

Zusammenfassung

Analysis für Informatiker 2

Michael Wieland

Hochschule für Technik Rapperswil

13. August 2017

Mitmachen

Falls du an diesem Dokument mitarbeiten möchtest, kannst du es auf GitHub unter <https://github.com/michiwieland/hsr-zusammenfassungen> forken.

Lizenz

"THE BEER-WARE LICENSE" (Revision 42): <michi.wieland@hotmail.com> wrote this file. As long as you retain this notice you can do whatever you want with this stuff. If we meet some day, and you think this stuff is worth it, you can buy me a beer in return. Michael Wieland

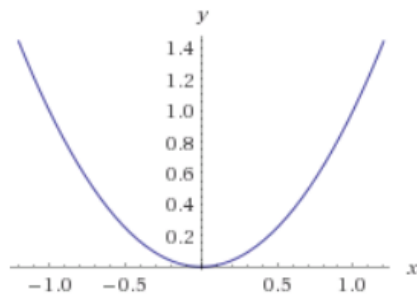
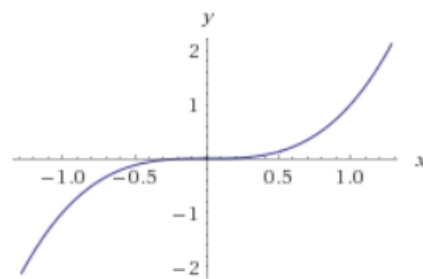
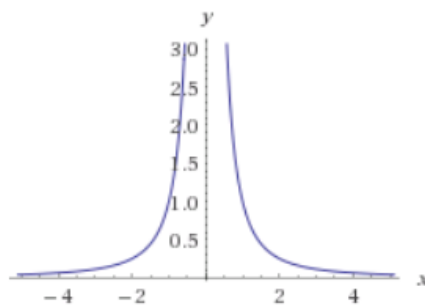
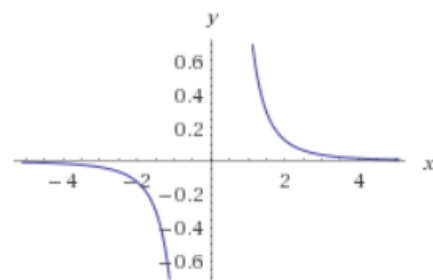
Inhaltsverzeichnis

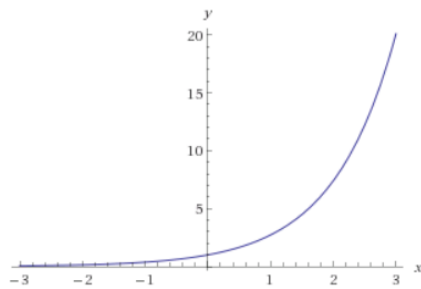
1	Grundlagen	3
1.1	Plots	3
1.2	Verschiebungen von Graphen	7
1.2.1	Spiegelungen	7
1.2.2	Entlang der X-Achse	7
1.2.3	Entlang der Y-Achse	7
1.3	Ableitungsregeln	7
1.4	Stammfunktion	8
1.5	Logarithmen	8
1.6	Trigonometrische Funktionen	8
1.7	Konstanten	8
1.8	Polynomdivision	8
2	Taylorreihen	10
2.1	Taylorpolynom	10
2.2	Taylorreihe	10
2.2.1	Konvergenzradius	10
2.2.2	Definition:	10
2.2.3	Vorgehen	10
2.3	Fehlerabschätzung bei Taylorreihen	11
2.4	Definition	11
2.5	Beispiel	11
3	Grenzwerte / Limes	13
3.1	Unendliche Grenzwerte	13
3.1.1	Vorgehen	13
3.2	Endliche Grenzwerte	13
3.2.1	Linksseitiger Grenzwert	13
3.2.2	Rechtsseitiger Grenzwert	14
3.2.3	Beidseitiger Grenzwert	14
3.2.4	Grenzwerte bei stetigen Funktionen	14
3.2.5	Der Regel von Bernoulli und L'Hospital	14
3.2.6	Vorgehen	15
4	Integration	16
4.1	Stammfunktion	16
4.1.1	Vorgehen	16
4.2	Stammfunktion zeichnen	16
4.3	Unbestimmtes Integral	16
4.3.1	Definition	16
4.3.2	Linearitätsregel	16
4.3.3	Substitutionsregel	17
4.3.4	Partielle Integration	17
4.3.5	Spezialfälle	17
4.4	Bestimmtes Integral	18
4.4.1	Voraussetzungen	18
4.4.2	Flächenberechnung	18
4.4.3	Rechenregeln	18

4.4.4	Integralfunktion	19
4.4.5	Hauptsatz	19
4.4.6	Partielle Integration	19
4.4.7	Spezialfälle	20
4.4.8	Substitutionsregel	20
5	Fourierreihen	21
5.1	Sinus-Kosinus-Form	21
5.2	Amplituden-Phasen-Form	21
5.3	Vorgehen	21
5.4	Umformungen	22
5.4.1	Sinus Cosinus Form \Rightarrow Amplituden Phasen Form	22
5.4.2	Amplituden Phasen Form \Rightarrow Sinus Cosinus Form	23
6	Vergleiche	25
6.1	Taylorreihe und Fourierreihe	25

