Zusammenfassung

Analysis für Informatiker 2

Michael Wieland

24. August 2016

Mitmachen
Falls Du an diesem Dokument mitarbeiten willst, kannst Du das Dokument auf GitHub unter `https://github.com/michiwieland/hsr-zusammenfassungen` forken.

Lizenz
"THE BEER-WARE LICENSE"(Revision 42): <michi.wieland@hotmail.com> wrote this file. As long as you retain this notice you can do whatever you want with this stuff. If we meet some day, and you think this stuff is worth it, you can buy me a beer in return. Michael Wieland

1 Inhaltsverzeichnis

2 Grundlagen

2.1 Plots

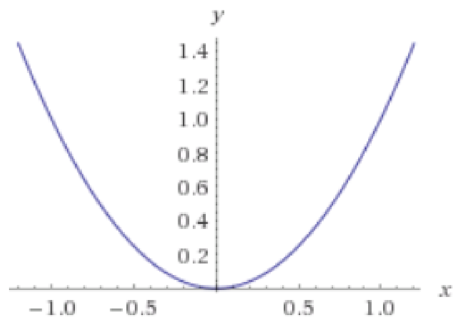

Abbildung 1: x^2

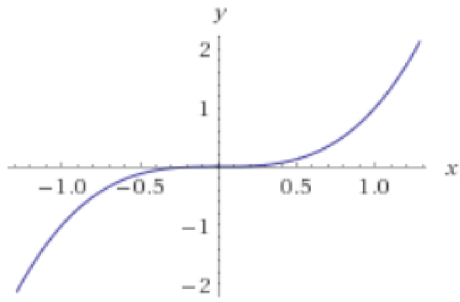

Abbildung 2: x^3

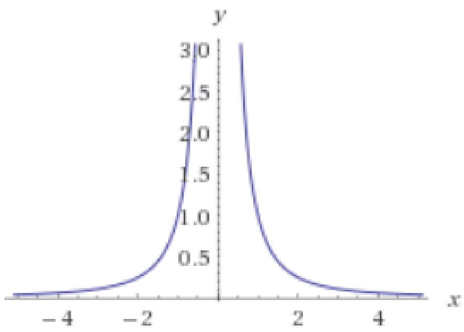

Abbildung 3: x^{-2}

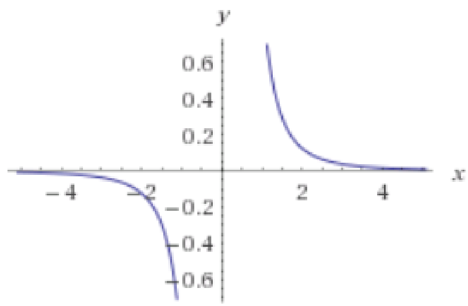

Abbildung 4: x^{-3}

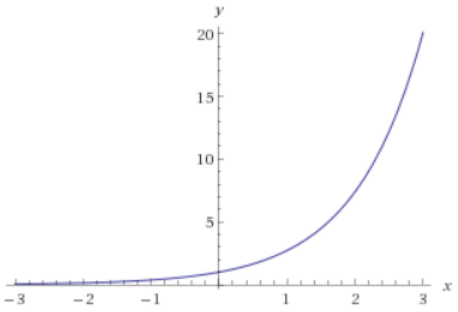

Abbildung 5: e^x

- Basis muss grösser 0 sein
- Exponenten $\in \mathbb{R}$
- Gibt immer Werte grösser 0 zurück
- Schneidet bei $x = 0$ die Y-Achse (Ordinate) $\Rightarrow e^0 = 1$

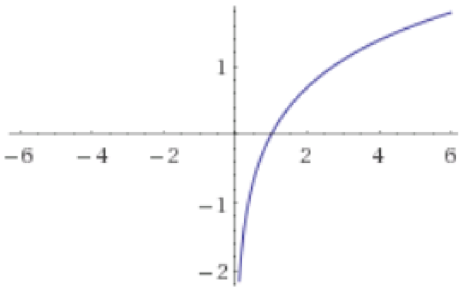

Abbildung 6: $ln(x)$

- Nimmt nur $\mathbb{R}^+$ 0 entgegen
- Liefert $\mathbb{R}$ zurück
- $ln(0)$ ist nicht definiert $(-\infty)$
- Hat bei $ln(1)$ denn Nulldurchgang

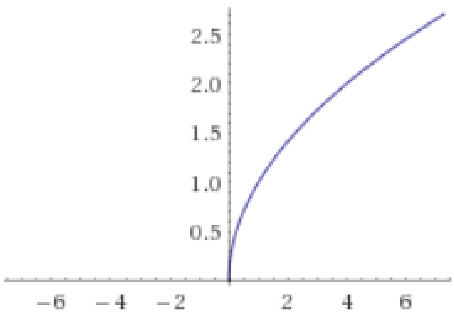

Abbildung 7: $\sqrt{x}$

- Nimmt nur $\mathbb{R}^+$ entgegen

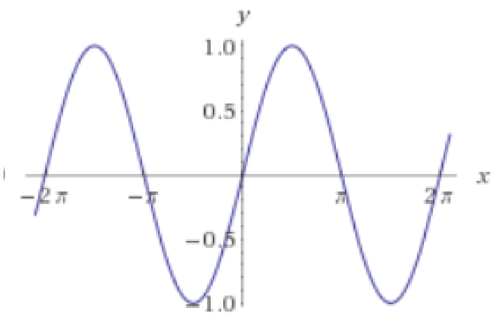

Abbildung 8: $sin(x)$

- Nimmt $\mathbb{R}$ entgegen
- Gibt Werte im Intervall $[-1; 1]$ zurück
- Nur eingeschränkt umkehrbar $\Rightarrow$ $sin(x)_{[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]}$

