FLUORESCIENCES

Informatique

Inf

Joëlle Delacroix
François Barthélémy
Raphaël Fournier-S'niehotta
Isabelle Gil
Amélie Lambert
Agnès Plateau
Stéphane Rovedakis
Marianne Simonot
Virginie Thion
Emmanuel Waymel

DUNOD

Crédits
Guido van Rossum © Doc Searls
The peasants are revolting © Tower Game Starter Kit 2013 MIT License, Christer Kaitila (www.myfunkypants.com)
Maurice Wilkes © University of Cambridge, Computer Laboratory Archive
Marc Andreessen © Joi
James Gray © Tony Hey

Création graphique de la couverture : Hokus Pokus Créations
Création graphique de la maquette intérieure : Marse

11, rue Paul Bert, 92240 Malakoff
www.dunod.com

ISBN 978-2-10-076094-7

Table des matières

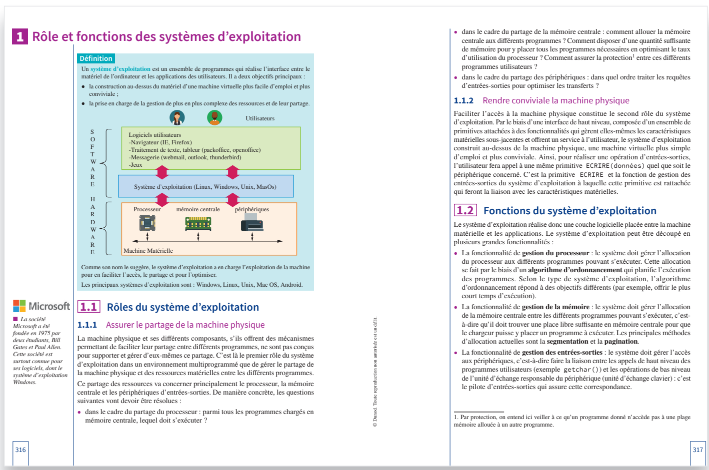
Se repérer dans le livre

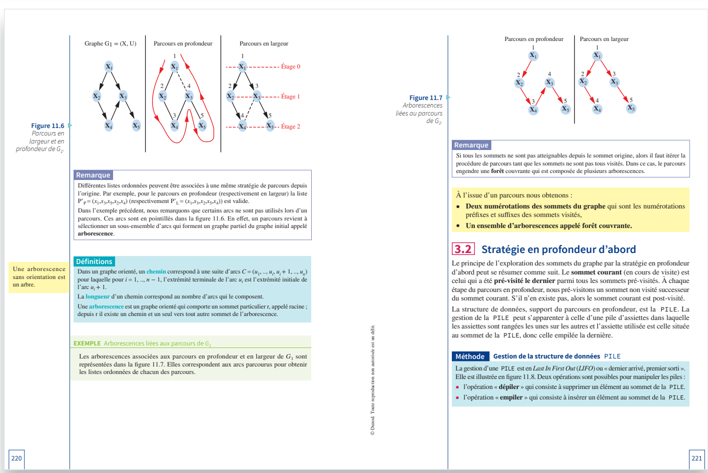
Ouverture de chapitre

- Prérequis ou questions pour introduire le sujet du chapitre.
- Le **plan** du cours pour se repérer.
- Ce que l'on maîtrisera à la fin du chapitre.

Le cours

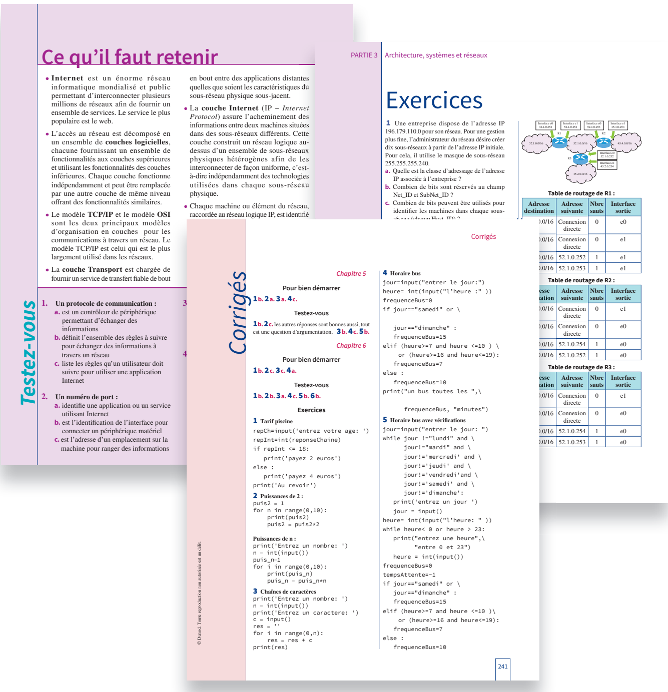
- Le **cours** est illustré par des figures et des exemples et ponctué par des rubriques.
- Les **Focus** développent les points importants du cours.
- Les **Méthodes** donnent des conseils méthodologiques.
- Les **Définitions** à connaître.





En fin de chapitre

- Les **points** clés à retenir.
- Les **exercices** permettent de vérifier les connaissances et de s'entraîner aux examens.
- Les **corrigés** sont détaillés à la fin du livre.



