

Table des matières

| | | |
|-----------|---|-----------|
| I | Maths - sup | 3 |
| I | Analyse pratique | 4 |
| II | Théorèmes d'analyse | 7 |
| II.1 | Fondamentaux | 7 |
| II.2 | Fondamentaux de dérivabilité | 8 |
| II.3 | Analyse asymptotique | 9 |
| II.4 | Séries | 10 |
| II.5 | Familles sommables | 10 |
| III | Arithmétique | 12 |
| IV | Groupes et anneaux | 13 |
| V | Théorèmes d'algèbre | 15 |
| VI | Polynômes | 16 |
| II | Maths - spé | 19 |
| I | Analyse - discret | 19 |
| I.1 | Suites de fonctions | 19 |
| I.2 | Séries | 21 |
| I.3 | Séries de fonctions | 21 |
| I.4 | Séries entières | 22 |
| II | Analyse - intégration | 23 |
| II.1 | Intégration - intégrales impropres | 23 |
| II.2 | Propriétés des intégrales | 25 |
| II.3 | Intégration - théorèmes de Lesbesgues | 26 |
| III | Analyse - différentiation | 30 |
| III.1 | Les équations différentielles | 30 |
| III.2 | Calcul différentiel - différentiabilité et classe | 32 |
| III.3 | Calcul différentiel - optimisation | 35 |
| III.4 | Hors programme - Différentielle d'un inverse | 37 |
| IV | Algèbre | 39 |
| IV.1 | Espaces vectoriels normés | 39 |
| IV.2 | Limites dans un EVN | 41 |
| IV.3 | Réduction | 43 |
| IV.4 | Espaces préhilbertiens | 44 |
| IV.5 | Classification des matrices orthogonales du plan | 50 |
| IV.6 | Classification des matrices orthogonales d'un espace euclidien orienté de dimension 3 | 51 |
| IV.7 | Groupes et anneaux | 52 |
| IV.8 | Idéaux et anneaux | 54 |

| | |
|---|-----------|
| III Physique - sup | 57 |
| I L'électrocinétique | 57 |
| II Mécanique du point | 58 |
| III Mécanique du solide | 60 |
| IV Mouvement à force centrale | 62 |
| IV Thermo | 65 |
| I Optique | 68 |
| II Cinétique | 68 |
| III Molécules et ions | 70 |
| IV Solides cristallins | 71 |
| V Oxydo-réduction | 74 |
| VI Acides et bases | 75 |
| VII Précipités | 76 |
| V Physique - spé | 77 |
| VI Proba | 79 |
| I Bases de la proba | 79 |
| II Dénombrement | 81 |
| III Conditionnel | 82 |
| IV Variables aléatoires discrètes | 83 |
| IV.1 Définitions | 83 |
| IV.2 Lois usuelles | 85 |
| IV.3 Espérance | 87 |
| IV.4 Variance | 88 |
| IV.5 Fonctions génératrices | 90 |
| IV.6 Lois conjointes et conditionnelles | 92 |
| V Résultats asymptotiques | 93 |

Chapitre I

Maths - sup

I Analyse pratique

Formulaire de trigo

Avec $a, b \in \mathbb{R}$, on a :

- $\cos(a + b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$;
- $\cos(a - b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$;
- $\sin(a + b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$;
- $\sin(a - b) = \sin(a)\cos(b) - \cos(a)\sin(b)$;
- $\cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2} (\cos(a + b) + \cos(a - b))$;
- $\sin(a)\sin(b) = \frac{1}{2} (\cos(a - b) - \cos(a + b))$;
- $\sin(a)\cos(b) = \frac{1}{2} (\sin(a + b) - \sin(a - b))$;
- $\sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a)$;
- $\cos(2a) = 1 - 2\sin^2(a) = \cos^2(a) - \sin^2(a) = 2\cos^2(a) - 1$;
- $\tan(2a) = \frac{2\tan(a)}{1 - \tan^2(a)}$;
- $\cos(a) + \cos(b) = 2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$;
- $\sin(a) + \sin(b) = 2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$;
- $\sin(a) = \frac{2\tan\left(\frac{a}{2}\right)}{1 + \tan^2\left(\frac{a}{2}\right)}$;
- $\cos(a) = \frac{1 - \tan^2\left(\frac{a}{2}\right)}{1 + \tan^2\left(\frac{a}{2}\right)}$;
- $\tan(a) = \frac{2\tan\left(\frac{a}{2}\right)}{1 - \tan^2\left(\frac{a}{2}\right)}$;
- $\text{sh}^2 - \text{ch}^2 = 1$;
- $\cos(a) = \frac{e^{ia} + e^{-ia}}{2}$;
- $\sin(a) = \frac{e^{ia} - e^{-ia}}{2i}$.