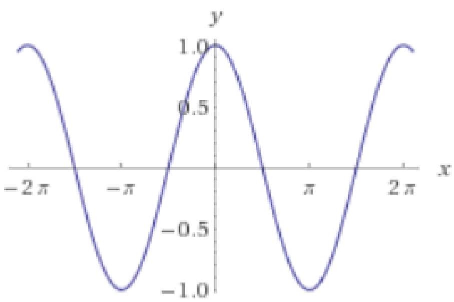

Abbildung 9: $cos(x)$

- Nimmt $\mathbb{R}$ entgegen
- Gibt Werte im Intervall $[-1;1]$ zurück
- Nur eingeschränkt umkehrbar $\Rightarrow$ $cos(x)_{[0;\pi]}$

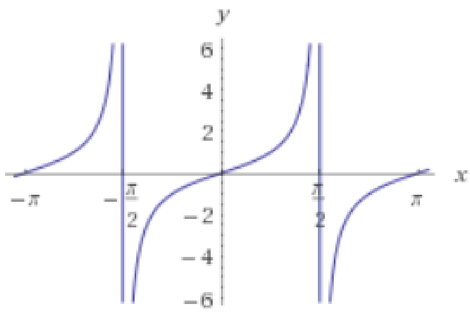

Abbildung 10: $tan(x)$

- Kreutzt bei Vielfachen von π die X-Achse (Abszisse)
- $x \in \mathbb{R} | x \neq \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$
- Nur eingeschränkt umkehrbar $\Rightarrow$ $tan(x)_{(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2})}$