En fin d'ouvrage

- Vous trouverez une **bibliographie**, un **lexique** pour se familiariser avec le vocabulaire anglais.
- Un **index** pour retrouver rapidement les notions principales.

Ressources numérique

- Vous trouverez en accompagnement de ce livre, des ressources gratuites et téléchargeables. Elles sont accessibles à partir de la page de l'ouvrage sur le site dunod.com. N'oubliez pas de vous munir de votre exemplaire car un mot de passe vous sera demandé afin d'y accèder.
- Vous pourrez télécharger des compléments de cours, des liens vers des sites de références, ainsi que du code en Python et une base de données.

Les selfies des auteurs

Joëlle Delacroix

est maître de conférences au département informatique du CNAM. Ses spécialités concernent le système et l'architecture des ordinateurs. Elle est par ailleurs responsable du DUT informatique du CNAM

François Barthélemy

est maître de conférences au CNAM et auteur d'un MOOC sur l'initiation à la programmation. Il enseigne la programmation et la théorie des langages. Ses recherches portent sur le traitement automatique des langues (TAL) et sur les techniques de l'information et de la communication dans l'enseignement (TICE).

Raphaël Fournier-S'niehotta

s'est orienté vers la recherche en effectuant un doctorat à l'université Pierre et Marie Curie. Il est depuis 2014 maître de conférences au CNAM où il enseigne les techniques de recherche d'information et les bases de données.

Isabelle Gil

est maître de conférences en mathématiques au CNAM et responsable de la Formation d'ingénieurs en Partenariat d'Exploitation Ferroviaire et de la coordination des mathématiques pour les filières d'ingénieurs de l'antenne alternance du Landy.

Amélie Lambert

est maître de conférences au CNAM. Elle y enseigne la recherche opérationnelle, l'algorithmique et la programmation. Elle est membre de l'équipe *Optimisation combinatoire* du laboratoire CEDRIC.

Agnès Plateau

est maître de conférences au CNAM. Elle y enseigne la recherche opérationnelle au travers de l'algorithmique de graphes, la programmation linéaire et l'optimisation combinatoire. Elle est membre de l'équipe *Optimisation combinatoire* du laboratoire CEDRIC.

Stéphane Rovedakis

est maître de conférences en informatique au CNAM Il intervient dans des enseignements de systèmes et réseaux au niveau Licence et Master dans le département informatique du CNAM.

Marianne Simonot

est maître de conférences en informatique à l'IUT de Montreuil- Université de Paris où elle enseigne la programmation et la conception objet. Elle est par ailleurs responsable des études du Département informatique.

Virginie Thion

a d'abord été maître de conférences à l'université Paris Dauphine, puis au CNAM. Depuis 2013, elle est maître de conférences à l'ENSSAT Lannion. Ses enseignements couvrent les systèmes d'exploitation, le développement système Unix, la programmation impérative, fonctionnelle et objet, les bases de données. Ses activités de recherche se concentrent sur la gestion de la qualité des données dans les systèmes d'information.

Emmanuel Waymel

est professeur agrégé de mathématiques à Awty International School, Houston, Texas. Il a enseigné au CNAM, principalement au sein de l'école d'ingénieurs.

Avant propos

L'informatique est présente partout dans notre société. Les parties les plus visibles de cette omniprésence sont le web, les télécommunications, le stockage de données (sur une simple clé ou dans le cloud) ou bien les multiples pilotages automatiques qui sont embarqués dans les objets qui nous entourent.

Toutes ces tâches sont réalisées à l'aide d'applications ou de programmes codés dans un langage de programmation. L'exécution de ces programmes met en œuvre des mécanismes complexes au sein de l'ordinateur.

Le matériel informatique a connu une évolution fulgurante alliant l'augmentation de sa puissance et la miniaturisation de ses composants. Conçu dans les années 50, l'ENIAC (Electronic Numerical Integrator And Computer) est le premier ordinateur entièrement électronique. Il occupait une pièce entière; votre smartphone tient dans votre poche. Il fallait 0,001 seconde à cette grosse machine pour réaliser une multiplication ; votre PC le fait 1000 fois plus vite. L'ENIAC était isolé ; votre tablette est connectée à l'Internet via un réseau sans fil.

En plus de l'exécution d'applications, l'ordinateur et l'informatique permettent une consultation et une conservation d'immenses volumes de données, à l'intérieur des bases de données. Grâce à l'interconnexion des réseaux et à Internet, c'est une quantité d'informations fabuleuse qui est aujourd'hui à notre disposition.

Programmation, fonctionnement de l'ordinateur, réseau-web et bases de données : ce sont les quatre domaines de l'informatique étudiés dans cet ouvrage.

Puisque l'ordinateur compte en base 2 et que la conception de programmes ou de base de données s'appuie sur des outils mathématiques tels que les graphes ou les ensembles, cet ouvrage commence logiquement par ces notions mathématiques.

L'apprentissage du codage avec des programmes écrits en langage Python vient ensuite. Puis nous nous intéressons au fonctionnement de l'ordinateur et à son interaction avec le réseau afin de comprendre comment un programme s'exécute et comment il peut échanger des données via le réseau. Enfin, dans la dernière partie nous présentons les bases de données.

Cet ouvrage va vous permettre d'appréhender ce qu'est l'informatique d'aujourd'hui tout en vous donnant les bases nécessaires pour pouvoir approfondir ce sujet.

