

## Projet 6

*Résolution approchée d'équations différentielles /  
Modélisation de systèmes dynamiques*

## Groupe 3 - Team 4

Responsable : Yanis Yoassi Patipe

Secrétaire : Ilyes Bechoual

Programmeurs : Corentin Ozane, Alexandre Tabouret

*Résumé* : Le projet visait à mettre en œuvre des techniques de résolution des équations différentielles à une ou plusieurs dimensions, en les appliquant à des cas tels que le système de proie-prédateur ou le pendule à N maillons.

# 1 Résolution d'équations différentielles

Les équations différentielles sont des équations de la forme :

$$\begin{cases} y(t_0) = y_0 \\ y'(t) = f(y(t), t) \end{cases} \quad (1)$$

Elles font donc intervenir une fonction et sa dérivée au sein d'une même égalité, à laquelle peut s'ajouter une condition dite initiale. Cette première partie s'attache à implémenter quatre méthodes de résolution d'équations différentielles présentées ci-dessous. L'espace est subdivisé au préalable en points  $t_0, t_1, \dots, t_n$  et les différentes méthodes tentent de calculer  $y_k \approx y(t_k)$ .

## 1.1 La méthode d'Euler

Cette méthode consiste à considérer qu'au point  $y_n$  la fonction est affine et donc à utiliser sa dérivée comme coefficient directeur pour approximer le point suivant. On obtient alors la relation :

$$y_{n+1} = y_n + h_n f(t_n, y_n) \quad (2)$$

où  $h_n$  est le pas entre  $t_n$  et  $t_{n+1}$ .

Cette méthode tente une approche simple du problème en approximant grossièrement l'inclinaison de la courbe représentative de la fonction. Cette technique utilise en réalité la méthode d'intégration des rectangles à gauche comme approximation. En effet les équations suivantes mène en utilisant la méthode des rectangles à gauche à l'équation 2.

$$y(t_{n+1}) - y(t_n) = \int_{t_n}^{t_{n+1}} y'(t) \, dx = \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t, y(t)) \, dx \quad (3)$$

or

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t, y(t)) \, dx \approx (t_{n+1} - t_n) f(t_n, y(t_n)) \quad (4)$$

d'où

$$y(t_{n+1}) - y(t_n) \approx h_n f(t_n, y(t_n)) \quad (5)$$

## 1.2 La méthode du point milieu

Cette méthode cherche à approximer de nouveau la pente menant au point  $y_{n+1}$  en calculant cette fois un point intermédiaire  $y_{n+\frac{1}{2}}$  et en passant par la pente  $p_n$  en ce point. Ainsi le point  $y_{n+1}$  est obtenu par l'équation 6.

$$\begin{cases} y_{n+\frac{1}{2}} = y_n + \frac{h_n}{2} f(t_n, y_n) \\ p_n = f(t_n + \frac{h_n}{2}, y_{n+\frac{1}{2}}) \\ y_{n+1} = y_n + h_n p_n \end{cases} \quad (6)$$

La méthode du point milieu provient de la méthode d'intégration du même nom.

## 1.3 La méthode de Heun

La méthode de Heun consiste à dans un premier temps calculer avec la méthode d'Euler le point  $y_{n_2}$  via la pente  $p_{n_1}$  puis à partir de cette première approximation de  $y_{n+1}$ , calculer une seconde pente  $p_{n_2}$ . Finalement la pente finale choisie est la moyenne de  $p_{n_1}$  et  $p_{n_2}$ . L'équation 7 montre les différents calculs menant à  $y_{n+1}$ .

$$\begin{cases} p_{n_1} = f(t_n, y_n) \\ y_{n_2} = y_n + h_n p_{n_1} \\ p_{n_2} = f(t_n + h_n, y_{n_2}) \\ y_{n+1} = y_n + h_n \frac{p_{n_1} + p_{n_2}}{2} \end{cases} \quad (7)$$

Il est à noter que cette méthode se base sur la méthode d'intégration des trapèzes.

