同时又支配下一层的因素或受到下层因素的作用。最上层为目标层，通常只有 1 个因素，最下层通常为方案或对象层，中间可以有一个或几个层次，通常为准则或指标层。当准则过多时(譬如多于 9 个)应进一步分解出子准则层。

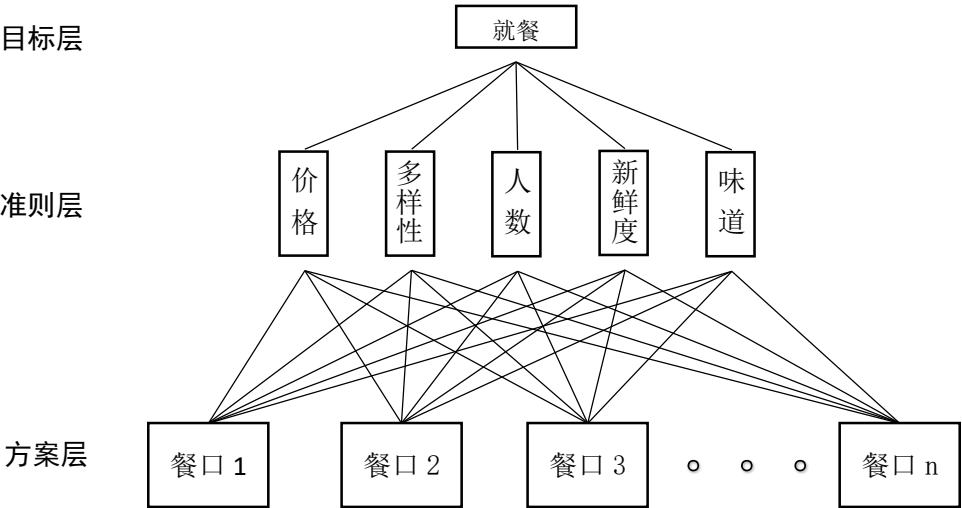
2、构造成对比较阵。从层次结构模型的第 2 层开始，对于从属于(或影响)上一层每个因素的同一层诸因素，用成对比较法和 1—9 比较尺度构造成对比较阵，直到最下层。

3、计算权向量并做一致性检验。对于每一个成对比较阵计算最大特征根及对应特征向量，利用一致性指标、随机一致性指标和一致性比率做一致性检验。若检验通过，特征向量(归一化后)即为权向量；若不通过，需重新构造成对比较阵。

4、计算组合权向量并做组合一致性检验。计算最下层对目标的组合权向量，并根据公式做组合一致性检验，若检验通过，则可按照组合权向量表示的结果进行决策，否则需要重新考虑模型或重新构造那些一致性比率较大的成对比较阵。

2 针对就餐问题的层次分析法

2.1 建立层次结构模型



图表 1 就餐选择的层次结构

2.2 构造成对比矩阵

2.2.1 准则对目标的对比矩阵

$$A = (a_{ij})_{n \times n}, \quad a_{ij} > 0, \quad a_{ji} = \frac{1}{a_{ij}} \tag{1}$$

由(1)式给出的 a_{ij} 的特点得出正互反矩阵即为对比矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 1/4 & 1/3 & 1 \\ 1/5 & 1 & 1/9 & 1/7 & 1/9 \\ 4 & 9 & 1 & 1/3 & 3 \\ 3 & 7 & 3 & 1 & 3 \\ 1 & 9 & 1/3 & 1/3 & 1 \end{bmatrix} \tag{2}$$

2.2.2 方案对准则的权向量

由于方案数过多，由 2.2.1 的方法需要大量的数据，故采用直接赋权值的方法。

表 1 方案对准测各指标的权重

价格	多样性	人数	味道
5	5	5	5
7	5	6	6
6	3	4	6
7	6	3	3
4	9	4	8
8	4	5	8
4	9	2	9
3	6	7	8
3	7	6	9
4	8	5	8
2	6	6	9
4	7	5	8
4	8	4	7
2	9	3	8
4	7	5	7
1	8	8	8