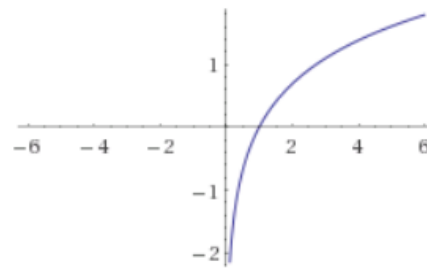
1 Grundlagen

1.1 Plots

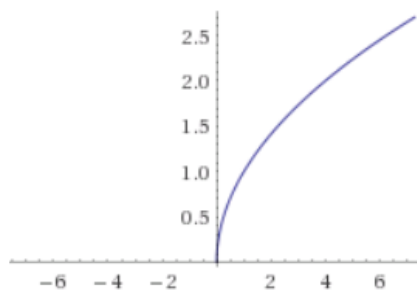
Abbildung 1: x^2 Abbildung 2: x^3 Abbildung 3: x^{-2} Abbildung 4: x^{-3}

Abbildung 5: e^x

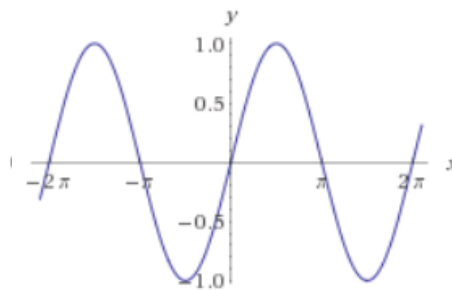
- Basis muss grösser 0 sein
- Exponenten $\in \mathbb{R}$
- Gibt immer Werte grösser 0 zurück
- Schneidet bei $x = 0$ die Y-Achse (Ordinate) $\Rightarrow e^0 = 1$

Abbildung 6: $\ln(x)$

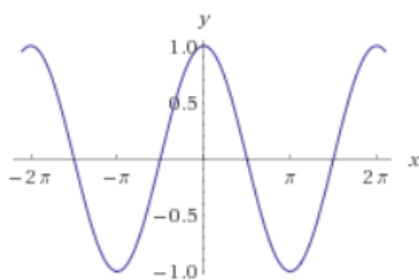
- Nimmt nur \mathbb{R}^+ entgegen
- Liefert \mathbb{R} zurück
- $\ln(0)$ ist nicht definiert ($-\infty$)
- Hat bei $\ln(1)$ den Nulldurchgang

Abbildung 7: \sqrt{x}

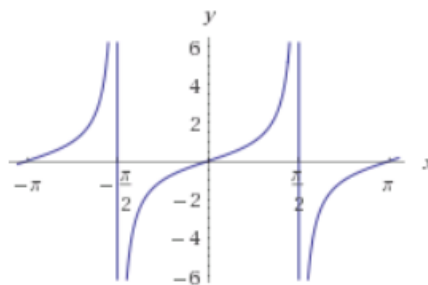
- Nimmt nur \mathbb{R}^+ entgegen

Abbildung 8: $\sin(x)$

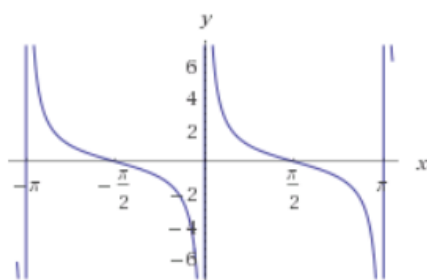
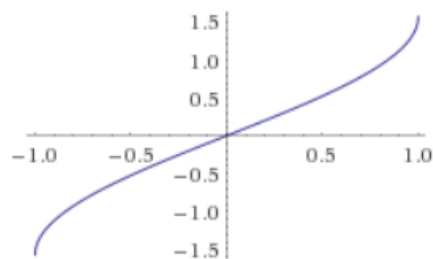
- Nimmt \mathbb{R} entgegen
- Gibt Werte im Intervall $[-1; 1]$ zurück
- Nur eingeschränkt umkehrbar $\Rightarrow \sin(x)_{[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]}$

Abbildung 9: $\cos(x)$

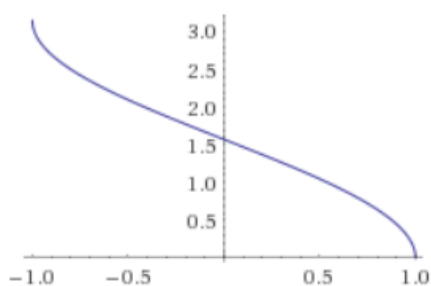
- Nimmt \mathbb{R} entgegen
- Gibt Werte im Intervall $[-1; 1]$ zurück
- Nur eingeschränkt umkehrbar $\Rightarrow \cos(x)_{[0; \pi]}$

Abbildung 10: $\tan(x)$

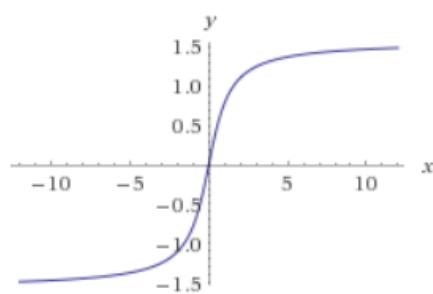
- Kreuzt bei Vielfachen von π die X-Achse (Abszisse)
- $x \in \mathbb{R} | x \neq \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$
- Nur eingeschränkt umkehrbar $\Rightarrow \tan(x)_{(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})}$