Les auteurs remercient Eric Soutil, Geneviève Jomier, Pierre Lointier, Nicolas Jadot et Anna Pappa pour leur relecture attentive de cet ouvarge.

PARTIE 1

Chirurgiens utilisant l'outil informatique avant une intervention

Les mathématiques sont partout dans notre entourage dans les domaines scientifiques, dans la vie économique de nos sociétés ou dans de nombreuses applications du quotidien.
Elles sont aussi très présentes dans l'informatique, que ce soit dans la conception et l'analyse d'algorithmes, la sécurité informatique, le fonctionnement des réseaux, l'apprentissage automatique (*machine learning*), la reconnaissance des images….
Les mathématiques et la logique ont également toujours joué un grand rôle dans la conception des ordinateurs afin d'automatiser le maximum de calculs et d'en augmenter la précision et la vitesse.
Dans cette partie, vous découvrirez les bases des mathématiques qu'il est important de connaître pour pouvoir comprendre le fonctionnement des ordinateurs.

Mathématiques pour l'informatique

Logique

Pour bien démarrer

1. **Quelle est la valeur de vérité de : “Le 14 juillet est un jour férié” ?**

   ☐ **a.** vrai

   ☐ **b.** faux

   ☐ **C.** cela dépend

2. **Quelle est la négation de : “*f* est croissante et positive” ?**

   ☐ **a.** la fonction est décroissante et négative

   ☐ **b.** la fonction est décroissante ou négative

   ☐ **c.** la fonction n’est pas croissante ou non positive

3. **Dans la déduction : “Si le quadrilatère est un rectangle alors il possède trois angles droits”. L’affirmation “il possède trois angles droits” est**

   ☐ **a.** une condition nécessaire

   ☐ **b.** une condition suffisante

   ☐ **c.** une implication

4. **Une écriture avec les quantificateurs de la fonction *f* est croissante sur $\mathbb{R}$ est :**

   ☐ **a.** $\forall x, y \in \mathbb{R}, f(x) < f(y)$

   ☐ **b.** $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x < y$ et $f(x) < f(y)$

   ☐ **c.** $\forall x, y \in \mathbb{R}, x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$

Réponses page 65

Objectifs

- Utiliser correctement les connecteurs logiques “et”, “ou” distinguer leur sens logique et leur sens dans le langage usuel.
- Distinguer condition nécessaire et condition suffisante.
- Connaître et formuler correctement les propositions, leurs réciproques, leurs contraposées, leurs négations.
- Utiliser à bon escient les différents quantificateurs.
- Connaître les principaux types de raisonnements et leurs utilisations.

CHAPITRE 1

De tout temps les penseurs ont cherché à s'assurer que leurs raisonnements, quel qu'en soit le sujet, ne comportaient pas de « faille » qui les fassent aboutir à un résultat inexact. Le besoin s'est rapidement fait sentir d'outils fiables sur lesquels la pensée puisse s'appuyer pour manipuler des concepts, et enchaîner des déductions.

Ce chapitre commence par définir ce qui différencie une proposition « vraie » d'une proposition « fausse ». Il présente ensuite les notions de ***prédicats*** *et de* ***quantificateurs*** *avant de passer en revue les différents types de démonstrations.*

Démontrer, c'est partir d'une ou plusieurs hypothèse(s) admise(s) pour aboutir, à l'aide d'un raisonnement, à une "vérité".

On peut par exemple enchaîner des déductions de la forme :

Si Proposition 1 alors Proposition 2, d'où Proposition 3, donc Proposition 4, par conséquent Proposition 5 …

Mais, certaines proprositions sont parfois vraies, toujours vraies ou toujours fausses, et la langue française peut parfois prêter à confusion :

- dans un restaurant on peut avoir au menu "fromage ou dessert", c'est-à-dire l'un ou l'autre mais pas les deux,
- dans un jeu de cartes on avoir "un roi ou un carreau" mais cela n'exclut pas que l'on ait le roi de carreau,
- selon l'heure, la date, le lieu la phrase "il pleut" peut être vraie ou fausse,
- l'affirmation : "si x est un nombre réel, $x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2$" est toujours vraie,
- l'affirmation : "si x est un nombre réel, $x^2 + 1 = 0$" est toujours fausse,
- l'affirmation : "si x est un nombre réel, $x - 2x + 1 = 0$" n'est vraie que si x prend la valeur 1 …

Pour plus d'infos sur les syllogismes et les paradoxes, consultez les + en ligne.

Dans ce chapitre nous allons dans un premier temps aborder le calcul propositionnel, celui des prédicats et les quantificateurs qui vont nous permettre par la suite d'étudier plusieurs formes classiques de démonstrations et de raisonnements.

