

Algorithmique numérique - Projet 4 : Systèmes d'équations non linéaires / Méthode de Newton-Raphson

Matteo Marcos (Coordinateur),
Robin Rouet (Secrétaire),
Ilyes Bechoual (Programmeur),
Louis Peyrondet (Programmeur)

Mars 2023



1 Introduction

Le but du projet est d'implémenter et de tester sur des exemples concrets des méthodes servant à résoudre des équations non linéaires pour lesquelles les méthodes vues lors des précédents projets sont inefficaces.

La méthode utilisée est celle de Newton-Raphson pour des équations de dimensions supérieures ou égales à 1. Une fois implémentée, cette méthode sera ensuite appliquée sur l'équation des vagues, et le calcul des points Lagrangiens.

2 Description algorithmique

2.1 Méthode de Newton-Raphson

Lors de l'utilisation de la méthode de Newton-Raphson, la matrice jacobienne sera notée H , le vecteur à l'itération i sera noté U_i , le vecteur correspondant au déplacement de U à l'itération i sera noté V_i et la fonction à utiliser sera noté f .

La méthode de Newton-Raphson est une méthode itérative permettant de trouver, pour une fonction f , le vecteur U telle que $f(U) = 0$, sachant f , une fonction de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^n avec $n \geq 1$, à la différence de la méthode de Newton qui n'est utilisable qu'avec $n = 1$.

Pour comprendre comment implémenter la méthode de Newton-Raphson, il est nécessaire de remarquer que, à la fin d'une certaine itération, l'objectif est d'obtenir $f(U + V) = 0$.

Or, pour chaque itération, $f(U + V) \approx f(U) + H(U) * V$

On obtient alors :

$$f(U) + H(U) * V \approx 0$$

Ainsi, à la fin de chaque itération, U prend la valeur de $U + V$, jusqu'à ce que $f(U + V) < \epsilon$ avec ϵ la précision souhaitée sur le résultat.

Cependant, l'implémentation suivant la méthode décrite précédemment n'assure pas la convergence, et donc la terminaison de la méthode. La figure 2 montre, avec la méthode de Newton, une fonction $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$ pour laquelle cette méthode ne converge pas avec $u_0 = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Pour assurer la terminaison de l'algorithme, une méthode de Backtracking est utilisée. Celle-ci consiste à vérifier que l'erreur $f(U + V)$ d'une itération $i + 1$ est bien inférieure à l'erreur de l'itération i . Lorsque cette condition n'est pas vérifiée, on applique un coefficient $\alpha < 1$ à V lorsque U est actualisé en fin d'itération.

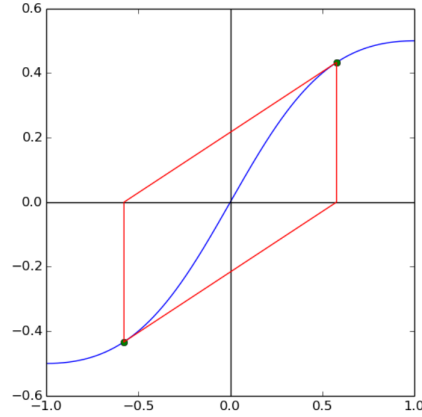


FIGURE 1 – Représentation graphique de la fonction $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$ pour laquelle la méthode de Newton ne converge pas avec $u_0 = \frac{1}{\sqrt{3}}$ (Source : Slides du projet)

2.2 Équation des vagues

Le projet consiste à résoudre l'équation de Korteweg-de Vries (KdV) qui décrit la propagation des ondes sur une surface d'eau peu profonde. On utilise une méthode numérique basée sur une discrétisation de l'équation et une méthode de Newton-Raphson pour calculer la solution. Le résultat final devrait être un graphique animé représentant l'évolution de la surface de l'onde au fil du temps.

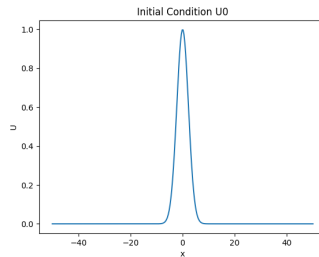


FIGURE 2 – Dessin de U_0 .