Abbildung 11: $\cot(x)$ Abbildung 12: $\arcsin(x)$

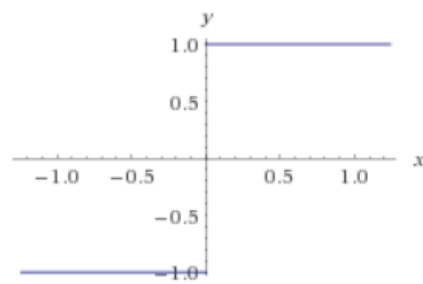
- $y \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$

Abbildung 13: $\arccos(x)$

- $y \in [0; \pi]$

Abbildung 14: $\arctan(x)$

- $y \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$

Abbildung 15: $\text{signum}(x)$

1.2 Verschiebungen von Graphen

1.2.1 Spiegungen

An X-Achse $f(x) \Rightarrow -f(x)$

An Y-Achse $f(x) \Rightarrow f(-x)$

Am Nullpunkt $f(x) \Rightarrow -f(-x)$

1.2.2 Entlang der X-Achse

Verschiebung nach rechts $f(x) \Rightarrow f(x - k)$

Verschiebung nach links $f(x) \Rightarrow f(x + k)$

Strecken $f(x) \Rightarrow f(\frac{x}{k})$

Stauchen $f(x) \Rightarrow f(kx)$

1.2.3 Entlang der Y-Achse

Verschiebung nach oben $f(x) \Rightarrow f(x) + k$

Verschiebung nach unten $f(x) \Rightarrow f(x) - k$

Strecken $f(x) \Rightarrow k \cdot f(x)$

Stauchen $f(x) \Rightarrow \frac{1}{k} \cdot f(x)$

1.3 Ableitungsregeln

Funktion	Ableitung
x^a	$a \cdot x^{a-1}$
1	0
x	1
x^2	$2x$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
\sqrt{x}	$\frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}}$
e^x	e^x
a^x	$\ln(a) \cdot a^x$
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$
$\log_b(x)$	$\frac{1}{\ln(b) \cdot x}$
$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$
$\tan(x)$	$\frac{1}{\cos^2(x)}$
$\tan(x)$	$1 + \tan^2(x)$
$\arcsin(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos(x)$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arctan(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$

1.4 Stammfunktion

Funktion	Stammfunktion	Bemerkung
x^a	$\frac{1}{a+1}x^{a+1} + \text{const}$	
x^a	$\ln(x) + \text{const}$	Falls $a = -1$
1	$x + \text{const}$	
x	$\frac{1}{2}x^2 + \text{const}$	
x^2	$\frac{1}{3}x^3 + \text{const}$	
$\frac{1}{x}$	$\ln(x) + \text{const}$	
\sqrt{x}	$\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + \text{const}$	
e^x	$e^x + \text{const}$	
$\sin(x)$	$-\cos(x) + \text{const}$	
$\cos(x)$	$\sin(x) + \text{const}$	

1.5 Logarithmen

$$\log(x \cdot y) = \log(x) + \log(y)$$

$$\log\left(\frac{x}{y}\right) = \log(x) - \log(y)$$

$$\log(x^y) = y \cdot \log(x)$$

1.6 Trigonometrische Funktionen

$$\cos(-x) = \cos(x)$$

$$\sin(-x) = -\sin(x)$$

1.7 Konstanten

$$\sqrt{2} \approx 1.414$$

$$\sqrt{3} \approx 1.732$$

$$e \approx 2.718$$

$$\pi \approx 3.141$$

1.8 Polynomdivision

Vorgehen

1. Dividieren des grössten Exponenten durch den x-Term im Divisor
2. Nun wird das Resultat mit dem kompletten Divisor multipliziert und das den Divident geschrieben.
3. Danach zieht man das Resultat aus der Multiplikation vom Divident ab
4. Zurück zu Schritt 1 mit dem Resultat aus der Subtraktion

$$\begin{array}{r} (x^3 - 2x^2 - 5x + 6) : (x - 1) = x^2 - x - 6 \\ \underline{-(x^3 - x^2)} \\ -x^2 - 5x \\ \underline{-(-x^2 + x)} \\ -6x + 6 \\ \underline{-(-6x + 6)} \\ 0 \end{array}$$

Abbildung 16: Polynomdivision

2 Taylorreihen

2.1 Taylorpolynom

- Jede ableitbare Funktion lässt sich durch Polynome approximieren.
- Endliches Polynom mit Ordnung N
- Hat Rechenfehler
- Taylor Polynom der ersten Ordnung entspricht der Linearisierung

2.2 Taylorreihe

- Unendliches Polynom
- theoretisch keine Rechenfehler
- Stimmt entweder exakt oder überhaupt nicht mit der Ausgangsfunktion überein (Konvergenzradius)

2.2.1 Konvergenzradius

Der Konvergenzradius ist der Bereich um den Entwicklungspunkt x_0 , in welchem die Taylorreihe den korrekten Wert der Ausgangsfunktion $f(x)$ liefert. Der Konvergenzradius ist also der Abstand vom Entwicklungspunkt bis zur ersten Definitionslücke.