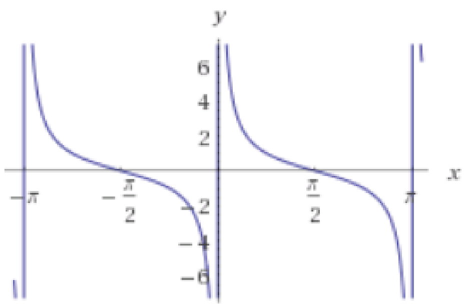

Abbildung 11: $cot(x)$

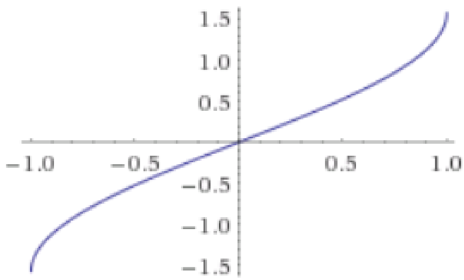

Abbildung 12: $arcsin(x)$

- $y \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$

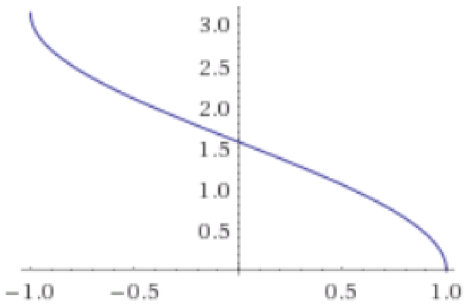

Abbildung 13: $arccos(x)$

- $y \in [0; \pi]$

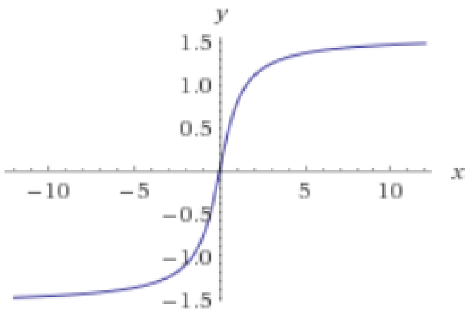

Abbildung 14: $arctan(x)$

- $y \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$

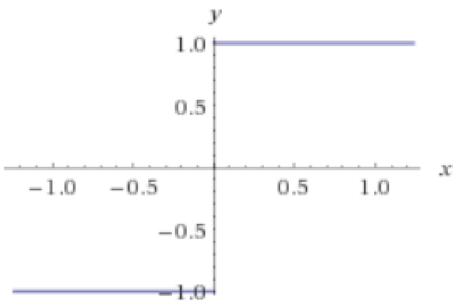

Abbildung 15: $signum(x)$

2.2 Verschiebungen von Graphen

2.2.1 Spieglungen

An X-Achse $f(x) \Rightarrow -f(x)$

An Y-Achse $f(x) \Rightarrow f(-x)$

Am Nullpunkt $f(x) \Rightarrow -f(-x)$

2.2.2 Entlang der X-Achse

Verschiebung nach rechts $f(x) \Rightarrow f(x-k)$

Verschiebung nach links $f(x) \Rightarrow f(x+k)$

Strecken $f(x) \Rightarrow f(\frac{x}{k})$

Stauchen $f(x) \Rightarrow f(kx)$

2.2.3 Entlang der Y-Achse

Verschiebung nach oben $f(x) \Rightarrow f(x)+k$

Verschiebung nach unten $f(x) \Rightarrow f(x)-k$

Strecken $f(x) \Rightarrow k \cdot f(x)$

Stauchen $f(x) \Rightarrow \frac{1}{k} \cdot f(x)$

2.3 Ableitungsregeln

Funktion	Ableitung
x^a	$a \cdot x^{a-1}$
1	0
x	1
x^2	$2x$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}}$
e^x	e^x
a^x	$ln(a) \cdot a^x$
$ln(x)$	$\frac{1}{x}$
$log_b(x)$	$\frac{1}{ln(b) \cdot x}$
$sin(x)$	$cos(x)$
$cos(x)$	$-sin(x)$
$tan(x)$	$\frac{1}{cos^2(x)}$
$tan(x)$	$1 + tan^2(x)$
$arcsin(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$arccos(x)$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$arctan(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$

2.4 Stammfunktion

Funktion	Stammfunktion	Bemerkung
x^a	$\frac{1}{a+1}x^{a+1} + const$	
x^a	$ln(\|x\|) + const$	Falls $a = -1$
1	$x + const$	
x	$\frac{1}{2}x^2 + const$	
x^2	$\frac{1}{3}x^3 + const$	
$\frac{1}{x}$	$ln(\|x\|) + const$	
$\sqrt{x}$	$\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + const$	
e^x	$e^x + const$	
$sin(x)$	$-cos(x) + const$	
$cos(x)$	$sin(x) + const$	

2.5 Logarithmen

$$log(x \cdot y) = log(x) + log(y)$$

$$log(\frac{x}{y}) = log(x) - log(y)$$

$$log(x^y) = y \cdot log(x)$$

2.6 Trigonometrische Funktionen

$$cos(-x) = cos(x)$$

$$sin(-x) = -sin(x)$$

2.7 Konstanten

$$\sqrt{2} \approx 1.414$$
$$\sqrt{3} \approx 1.732$$
$$e \approx 2.718$$
$$\pi \approx 3.141$$

2.8 Polynomdivision

Vorgehen

1. Dividieren des grössten Exponenten durch den x-Term im Divisor
2. Nun wird das Resultat mit dem kompletten Divisor multipliziert und und das den Divident geschrieben.
3. Danach zieht man das Resultat aus der Multiplikation vom Divident ab
4. Zurück zu Schritt 1 mit dem Resultat aus der Subtraktion

$$
\begin{array}{l}
(x^3 - 2x^2 - 5x + 6) : (x - 1) = x^2 - x - 6 \\
\underline{-(x^3 - x^2)} \\
\quad -x^2 - 5x \\
\quad \underline{-(-x^2 + x)} \\
\qquad -6x + 6 \\
\qquad \underline{-(-6x + 6)} \\
\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

Abbildung 16: Polynomdivision

3 Taylorreihen

3.1 Taylorpolynom

- Jede ableitbare Funktion lässt sich durch Polynome approximieren.
- Endliches Polynom mit Ordnung N
- Hat Rechenfehler
- Taylor Polynom der ersten Ordnung enspricht der Linearisierung

3.2 Taylorreihe

- Unendliches Polynom
- theoretisch keine Rechenfehler
- Stimmt entweder exakt oder überhaupt nicht mit der Ausgangsfunktion überein (Konvergenzradius)

3.2.1 Konvergenzradius

Der Konvergenzradius ist der Bereich um den Entwicklungspunkt x_0, in welchem die Taylorreihe den korrekten Wert der Ausgangsfunktion $f(x)$ liefert. Der Konvergenzradius ist also der Abstand vom Entwicklungspunkt bis zur ersten Definitionslücke.

3.2.2 Definition:

Taylorpolynom N-Ordnung

$$f(x) \approx \sum_{i=0}^{N} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}(x - x_0)^i \text{ für } x \approx x_0 \tag{1}$$

3.2.3 Vorgehen

1. Polynom vom Grad N, N-Mal ableiten
2. Entwicklungspunkt x_0 in alle Ableitungen einsetzen und ausrechnen
3. Koeffizienten notieren

$$K_i = \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}$$

mit

$$\begin{aligned} f^{(i)}(x_0) &= \text{Lösung der i-ten Ableitung} \\ i &= \text{Grad der Ableitung} \end{aligned}$$