2.3 Calcul des points Lagrangiens

La méthode de Newton-Raphson est utilisée dans bien des domaines, notamment celui de la physique. Ainsi, afin de déterminer les points de Lagranges d'un modèle, elle devient plus que nécessaire.

Les points Lagrangiens sont des points spatiaux où les champs gravitation-

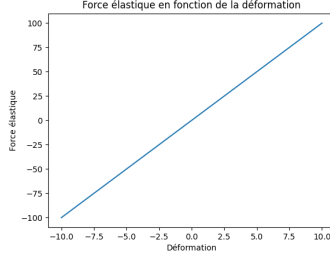


FIGURE 3 – Représentation graphique de l'évolution de la force élastique en fonction de la déformation.

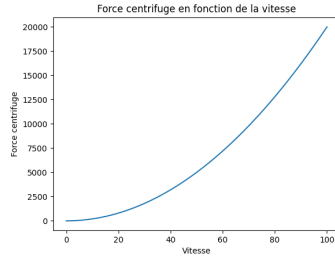


FIGURE 4 – Représentation graphique de l'évolution de la force centrifuge en fonction de la vitesse.

nels de deux corps fournissent la même force centripète et se trouvent ainsi en équilibre l'un par rapport à l'autre. Afin de les calculer, il est nécessaire de résoudre les équations de mouvements du systèmes, en utilisant donc la méthode de Newton-Raphson.

Pour illustrer au mieux cette méthode, voici un exemple sur un système possédant 3 forces :

1. Une force élastique : $F = k\Delta l$

2. Une force centrifuge : $f_c = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} k(x - x_0) \\ k(y - y_0) \end{pmatrix}$

3. Une force gravitationnelle :

$$f_g : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \left(-k \cdot \left(\frac{x - x_0}{((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2)^{\frac{3}{2}}} \right); -k \cdot \left(\frac{y - y_0}{((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2)^{\frac{3}{2}}} \right) \right)$$

Ces forces sont alors codées en python afin de faciliter la modélisation.(cf Figure 2-4)

Une fois cette étape réalisée, une fonction permettant de calculer, selon les forces données, les points de Lagrange en se servant de la méthode de Newton-Raphson et une fonction construisant la Jacobienne des forces est implémentée. (pour les détails de cette méthode, cf première partie)

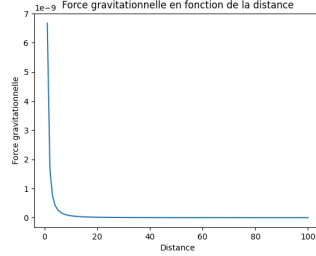


FIGURE 5 – Représentation graphique de l'évolution de la force gravitationnelle en fonction de la distance.

3 Analyse

3.1 Méthode de Newton-Raphson

Cette section regroupe les tests effectués sur l'implémentation de la méthode de Newton-Raphson, ainsi que les observations relatives à ces tests.

Pour tester la méthode, une fonction de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}^2 assez générique sans réel sens fut utilisé :

$$f : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 2 * x_1 + x_2 + 10 \\ 2 * x_2 + 10 \end{pmatrix}$$

À partir de cette fonction, il est possible de former relativement facilement la matrice jacobienne associée :

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Une solution de $f(U) = 0$ est $U = \begin{pmatrix} -2.5 \\ -5 \end{pmatrix}$

Avec cette exemple, en choisissant $N = 1000$ et $U_0 = \begin{pmatrix} 1000 \\ 1000 \end{pmatrix}$ et $\epsilon = 10^{-13}$, la

fonction termine après 2 itérations avec une erreur finale de 0.0 et $U_2 = \begin{pmatrix} -2.5 \\ -5 \end{pmatrix}$.

L'utilisation du backtracking n'a pas d'effet sur le nombre d'itération, ou le résultat de la fonction.

Pour vérifier la méthode de backtracking, la fonction représentée par la Figure 2 est utilisée, même si celle-ci est de dimension 1. La figure 6 représente l'évolution de $f(U)$ pour chaque itération.