Dérivées et primitives des fonctions usuelles :

| Fonction | Dérivée | Primitive | \mathcal{D}_f | $\mathcal{D}_{f'}$ |
|-------------------------------|--------------------------------------|--|----------------------|----------------------|
| 0 | 0 | C | \mathbb{R} | \mathbb{R} |
| c | 0 | $cx + C$ | \mathbb{R} | \mathbb{R} |
| $\frac{1}{x}$ | $-\frac{1}{x^2}$ | $\ln x + C$ | \mathbb{R}^* | \mathbb{R}^* |
| x^α | $\alpha x^{\alpha-1}$ | $\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$ | \mathcal{D}_α | \mathbb{R}_+ |
| e^{cx} | ce^{cx} | $\frac{1}{c}e^{cx} + C$ | \mathbb{R} | \mathbb{R} |
| $\ln(x)$ | $\frac{1}{x}$ | $x\ln(x) - x + C$ | \mathbb{R}_+^* | \mathbb{R}_+^* |
| $\sin(\alpha x)$ | $\alpha \cos(\alpha x)$ | $-\frac{1}{\alpha} \cos(\alpha x) + C$ | \mathbb{R} | \mathbb{R} |
| $\cos(\alpha x)$ | $-\alpha \sin(\alpha x)$ | $\frac{1}{\alpha} \sin(\alpha x) + C$ | \mathbb{R} | \mathbb{R} |
| $\tan(x)$ | $1 + \tan^2(x)$ | $-\ln \cos(x) + C$ | \mathcal{D}_{\tan} | \mathcal{D}_{\tan} |
| $\operatorname{sh}(\alpha x)$ | $\alpha \operatorname{ch}(\alpha x)$ | $\frac{1}{\alpha} \operatorname{ch}(\alpha x) + C$ | \mathbb{R} | \mathbb{R} |
| $\operatorname{ch}(\alpha x)$ | $\alpha \operatorname{sh}(\alpha x)$ | $\frac{1}{\alpha} \operatorname{sh}(\alpha x) + C$ | \mathbb{R} | \mathbb{R} |
| $\operatorname{th}(x)$ | $1 - \operatorname{th}^2(x)$ | $\ln(\operatorname{ch}(x)) + C$ | \mathbb{R} | \mathbb{R} |
| $\arcsin(x)$ | $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ | $x \arcsin(x) + \sqrt{1-x^2} + C$ | $[-1; 1]$ | $] - 1; 1[$ |
| $\arccos(x)$ | $\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$ | $x \arccos(x) - \sqrt{1-x^2} + C$ | $[-1; 1]$ | $] - 1; 1[$ |
| $\arctan(x)$ | $\frac{1}{1+x^2}$ | $x \arctan(x) - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C$ | \mathbb{R} | \mathbb{R} |

Développements limités

On note x un réel au voisinage de 0 et :

- $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$;
- $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \dots + (-1)^p \frac{x^{2p}}{(2p)!} + o(x^{2p})$;
- $\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \dots + (-1)^p \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!} + o(x^{2p+1})$;
- $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + o(x^n)$;
- $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n + o(x^n)$;
- $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-1)^n x^n + o(x^n)$;
- $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)x^2}{2} + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)x^3}{6} + \dots + \frac{\alpha \dots (\alpha-n+1)x^n}{n!} + o(x^n)$;
- $\text{ch}(x) = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \dots + \frac{x^{2p}}{(2p)!} + o(x^{2p})$;
- $\text{sh}(x) = x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \dots + \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!} + o(x^{2p+1})$.

Les trois DL à connaître absolument sont ceux de $\frac{1}{1-x}$, de $\exp(x)$ et de $(1+x)^\alpha$. En effet, tous les autres DL usuels découlent de ceux-ci :

- Le DL du sinus est celui des termes impairs de l'exponentielle, avec une alternance de signes, au contraire du sinus hyperbolique qui est aussi les termes impairs, mais avec un signe positif.
- Le DL du cosinus est celui des termes pairs de l'exponentielle, avec une alternance de signes, au contraire du cosinus hyperbolique qui est aussi les termes pairs, mais avec un signe positif.
- Le DL de $\frac{1}{1+x}$ découle de celui de $\frac{1}{1-x}$ en composant par $x \mapsto -x$. On a donc une alternance de signes.
- Le DL de $\ln(1+x)$ découle de celui de $\frac{1}{1+x}$, par primitivation d'un DL.