FOCUS

La logique du latin "logica" dérivé du grec "logos" (raison), est à l'origine considérée comme l'étude des procédés de raisonnement, la capacité à "raisonner juste". Au coeur des travaux des grands philosophes de l'antiquité essentiellement Aristote dans son *Organon*, cette logique reste longtemps la référence pour les logiciens mettant en avant les bases du syllogisme.
Profitant de la renaissance Bacon met en doute cette logique, pour introduire une logique inductive basée sur l'observation de nombreux cas. Au XVIIe Leibniz cherche à établir une langue bien définie capable de fournir un "langage universel". Il introduit une grande partie de la notation mathématique moderne et généralise l'usage des quantificateurs.
Mais ce n'est qu'au XIXe siècle que se développe un réel "formalisme logique". Boole introduit le calcul de vérité, les combinaisons logiques (conjonction, disjonction, négation) et les tables de vérité. Frege, Russel... poursuivent ces travaux et développent alors la logique moderne.
Celle-ci devient un vrai sujet de travail pour les mathématiciens qui doivent étudier des problèmes de plus en plus complexes, se trouvent confrontés à la "crise des fondements" (on peut ou non accepter le 5ième postulat d'Euclide et ainsi construire des géométries totalement différentes...) et à l'apparition des paradoxes (paradoxe de Russel ou du barbier...)

1 Calcul propositionnel

Définition

Une **proposition** est une affirmation qui prend toujours la même valeur de vérité (vrai ou faux).

Remarque

C'est ce qu'on appelle parfois le **principe du tiers exclu** : une affirmation est soit vraie soit fausse, mais ne peut pas être en partie vraie et en partie fausse.

EXEMPLES

- l'affirmation “il pleut” n'est pas une proposition,
- l'affirmation “le carré d'un nombre réel est toujours positif ou nul” est une proposition,
- l'affirmation “5 est un multiple entier de 2” est une proposition.

Définition

Un **connecteur** en logique mathématique est un outil qui permet de créer une proposition à partir d'une ou plusieurs propositions initiales.

Définition

La **négation** d'une proposition P, notée $\neg P$ est la proposition obtenue en affirmant son contraire. On dit “non P”.

EXEMPLES

- La négation de $x \geqslant 0$ est $x < 0$.
- La négation de “k est un entier pair” est “k est un entier impair”.
- La négation de “la fleur est blanche” est “la fleur n'est pas blanche”.

Définition

Soient P et Q deux propositions. La proposition notée $P \wedge Q$ est la proposition qui est vraie uniquement quand les propositions P et Q sont vraies simultanément. On dit que c'est la proposition “P **et** Q”, ou la **conjonction** de P et Q.

EXEMPLES

- “10 est un multiple de 2 et de 5”
- Dire qu'un réel est compris entre -1 et 1, c'est exactement dire que $x \leqslant 1$ et $x \geqslant -1$.

Définition

Soient P et Q deux propositions. La proposition notée $P \vee Q$ est la proposition qui est vraie dès qu'au moins une des deux propositions P ou Q est vraie. On dit que c'est la proposition "P **ou** Q", ou la **disjonction** de P et Q.

EXEMPLES

- La carte tirée est une figure ou un coeur.
- Un nombre entier est pair ou impair.

Théorème

Les trois premiers connecteurs vérifient les tables de vérité suivantes :

P	Q	$P \wedge Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

P	Q	$P \vee Q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

P	$\neg P$
V	F
F	V

On en déduit que :

$$\neg(P \wedge Q) = (\neg P) \vee (\neg Q) \quad et \quad \neg(P \vee Q) = (\neg P) \wedge (\neg Q)$$

Remarque

Les expressions mêlant des propositions et des connecteurs doivent être correctement parenthésées sans quoi le lecteur pourrait interpréter la proposition résultat de plusieurs façons différentes.

Supposons par exemple que :

- P soit la proposition "x est un nombre divisible par 6",
- Q soit la proposition "x est divisible par 2",
- R soit la proposition "x est divisible par 3.

et qu'on écrive $\neg P \wedge \neg Q \vee R$, cela pourrait être :

- $(\neg P) \wedge (\neg(Q \vee R))$ qui peut se dire : x n'est pas divisible par 6 et x n'est ni divisible ni par 2 ni par 3. Dans ce cas $x = 7$ serait une valeur possible.
- $((\neg P) \wedge (\neg Q)) \vee R$ qui peut se dire : x n'est divisible ni par 6 ni par 2 ou est divisible par 3. Dans ce second cas $x = 3$ serait un bon candidat, mais pas $x = 7$.

En règle générale, on admet une seule simplification d'écriture : le connecteur $\neg$ ne porte que sur la première proposition qu'il précède sauf s'il est suivi d'une parenthèse.

Ainsi $\neg P \wedge Q$ signifie $(\neg P) \wedge Q$.

Si on veut écrire la négation de $P \wedge Q$ il faut écrire $\neg(P \wedge Q)$.

Définition

Soient P et Q deux propositions. La proposition qui est vraie si Q est vraie dès que P est vraie est notée $P \to Q$ c'est l'**implication** de Q par P, on dit que "P **implique** Q".

EXEMPLES

- 4 est un nombre pair implique 4 est divisible par 2 est une proposition vraie.
- 6 est multiple de 3 implique 6 est impair est une proposition fausse.
- $1 = 2$ implique Jules César a été général romain est une proposition vraie. En effet, il est vrai que Jules César a été un général romain, et il est évidemment faux que $1 = 2$, en se référant à la dernière ligne du tableau de vérité l'implication est donc vraie.

Théorème

La table de vérité de $\to$ est :

P	Q	$P \to Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

On en déduit que $(P \to Q)$ a la même table de vérité que $\neg P \vee Q$.