4. Koeffizienten K_i in Taylorpolynom einfügen

$$f(x) \approx \sum_{i=0}^{n} K_i \cdot (x - x_0)^i \tag{2}$$

5. Je grösser N gewählt wird, desto besser nähert sich der Entwicklungspunkt x_0 dem Resultat x an.

3.3 Fehlerabschätzung bei Taylorreihen

3.4 Definition

Fehlerabschätzung im Intervall [a;b] für den Fall, dass $x_0 = \frac{a+b}{2}$ und $m \geq |f^{N+1}(x)|$ für alle $x \in [a;b]$

$$|f(x) - p_N(x)| \leq \frac{m(b-a)^{N+1}}{2^{N+1}(N+1)!}$$

Bemerkung zum Entwicklungspunkt Der Entwicklungspunkt x_0 liegt genau in der Mitte des Intervalls [a;b]

Bemerkung zum Maximum m
Ein gutes m entspricht dem globalen Maximum der Ableitung $m \geq |f^{N+1}(x)|$. Am besten stellt man sich den Graphen vor und entscheidet dann, ob man x_0, a oder b als Funktionsargument x in $f^{N+1}(x)$ nimmt. Oft ist es schwierig m zu bestimmen, weshalb man, wenn a und b nicht alzu weit entfernt sind, einfach den grösseren der beiden Werte als Funktionsargument verwendet:

$$m = |f^{N+1}(a)| \vee |f^{N+1}(b)|$$

3.5 Beispiel

Gegeben sei die Tailorreihe der folgenden Funktion um das Entwicklungszentrum $x_0 = 0$

$$f(x) = e^{-2x}$$

So ist das Talorpolynom für das n-te Element

$$f^{(n)}(x_0) = (-2)^n e^{-2x}$$
$$f^{(n)}(0) = (-2)^n$$

und die Taylorreihe

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^n}{n!} x^n$$

Bestimmen sie den minimalen Grad desjenigen Taylorpolynoms, welches die Funktion $f(x)$ im Intervall $\left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$ mit einem Fehler von weniger als $\frac{1}{100}$ berechnen lässt

1. m berechnen

$$|f^{N+1}(x)| \leq m$$
$$|(-2)^{n+1} e^{-2x}| \leq m$$
$$2^{n+1}|e^{-2x}| \leq m$$

2. Globales Maximum für x einsetzen (a, b oder x_0)

$$m = 2^{n+1}|e^{-2x}|$$
$$m = 2^{n+1}|e^{-2 \cdot -\frac{1}{2}}|$$
$$m = 2^{n+1}|e^{1}|$$

3. Abschätzen des Rechenfehlers $\Rightarrow$ a,b und m einsetzen und vereinfachen

$$\begin{aligned}|f(x) - p_N(x)| &\leq \frac{m(b-a)^{N+1}}{2^{N+1}(N+1)!}\\ &\leq \frac{2^{N+1}e(\frac{1}{2}+\frac{1}{2})^{N+1}}{2^{N+1}(N+1)!}\\ &\leq \frac{e}{(N+1)!}\end{aligned}$$

4. Die Zahl N muss nun so gewählt werden dass

$$\begin{aligned}\frac{e}{(N+1)!} &\leq 0.001\\ e \cdot 100 &\leq (N+1)!\end{aligned}$$

5. Wertetabelle erstellen mit verschiedenen N der Gleichung

N	0	1	2	3	4	5
(N+1)!	1	2	6	24	120	720

6. Gemäss Tabelle

$$\begin{aligned}e \cdot 100 \approx 270 &\leq 720\\ &\Rightarrow \underline{\underline{N \geq 5}}\end{aligned}$$

Es ist mindestens ein Taylorpolynom vom Grad 5 nötig

4 Grenzwerte / Limes

4.1 Unendliche Grenzwerte

Unendliche Grenzwerte sind Grenzwerte der Form $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ rps. $\lim_{x \to -\infty} f(x)$

- Man muss immer Definitionslücken suchen (z.B Teilbar durch 0 möglich?)
- Grenzwerte existieren nur wenn die Funktion eine stetige Fortsetzung besitzt.

4.1.1 Vorgehen

1. Bei Brüchen teilt man im Nenner und im Zähler durch den grössten Exponenten. (z.B x^2) Eine schnellere Variante ist jedoch, dass man einfach den schnellst wachsenden Exponenten im Zähler und im Nenner herausnimmt und einen neuen Bruch schreibt. (Achtung: Wurzeln etc. bleiben bestehen)

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\sqrt{x^2 - 2x + 1}}{x - 1} = \lim_{x \to \infty} \frac{\sqrt{x^2}}{x} = 1$$

2. Für jeden einzelnen Term seinen ungefähren Verlauf definieren
3. Die Grenzwerte zusammen gezählt, ergeben dann den Grenzwert für den ganzen Ausdruck

Beispiele:

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to \infty} \frac{3x^2 + 4x - 12}{4 - x^2} &\overset{/x^2}{=} \frac{\frac{1}{x^2} \cdot (3x^2 + 4x - 12)}{\frac{1}{x^2} \cdot 4 - x^2} \\
&= \frac{3 + \frac{4}{x} - \frac{12}{x^2}}{\frac{4}{x^2} - 1} \\
&\Rightarrow 3 \text{ läuft gegen } 3 \\
&\Rightarrow \frac{4}{x} \text{ läuft gegen } 0 \\
&\Rightarrow -\frac{12}{x^2} \text{ läuft gegen } 0 \\
&\Rightarrow \frac{4}{x^2} \text{ läuft gegen } 0 \\
&\Rightarrow -1 \text{ läuft gegen } -1 \\
&= \frac{3}{-1} = \underline{\underline{-3}}
\end{aligned}$$

4.2 Endliche Grenzwerte

Bei endlichen Grenzwerten untersucht man das Verhalten einer Funktion bei der Annäherung an eine endliche Stelle x_0.