On notera l'équivalent de $n!$ obtenu par la formule de Stirling : $n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$.

Résolution d'équations différentielles du second ordre

Une équation différentielle de second ordre est de la forme : $y'' = ay' + by = f(x)$.

Pour la résoudre, on trouve d'abord les racines du polynôme $x^2 + ax + b$.

Si $\Delta = 0$, on a une seule racine r_0 , et la solution générale est de la forme $(\lambda + \mu x)e^{r_0 x}$.

Sinon, dans les cas d'une équation différentielle complexe $\Delta \neq 0$ ou réelle avec $\Delta > 0$, on a avec les racines r_1, r_2 les solutions $\lambda e^{r_1 x} + \mu e^{r_2 x}$.

Dans le cas où $\Delta < 0$, on note pour r une des racines du polynôme caractéristique, $\rho = \Re(r)$ et $\omega = \Im(r)$ la solution de la forme :

$$e^{\rho x}(\lambda \cos(\omega x) + \mu \sin(\omega x))$$

II Théorèmes d'analyse

II.1 Fondamentaux

Définition : Continuité

f continue en x_0 si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in D_f, |x - x_0| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

f uniformément continue sur I si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall (x, y) \in I, |x - y| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

Théorème : Limites monotones

Avec $a < b$: soit $g \in \mathcal{F}(]a, b[, \mathbb{R})$

- Si g est croissante majorée, alors g a une limite en b^-
- Si g est croissante non-majorée, alors $g \rightarrow_{b^-} +\infty$
- Si g est croissante minorée, alors g a une limite en a^+
- Si g est croissante non-minorée, alors $g \rightarrow_{a^+} -\infty$
- Si g est décroissante majorée, alors g a une limite en a^+
- Si g est décroissante non-majorée, alors $g \rightarrow_{a^+} +\infty$
- Si g est décroissante minorée, alors g a une limite en b^-
- Si g est décroissante non-minorée, alors $g \rightarrow_{b^-} -\infty$

Théorème : Caractérisation séquentielle de la limite

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$ si, et seulement si, pour toute suite (u_n) de limite a , $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = l$

Théorème : Encadrement

Si au voisinage de $x_0 \in \bar{\mathbb{R}}$, on a $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$, et si les fonctions h et f admettent une limite commune en x_0 , alors g admet l comme limite en x_0 .

Théorème : Valeurs intermédiaires

Si f est continue, l'image d'un intervalle par f est un intervalle.

Théorème : Bornes atteintes

Si f est continue, l'image d'un segment par f est un segment.

Théorème : Heine

Si f est continue sur un segment, alors f est uniformément continue sur ce segment.

II.2 Fondamentaux de dérivabilité

Définition : Dérivabilité

f est dérivable en x_0 si $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ existe. En ce cas, on appelle la dérivée de f en x_0 cette limite, notée $f'(x)$. Tout point où f' s'annule est un point critique.

f est \mathcal{C}^1 sur I si f est dérivable en tout point de I et que sa dérivée est continue. On peut étendre cette définition pour k entier ou infini.

f est convexe sur I si $\forall x, y \in I, \forall t \in [0, 1], f(tx + (1 - t)y) \leq tf(x) + (1 - t)f(y)$. Si f est \mathcal{C}^2 , alors f est convexe quand $f'' > 0$. Tout point où f'' s'annule est un point d'inflexion.

Théorème : Opérations de dérivation

Si f et g sont n fois dérivables :

— pour $\lambda \in \mathbb{R}, (f + \lambda g)' = f' + \lambda g'$

—

$$(fg)' = f'g + fg'$$

—

$$(f^n)' = n f' f^{n-1}$$

—

$$(g \circ f)' = f'(g' \circ f)$$

—

$$(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$$

—

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$$

Théorème : Prolongement

Si f est de classe \mathcal{C}^1 sur $]a, b]$, continue en a et que f' admet une limite l en a , alors f est de classe \mathcal{C}^1 sur $[a, b]$ et $f'(a) = l$