Remarque

Ainsi, dans les raisonnements toutes les propriétés, relations entre propositions peuvent être écrites à partir des trois connecteurs principaux : $\wedge, \vee, \neg$ (voir même uniquement deux d'entre eux : $\wedge$ et $\neg$ ou $\vee$ et $\neg$). C'est ce qu'a mis en évidence George Boole au XIX^{ieme} siècle au Royaume Uni.

Définition

Soient P et Q deux propositions.

- Dans l'implication $P \to Q$ on dit que :
  - Q est une **condition nécessaire** pour que P soit vraie.
  - P est une **condition suffisante** pour que Q soit vraie.
- La **réciproque** de $P \to Q$ est $Q \to P$. Si les deux implications sont vraies on dit que P est **équivalente à** Q. On note $P \leftrightarrow Q$.
- La **contraposée** de $P \to Q$ est $\neg Q \to \neg P$. Ces deux propositions ont la même table de vérité. On dit qu'elles sont **synonymes** et on note parfois $P \Leftrightarrow Q$.
- La **négation** de $P \to Q$ est $P \wedge (\neg Q)$.

Définition

Etant donné $P = \{P_1, P_2, \dots, P_n\}$ un ensemble de propositions on appelle **forme propositionnelle** toute proposition construite en combinant une ou plusieurs propositions P_i suivant les principes suivants :

- P_i est une forme propositionnelle,
- $P_i \wedge P_j$ est une forme propositionnelle,
- $P_i \vee P_j$ est une forme propositionnelle,
- $\neg P_i$ est une forme propositionnelle.

Pour toute forme propositionnelle on peut établir une **table de vérité** qui regroupe les différentes valeurs que peut prendre la forme propositionnelle selon la valeur de vérité de chacun des P_i.

Définition

Un choix de valeurs de vérité pour les P_i qui donne la valeur de vérité vraie, pour une forme propositionnelle donnée est un **modèle**.

Deux formes propositionnelles qui ont un modèle commun sont dites **compatibles**, dans le cas contraire elles sont dites **incompatibles** ou **contradictoires**.

Une forme propositionnelle qui prend toujours la valeur vraie est une **tautologie**.

Une forme propositionnelle qui prend toujours la valeur faux est une **antilogie** ou **contradiction**.

Si $P \to Q$ est une tautologie on dit que Q est une **conséquence logique** de P.

2 Prédicats

Définition

Un **prédicat** noté P associe à chaque élément x d'un ensemble U appelé **univers**, une proposition P(x).

Si U est un ensemble de n-uplets $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ le prédicat dépend de n variables x_i on dit qu'il est de **poids** n.

Remarque

Un prédicat de poids $n = 0$, est une proposition.

Les connecteurs logiques s'appliquent aux prédicats tout comme aux propositions.

EXEMPLES

- $P(x)$ défini par "x est entier naturel pair", est un prédicat de poids 1 dont l'univers est $\mathbb{N}$.
- $Q(T)$ défini par "T est un triangle rectangle" est un prédicat de poids 1 dont l'univers est l'ensemble de tous les triangles du plan.
- $R(m,n)$ défini par "l'entier naturel m est un multiple de l'entier naturel n" est un prédicat de poids 2, dont l'univers est l'ensemble des couples d'entiers, c'est-à-dire $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

Remarque

Pour énoncer un prédicat on utilise une ou plusieurs variables : x, y, … et le nom donné à ces variables n'a pas de d'importance : on peut parler du triangle isocèle nommé x ou T ou (ABC) sans que cela change le prédicat. On dit que ces variables sont **muettes**.

Cependant si on doit associer des prédicats avec des connecteurs logiques, il faut prendre garde à ce que les variables soient utilisées de façon cohérente dans chaque prédicat.

3 Quantificateurs

Définition

L'affirmation :

"pour tout x appartenant à U la proposition $P(x)$ est vraie",

décrit une proposition qu'on note : $\forall$ x $\in$ U, P(x) ou $\forall$x, P(x).

Le symbole $\forall$ est appelé **quantificateur universel**

Définition

L'affirmation :

"il existe (au moins un) x appartenant à U pour lequel la proposition $P(x)$ est vraie",

décrit une proposition qu'on note : $\exists x \in U, P(x)$ *ou* $\exists x, P(x)$.

Le symbole $\exists$ est appelé **quantificateur existentiel**.

On peut préciser l'affirmation en disant :

"il existe un unique x appartenant à U pour lequel la proposition $P(x)$ est vraie",

dans ce cas on note : $\exists!\, x \in U, P(x)$ *ou* $\exists!\, x, P(x)$.

EXEMPLES

- pour tout x réel, le carré de x est un nombre positif ou nul :

$$\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geqslant 0$$

- il existe un réel tel que $x^2 = 1$ ($x = 1$ ou $x = -1$):

$$\exists x \in \mathbb{R}, x^2 = 1$$

- il existe un unique réel x tel que $x + 1 = 2x - 2$:

$$\exists!\, x \in \mathbb{R}, x + 1 = 2x - 2$$

Remarque

On peut bien sûr utiliser les quantificateurs pour des prédicats de poids $n > 1$, mais il faut être très vigilant à l'ordre des quantificateurs par rapport à celui des variables.