## 1.4 La méthode de Runge Kutta 4

Cette méthode correspond à celle de Simpson. Une approximation encore plus précise de la pente est réalisée selon les équations 8 suivantes :

$$\begin{cases} p_{n_1} = f(t_n, y_n) \\ y_{n_2} = y_n + \frac{1}{2} h_n p_{n_1} \\ p_{n_2} = f(t_n + \frac{1}{2} h_n, y_{n_2}) \\ y_{n_3} = y_n + \frac{1}{2} h_n p_{n_2} \\ p_{n_3} = f(t_n + \frac{1}{2} h_n, y_{n_3}) \\ y_{n_4} = y_n + h_n p_{n_3} \\ p_{n_4} = f(t_n + h_n, y_{n_4}) \\ y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6} h_n (p_{n_1} + 2p_{n_2} + 2p_{n_3} + p_{n_4}) \end{cases} \quad (8)$$

## 1.5 Comparaison des méthodes

Ces différentes méthodes approximent plus ou moins justement la pente en un point de sorte à déterminer le point suivant de la courbe représentative de la fonction. La figure 1 présente l'évolution de l'erreur des quatre méthodes en fonction du nombre de points calculés sur l'équation différentielle suivante :

$$\begin{cases} y(0) = 1 \\ y'(t) = y(t) \end{cases} \quad (9)$$

On remarque que la méthode de Runge Kutta 4 a une vitesse de convergence bien plus élevée que les trois autres méthodes. De plus, Les méthodes de Heun et du point milieu sont confondues sur le graphique car elles sont en réalité identiques car issues des méthodes d'intégration des trapèzes et du point milieu elles-mêmes identiques. Enfin, la méthode d'Euler est particulièrement lente comparée à ses trois rivales.

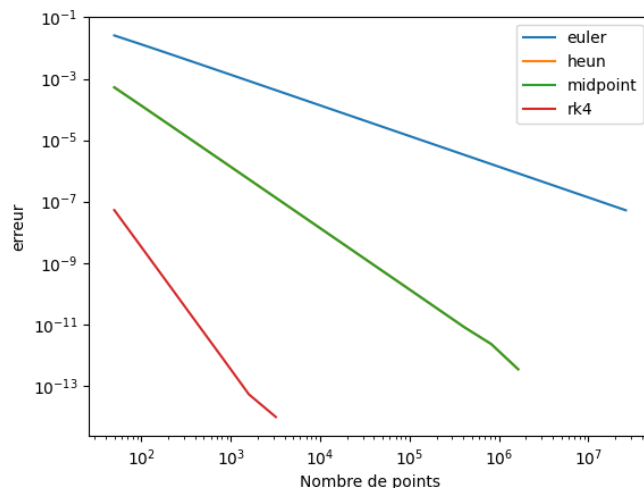


Figure 1: Erreur des différentes méthodes en fonction du nombre de points.

## 1.6 Exemple d'applications

Pour finir, deux exemples de résolution sont présentés dans cette sous-partie. Pour vérifier rapidement que les solutions calculées semblent correctes, il est possible d'afficher le champ des tangentes des fonctions calculées. Il consiste en un champ de flèches placées aux coordonnées  $(t, y(t))$  qui représente chacune les pentes de la fonction  $y$  à ces mêmes coordonnées. Dans le cas d'une fonction  $y(t) = (y_1(t), y_2(t))$  à 2 dimensions, on suppose qu'elle est indépendante de  $t$  et donc on représente les flèches aux coordonnées  $(y_1(t), y_2(t))$ .

Le premier exemple est une résolution de l'équation 10 :

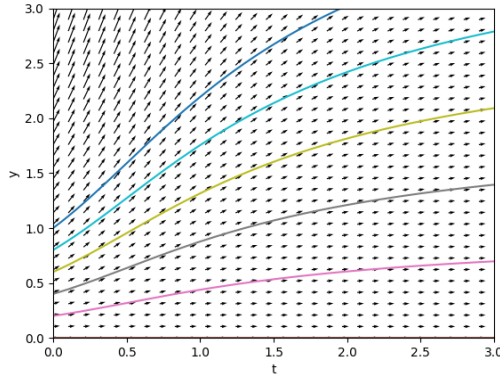
$$y'(t) = \frac{y(t)}{1+t^2} \quad (10)$$

On se propose d'afficher sa résolution via la méthode de Runge Kutta 4 pour différentes conditions initiales dont  $y(0) = 1$ . La figure 2a montre une telle résolution. On remarque que les courbes tracées suivent bien les directions indiquées par les flèches du champ des tangentes.