2.2.2 Definition:

Taylorpolynom N-Ordnung

$$f(x) \approx \sum_{i=0}^N \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!} (x - x_0)^i \text{ für } x \approx x_0 \quad (1)$$

2.2.3 Vorgehen

1. Polynom vom Grad N, N-Mal ableiten
2. Entwicklungspunkt x_0 in alle Ableitungen einsetzen und ausrechnen
3. Koeffizienten notieren

$$K_i = \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}$$

mit

$$f^{(i)}(x_0) = \text{Lösung der i-ten Ableitung}$$

i = Grad der Ableitung

4. Koeffizienten K_i in Taylorpolynom einfügen

$$f(x) \approx \sum_{i=0}^n K_i \cdot (x - x_0)^i \quad (2)$$

5. Je grösser N gewählt wird, desto besser nähert sich der Entwicklungspunkt x_0 dem Resultat x an.

2.3 Fehlerabschätzung bei Taylorreihen

2.4 Definition

Fehlerabschätzung im Intervall $[a; b]$ für den Fall, dass $x_0 = \frac{a+b}{2}$ und $m \geq |f^{N+1}(x)|$ für alle $x \in [a; b]$

$$|f(x) - p_N(x)| \leq \frac{m(b-a)^{N+1}}{2^{N+1}(N+1)!}$$

Bemerkung zum Entwicklungspunkt Der Entwicklungspunkt x_0 liegt genau in der Mitte des Intervalls $[a; b]$

Bemerkung zum Maximum m

Ein gutes m entspricht dem globalen Maximum der Ableitung $m \geq |f^{N+1}(x)|$. Am besten stellt man sich den Graphen vor und entscheidet dann, ob man x_0 , a oder b als Funktionsargument x in $f^{N+1}(x)$ nimmt. Oft ist es schwierig m zu bestimmen, weshalb man, wenn a und b nicht allzu weit entfernt sind, einfach den grösseren der beiden Werte als Funktionsargument verwendet:

$$m = |f^{N+1}(a)| \vee |f^{N+1}(b)|$$

2.5 Beispiel

Gegeben sei die Taylorreihe der folgenden Funktion um das Entwicklungszentrum $x_0 = 0$

$$f(x) = e^{-2x}$$

So ist das Taylorpolynom für das n -te Element

$$\begin{aligned} f^{(n)}(x_0) &= (-2)^n e^{-2x} \\ f^{(n)}(0) &= (-2)^n \end{aligned}$$

und die Taylorreihe

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^n}{n!} x^n$$

Bestimmen sie den minimalen Grad desjenigen Taylorpolynoms, welches die Funktion $f(x)$ im Intervall $[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}]$ mit einem Fehler von weniger als $\frac{1}{100}$ berechnen lässt

1. m berechnen

$$\begin{aligned} |f^{N+1}(x)| &\leq m \\ |(-2)^{n+1} e^{-2x}| &\leq m \\ 2^{n+1} |e^{-2x}| &\leq m \end{aligned}$$

2. Globales Maximum für x einsetzen (a , b oder x_0)

$$\begin{aligned} m &= 2^{n+1} |e^{-2x}| \\ m &= 2^{n+1} |e^{-2 \cdot -\frac{1}{2}}| \\ m &= 2^{n+1} |e^1| \end{aligned}$$

3. Abschätzen des Rechenfehlers \Rightarrow a,b und m einsetzen und vereinfachen

$$\begin{aligned} |f(x) - p_N(x)| &\leq \frac{m(b-a)^{N+1}}{2^{N+1}(N+1)!} \\ &\leq \frac{2^{N+1}e(\frac{1}{2} + \frac{1}{2})^{N+1}}{2^{N+1}(N+1)!} \\ &\leq \frac{e}{(N+1)!} \end{aligned}$$

4. Die Zahl N muss nun so gewählt werden dass

$$\begin{aligned} \frac{e}{(N+1)!} &\leq 0.001 \\ e \cdot 100 &\leq (N+1)! \end{aligned}$$

5. Wertetabelle erstellen mit verschiedenen N der Gleichung

N	0	1	2	3	4	5
(N+1)!	1	2	6	24	120	720

6. Gemäss Tabelle

$$\begin{aligned} e \cdot 100 &\approx 270 \leq 720 \\ &\Rightarrow \underline{\underline{N \geq 5}} \end{aligned}$$

Es ist mindestens ein Taylorpolynom vom Grad 5 nötig

3 Grenzwerte / Limes

3.1 Unendliche Grenzwerte

Unendliche Grenzwerte sind Grenzwerte der Form $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ rps. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

- Man muss immer Definitionslücken suchen (z.B. Teilbar durch 0 möglich?)
- Grenzwerte existieren nur wenn die Funktion eine stetige Fortsetzung besitzt.

