

# 雨中行走

## 一 问题重述

要在雨中从一处沿直线跑到另一处，若雨速为常数且方向不变，试建立数学模型讨论是否跑的越快，淋雨量越少。

## 二 问题分析

总淋雨量既单位路程淋雨量对路程积分，考虑单位路程淋雨量就可以。单位路程淋雨量与行进速度，雨的方向，大小均有关系，题中说到雨速为常数且方向不变，因此得出单位路程的淋雨量为：

$$Q = F(v) dt$$

其中  $t$  为经过单位路程的时间。

## 三 问题假设

- ①假设雨的密度均匀
- ②假设路面平坦
- ③假设人的受雨面面积不变

## 四 符号说明

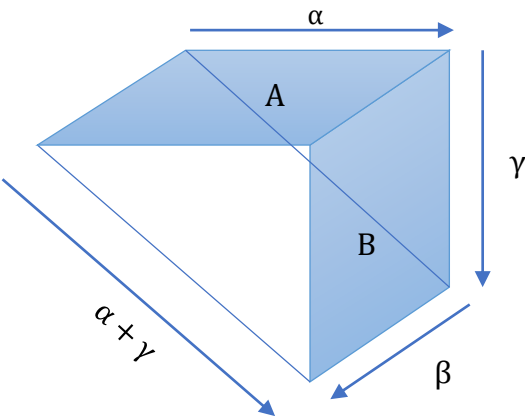
符号	定义
$V_x$	雨在 $x$ 轴上的速度
$V_y$	雨在 $y$ 轴上的速度
$V_z$	雨在 $z$ 轴上的速度
$v_x$	人在 $x$ 轴上的速度
$v_y$	人在 $y$ 轴上的速度
$v$	人的合速度
$\alpha$	雨相对人在 $x$ 轴上的速度
$\beta$	雨相对人在 $y$ 轴上的速度
$\gamma$	雨相对人在 $z$ 轴上的速度
$t$	人经过单位路程的时间
$\rho$	雨在云层中的密度
$\rho_1$	雨在 $yo z$ 平面上的密度
$\rho_2$	雨在 $xoz$ 平面上的密度
$\rho_3$	雨在 $xoy$ 平面上的密度
$S_1$	人在 $yo z$ 平面上的受雨面积
$S_2$	人在 $xoz$ 平面上的受雨面积
$S_3$	人在 $xoy$ 平面上的受雨面积

# 五 模型建立及求解

单位路程淋雨量为

$$Q(v_x, v_y) = \int S_1 \rho_1 dt + S_2 \rho_2 dt + S_3 \rho_3 dt$$

以下求 $\rho_1$   $\rho_2$   $\rho_3$ 与 $\rho$ 的关系



如图 A 面的雨经过向量 $\alpha + \gamma$ 投影到 B 面因雨的总量不变  
所以有

$$S_A \rho = S_B \rho_1'$$
$$\rho_1' = \frac{S_A}{S_B} \rho = \frac{|\alpha||\beta|}{|\beta||\gamma|} \rho = \frac{|\alpha|}{|\gamma|} \rho$$

加上向量 $\beta$ 后， $S_B$ 不变，故

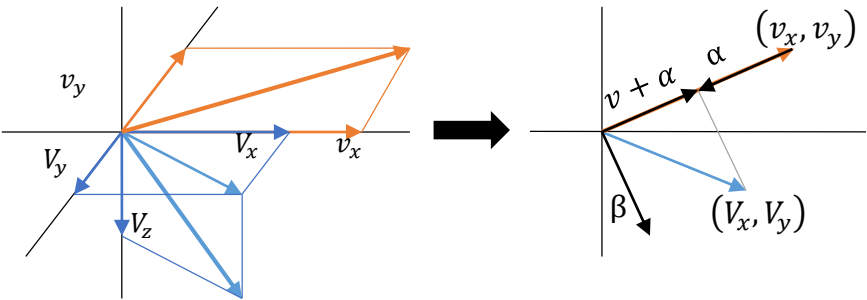
$$\rho_1 = \rho_1' = \frac{|\alpha|}{|\gamma|} \rho$$