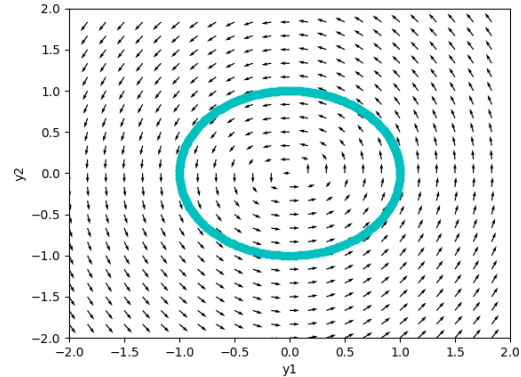
De plus, est aussi résolue l'équation différentielle de dimension 2 11 avec  $y(t) = (y_1(t), y_2(t))$ .

$$\begin{cases} y(0) = (1, 0) \\ y'(t) = (-y_2(t), y_1(t)) \end{cases} \quad (11)$$

La figure 2b expose cette résolution qui concorde avec le champ des tangentes.



(a) Résolution de l'équation  $y'(t) = \frac{y(t)}{1+t^2}$ .



(b) Résolution de l'équation  $y'(t) = \frac{y(t)}{1+t^2}$ .

Figure 2: Exemple de résolutions d'équations différentielles en dimensions 1 et 2.

## 2 Système proie-prédateur de Lotka-Volterra

Cette partie propose d'utiliser les méthodes de résolution d'équations différentielles précédentes pour modéliser les évolutions de différentes populations.

### 2.1 Modèles de Malthus et Verhulst

Ces deux modèles tentent de modéliser l'évolution d'une population seule. Le premier, celui de Malthus, se présente sous la forme de l'équation différentielle 12 :

$$\begin{aligned} \frac{dN(t)}{dt} &= \text{naissances} - \text{morts} \\ &= bN(t) - dN(t), \quad b, d > 0 \end{aligned} \quad (12)$$

L'équation précédente modélise la croissance d'une population comme étant le nombre de naissances auquel est soustrait le nombre de morts, pendant un instant  $dt$ . En appelant  $N(t)$  le nombre d'individu dans la population, il vient l'équation 12.  $b$  correspond alors au taux de naissance et  $d$  au taux de mortalité. La figure 3 expose à gauche la résolution de l'équation de Malthus en utilisant la méthode de Runge Kutta 4 pour une condition initiale  $N(0) = 2$  et les paramètres  $b = 0.02$  et  $d = 0.015$  (respectivement environ les taux de natalité et de mortalité en France). On remarque que ce modèle propose une croissance exponentielle de la population.

De plus, le modèle de Verhulst propose une approche différente dans laquelle la population croît de la même manière que dans le modèle de Malthus mais où le nombre d'individus se stabilise à un palier. Cette modélisation est donnée par l'équation 13

$$\frac{dN(t)}{dt} = \gamma N(t) \left( 1 - \frac{N(t)}{\kappa} \right), \quad \gamma, \kappa > 0 \quad (13)$$

Dans cette équation,  $\gamma$  correspond au taux de croissance de la population (on a en fait  $\gamma = b - d$ ) et  $\kappa$  est le nombre maximum d'individus dans la population. La figure 3 montre à droite la résolution de

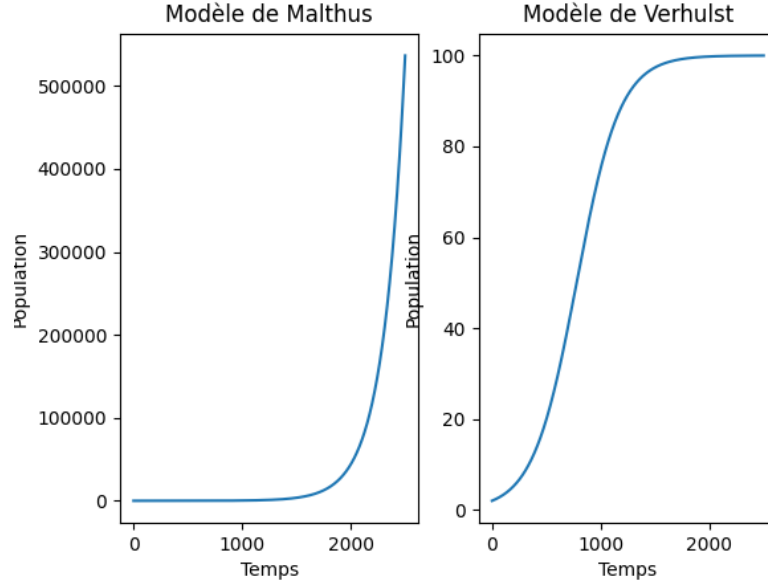


Figure 3: Modèles de Malthus et Verhulst avec pour population initial 2 individus,  $b = 0.02$ ,  $d = 0.015$  et  $\kappa = 100$ .