Théorème : Rolle

Si $f(a) = f(b)$, alors $\exists c \in]a, b[, f'(c) = 0$

Théorème : Accroissements finis

Il existe $c \in]a, b[$ tel que $f(b) - f(a) = (b - a)f'(c)$

Théorème : Inégalité des accroissements finis

Si $\forall t \in]a, b[, |f'(t)| \leq M$, alors $|f(b) - f(a)| \leq M(b - a)$

Théorème : Inégalité de Jensen

Si f est convexe sur I , qu'on a $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in [0, 1]$ tels que $\lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1$ et $x_1, \dots, x_n \in I^n$, alors :

$$f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i)$$

II.3 Analyse asymptotique

Définition :

Avec f et g deux fonctions définies en b , on dit que :

- $f =_b o(g)$ si $f = \varepsilon g$ sur un voisinage de b , avec ε qui tend vers 0 en b
 - $f =_b \mathcal{O}(g)$ si $f = Mg$ sur un voisinage de b , avec M bornée sur ce voisinage de b
 - $f \sim_b g$ si $f = \varepsilon g$ sur un voisinage de b , avec ε qui tend vers 1 en b
- $f \sim_b g$ équivaut à $f =_b g + o(g)$

Théorème : Taylor-Reste-Intégral

Si f est \mathcal{C}^{n+1} sur $[a, b]$, alors :

$$f(b) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k + \int_a^b \frac{(t-a)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt$$

On note $R_n(b) = \int_a^b \frac{(t-a)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt$

Théorème : Taylor-Lagrange

En posant $t = a + (b-a)u$, on transforme l'expression du reste en $\int_0^1 \frac{(b-a)^{n+1}(1-u)^n}{n!} f^{(n+1)}(a + (b-a)u) du$

On a donc : $R_n(b) = \frac{(b-a)^{n+1}}{n!} \int_0^1 (1-u)^n f^{(n+1)}(a + (b-a)u) du$

De là on déduit la majoration de Lagrange, en posant $M_{n+1} = \sup_{[a,b]} |f^{(n+1)}|$

$$|R_n(b)| \leq \frac{|b-a|^{n+1}}{n!} \int_0^1 |1-u|^n |f^{(n+1)}(a + (b-a)u)| du \leq \frac{|b-a|^{n+1}}{n!} M_{n+1} \int_0^1 (1-u)^n du \leq \frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!} M_{n+1}$$

Théorème : Taylor-Young

Si f est \mathcal{C}^n sur $[a, b]$, alors :

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + o(x^{n+1})$$

II.4 Séries

Théorème : Critères de convergence d'une série

Si $(u_n), (v_n) \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}$:

- Si $\forall n \in \mathbb{N}, v_n \leq u_n$, alors si $\sum u_n$ converge alors $\sum v_n$ converge. De même, si $\sum u_n$ diverge, alors $\sum v_n$ aussi (critère de majoration positif)
- Si $u_n = o(v_n)$, alors si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge (critère de domination positif)
- Si $u_n \sim v_n$, alors $\sum v_n$ et $\sum u_n$ sont de même nature (critère d'équivalent positif)

Théorème : Comparaisons séries-intégrales

Si $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ fonction positive décroissante continue par morceaux, alors $(\sum f(n))$ est de même nature que la suite $(\int_0^n f(t)dt)$

Théorème : Conséquences de l'absolue convergence

Toute série absolument convergente est convergente

Théorème : Théorème spécial des séries alternées

Soit (a_n) une suite réelle positive décroissante de limite nulle. Alors $\sum (-1)^n a_n$ converge et $\forall n \in \mathbb{N}, \left| \sum_{k=n}^{+\infty} (-1)^k a_k \right| \leq a_n$

Théorème : Séries de Riemann

Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, alors $(\sum \frac{1}{n^\alpha})$ converge si, et seulement si, $\alpha > 1$.

Théorème : Séries télescopiques

$(a_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, la série $(\sum a_n - a_{n+1})$ converge si, et seulement si, la suite (a_n) converge.

Théorème : Séries géométriques

On prend $a \in \mathbb{C}$, la série $(\sum a^n)$ converge si, et seulement si, $|a| < 1$ et alors : $\sum_{n=0}^{\infty} a^n = \frac{1}{1-a}$

II.5 Familles sommables

Théorème : Sommation par paquets positif

Soit I dénombrable et $(J_j)_{j \in J}$ une partition de I avec J au plus dénombrable, ie $\cup_{j \in J} J_j = I, \forall j, h \in J, j \neq h \Rightarrow J_j \cap J_h = \emptyset$. Soit $(u_i)_{i \in I} \in \mathbb{R}_+^I$, alors : $\sum_{i \in I} u_i = \sum_{j \in J} \left(\sum_{k \in J_j} u_k \right)$