EXEMPLE

Si on veut écrire que pour tout entier naturel n pair il existe un entier naturel k tel que $n = 2k$, on peut considérer le prédicat : $R(n,k)$ défini par "l'entier naturel n est égal à 2 fois l'entier naturel k", on a alors un prédicat de poids 2 dont l'univers est $A \times \mathbb{N}$ où A est l'ensemble des entiers naturels pairs. On écrit alors :

$$\forall x \in A, \exists k \in \mathbb{N} \;\; R(n,k)$$

Théorème

Soient U un univers et P(x) un prédicat dont les valeurs de vérité dépendent de $x \in U$.

- la négation de $\forall x \in U, P(x)$ est $\exists x \in U, \neg P(x)$
- la négation de $\exists x \in U, \; P(x)$ est $\forall x \in U, \; \neg P(x)$

EXEMPLES

- dire que la fonction $f(x)$ n'est pas nulle, c'est-à-dire que l'on n'a pas " pour tout $x \in \mathbb{R}, \; f(x) = 0$, c'est dire qu'il existe (au moins un) $x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) \neq 0$.

$$\neg(\forall x \in \mathbb{R}, \; f(x) = 0) \text{ peut s'écrire } \exists x \in \mathbb{R}, \; f(x) \neq 0$$

- dire qu'il n'existe pas de fraction dont le dénominateur est nul, c'est dire que toute fraction possède un dénominateur non nul.

$$\neg\left(\exists \; \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}, \; q = 0\right) \text{peut s'écrire } \forall \; \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}, \; q \neq 0$$

Théorème

Soient U un univers, P(x) et Q(x) deux prédicats dont les valeurs de vérité dépendent de $x \in U$.

- $(\forall x \in U,\ P(x) \wedge Q(x)) \Leftrightarrow ((\forall x \in U,\ P(x)) \wedge (\forall x \in U,\ Q(x)))$
- $(\exists x \in U,\ P(x) \vee Q(x)) \Leftrightarrow ((\exists x \in U,\ P(x)) \vee (\exists x \in U,\ Q(x)))$

EXEMPLES

- dire que tout entier divisible par 6 est divisible par 2 et par 3 est bien équivalent à dire que tout entier divisible par 6 est divisible par 2 et que tout entier divisible par 6 est divisible par 3.
- dire qu'il existe un entier naturel divisible par 2 ou divisible par 3, est équivalent à dire qu'il existe un entier naturel divisible par 2, et qu'il existe un entier naturel divisible par 3. Il faut remarquer que dans le deuxième prédicat le nombre x divisible par 2 et celui divisible par 3 ne sont pas a priori les mêmes.

Théorème

Soient U un univers, P(x) et Q(x) deux prédicats dont les valeurs de vérité dépendent de $x \in U$.

- $(\exists x \in U,\ P(x) \wedge Q(x)) \rightarrow ((\exists x \in U,\ P(x)) \wedge (\exists x \in U,\ Q(x)))$

La réciproque est fausse.

- $((\forall x \in U,\ P(x)) \vee (\forall x \in U,\ Q(x))) \rightarrow (\forall x \in U,\ P(x) \vee Q(x))$.

La réciproque est fausse.

EXEMPLE

si on compare les deux prédicats : “il existe un réel x tel que ln $(x) = 0$” et “il existe un réel x tel que sin $(x) = 0$”, ils sont bien vrais tous les deux, mais le prédicat “il existe un réel x tel que ln $(x) = 0$ et sin $(x) = 0$” est faux. Ainsi les deux prédicats ne sont pas équivalents.

4 Les différents types de démonstration

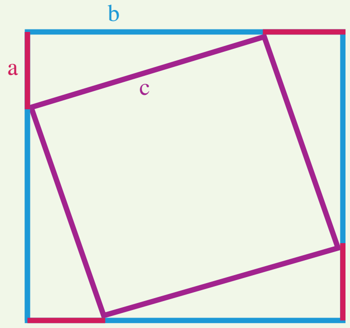
4.1 La démonstration directe

Définition

La **démonstration directe** consiste à démontrer la proposition énoncée en partant directement des hypothèses données, et en arrivant à la conclusion par un enchaînement d'implîcations.

EXEMPLES

- Soit n un entier naturel le produit de n par $(n+1)$ est un entier pair.
  En effet, tout entier naturel n est pair ou impair, son successeur est alors impair ou pair.
  Ainsi si n est pair, le produit $n(n+1)$ est alors évidemment pair.
  Si n est impair alors $n+1$ est pair et $n(n+1)$ est pair.
- Montrer le théorème de Pythagore en utilisant une démonstration géométrique basée sur les surfaces de deux carrés imbriqués.



On considère un triangle rectangle de petit côté a, de grand côté b et d'hypoténuse c. On construit le carré de côté $a+b$ et le carré imbriqué de côté c comme ci-dessus.
L'aire du grand carré est évidemment $S = (a+b)^2$, mais on peut aussi l'écrire comme la somme de l'aire du petit carré c^2, et de 4 fois l'aire du triangle rectangle initial $4\dfrac{ab}{2}$.
On en déduit :

$$(a+b)^2 = c^2 + 4\frac{ab}{2} \Leftrightarrow a^2 + 2ab + b^2 = c^2 + 2ab \Leftrightarrow a^2 + b^2 = c^2$$

4.2 La démonstration par contraposée

Définition

La **démonstration par contraposée** consiste à démontrer que : $(\neg Q) \rightarrow (\neg P)$ au lieu de montrer que: $P \rightarrow Q$

Remarque

On peut facilement vérifier que ces deux propositions sont synonymes en écrivant leurs tables de vérité respectives.