l'équation proposée par Verhulst en utilisant la méthode de Runge Kutta 4, avec les mêmes conditions initiales et paramètres que pour le modèle de Malthus, mais en fixant la population maximale  $\kappa$  à 100 individus.

## 2.2 Modèle de Lotka-Volterra

Ce modèle propose de modéliser l'évolution de deux populations qui se régulent entre elles : des proies et des prédateurs. Elle est régit par les équations différentielles couplées 14 :

$$\begin{aligned} \frac{dN(t)}{dt} &= N(t)(a - bP(t)) \\ \frac{dP(t)}{dt} &= P(t)(cN(t) - d) \end{aligned} \quad (14)$$

$N(t)$  correspond au nombre de proies à l'instant  $t$  et  $P(t)$  au nombre de prédateurs à l'instant  $t$ . L'évolution des deux populations dépendant l'une de l'autre. En effet, La population de proie évolue comme suit : pour chaque laps de temps  $dt$ , il y a un taux de naissance valant  $a$  et un taux de mort par les prédateurs valant  $b$ . Pour être plus précis,  $b$  correspond au taux de proies tuées par un prédateur pendant la durée  $dt$ . En ce qui concerne la population de prédateurs, elle augmente en se nourrissant de proies. Le facteur  $c$  correspond ainsi au taux de naissance de prédateur par proies. Enfin,  $d$  est le taux naturel de mortalité des prédateurs.

La figure 4 expose une résolution du modèle de Lotka-Volterra en se servant de la méthode de Runge Kutta 4. On remarque que pour les valeurs de paramètre  $a = 0.1$ ,  $b = 0.02$ ,  $c = 0.02$  et  $d = 0.4$ , la

solution trouvée correspond à une régulation équilibrée entre les deux espèces. Le nombre d'individus chez les proies aussi bien que chez les prédateurs est périodique.

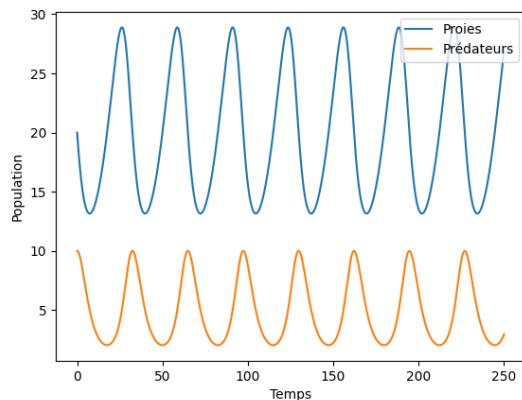


Figure 4: Modèle de Lotka-Volterra.

En affichant les variations du couple  $(N(t), P(t))$  comme présenté sur la figure 5, le résultat obtenu est une boucle, représentant bien la périodicité du nombre de prédateurs en fonction du nombre de proies et inversement. Afin de trouver la période de cette solution, un algorithme qui n'a pas pu être mis en place a cependant été discuté. Le but de cet algorithme est de comparer chaque élément de la solution au premier élément jusqu'à trouver un élément au rang  $k$  proche du premier élément. Pour s'assurer que cet ressemblance ne soit pas due au hasard, on vérifie que le deuxième élément soit proche de l'élément au rang  $k+1$  et ce jusqu'à un rang  $k+n$  choisi en fonction de la précision souhaitée.

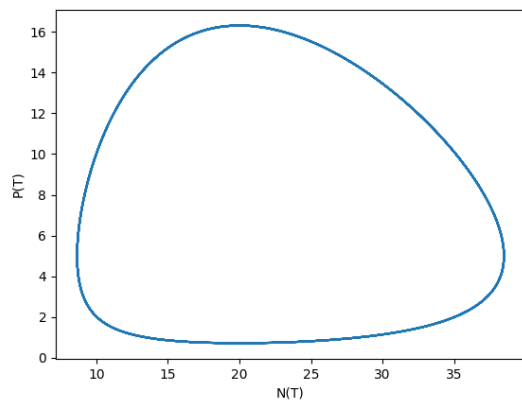


Figure 5: Variations du couple  $(N(t), P(t))$ .