同理可得

$$\rho_2 = \frac{|\beta|}{|\gamma|} \rho$$

$$\rho_3 = \rho$$

接下来讨论 $\alpha$   $\beta$   $\gamma$ 与 $v_x$   $v_y$ 的关系



$$\alpha = \frac{v_x V_x + v_y V_y}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2}} - \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \quad \beta = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 - (\alpha + v)^2} \quad \gamma = V_z$$

t为人经过单位路程的时间，即

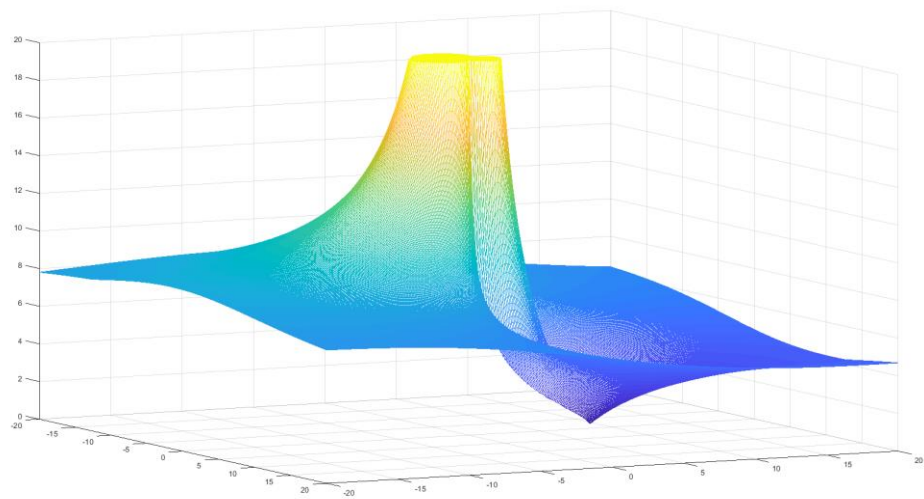
$$t = \frac{1}{|v|} = \frac{1}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2}}$$

将其带入 $Q(v_x, v_y)$ 中得

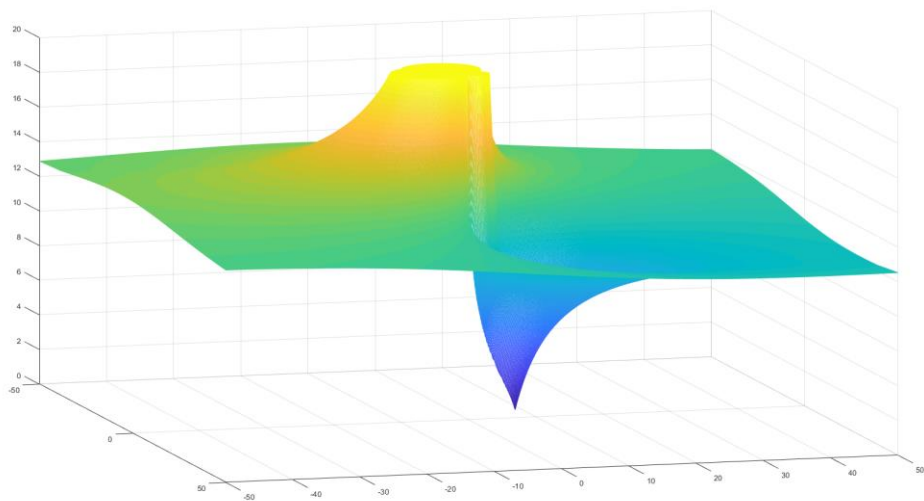
$$Q(v_x, v_y) = \int \left( S_1 \frac{\left| \frac{v_x V_x + v_y V_y}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2}} \right|}{|V_z|} \rho + S_2 \frac{\sqrt{V_x^2 + V_y^2 - \frac{(v_x V_x + v_y V_y)^2}{v_x^2 + v_y^2}}}{|V_z|} \rho + S_3 \rho \right) d \frac{1}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2}}$$

随机取雨的速度并通过 matlab 进行多次模拟

图像呈以下形式 可见存在最优解



速度在[-20,20]范围内



速度在[-50,50]范围内

并且行进速度最优解和雨速有明显的相关性：

$V_x$	$V_y$	$V_z$	$v_x$	$v_y$
-6.5178	-0.8576	5.6709	-6.4	-0.8
3.7172	4.1328	4.3081	3.8	4.2
-0.1433	-0.7618	7.5242	-3.7	-19.9
2.9311	3.5656	4.9322	3.0	3.7
2.5158	2.1714	4.1383	2.6	2.3
-5.3340	-0.0229	9.7182	-5.2	0.1
-2.2346	1.1937	4.5667	-2.1	1.3

可见 $v_x$ 与 $V_x$ , $v_y$ 与 $V_y$ 成正比关系

结论：

并不是跑的越快淋雨量越少，而是和雨速水平速度相同时淋雨量最少。