Théorème : Sommation par paquets

I dénombrable, dont les J_j sont une partition. Avec $(u_i)_{i \in I} \in \mathbb{C}^I$ sommable. Alors $\sum_{i \in I} u_i = \sum_{j \in J} \sum_{k \in J_j} u_k$

Théorème : de Fubini

Soit $(u_{i,j})_{(i,j) \in I \times J} \in \mathbb{C}^{I \times J}$ sommable. Alors $\sum_{i,j \in I \times J} u_{i,j} = \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} u_{i,j} = \sum_{j \in J} \sum_{i \in I} u_{i,j}$, avec le cas particulier où $u_{i,j} = a_i b_j$ où : $(a_i b_j)_{i,j \in I \times J}$ qui est sommable si, et seulement si, $(a_i)_{i \in I}$ et $(b_j)_{j \in J}$ sont sommables et dans ce cas, $\sum_{(i,j) \in I \times J} a_i b_j = \left(\sum_{i \in I} a_i \right) \left(\sum_{j \in J} b_j \right)$

Théorème : Produit de Cauchy

Soit $(a_n), (b_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. Si $\sum a_n, \sum b_n$ sont absolument convergentes alors $\sum \left(\sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} \right)$ est absolument convergente et $\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} \right)$

III Arithmétique

Définition : Division euclidienne

Pour a, b entiers, il existe un unique couple (q, r) tel que :

$$\begin{cases} a = bq + r \\ r < b \end{cases}$$

Définition : PGCD et PPCM

Le PGCD de deux entiers est le maximum de l'intersection de l'ensemble de leurs diviseurs. On le note $pgcd(a, b) = a \wedge b$

Le PPCM de deux entiers est le minimum de l'intersection de l'ensemble de leurs multiples. On le note $ppcm(a, b) = a \vee b$

On dit que a et b sont premiers entre eux quand leur PGCD vaut 1.

On a que $|ab| = (a \vee b)(a \wedge b)$

Définition :

Un entier est premier s'il admet deux diviseurs positifs : 1 et lui-même.

Théorème : Théorème fondamental de l'arithmétique

Tout entier peut s'écrire de manière unique sous la forme d'un produit de puissance de nombres premiers.

Théorème : Lemme de Gauss

Si a et b sont premiers entre eux alors :

$$a|bc \Rightarrow a|c$$

Théorème : Théorème de Bézout

a et b sont premiers entre eux si, et seulement si, il existe u, v un couple d'entiers tels que $au + bv = 1$

IV Groupes et anneaux

Définition : LCI

Sur un ensemble E , une lci \star est une application :

$$\star : \begin{cases} E \times E & \rightarrow E \\ (x, y) & \mapsto x \star y \end{cases}$$

On dit qu'elle est associative si :

$$\forall a, b, c \in E, a \star (b \star c) = (a \star b) \star c$$

On dit qu'elle est commutative si :

$$\forall a, b \in E, a \star b = b \star a$$

Définition : Neutre

Un élément neutre est un élément e tel que :

$$\forall x \in E, x \star e = e \star x = x$$

Théorème : Unicité du neutre

Il n'y a qu'un seul élément neutre dans un groupe

Définition : Symétrique

Le symétrique x' de $x \in E$ est un élément tel que, si la lci admet un neutre e :

$$x \star x' = x' \star x = e$$

On note x^{-1} le symétrique de x .

Théorème : Unicité du symétrique

Si la lci est associative, alors x admet un unique symétrique

Définition : Sous-groupe

Si G est un groupe pour la loi \star de neutre e :

H est un sous-groupe de G si :

$$\begin{cases} \forall (x, y) \in H, x \star y \in H \\ H \neq \emptyset (\Leftrightarrow e \in H) \\ \forall x \in H, x^{-1} \in H \end{cases}$$

Définition :

Si G et G' sont deux groupes, alors $\varphi \in \mathcal{F}(G, G')$ est un morphisme si $\forall x, y \in G, \varphi(x \star y) = \varphi(x) \star' \varphi(y)$

On note $\ker(\varphi) = \varphi^{-1}(\{e_{G'}\})$ et $\text{Im}(\varphi) = \varphi(G)$

Théorème : Propriétés du morphisme

Si φ est un morphisme de G dans G' :

— $\varphi(e) = e'$ (avec e neutre de G , e' neutre de G') ;

—

$$\forall x \in G, \varphi(x^{-1}) = (\varphi(x))^{-1}$$

;

—

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \forall x \in G, \varphi(x^n) = (\varphi(x))^n$$

;

— L'image directe d'un sous-groupe de G par φ est un sous-groupe de G' ;

— L'image réciproque d'un sous-groupe de G' par φ est un sous-groupe de G .