3.1.1 Vorgehen

1. Bei Brüchen teilt man im Nenner und im Zähler durch den grössten Exponenten. (z.B. x^2)
Eine schnellere Variante ist jedoch, dass man einfach den schnellst wachsenden Exponenten im Zähler und im Nenner herausnimmt und einen neuen Bruch schreibt. (Achtung: Wurzeln etc. bleiben bestehen)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 - 2x + 1}}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2}}{x} = 1$$

2. Für jeden einzelnen Term seinen ungefähren Verlauf definieren
3. Die Grenzwerte zusammen gezählt, ergeben dann den Grenzwert für den ganzen Ausdruck

Beispiele:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 4x - 12}{4 - x^2} &\stackrel{/x^2}{=} \frac{\frac{1}{x^2} \cdot (3x^2 + 4x - 12)}{\frac{1}{x^2} \cdot 4 - x^2} \\ &= \frac{3 + \frac{4}{x} - \frac{12}{x^2}}{\frac{4}{x^2} - 1} \\ &\Rightarrow 3 \text{ läuft gegen } 3 \\ &\Rightarrow \frac{4}{x} \text{ läuft gegen } 0 \\ &\Rightarrow -\frac{12}{x^2} \text{ läuft gegen } 0 \\ &\Rightarrow \frac{4}{x^2} \text{ läuft gegen } 0 \\ &\Rightarrow -1 \text{ läuft gegen } -1 \\ &= \frac{3}{-1} = \underline{\underline{-3}} \end{aligned}$$

3.2 Endliche Grenzwerte

Bei endlichen Grenzwerten untersucht man das Verhalten einer Funktion bei der Annäherung an eine endliche Stelle x_0 .

3.2.1 Linksseitiger Grenzwert

Linksseitige Grenzwerte sind Grenzwerte der Form $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$. Man möchte dabei herausfinden wie sich die Funktion auf der Linken Seite von x_0 verhält.

Beispiel:

$$f(x) = \frac{1}{x} \text{ (Siehe Abbildung)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = ? \Rightarrow \text{Bei einer linksseitigen Annäherung an die Stelle 0 sieht man wie die Werte gegen } -\infty \text{ streben}$$

$$? = -\infty$$

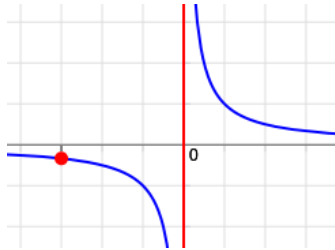


Abbildung 17: Bsp. Linksseitiger Grenzwert

3.2.2 Rechtsseitiger Grenzwert

Rechtsseitige Grenzwerte sind Grenzwerte der Form $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$. Man möchte dabei herausfinden, wie sich die Funktion auf der Rechten Seite von x_0 verhält.

3.2.3 Beidseitiger Grenzwert

Der (beidseitige) Grenzwert $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ existiert nur, wenn gilt:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$$

3.2.4 Grenzwerte bei stetigen Funktionen

Der Grenzwert einer stetigen Funktion an der Stelle x_0 entspricht dem Funktionswert an dieser Stelle, sofern x_0 zur Definitionsmenge der Funktion gehört.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

3.2.5 Der Regel von Bernoulli und L'Hospital

Gibt es Grenzwerte vom einem der folgenden Typen, können die beiden Funktion abgeleitet und von der Ableitung der Grenzwert bestimmt werden.

- Typ $\frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} = \frac{0}{0}$
- Typ $\frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} = \frac{\infty}{\infty}$
- dann $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

3.2.6 Vorgehen

1. Ausdruck so weit wie möglich vereinfachen. Falls mit einem direkten Einsetzen kein Arithmetischer Fehler (z.B. Teilen durch Null) provoziert wird, kann man den Grenzwert direkt für x einsetzen.
2. Endlicher Grenzwert für x einsetzen
3. Grenzwert berechnen

4 Integration

4.1 Stammfunktion

Man nennt eine Funktion $F(x)$ Stammfunktion von $f(x)$, wenn die Ableitung der Stammfunktion $f(x)$ ergibt.

$$F'(x) = f(x)$$

4.1.1 Vorgehen

Generell versucht man immer die Funktion zu finden, die abgeleitet den gegebenen Term ergibt. Besonders einfach gestaltet sich die Suche für Terme mit Exponenten. Dabei erhöht man den gegebenen Exponenten um 1 und kompensiert mit $\frac{1}{\text{Exponent} + 1}$

Beispiel

$$g(t) = \frac{1}{t^2} \Rightarrow \frac{1}{-1} \cdot \frac{1}{t^{-1}} = -t^{-1} = -\frac{1}{t} + \text{const}$$

Von einem längere Term kann die Stammfunktion komponentenweise berechnet werden.

4.2 Stammfunktion zeichnen

1. Startwert ist der Wert ganz links vom Intervall
 - Falls die Stammfunktion an einer bestimmten Stelle gesucht ist muss der finale Graph noch an der Ordinate verschoben werden.
2. Für jedes Teil-Intervall die Punkte für die Stammfunktion einzeichnen: Fläche = x-Wert ganz Rechts vom Intervall
3. Steigung einzeichnen: Falls der Graph im Intervall eine konstante Steigung hat, ist der Graph der Stammfunktion linear. Ansonsten ist der Graph gemäss der Funktion der Stammfunktion (Parabel, Sinus, etc.)