4.2.1 Linksseitiger Grenzwert

Linksseitige Grenzwerte sind Grenzwerte der Form $\lim_{x \to x_0^-} f(x)$. Man möchte dabei herausfinden wie sich die Funktion auf der Linken Seite von x_0 verhält.

Beispiel:

$$f(x) = \frac{1}{x} \text{ (Siehe Abbildung)}$$

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) =? \Rightarrow \text{Bei einer linksseitigen Annäherung an die Stelle 0 sieht man wie die Werte gegen } -\infty \text{ streben.}$$

$$? = -\infty$$

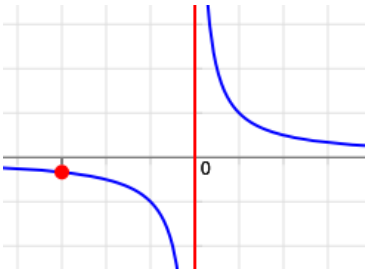

Abbildung 17: Bsp. Linksseitiger Grenzwert

4.2.2 Rechtsseitiger Grenzwert

Rechsseitige Grenzwerte sind Grenzwerte der Form $\lim_{x \to x_0^+} f(x)$ Man möchte dabei herausfinden wie sich die Funktion auf der Rechten Seite von x_0 verhält.

4.2.3 Beidseitiger Grenzwert

Der (beidseitige) Grenzwert $\lim_{x \to x_0} f(x)$ existiert nur, wenn gilt:
$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x)$

4.2.4 Grenzwerte bei stetigen Funktionen

Der Grenzwert einer stetigen Funktion an der Stelle x_0 entspricht dem Funktionswert an dieser Stelle, sofern x_0 zur Definitionsmenge der Funktion gehört.

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

4.2.5 Der Regel von Bernoulli und L'Hospital

Gibt es Grenzwerte vom einem der folgenden Typen, können die beiden Funktion abgeleitet und von der Ableitung der Grenzwert bestimmt werden.

- Typ $\frac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)} = \frac{0}{0}$
- Typ $\frac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)} = \frac{\infty}{\infty}$
- dann $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

4.2.6 Vorgehen

1. Ausdruck so weit wie möglich vereinfachen. Falls mit einem direkten Einsetzen kein Arithmetischer Fehler (z.B Teilen durch Null) provoziert wird, kann man den Grenzwert direkt für x einsetzen.

2. Endlicher Grenzwert für x einsetzen

3. Grenzwert berechnen

5 Integration

5.1 Stammfunktion

Man nennt eine Funktion $F(x)$ Stammfunktion von $f(x)$, wenn die Ableitung der Stammfunktion $f(x)$ ergibt.

$$F'(x) = f(x)$$

5.1.1 Vorgehen

Generell versucht man immer die Funktion zu finden, die abgeleitet den gegebenen Term ergibt. Besonders einfach gestaltet sich die Suche für Terme mit Exponenten. Dabei erhöht man den gegebenen Exponenten um 1 und kompensiert mit $\frac{1}{\text{Exponent} + 1}$

Beispiel

$$g(t) = \frac{1}{t^2} \Rightarrow \frac{1}{-1} \cdot \frac{1}{t^{-1}} = -t^{-1} = -\frac{1}{t} + const$$

Von einem längere Term kann die Stammfunktion komponentenweise berechnet werden.

5.2 Stammfunktion zeichnen

1. Startwert ist der Wert ganz links vom Intervall
   - Falls die Stammfunktion an einer bestimmten Stelle gesucht ist muss der finale Graph noch an der Ordinate verschoben werden.
2. Für jedes Teil-Intervall die Punkte für die Stammfunktion einzeichnen: Fläche = x-Wert ganz Rechts vom Intervall
3. Steigung einzeichen: Falls der Graph im Intervall eine konstante Steigung hat, ist der Graph der Stammfunktion linear. Ansonsten ist der Graph gemäss der Funktion der Stammfunktion (Parabel, Sinus, etc.)