EXEMPLES

- Soit x un nombre réel tel que pour tout $\varepsilon > 0$, $x \leqslant \varepsilon$ alors $x \leqslant 0$.
  Montrons la contraposée de cette implication :
  $$(x > 0) \rightarrow (\exists \varepsilon > 0,\ x > \varepsilon)$$
  Cette implication est vraie puisque pour chaque $x > 0$ il suffit de prendre par exemple $\varepsilon = \frac{x}{2}$.
  La contraposée est vraie, l'implication initiale est vraie.
- Si n^2 est un entier naturel impair, alors n est un entier naturel impair.
  En effet si n est un entier naturel pair, alors il existe k entier naturel tel que $n = 2k$ donc $n^2 = 4k^2 = 2 \,.\, 2k^2$ est pair.

4.3 La démonstration par l'absurde

Définition

La **démonstration par l'absurde** consiste à supposer le contraire de la proposition énoncée et à montrer qu'on arrive alors à une contradiction (absurdité, impossibilité).

EXEMPLES

- Montrer que $\sqrt{2}$ est irrationnel.
  Supposons par l'absurde que $\sqrt{2}$ est un rationnel, c'est-à-dire qu'il existe une fraction irréductible $\frac{p}{q}$ où p est un entier relatif p et q est un entier naturel non nul tels que $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, alors $2 = \frac{p^2}{q^2} \Leftrightarrow p^2 = 2q^2$.
  On en déduit que p^2 est pair donc p lui même est pair (cf. l'exemple précédent), il existe donc un entier k tel que $p = 2k$, on en déduit
  $$p^2 = 2q^2 \Leftrightarrow (2k)^2 = 2q^2 \Leftrightarrow 4k^2 = 2q^2 \Leftrightarrow 2k^2 = q^2$$
  ainsi q^2 est pair et donc q est pair.
  p et q sont tous les deux pairs, donc la fraction $\frac{p}{q}$ n'est pas irréductible et l'hypothèse de départ est absurde, donc $\sqrt{2}$ est irrationnel.
- Montrer qu'il existe un nombre infini de nombres premiers.
  Supposons qu'il existe un nombre fini N de nombres premiers, qu'on peut ranger dans un ordre croissant et noter $p_1, p_2, \dots p_N$.
  On construit un nouveau nombre, le produit des N nombres premiers auquel on ajoute $1 : Q = p_1 p_2 ... p_N + 1$.
  N n'est divisible par aucun des $p_1, p_2, \dots, p_N$ (le reste de la division est toujours 1). On a donc deux possibilités :
  - soit Q est lui-même premier, on a donc construit un nouveau nombre premier ce qui contredit l'hypothèse de départ,

- soit Q n'est pas premier et il est donc divisible par un autre nombre premier non encore identifié. Ce qui contredit encore l'hypothèse de départ.

Dans les deux cas l'hypothèse de départ est absurde et il existe une infinité de nombres premiers.

4.4 La démonstration par récurrence ou induction

Définition

La **démonstration par récurrence** ne peut se faire que si la propriété $P(n)$ qu'on veut démontrer dépend d'un entier n. On procède en trois étapes :

- on montre que $P(0)$ ou $P(n_0)$ est vraie,
- on suppose que $P(n)$ est vraie et on montre que $P(n+1)$ est vraie (hérédité),
- on en déduit que $P(n)$ est vraie pour tout $n \geqslant 0$ ou $n \geqslant n_0$.

EXEMPLES

- Montrer que pour tout réel positif x et tout n entier naturel : $(1+x)^n \geqslant 1+nx$

  Montrons que la propriété est vraie pour $n = 0$, en effet on a bien

  $$(1+x)^0 = 1 = 1+0x$$

  Montrons que si la propriété est vraie au rang n alors elle est vraie au rang $n+1$, c'est-à-dire que :

  $$\text{si } (1+x)^n \geqslant 1+nx \text{ alors } (1+x)^{n+1} \geqslant 1+(n+1)x$$

  On a $(1+x)^{n+1} = (1+x)^n(1+x)$, mais par hypothèse de récurrence au rang n $(1+x)^n \geqslant 1+nx$ et en multipliant les deux membres de l'inégalité par $(1+x)$ on a :

  $$(1+x)^{n+1} \geqslant (1+nx)(1+x) \Leftrightarrow (1+x)^{n+1} \geqslant 1+(n+1)x+nx^2$$

  On a donc bien $(1+x)^{n+1} \geqslant 1+(n+1)x$.

  Ainsi la propriété est vraie pour $n = 0$, si elle est vraie pour n alors elle est vraie pour $n+1$, on en déduit que la propriété est vraie pour tous les entiers naturels.

- Montrer que pour n entier naturel : $1+2+\cdots+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

  Montrons que la propriété est vraie pour $n = 1$, en effet on a bien

  $$1 = \frac{1(1+1)}{2}$$

  Montrons que si la propriété est vraie au rang n alors elle est vraie au rang $n+1$, c'est-à-dire que :

  $$\text{si } 1+2+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2} \text{ alors } 1+2+\cdots+n+(n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

  On a $1+2+\cdots+n+(n+1) = (1+2+\cdots+n)+(n+1)$, donc par hypothèse de récurrence au rang n :

$$1+2+\cdots+n+(n+1)=\frac{n(n+1)}{2}+(n+1)=\frac{n(n+1)+2(n+1)}{2}=\frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

On a donc bien $1+2+\cdots+n+(n+1)=\dfrac{(n+1)(n+2)}{2}$.