4.3 Unbestimmtes Integral

- Das unbestimmte Integral repräsentiert eine Menge von Stammfunktionen

4.3.1 Definition

$$\underbrace{\int}_{\text{Integrand}} \underbrace{f(x)}_{\text{Integrationsvariable}} \underbrace{dx}_{\text{Integrationskonstante}} = F(x) + \underbrace{\text{const}}$$

ist \Leftrightarrow zu:

$$f(x) = \frac{d}{dx}(F(x) + \text{const})$$

4.3.2 Linearitätsregel

$$\int c \cdot f(x) + c \cdot g(x) \cdot dx = c \int f(x) \cdot dx + c \int g(x) \cdot dx \quad (3)$$

4.3.3 Substitutionsregel

Voraussetzungen

- Integrant muss ein Produkt sein und ein Faktor muss verschachtelt sein
- Der andere Faktor muss die Ableitung der inneren Komponente der Verschachtelung sein.

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x) dx = F(g(x)) + \text{const}$$

Vorgehen Beispiel: $\int \cos(\ln(x)) \cdot \frac{1}{x} dx$

1. Innere Komponente der Verschachtelung mit der Variablen u ersetzen
2. Stammfunktion der äusseren Komponente der Verschachtelung suchen: $\int \cos(u) du = \sin(u) + \text{const}$
3. Falls Stammfunktion bei Punkt 2. vorhanden, Rücksubstitution von u: $= \underline{\underline{\sin(\ln(x)) + \text{const}}}$

4.3.4 Partielle Integration

Voraussetzungen

- Der Integrant besteht aus zwei Faktoren
- Sei die erste Funktion f(x) eine Funktion mit bekannter Stammfunktion F(x) die zweite Funktion g(x) irgendeine ableitbare Funktion, dann kann mit folgender Gleichung gearbeitet werden.

$$\int f(x) \cdot g(x) dx = \underbrace{F(x)}_{\text{Stammfunktion}} \cdot \underbrace{g(x)}_{\text{Ableitbare Funktion}} - \int \underbrace{F(x)}_{\text{Stammfunktion}} \cdot \underbrace{g'(x)}_{\text{Ableitung}} dx \quad (4)$$

4.3.5 Spezialfälle

Folgende Spezialfälle Funktionieren immer dann wenn ein Faktor die Ableitung des jeweilig anderen ist.

$$\int f(ax+b) dx = \frac{1}{a} F(ax+b) + \text{const}$$

$$\int f(x) \cdot f'(x) dx = \frac{1}{2} f(x)^2 + \text{const}$$

$$\int f^q(x) \cdot f'(x) dx = \frac{1}{q+1} f^{q+1}(x) + \text{const}$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln(|f(x)|) + \text{const}$$

Vorgehen

1. Eine Funktion ableiten und von der anderen die Stammfunktion suchen
2. Das Integral im Resultat aus Schritt 1. auflösen
3. Vereinfachen

Beispiel

1. $\int \sin(x) \cdot x dx$

Stammfunktion von $f(x) = F(x) = -\cos(x)$

Ableitung von $g(x) = g'(x) = 1$

2.

$$\begin{aligned} \int \sin(x) \cdot x dx &= -\cos(x) \cdot x - \int -\cos(x) \cdot 1 dx \\ &= \underline{\underline{-\cos(x) \cot x + \sin(x) + \text{const}}} \end{aligned}$$

4.4 Bestimmtes Integral**4.4.1 Voraussetzungen**

- Das bestimmte Integral repräsentiert eine Zahl
- Der Integrand muss auf dem Intervall $[a;b]$ definiert sein
- Ist die obere Grenze kleiner als die untere Grenze ist die Fläche negativ
- Es muss eine Stammfunktion von $f(x)$ existieren
- $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(x_k) \cdot \Delta x$

4.4.2 Flächenberechnung

Bei der graphischen Interpretation eines Integrals $\int_a^b f(x) dx$ gibt es zwei Fälle:

- Wenn $a < b$: der Graph im positiven Bereich zählt positiv, der Graph im negativen Bereich zählt negativ.
- Wenn $a > b$: der Graph im positiven Bereich zählt negativ, der Graph im negativen Bereich zählt positiv.

Wird mit dem Integral die Fläche berechnet muss das Integral von dem Betrag von $f(x)$ gerechnet werden. $\int_a^b |f(x)| dx$

4.4.3 Rechenregeln

- Faktorregel: Konstante Faktoren dürfen aus dem Integranden herausgezogen werden $\int_a^b c \cdot f = c \cdot \int_a^b f$
- Vertauschen der Integralgrenzen ändert das Vorzeichen des Integrals: $\int_a^b f = -\int_b^a f$
- Zusammenhängende Integrale können zusammengefasst werden: $\int_a^b f + \int_b^c f = \int_a^c f$
- Linearität: $\int_a^b (f + g) = \int_a^b f + \int_a^b g$
- Gleiche Integrationsgrenzen $\int_a^a f = 0$

Bestimmtes Integral mit Betrag

Beim Rechnen mit Betrag wird der Integral-Intervall in einen positiven und negativen Bereich unterteilt und dann partiell gelöst.

$$\begin{aligned}
 \int_{-2}^2 |x^3| dx &= \int_{-2}^0 -x^3 dx + \int_0^2 x^3 dx \\
 &= \left[-\frac{1}{4}x^4 \right]_{-2}^0 + \left[\frac{1}{4}x^4 \right]_0^2 \\
 &= -\left(0 - \frac{1}{4}(-2)^4\right) + \left(\frac{1}{4}2^4 - 0\right) \\
 &= 4 + 4 = 8
 \end{aligned} \tag{5}$$

4.4.4 Integralfunktion

$$\phi_a(x) = \int_a^x f$$

- Die Integralfunktion hängt vom Parameter a ab.
- Ändert man den Parameter a , so ändert sich die Integralfunktion nur um eine Konstante ($\phi_b(x) = \phi_a(x) + c$), was eine Verschiebung auf der Y-Achse bewirkt.