5.3 Unbestimmtes Integral

- Das unbestimmte Integral repräsentiert eine Menge von Stammfunktionen

5.3.1 Definition

$$\int \underbrace{f(x)}_{\text{Integrand}} \overbrace{\underbrace{dx}}^{\text{Integrationsvariable}} = F(x) + \underbrace{\text{const}}_{\text{Integrationskonstante}}$$

ist $\Leftrightarrow$ zu:

$$f(x) = \frac{d}{dx}(F(x + \text{ const}))$$

5.3.2 Linearitätsregel

$$\int c \cdot f(x) + c \cdot g(x) \cdot dx = c \int f(x) \cdot dx + c \int g(x) \cdot dx \tag{3}$$

5.3.3 Substitutionsregel

Vorraussetzungen

- Integrant muss ein Produkt sein und ein Faktor muss verschachtelt sein
- Der andere Faktor muss die Ableitung der inneren Komponente der Verschachtelung sein.

  $$\int f(g(x)) \cdot g'(x)dx = F(g(x)) + const$$

Vorgehen Beispiel: $\int cos(ln(x)) \cdot \frac{1}{x}dx$

1. Innere Komponente der Verschachtelung mit der Variablen u ersetzen
2. Stammfunktion der äusseren Komponente der Verschachtelung suchen: $\int \cos(u)du = \sin(u)+$ const
3. Falls Stammfunktion bei Punkt 2. vorhanden, Rücksubstitution von u: $= \underline{\underline{\sin(\ln(x)) + const}}$

5.3.4 Partielle Integration

Voraussetzungen

- Der Integrant besteht aus zwei Faktoren
- Sei die erste Funktion f(x) eine Funktion mit bekannter Stammfunktion F(x) die zweite Funktion g(x) irgendeine ableitbare Funktion, dann kann mit folgender Gleichung gearbeitet werden.

$$\int f(x) \cdot g(x)dx = \underbrace{F(x)}_{Stammfunktion} \cdot \underbrace{g(x)}_{AbleitbareFunktion} - \int \underbrace{F(x)}_{Stammfunktion} \cdot \underbrace{g'(x)}_{Ableitung} dx \tag{4}$$

5.3.5 Spezialfälle

Folgende Spezialfälle Funktionieren immer dann wenn ein Faktor die Ableitung des jeweilig anderen ist.

$$\int f(ax + b)dx = \frac{1}{a}F(ax + b) + const$$

$$\int f(x) \cdot f'(x)dx = \frac{1}{2}f(x)^2 + const$$

$$\int f^q(x) \cdot f'(x)dx = \frac{1}{q + 1}f^{q+1}(x) + const$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = ln(|f(x)|) + const$$

Vorgehen

1. Eine Funktion ableiten und von der anderen die Stammfunktion suchen
2. Das Integral im Resultat aus Schritt 1. auflösen
3. Vereinfachen

Beispiel

1. $\int \sin(x) \cdot x dx$

   Stammfunktion von $f(x) = F(x) = -\cos(x)$

   Ableitung von $g(x) = g'(x) = 1$

2. $$\begin{aligned}\int \sin(x) \cdot x dx &= -\cos(x) \cdot x - \int -\cos(x) \cdot 1 dx \\ &= \underline{\underline{-\cos(x) \cot x + sin(x) + const}}\end{aligned}$$

5.4 Bestimmtes Integral

5.4.1 Voraussetzungen

- Das bestimmte Integral repräsentiert eine Zahl
- Der Integrant muss auf dem Intervall [a;b] definiert sein
- Ist die obere Grenze kleiner als die untere Grenze ist die Fläche negativ
- Es muss eine Stammfunktion von f(x) existieren
- $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^n f(x_k) \cdot \Delta x$

5.4.2 Flächenberechnung

Bei der graphischen Interpretation eines Integrals $\int_a^b f(x)dx$ gibt es zwei Fälle:x

- Wenn $a < b$: der Graph im positiven Bereich zählt positiv, der Graph im negativen Bereich zählt negativ.
- Wenn $a > b$: der Graph im positiven Bereich zählt negativ, der Graph im negativen Bereich zählt positiv.

Wird mit dem Integral die Fläche berechnet muss das Integral von dem Betrag von f(x) gerechnet werden. $\int_a^b |f(x)|$dx

5.4.3 Rechenregeln

- Faktorregel: Konstante Faktoren dürfen aus dem Integranten herausgezogen werden $\int_a^b c \cdot f = c \cdot \int_a^b f$
- Vertauschen der Integralgrenzen ändert das Vorzeichen des Integrals: $\int_a^b f = -\int_b^a f$
- Zusammenhängende Integrale können zusammengefasst werden: $\int_a^b f + \int_b^c f = \int_a^c f$
- Linearität: $\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g$
- Gleiche Integrationsgrenzen $\int_a^a f = 0$

Bestimmtes Integral mit Betrag
Beim Rechnen mit Betrag wird der Integral-Intervall in einen positiven und negativen Bereich unterteilt und dann partiell gelöst.

$$\begin{aligned}\int_{-2}^{2}|x^3|dx &= \int_{-2}^{0} -x^3 dx + \int_{0}^{2} x^3 dx \\ &= \left[\frac{1}{4}x^4\right]_{-2}^{0} + \left[\frac{1}{4}x^4\right]_{0}^{2} \\ &= -(0-\frac{1}{4}(-2)^4) + (\frac{1}{4}2^4 - 0) \\ &= 4+4=8\end{aligned} \tag{5}$$

5.4.4 Integralfunktion

$$\phi_a(x) = \int_a^x f$$

- Die Integralfunktion hängt vom Parameter a ab.
- Ändert man den Parameter a, so ändert sich die Integralfunktion nur um eine Konstante ($\phi_b(x) = \phi_a(x) + c$), was eine Verschiebung auf der Y-Achse bewirkt.