Les différentes solutions représentées sur la figure 6 montrent localement que les solutions ne se croisent

pas, montrant ainsi l'unicité de la paire  $(N(t), P(t))$  et garantissant également la périodicité du nombre de prédateurs par rapport au nombre de proie étant donné qu'il ne peut exister plusieurs nombre de proies différentes pour un même nombre de prédateurs.

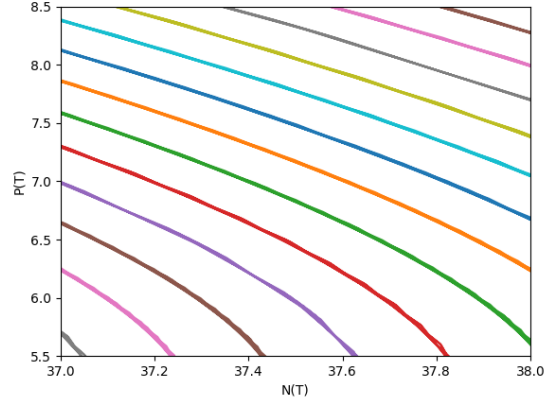


Figure 6: Variations du couple  $(N(t), P(t))$  en fonctions de différentes conditions initiales.

Les points singuliers correspondent aux positions où les dérivées s'annulent toutes, autrement dit où :

$$\begin{aligned} 0 &= N(t)(a - bP(t)) \\ 0 &= P(t)(cN(t) - d) \end{aligned} \quad (15)$$

On a alors dans la première équation soit  $N(t) = 0$  soit  $P(t) = \frac{a}{b}$  et dans la seconde soit  $P(t) = 0$  soit  $N(t) = \frac{d}{c}$ . Cela donne quatre points (une possibilité dans la première équation associée à une dans la seconde). Elles correspondent aux situations où soit l'une des population disparaît où qu'elles se maintiennent à un équilibre parfait (les deux populations sont constantes).

La forme des diagrammes représentés sur la figure 6 sont des boucles. En revanche, si l'on part des points singuliers de l'équation, des formes de diagramme différentes sont obtenues. Pour une solution constante, le diagramme obtenu sera donc de la forme d'un point puisque les populations de proies et de prédateurs ne changent pas.

### 3 Pendule à N maillons

Le problème du pendule à N maillons ( $N \geq 1$ ) est un problème de dynamique du mouvement qui est régi par une équation différentielle d'ordre 2. Ici dans ce projet nous nous sommes intéressés à deux cas  $N = 1$  et  $N=2$ .

#### 3.1 Pendule à 1 maillon

##### 3.1.1 Modélisation numérique

Dans l'approximation des petits angles ( $\theta \sim 0$ ), le problème du pendule à un maillon est régi par l'équation de l'oscillateur harmonique :

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega_0^2\theta = 0 \quad (16)$$

Par résolution analytique, on trouve que la solution de l'équation 16 est:

$$\theta(t) = A \sin(\omega_0 t) \quad (17)$$

où  $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$  est la fréquence angulaire des oscillations.

La subtilité de la résolution réside dans le fait que nous avons transformé cette équation différentielle d'ordre deux en un système d'équations d'ordre 1.

Pour la résolution nous avons utilisé la méthode de Runge Kutta 4 sur le système suivant :

$$\begin{cases} \theta(0) = C.I., \\ \frac{d\theta}{dt} = (\theta_2(t), -\omega_0^2\theta_1(t)). \end{cases} \quad (18)$$

où :  $\theta(t) = (\theta_1(t), \theta_2(t))$

#### 3.2 Représentation graphique

Voici ce que l'on obtient graphiquement :

Ici, le premier graphique 7a est bien cohérent avec la forme de la solution analytique. Le graphique 7b nous montre que la trajectoire est bien bornée. Ici nous n'avons pas affaire à un système chaotique.