Ainsi la propriété est vraie pour $n=1$, si elle est vraie pour n alors elle est vraie pour $n+1$, on en déduit que la propriété est vraie pour tous les entiers naturels non nuls.

4.5 La démonstration sans mot

Définition

Une **preuve sans mot, ou démonstration visuelle** est une preuve que l'on fait par un diagramme qui la rend évidente.

Quand le dit diagramme n'illustre qu'un cas particulier, il faut que la généralisation ne demande au lecteur qu'un effort minimal.

EXEMPLES

- Dans le diagramme cartésien d'une relation binaire, si la "diagonale est pleine" alors la relation est reflexive c'est-à-dire que $\forall x,\ xRx$.

  Considérons sur l'ensemble $A=\{1,2,3,4\}$ la relation

  $$xRy \Leftrightarrow x+y \ \textit{est pair}$$

  On peut représenter les différents couples en relation en construisant un tableau dit diagramme cartésien où chaque croix indique que x (noté dans la première colonne du diagramme) est en relation avec y (noté dans la première ligne du diagramme)

	1	2	3	4
1	×		×	
2		×		×
3	×		×	
4		×		×

Ce qu'il faut retenir

- Le calcul propositionnel permet de rédiger de façon rigoureuse des expressions dont on connaît la valeur de vérité.
- Si les propositions dépendent d'une ou plusieurs variables on peut appliquer les mêmes principes de calcul avec des prédicats.
- Les quantificateurs ne sont pas de simples abréviations mais déterminent de façon précise les caractéristiques des variables dont dépend le prédicat.
- L'ordre d'apparition des quantificateurs dans l'écriture de la formule est fondamental.
- Plusieurs types de raisonnements ou de démonstrations sont possibles, il faut toujours dans un premier temps isoler les hypothèses qu'on possède, les conclusions auxquelles on souhaite aboutir et se demander alors quelle sera la méthode la plus adaptée et surtout la plus simple à mettre en oeuvre.

Testez-vous

1. La négation de : "Le menu prévoit fromage et dessert" est :

a. "Le menu ne prévoit ni fromage ni dessert".
b. "Le menu prévoit fromage ou dessert ou les deux".
c. "Le menu ne prévoit que du fromage ou que du dessert"

2. Si P est la proposition : "Guillaume vient", Q est la proposition : "Lucie vient", R est la proposition : "Astrid vient", une écriture de la phrase : "Guillaume ne vient pas si Lucie ou Astrid viennent" sous forme de proposition est :

a. $(\neg Q) \vee (\neg R) \vee (\neg P)$
b. $\neg((Q \vee R) \wedge P)$
c. $\neg(Q \vee (R \wedge P))$

3. Ecrire la table de vérité de $\neg P \vee Q$. En déduire qu'une implication et sa contraposée sont synonymes.

4. Ecrire avec les quantificateurs appropriés :

a. la fonction f est nulle pour tout x réel
b. il existe un antécédent x pour lequel la fonction f s'annule
c. la courbe représentative de f coupe l'axe des abscisses en un seul point d'abscisse x

5. Donner la négation, la contraposée, la réciproque de la proposition "Tout entier divisible par 6 est divisible par 2 et 3".

6. Un problème classique d'après Cervantes Un missionnaire est capturé par des cannibales. Par respect pour sa fonction, les cannibales lui proposent de choisir son sort : il doit faire une courte déclaration, si elle est vraie il sera rôti, si elle est fausse il sera bouilli. Quelle phrase le missionnaire doit-il dire pour sauver sa vie ?

a. je serai rôti
b. je serai bouilli
c. je demande pitié

Réponses page 65

Exercices

1 Sachant que P, Q et R sont des propositions, écrire les tables de vérité des propositions suivantes, indiquer si ce sont des tautologies ou des antilogies.

1) $\neg P \vee (Q \wedge R)$
2) $((P \vee R) \wedge Q) \to (R \vee \neg Q)$
3) $(P \to Q) \wedge (P \wedge \neg Q)$

2 Sachant que P, Q et R sont des propositions, déterminer si les propositions écrites sur une même ligne sont synonymes ou non.

1) $P \to (Q \to R)$ $\quad$ $(P \to Q) \to R$
2) $P \to (Q \wedge R)$ $\quad$ $(P \to Q) \wedge (P \to R)$
3) $P \to (Q \vee R)$ $\quad$ $(P \to Q) \vee (P \to R)$

3 Pour chacune des 3 assertions suivantes, donner sa valeur de vérité, puis sa négation

1) $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x - y \leqslant 0$
2) $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R}, x - y \leqslant 0$
3) $\exists x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R}, x - y \leqslant 0$

4 Donner la réciproque, la contraposée, la négation de chacune des implications suivantes (P, Q, R et S sont des propositions).

1) $((\neg Q) \wedge P) \to (\neg S)$
2) $S \to ((\neg P) \vee Q)$
3) $(R \wedge (\neg(S \vee Q)) \to P)$

Réponses page 65