5.4.5 Hauptsatz

Jede Integralfunktion ist eine Stammfunktion. Umgekehrt kann jede Stammfunktion zum berechnen von Integralen benutzt werden.

$$\phi_a(b) = \int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

5.4.6 Partielle Integration

Voraussetzungen

- Der Integrant besteht aus zwei Faktoren
- Sei die erste Funktion f(x) eine Funktion mit bekannter Stammfunktion F(x) die zweite Funktion g(x) irgendeine ableitbare Funktion, dann kann mit folgender Gleichung gearbeitet werden.

$$\int\limits_a^b f(x)g(x)dx = \left[\underbrace{F(x)}_{Stammfunktion} \cdot \underbrace{g(x)}_{AbleitbareFunktion}\right]_a^b - \int\limits_a^b \underbrace{F(x)}_{Stammfunktion} \cdot \underbrace{g'(x)}_{Ableitung} dx$$

Vorgehen

1. Eine Funktion ableiten und von der anderen die Stammfunktion suchen
2. Das Integral im Resultat aus Schritt 1. auflösen
3. Vereinfachen

5.4.7 Spezialfälle

Folgende Spezialfälle Funktionieren immer dann wenn ein Faktor die Ableitung des jeweilig anderen ist.

$$\int_a^b f(ax+b)dx = \left[\frac{1}{a}F(ax+b)\right]_a^b$$

$$\int_a^b f(x) \cdot f'(x)dx = \left[\frac{1}{2}f(x)^2\right]_a^b$$

$$\int_a^b f^q(x) \cdot f'(x)dx = \left[\frac{1}{q+1}f^{q+1}(x)\right]_a^b$$

$$\int_a^b \frac{f'(x)}{f(x)}dx = [ln(|f(x)|)]_a^b$$

5.4.8 Substitutionsregel

Vorraussetzungen

- Integrant muss ein Produkt sein und ein Faktor muss verschachtelt sein
- Der andere Faktor muss die Ableitung der inneren Komponente der Verschachtelung sein.

$$\begin{aligned}\int_a^b f(g(x)) \cdot g'(x)dx &= \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du \\ &= [F(u)]_{g(a)}^{g(b)} \\ &= F(g(b)) - F(g(a))\end{aligned} \tag{6}$$

Vorgehen Beispiel: $\int_0^\pi (e^{-cos(x)} \cdot sind(x)dx$

1. Innere Komponente der Verschachtelung mit der Variablen u ersetzen und neue Intervalsgrenzen definieren
2. Stammfunktion der äusseren Komponente der Verschachtelung suchen: $\int_{-cos(0)}^{-cos(\pi)} e^u du$
3. Falls Stammfunktion bei Punkt 2. vorhanden, Rücksubstitution von u: $= [e^u]_{-1}^{1} = e - e^-1$

6 Fourierreihen

Eine Fourierreihe der Funktion s(t) besteht aus einer Linearkombination von Sinus- und Kosinus-Funktionen, welche alle dieselbe Persiode T haben. Je höher die Ordnung n, desto genauer wird die ursprüngliche Funktion s(t) aproximiert.

Periode bestimmen

$$\text{Periode T von } sin(yx) = \frac{2\pi}{y}$$

6.1 Sinus-Kosinus-Form

$$f(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{n}(a_k \cdot \cos(k\omega_1 t) + b_k \cdot \sin(k\omega_1 t))$$

- Periode T
- Grundkreisfrequenz $\omega_1 = \frac{2\pi}{T}$
- Signalmittelwert $a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T s(t)dt$
- Koeffizient $a_k = \frac{2}{T}\int_0^T s(t) \cdot \cos(k\omega_1 t)dt$
- Koeffizient $b_k = \frac{2}{T}\int_0^T s(t) \cdot \sin(k\omega_1 t)dt$

6.2 Amplituden-Phasen-Form

$$f(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{n}(A_k \cdot \cos(k\omega_1 t - \varphi_k))$$

- Periode T
- Grundkreisfrequenz $\omega_1 = \frac{2\pi}{T}$
- Konstante $A_0 = a_0$
- Koeffizient $A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}$
- $\varphi_k = \begin{cases} arctan\left(\frac{b_k}{a_k}\right) & \text{für } a_k > 0 \\ arctan\left(\frac{b_k}{a_k}\right) + \pi & \text{für } a_k < 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{für } a_k = 0 \wedge b_k > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{für } a_k = 0 \wedge b_k < 0 \end{cases}$

6.3 Vorgehen

1. Grundperiode T beim gegebenen Signal s(t) herauslesen
2. Grundkreisfrequenz berechnen $\omega_1 = \frac{2\pi}{T}$
3. Falls s(t) gerade oder ungerade, fällt ein Koeffizient automatisch weg.
4. a_0 bestimmen: Falls $a_k = 0$ ist auch $a_0 = 0$
   a) Partielle Integration: Grundperiode in Bereiche aufteilen, sodass für jeden Bereich der Funktionswert von s(t) bestimmt werden kann.