4.4.5 Hauptsatz

Jede Integralfunktion ist eine Stammfunktion. Umgekehrt kann jede Stammfunktion zum berechnen von Integralen benutzt werden.

$$\phi_a(b) = \int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

4.4.6 Partielle Integration**Voraussetzungen**

- Der Integrant besteht aus zwei Faktoren
- Sei die erste Funktion $f(x)$ eine Funktion mit bekannter Stammfunktion $F(x)$ die zweite Funktion $g(x)$ irgendeine ableitbare Funktion, dann kann mit folgender Gleichung gearbeitet werden.

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = \left[\underbrace{F(x)}_{\text{Stammfunktion}} \cdot \underbrace{g(x)}_{\text{Ableitbare Funktion}} \right]_a^b - \int_a^b \underbrace{F'(x)}_{\text{Stammfunktion}} \cdot \underbrace{g'(x)}_{\text{Ableitung}} dx$$

Vorgehen

1. Eine Funktion ableiten und von der anderen die Stammfunktion suchen
2. Das Integral im Resultat aus Schritt 1. auflösen
3. Vereinfachen

4.4.7 Spezialfälle

Folgende Spezialfälle funktionieren immer dann wenn ein Faktor die Ableitung des jeweilig anderen ist.

$$\begin{aligned}\int_a^b f(ax+b)dx &= \left[\frac{1}{a} F(ax+b) \right]_a^b \\ \int_a^b f(x) \cdot f'(x)dx &= \left[\frac{1}{2} f(x)^2 \right]_a^b \\ \int_a^b f^q(x) \cdot f'(x)dx &= \left[\frac{1}{q+1} f^{q+1}(x) \right]_a^b \\ \int_a^b \frac{f'(x)}{f(x)}dx &= [\ln(|f(x)|)]_a^b\end{aligned}$$

4.4.8 Substitutionsregel

Voraussetzungen

- Integrant muss ein Produkt sein und ein Faktor muss verschachtelt sein
- Der andere Faktor muss die Ableitung der inneren Komponente der Verschachtelung sein.

$$\begin{aligned}\int_a^b f(g(x)) \cdot g'(x)dx &= \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du \\ &= [F(u)]_{g(a)}^{g(b)} \\ &= F(g(b)) - F(g(a))\end{aligned}\tag{6}$$

Vorgehen Beispiel: $\int_0^\pi (e^{-\cos(x)} \cdot \sin(x))dx$

1. Innere Komponente der Verschachtelung mit der Variablen u ersetzen und neue Intervallsgrenzen definieren
2. Stammfunktion der äusseren Komponente der Verschachtelung suchen: $\int_{-\cos(0)}^{-\cos(\pi)} e^u du$
3. Falls Stammfunktion bei Punkt 2. vorhanden, Rücksubstitution von u: $= [e^u]_{-1}^1 = e - e^{-1}$

5 Fourierreihen

Eine Fourierreihe der Funktion $s(t)$ besteht aus einer Linearkombination von Sinus- und Kosinus-Funktionen, welche alle dieselbe Periode T haben. Je höher die Ordnung n , desto genauer wird die ursprüngliche Funktion $s(t)$ approximiert.

Periode bestimmen

$$\text{Periode } T \text{ von } \sin(yx) = \frac{2\pi}{y}$$

5.1 Sinus-Kosinus-Form

$$f(t) = a_0 + \sum_{k=1}^n (a_k \cdot \cos(k\omega_1 t) + b_k \cdot \sin(k\omega_1 t))$$

- Periode T
- Grundkreisfrequenz $\omega_1 = \frac{2\pi}{T}$
- Signalmittelwert $a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T s(t) dt$
- Koeffizient $a_k = \frac{2}{T} \int_0^T s(t) \cdot \cos(k\omega_1 t) dt$
- Koeffizient $b_k = \frac{2}{T} \int_0^T s(t) \cdot \sin(k\omega_1 t) dt$

5.2 Amplituden-Phasen-Form

$$f(t) = A_0 + \sum_{k=1}^n (A_k \cdot \cos(k\omega_1 t - \varphi_k))$$

- Periode T
- Grundkreisfrequenz $\omega_1 = \frac{2\pi}{T}$
- Konstante $A_0 = a_0$
- Koeffizient $A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}$
- $\varphi_k = \begin{cases} \arctan\left(\frac{b_k}{a_k}\right) & \text{für } a_k > 0 \\ \arctan\left(\frac{b_k}{a_k}\right) + \pi & \text{für } a_k < 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{für } a_k = 0 \wedge b_k > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{für } a_k = 0 \wedge b_k < 0 \end{cases}$

5.3 Vorgehen

1. Grundperiode T beim gegebenen Signal $s(t)$ herauslesen
2. Grundkreisfrequenz berechnen $\omega_1 = \frac{2\pi}{T}$
3. Falls $s(t)$ gerade oder ungerade, fällt ein Koeffizient automatisch weg.