#### 3.3 Pendule à 2 maillon

##### 3.3.1 Modélisation numérique

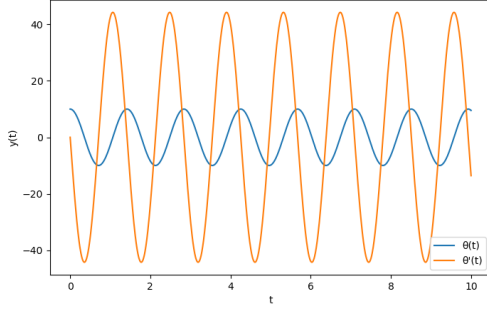
Le problème du pendule à deux maillons est un problème bien plus complexe que celui du pendule simple. En effet, il fait intervenir deux maillons (soumis aux mêmes forces), on obtient donc des équations différentielles d'ordre 2 couplées :

Pour les résoudre, nous avons, comme pour la méthode du pendule à un maillon, transformé notre système d'équations différentielles du second ordre en un système du premier ordre comme suit :

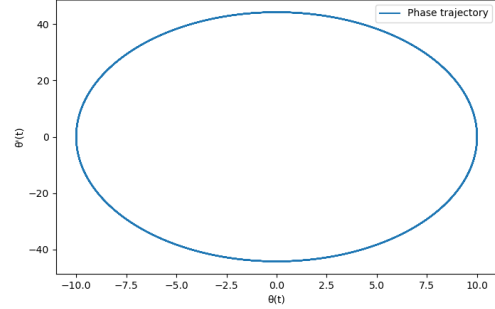
$$\begin{cases} \theta(0) = CI, \\ \frac{d\theta}{dt} = (\theta'_1(t), \theta'_2(t), \theta''_1(t), \theta''_2(t)). \end{cases} \quad (19)$$

où :  $\theta(t) = (\theta_1(t), \theta_2(t), \theta'_1(t), \theta'_2(t))$





(a) Représentation graphique des solutions de l'équation différentielles pendule simple



(b) Représentation graphique de la trajectoire

Figure 7: Ensembles des graphiques pour le système du pendule simple

$$\theta_1' = \omega_1$$

$$\theta_2' = \omega_2$$

$$\omega_1' = \frac{-g(2m_1 + m_2) \sin \theta_1 - m_2 g \sin(\theta_1 - 2\theta_2) - 2 \sin(\theta_1 - \theta_2) m_2 (\omega_2^2 L_2 + \omega_1^2 L_1 \cos(\theta_1 - \theta_2))}{L_1 (2m_1 + m_2 - m_2 \cos(2\theta_1 - 2\theta_2))}$$

$$\omega_2' = \frac{2 \sin(\theta_1 - \theta_2) (\omega_1^2 L_1 (m_1 + m_2) + g(m_1 + m_2) \cos \theta_1 + \omega_2^2 L_2 m_2 \cos(\theta_1 - \theta_2))}{L_2 (2m_1 + m_2 - m_2 \cos(2\theta_1 - 2\theta_2))}$$

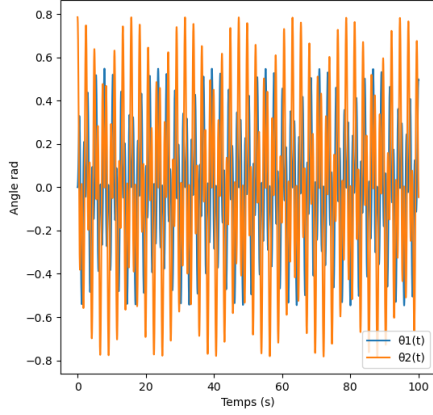
Figure 8: équations couplets du mouvement du pendule à 2 maillons

### 3.3.2 représentation graphique

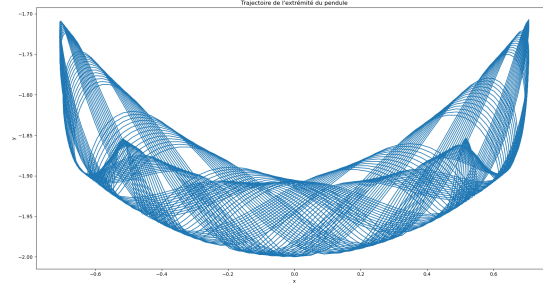
Voici les solutions graphiques que nous avons obtenues pour les conditions initiales suivantes ( $t = 0$ ) :  $\theta_1 = 0$ ,  $\theta_2 = 45$ ,  $\theta_1' = 0$ ,  $\theta_2' = 0$ ,  $m_1 = 2$ ,  $m_2 = 2$ ,  $L_1 = 1$ ,  $L_2 = 1$  :

Ici on remarque que les solutions sont toujours des fonctions périodiques (9a). Pour la trajectoire, la forme de la représentation nous montre bien que le mouvement du pendule à deux maillons est bien plus complexe que celui du pendule simple; cependant, on remarque aussi que les mouvements sont toujours plus ou moins bornés.