由表得出方案对准测的权向量（未归一化）

其中 θ 为一个变化的值，初值为 1，随着时间增加，并在被选择后重置为 1。

$$B = \begin{bmatrix} 5 & 5 & 5 & \theta & 5 \\ 7 & 5 & 6 & \theta & 6 \\ 6 & 3 & 4 & \theta & 6 \\ 7 & 6 & 3 & \theta & 3 \\ 4 & 9 & 4 & \theta & 8 \\ 8 & 4 & 5 & \theta & 8 \\ 4 & 9 & 2 & \theta & 9 \\ 3 & 6 & 7 & \theta & 8 \\ 3 & 7 & 6 & \theta & 9 \\ 4 & 8 & 5 & \theta & 8 \\ 2 & 6 & 6 & \theta & 9 \\ 4 & 7 & 5 & \theta & 8 \\ 4 & 8 & 4 & \theta & 7 \\ 2 & 9 & 3 & \theta & 8 \\ 4 & 7 & 5 & \theta & 7 \\ 1 & 8 & 8 & \theta & 8 \end{bmatrix} \quad (3)$$

2.3 计算权向量并做一致性检验

经计算得 A 的最大特征值为

$$\lambda = 5.4021 \quad (4)$$

最大特征值对应的特征向量归一化后为

$$\omega_A = [0.1145 \quad 0.0298 \quad 0.2931 \quad 0.4214 \quad 0.1411] \quad (5)$$

对于 A 随机一致性指标 RI 为 1.12。

$$CI = \frac{\lambda - n}{n - 1} \quad (6)$$

由(6)式计算得 CI 为 0.100525。

$$CR = \frac{CI}{RI} \quad (7)$$

由(7)式计算得 CR 为 $0.089 < 0.1$ ，故通过一致性检验。

2.4 计算组合权向量

对 B 进行归一化可得到各方案对准则的权向量 ω_B ， $\omega_B \times A'$ 即为方案对目标的权向量，即为 ω_s 。

3 贪心算法^[2]

3.1 贪心算法简介

贪心法，又称贪心算法、贪婪算法、或称贪婪法，是一种在每一步选择中都采取在当前状态下最好或最优（即最有利）的选择，从而希望导致结果是最好或最优的算法。

贪心算法在有最优子结构的问题中尤为有效。最优子结构的意思是局部最优解能决定全局最优解。简单地说，问题能够分解成子问题来解决，子问题的最优解能递推到最终问题的最优解。

3.2 贪心算法基本步骤

- 1、建立数学模型来描述问题。
- 2、把求解的问题分成若干个子问题。
- 3、对每一子问题求解，得到子问题的局部最优解。
- 4、把子问题的解局部最优解合成原来解问题的一个解。

4 针对就餐问题的贪心算法

4.1 建立数学模型

数学模型使用上述层次分析法所得模型，其中新鲜度为变量，初始值为 1，对应每次迭代结果 i ，将 i 对应的新鲜度置为 1，其余方案新鲜度加 1。

4.2 拆分子问题

该问题可视为每次选择当前最优窗口。

4.3 得到局部问题最优解

通过模型计算得出当前最优解。

4.4 整合最优解

将每次迭代所得局部最优解整合即为方案最优解。

5 模型求解

（数据及代码见附件）

以下为模型迭代 30 次所得结果，其中数字为解决方案（窗口）编号。

（由左到右按列阅读）

result =

8	1	8	4	12	16	11	7	4	9
3	11	3	9	1	10	5	2	6	15
16	2	6	15	13	14	3	8	1	12

6 参考文献

[1] Wikipedia.层级分级法.[DB/OL]. Wikipedia.2018-2-10 [2018-6-20]

<https://zh.wikipedia.org/wiki/%E5%B1%A4%E7%B4%9A%E5%88%86%E6%9E%90%E6%B3%95>

[2] Wikipedia.贪心法.[DB/OL]. Wikipedia.2018-2-2 [2018-6-29]

<https://zh.wikipedia.org/wiki/%E8%B4%AA%E5%BF%83%E6%B3%95>