— φ est injective si, et seulement si, $\ker \varphi = \{e\}$

Définition :

Un morphisme bijectif est un isomorphisme, un automorphisme est un isomorphisme de G dans G

Deux groupes sont isomorphes s'il existe une bijection entre les deux.

Un homomorphisme est une application de A dans B (avec A et B deux anneaux) tel que :

— $f(0_A) = 0_B$ et $f(1_A) = 1_B$

— $f(x +_A y) = f(x) +_B f(y)$

— $f(x \times_A y) = f(x) \times_B f(y)$

Définition : Anneau

(A, \top, \cdot) est un anneau si :

— (A, \top) est un groupe abélien (commutatif) ;

— \cdot est associative et possède un élément neutre ;

— \cdot est distributive par rapport à \top

i.e. $\forall a, b, c \in A, a \cdot (b \top c) = (a \cdot b) \top (a \cdot c)$

Définition : Sous-anneau

B est un sous-anneau de $(A, +, \times)$ si :

— B sous-groupe de A

— B stable par \times

— B contient l'élément neutre pour la loi \times de A .

Définition : Intégrité

Un anneau A non réduit à 0 est intègre si il est commutatif et qu'il vérifie :

$$\forall a, b \in A, a \times b = 0 \Rightarrow a = 0 \text{ ou } b = 0$$

On dit aussi que A n'a pas de diviseurs de 0

Définition : Corps

Un corps est un anneau intègre où tout élément admet un symétrique pour la loi multiplicative

V Théorèmes d'algèbre

Définition : Algèbre

Un magma $(E, +, \times, \cdot)$ est une algèbre si, muni des lci $+$ et \times et de la lce \cdot :

- $(E, +, \cdot)$ est un \mathbb{K} -ev
- $(E, +, \times)$ est un anneau
- pour $\lambda \in \mathbb{K}, a, b \in E, \lambda(ab) = a(\lambda b)$

Théorème : Base incomplète

Toute famille libre peut être complétée en base, on peut enlever des éléments à toute famille génératrice pour la transformer en base

Théorème : du rang

Si $f \in \mathcal{L}(E)$ et E de dimension finie :

$$\dim E = \operatorname{rg}(f) + \dim \ker g$$

Théorème :

En dimension finie, l'injectivité, la surjectivité et la bijectivité sont équivalentes.

Théorème :

Si p un projecteur, toutes ces conditions sont équivalentes :

—

$$\ker p \oplus \operatorname{Im} p = E$$

—

$$\ker(p - id) = \operatorname{Im} p$$

—

$$\operatorname{Im}(p - id) = \ker p$$

—

$$p \circ p = p$$

Théorème :

Si s est une symétrie, toutes ces conditions sont équivalentes :

—

$$\ker(s - id) \oplus \ker(s + id) = E$$

—

$$\operatorname{Im}(s - id) \oplus \operatorname{Im}(s + id) = E$$

—

$$s \circ s = id$$

Théorème : Inversibilité d'une matrice

Une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible si, et seulement si, on a une des conditions équivalentes suivantes :

- $\exists B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), MB = BM = I_n$
- Il y a une suite de transformations élémentaires sur les lignes (resp. les colonnes) qui rend M inversible
- M est la matrice canoniquement associée à un isomorphisme
- M est un produit de matrices inversibles
- M^T est inversible
- Le système $AX = 0$ admet une unique solution
- $\det A \neq 0$

Théorème :

Le déterminant est une forme n-linéaire symétrique, et :

$$\det M = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{k=1}^n M_{\sigma(k),k}$$

Le déterminant ne dépend pas de la base choisie.

$$(\det MN) = (\det M)(\det N)$$

$$\det(\lambda M) = \lambda^n \det(M)$$

$$\det M^T = \det M$$

$$\det M^{-1} = \frac{1}{\det M}$$

VI Polynômes

Théorème : Opérations sur le degré

Avec $P, Q \in \mathbb{K}[X], \lambda \in \mathbb{K}, k \in \mathbb{N}$:

- Si $\lambda \neq 0$, alors $\deg \lambda P = \deg P$

$$\deg(PQ) = \deg P + \deg Q$$

$$\deg(P^k) = k \deg P$$

$$\deg(P + Q) \leq \max(\deg P, \deg Q)$$

$$\deg(P') = (\deg P) - 1$$

- $\deg(P^{(k)}) = \deg(P) - k$ si $\deg P \geq k$ et $-\infty$ sinon

Théorème : Division euclidienne

Soient $A, B \in \mathbb{K}[X]$ avec $B \neq 0$, il existe un unique couple $(Q, R) \in \mathbb{K}[X]$ tel que :

$$A = BQ + R \text{ et } \deg R < \deg B$$

Théorème :

Si $P \in \mathbb{K}[X]$ non-nul, et $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ ses racines deux à deux distinctes de multiplicités m_1, \dots, m_r , alors :

$$\prod_{i=1}^r (X - \lambda_i)^{m_i} | P$$

Ce qui donne qu'un polynôme non-nul a au plus autant de racines comptées avec multiplicité que son degré.

Théorème : Formule de Viète

Soit $P = \sum a_k X^k$ scindé de degré n .

Notons x_1, \dots, x_n ses racines.

Pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on note σ_k le k -ème polynôme symétrique élémentaire en les x_i :

$$\begin{aligned} \sigma_k &= \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} x_{i_1} \dots x_{i_k} \\ &= (-1)^k \frac{a_{n-k}}{a_n} \end{aligned}$$

Théorème : D'Alembert Gauss ou théorème fondamental de l'algèbre

Tout polynôme non-constant de $\mathbb{C}[X]$ admet une racine.

De là, on déduit que tout polynôme de $\mathbb{C}[x]$ est scindé.

De là, on déduit que les polynômes irréductibles de \mathbb{C} sont les $(X - \lambda)_{\lambda \in \mathbb{C}}$

De là, on déduit que les polynômes irréductibles de \mathbb{R} sont les $(X - \lambda)_{\lambda \in \mathbb{R}}$ et les $(X^2 + bX + c)_{(b,c) \in \mathbb{R}^2 | b^2 - 4c < 0}$

Théorème : Bézout polynomial

Deux polynômes $A, B \in \mathbb{K}[X]$ sont premiers entre eux si, et seulement si, il existe $U, V \in \mathbb{K}[X]$ tels que $AU + BV = 1$

Théorème :

Si $A, B \in \mathbb{K}[X]$ sont unitaires, alors :

$$AB = (A \wedge B)(A \vee B)$$

Théorème : Lemme d'Euclide

Un polynôme irréductible divise un produit si, et seulement si, il divise l'un des facteurs.

Théorème :

Si $A \in \mathbb{K}[X]$ non-constant, alors il existe $\alpha \in \mathbb{K}^*$, des polynômes irréductibles unitaires deux à deux distincts P_1, \dots, P_r et des entiers strictement positifs m_1, \dots, m_r tels que :

$$A = \alpha \prod_{i=1}^r P_i^{m_i}$$

Cette décomposition est unique à l'ordre des facteurs près.

Théorème : Décomposition en éléments simples

Si $F = \frac{A}{B}$ est une fraction rationnelle, elle s'écrit de manière unique comme somme d'un polynôme (la partie entière de F) et d'éléments simples.

Chapitre II

Maths - spé

I Analyse - discret

I.1 Suites de fonctions

Définition : Convergence simple

Soit E, F , 2 \mathbb{K} -ev de dimension finie. Soit $A \subset E$. Soit $(f_n) \in \mathcal{F}(A, F)^{\mathbb{N}}$.
On dit que (f_n) converge simplement vers $g \in \mathcal{F}(A, F)$ si $\forall t \in A, (f_n(t)) \rightarrow g(t)$

Définition : Convergence uniforme

Soit E, F , 2 \mathbb{K} -ev de dimension finie. Soit $A \subset E$. Soit $(f_n) \in \mathcal{F}(A, F)^{\mathbb{N}}$.
On dit que (f_n) converge uniformément vers $g \in \mathcal{F}(A, F)$ si $\sup_A \|f_n - g\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

Théorème :

Toute suite de fonctions qui converge uniformément converge simplement.

Théorème : Continuité uniforme

Soit $(f_n) \in \mathcal{F}(A, F)^{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions.
Si $\forall n \in \mathbb{N}, f_n$ est continue sur A et que (f_n) converge uniformément vers g , alors g est continue.
Ce qui correspond à : une limite uniforme de fonctions continues est continue.