Nous remarquons donc que pour ces conditions initiales, le mouvement est plus ou moins prévisible. Cependant, nous savons que le système du pendule double est extrêmement dépendant des conditions initiales. Dans la prochaine partie, nous allons examiner cette propriété.



(a) Représentation graphique des solutions de l'équation différentielle du pendule à deux maillons.



(b) Représentation graphique de la trajectoire de l'extrémité du pendule.

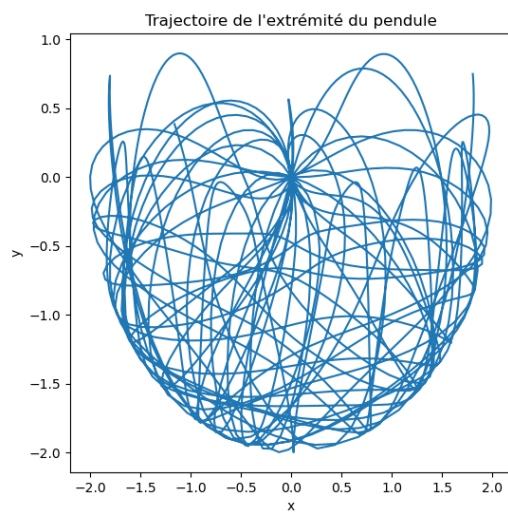
Figure 9: Ensemble des graphiques pour le système du pendule à deux maillons.

### 3.3.3 Impactes des conditions initiales

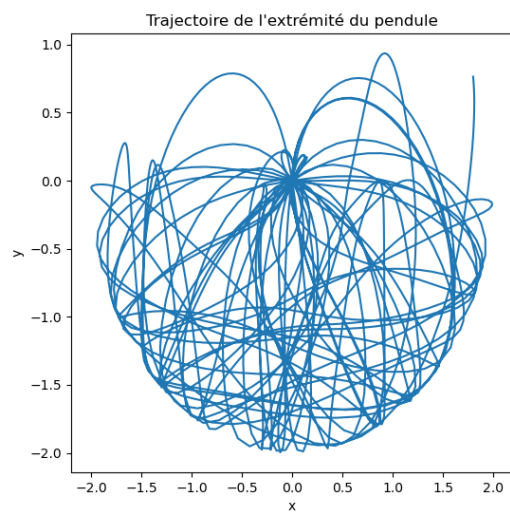
Ici nous allons donc tracer différentes trajectoires en fonction de différentes valeurs initiales pour montrer graphiquement que ce système est chaotique (ici on aura toujours  $m_1 = 2$ ,  $m_2 = 2$ ,  $L_1 = 1$ ,  $L_2 = 1$ ,  $\theta'_1 = 0$ ,  $\theta'_2 = 0$  )

Ici 10 nous observons que ces deux trajectoires sont assez différentes et cela seulement pour une différence de 1 degré entre les valeur de  $\theta_1$ . Ce qui confirme qu'une petite variation des conditions initiales peut grandement impacter le système. On met donc ici en avant le caractère chaotique du système du pendule à deux maillons.

De plus, pour revenir sur la forme de ces trajectoires, nous remarquons que celles-ci ne sont plus du tout aussi ordonnées et "prévisible" que la trajectoire de la partie précédente 9b. ce qui est tout à fait cohérent au niveau physique car on significativement augmenté les angles initiaux.



(a) Représentation graphique de la trajectoire pour  $\theta_1 = 100$  ,  $\theta_2 = 125$



(b) Représentation graphique de la trajectoire pour  $\theta_1 = 101$  ,  $\theta_2 = 125$

Figure 10: Courbes de la trajectoires pour plusieurs jeux de conditions initiales