Il est possible de remarquer que pour une dizaine d'itération, la méthode ne converge pas. Elle finit cependant par converger vers la valeur souhaitée à cause des nombreuses approximations du calcul machine, qui lui permet dans ce cas de terminer.

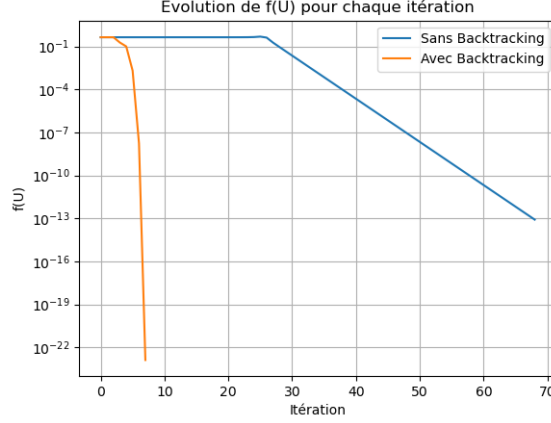


FIGURE 6 – Évolution de $f(U)$ pour chaque itération avec et sans backtracking.

L'utilisation du backtracking permet effectivement de continuer de converger pour chaque itération, ce qui améliore, pour ces fonctions spécifiques, la vitesse de convergence.

3.2 Équation des vagues

3.3 Calcul des points Lagrangiens

Cette section est relative à l'analyse des tests effectués par les fonctions implémentées modélisant le calcul des Points Lagrangiens.

Tout d'abord, il est important de préciser qu'il est bien possible de déterminer les points de Lagrange d'un système à deux corps sous l'effet des forces gravitationnelles et centrifuges. En effet, la méthode de Newton-Raphson permet de résoudre aisément les équations de mouvements et de manière efficace. Cela permet donc de déterminer précisément les positions de ces points.

Cependant, lorsque la force élastique est rajoutée, les points de Lagrange peuvent devenir instables puisque la forme des corps peut être modifiée au cours du mouvement. Ainsi, il est possible que les équations de mouvements n'admettent pas de solution analytique et peuvent nécessiter une résolution numérique.

Afin de prouver la correction de la fonction, une série de tests est effectuée. Dans ces derniers, la valeur du point de Lagrange tels que $U = [1.5, 0]$, $f(U) =$

$$\begin{pmatrix} 1.00565457 \\ 0 \end{pmatrix}, df(U) = \begin{bmatrix} 1.75259259 & 0 \\ 0 & 0.6237037 \end{bmatrix}$$

donne le résultat attendu suivant : $\begin{pmatrix} -98.49274922 \\ -0.49999745 \end{pmatrix}$

Ainsi, les tests sont bien concluants et prouvent la correction du code.

4 Commentaires

4.1 Matteo Marcos

Un sujet intéressant, qui après avoir introduit une méthode qui était peut être déjà connu de certains, mais dans un domaine plus générale, permet de voir clairement les applications de cette dite méthode.

4.2 Robin Rouet

Personnellement, ce TD m'a semblé plutôt complexe, surtout la compréhension des méthodes à implémenter. En effet, j'ai dans un premier temps tenté d'effectuer la partie sur la méthode de Bairstow mais sans succès. Cependant, sur les parties liées à la physique (2-a, 2-c et 2d), l'utilisation de la méthode de Newton-Raphson était particulièrement intéressante, de même pour leur modélisations qui rendent les problèmes plus concrets.

4.3 Ilyes Bechoual

L'étude de l'équation des vagues a été une application fascinante qui m'a permis d'approfondir ma compréhension de la méthode de Newton-Raphson. Toutefois, malgré son intérêt, le sujet présentait certaines failles dans les explications, ce qui nous a fait perdre beaucoup de temps à les résoudre. De plus, il y avait une grande disparité entre les parties et les implémentations, ce qui était dommageable étant donné que la présentation était prévue pour le même jour.

4.4 Louis Peyrondet

Grâce à ce projet j'ai pu découvrir la méthode de Newton-Raphson ainsi que ses applications pour résoudre divers problèmes physiques et mathématiques. La mise en avant de la méthode de backtracking était intéressante et les résultats obtenus permettent de visualiser les notions plus théoriques du cours.