   b) s(t) mit Funktionswert ersetzen

5. a_0 bestimmen:
   a) $a_0 = \begin{cases} 0 & \text{für s(t) ungerade (punktsymmetrisch am Nullpunkt)} \\ \frac{2}{T} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} s(t)dt & \text{für s(t) gerade (spiegelsymmetrisch an der Y-Achse)} \end{cases}$

6. a_k bestimmen:
   a) $a_k = \begin{cases} 0 & \text{für s(t) ungerade (punktsymmetrisch am Nullpunkt)} \\ \frac{4}{T} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} s(t) \cdot \cos(k\omega_1 t)dt & \text{für s(t) gerade (spiegelsymmetrisch an der Y-Achse)} \end{cases}$

7. b_k bestimmen:
   a) $b_k = \begin{cases} 0 & \text{für s(t) gerade (spiegelsymmetrisch an der Y-Achse)} \\ \frac{4}{T} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} s(t) \cdot \sin(k\omega_1 t)dt & \text{für s(t) ungerade (punktsymmetrisch am Nullpunkt)} \end{cases}$
   b) Weiter muss mittels partieller Integration die Integrale aufgelöst wer
   c) Von der trigonometrischen Funktion prüfen wie viele Lösungen die trigonometrische Funktion zurückgeben kann (In Abhängigkeit von k). (z.B Bei einem Funktionsargument von $\frac{k\pi}{2} \Rightarrow k = 4 \Rightarrow 360°$ Lösungen)
   d) Die einzelnen Lösungen notieren

8. a_0, a_k, b_k in Fourierformel einsetzen

9. Für jedes k die Summe aufschreiben

6.4 Umformungen

6.4.1 Sinus Cosinus Form ⇒ Amplituden Phasen Form

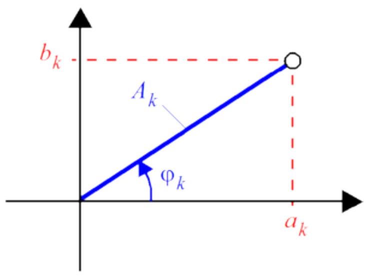

Abbildung 18: Umformung

Grafisch Man rechnet die kartesischen der Sinus Cosinus Form)(a_k, b_k) in die polaren Koordinaten der Amplituden Phasen Form (A_k, φ_k) um.

$$A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}$$

Für φ_k sind verschiedene Fälle zu beachten:

1. Wenn der Punkt in der rechten Halbebene liegt, so gilt:

$$\varphi_k = arctan(\frac{b_k}{a_k})$$

2. Wenn der Punkt in der linken Halbebene liegt so gilt:

$$\varphi_k = arctan(\frac{b_k}{a_k}) + \pi$$

3. Wenn der Punkt auf der Ordinatenachse liegt (Y-Achse) dann ist der Richtungswinkel entweder:
   - obere Halbachse $= \frac{\pi}{2}$
   - untere Halbachse $= -\frac{\pi}{2}$
4. Wenn der Punkt auf dem Ursprung liegt gibt es kein φ_k

Quadrantenbeziehungen Ist s(t) ungerade oder gerade können die Koeffizienten a_k und b_k sowie die Funktionsargumente der trigonometrischen Funktionen mit den Quadrantenbeziehungen 1:1 umgeformt werden.

$$\cos(x - \frac{\pi}{2}) = \sin(x)$$

$$\cos(x - \pi) = -\cos(x)$$

$$\cos(x - \frac{3\pi}{2}) = -\sin(x)$$

$$\cos(x - 0) = \cos(x)$$

6.4.2 Amplituden Phasen Form ⇒ Sinus Cosinus Form

Grafisch Man rechnet die polaren Koordinaten der Amplituden Phasen Form (A_k, φ_k)in die kartesischen der Sinus Cosinus Form $)(a_k, b_k)$ um.

$$a_k = A_k \cdot cos(\varphi_k)$$

$$b_k = A_k \cdot sin(\varphi_k)$$

Hinweis Je nach Situation kann man auch versuchen die gegebenen cos(x) Terme mit den Additionstheoremen umzuwandeln.

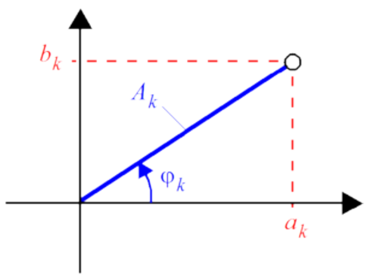

Abbildung 19: Umformung

7 Vergleiche

7.1 Taylorreihe und Fourierreihe

	Taylorreihe	Fourierreihe
Input	Funkktion, die sich of Ableiten lässt. Entwicklungspunkt x_0	periodische Funktion
Bausteine	Polynome $(x - x_0)^k; k \in \mathbb{N}$	sin(kx) und cos(kx) Terme; $k \in \mathbb{N}$
Approximatives Verhalten	Vom Entwicklungspunkt weg von innen nach aussen	global (von groben zu feinen Strukturen)
Berechnung der Koeffizienten	Durch Ableiten an Enwiclungspunkt	Durch Minimieren der Fehlerfläche