4. a_0 bestimmen: Falls $a_k = 0$ ist auch $a_0 = 0$
 - a) Partielle Integration: Grundperiode in Bereiche aufteilen, sodass für jeden Bereich der Funktionswert von $s(t)$ bestimmt werden kann.
 - b) $s(t)$ mit Funktionswert ersetzen
5. a_0 bestimmen:
 - a) $a_0 = \begin{cases} 0 & \text{für } s(t) \text{ ungerade (punktsymmetrisch am Nullpunkt)} \\ \frac{2}{T} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} s(t) dt & \text{für } s(t) \text{ gerade (spiegelsymmetrisch an der Y-Achse)} \end{cases}$
6. a_k bestimmen:
 - a) $a_k = \begin{cases} 0 & \text{für } s(t) \text{ ungerade (punktsymmetrisch am Nullpunkt)} \\ \frac{4}{T} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} s(t) \cdot \cos(k\omega_1 t) dt & \text{für } s(t) \text{ gerade (spiegelsymmetrisch an der Y-Achse)} \end{cases}$
7. b_k bestimmen:
 - a) $b_k = \begin{cases} 0 & \text{für } s(t) \text{ gerade (spiegelsymmetrisch an der Y-Achse)} \\ \frac{4}{T} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} s(t) \cdot \sin(k\omega_1 t) dt & \text{für } s(t) \text{ ungerade (punktsymmetrisch am Nullpunkt)} \end{cases}$
 - b) Weiter muss mittels partieller Integration die Integrale aufgelöst wer
 - c) Von der trigonometrischen Funktion prüfen wie viele Lösungen die trigonometrische Funktion zurückgeben kann (In Abhängigkeit von k). (z.B Bei einem Funktionsargument von $\frac{k\pi}{2} \Rightarrow k = 4 \Rightarrow 360^\circ$ Lösungen)
 - d) Die einzelnen Lösungen notieren
8. a_0, a_k, b_k in Fourierformel einsetzen
9. Für jedes k die Summe aufschreiben

5.4 Umformungen

5.4.1 Sinus Cosinus Form \Rightarrow Amplituden Phasen Form

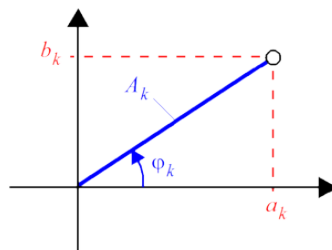


Abbildung 18: Umformung

Grafisch Man rechnet die kartesischen der Sinus Cosinus Form (a_k, b_k) in die polaren Koordinaten der Amplituden Phasen Form (A_k, φ_k) um.

$$A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}$$

Für φ_k sind verschiedene Fälle zu beachten:

1. Wenn der Punkt in der rechten Halbebene liegt, so gilt:

$$\varphi_k = \arctan\left(\frac{b_k}{a_k}\right)$$

2. Wenn der Punkt in der linken Halbebene liegt so gilt:

$$\varphi_k = \arctan\left(\frac{b_k}{a_k}\right) + \pi$$

3. Wenn der Punkt auf der Ordinatenachse liegt (Y-Achse) dann ist der Richtungswinkel entweder:

- obere Halbachse = $\frac{\pi}{2}$
- untere Halbachse = $-\frac{\pi}{2}$

4. Wenn der Punkt auf dem Ursprung liegt gibt es kein φ_k

Quadrantenbeziehungen Ist $s(t)$ ungerade oder gerade können die Koeffizienten a_k und b_k sowie die Funktionsargumente der trigonometrischen Funktionen mit den Quadrantenbeziehungen 1:1 umgeformt werden.

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \sin(x)$$

$$\cos(x - \pi) = -\cos(x)$$

$$\cos\left(x - \frac{3\pi}{2}\right) = -\sin(x)$$

$$\cos(x - 0) = \cos(x)$$

5.4.2 Amplituden Phasen Form \Rightarrow Sinus Cosinus Form

Grafisch Man rechnet die polaren Koordinaten der Amplituden Phasen Form (A_k, φ_k) in die kartesischen der Sinus Cosinus Form (a_k, b_k) um.

$$a_k = A_k \cdot \cos(\varphi_k)$$

$$b_k = A_k \cdot \sin(\varphi_k)$$

Hinweis Je nach Situation kann man auch versuchen die gegebenen $\cos(x)$ Terme mit den Additionstheoremen umzuwandeln.

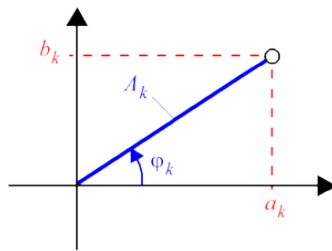


Abbildung 19: Umformung

6 Vergleiche

6.1 Taylorreihe und Fourierreihe

	Taylorreihe	Fourierreihe
Input	Funktion, die sich ableiten lässt. Entwicklungspunkt x_0	periodische Funktion
Bausteine	Polynome $(x - x_0)^k; k \in \mathbb{N}$	$\sin(kx)$ und $\cos(kx)$ Terme; $k \in \mathbb{N}$
Approximatives Verhalten	Vom Entwicklungspunkt weg von innen nach aussen	global (von groben zu feinen Strukturen)
Berechnung der Koeffizienten	Durch Ableiten am Entwicklungspunkt	Durch Minimieren der Fehlerfläche