Théorème : Extension de limite uniforme

Soit $(f_n) \in \mathcal{F}(A, F)^{\mathbb{N}}$, soit $a \in \bar{A}$.
Si $\forall n \in \mathbb{N}, f_n(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} l_n$ et f_n converge uniformément vers g
Alors (l_n) est convergente et $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \lim_{n \rightarrow +\infty} l_n$
ie : g a une limite finie en a et $\lim_{x \rightarrow a} \lim_{n \rightarrow +\infty} l_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \lim_{x \rightarrow a} f_n$
Ce théorème s'étend lorsque $E = \mathbb{R}$ et que $a = \pm\infty$

Théorème : Intégration uniforme ou théorème d'échange limite-intégrale uniforme

Soit a, b un segment, $(f_n) \in \mathcal{C}_0([a, b], F)^{\mathbb{N}}$
 si (f_n) converge uniformément vers g sur $[a, b]$, alors $\int_a^b f_n \rightarrow \int_a^b g$
 Ce qui correspond à $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f_n = \int_a^b \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n$

Théorème :

Soit (f_n) une suite de fonctions continues d'un intervalle I de \mathbb{R} à valeurs dans F convergeant uniformément vers g sur tout segment de I

Soit $a \in I$, on a alors : $F_n : \begin{cases} I \rightarrow F \\ x \mapsto \int_a^b f_n(t) dt \end{cases}$ et $G : \begin{cases} I \rightarrow F \\ x \mapsto \int_a^b g(t) dt \end{cases}$

Alors F_n converge uniformément vers G sur tout segment de I .

Théorème : Dérivation uniforme des suites de fonctions

Avec I un intervalle, si :

- $(f_n) \in \mathcal{C}^1(I, F)^{\mathbb{N}}$
- (f_n) converge simplement vers g_0
- (f'_n) converge uniformément vers g_1 sur tout segment de I

alors g_0 est \mathcal{C}^1 tel que $g'_0 = g_1$ et (f_n) converge uniformément sur tout segment de I .

Ce qui correspond à $g'_0 = g_1 \Rightarrow (\lim f_n) = \lim(f'_n)$

Théorème : Théorème de dérivation des suites à l'ordre k

Avec I un intervalle, si :

- $(f_n) \in \mathcal{C}^k(I, F)^{\mathbb{N}}$
- $\forall j \in \llbracket 0, k-1 \rrbracket, (f_n^{(j)})$ converge simplement vers g_j
- $(f_n^{(k)})$ converge uniformément vers g_k sur tout segment de I

alors g_0 est \mathcal{C}^k tel que $\forall j \in \llbracket 0, k \rrbracket, g_0^{(j)} = g_j$ et $(f_n^{(j)})$ converge uniformément sur tout segment de I .

Théorème : Stone-Weierstrass (admis)

Toute fonction continue sur un segment à valeurs dans \mathbb{K} est limite uniforme d'une suite de fonctions polynomiales.

Ce qui correspond à : l'ensemble des fonctions polynomiales est dense dans $(\mathcal{C}([a, b], \mathbb{K}), \|\cdot\|_{\infty})$

Théorème : Approximation uniforme par des fonctions en escalier

Toute fonction continue sur un segment à valeurs dans F est limite uniforme d'une suite de fonctions en escaliers

Ce théorème est encore valable pour les fonctions continues par morceaux sur un segment.

I.2 Séries

Théorème : Critère de d'Alembert

Soit $(u_n) \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}$. Si $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) \rightarrow l \in \mathbb{R}$, alors :

- Si $l < 1$ alors $\sum u_n$ converge.
- Si $l > 1$ alors $\sum u_n$ diverge grossièrement.
- Si $l = 1$ alors on ne peut rien dire.

Théorème : Sommation des ordres de grandeur

Avec $(a_n), (b_n)$ deux suites réelles positives :

- Si $b_n = O(a_n)$: si $\sum a_n$ converge, alors $\sum b_n$ converge et $\sum_{k=n+1}^{+\infty} b_k = O\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k\right)$; si $\sum a_n$ diverge, alors $\sum_{k=0}^n b_k = O\left(\sum_{k=0}^n a_k\right)$.
- Si $b_n = o(a_n)$: si $\sum a_n$ converge, alors $\sum b_n$ converge et $\sum_{k=n+1}^{+\infty} b_k = o\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k\right)$; si $\sum a_n$ diverge, alors $\sum_{k=0}^n b_k = o\left(\sum_{k=0}^n a_k\right)$.
- Si $b_n \sim (a_n)$: si $\sum a_n$ converge, alors $\sum b_n$ converge et $\sum_{k=n+1}^{+\infty} b_k \sim \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k$; si $\sum a_n$ diverge, alors $\sum b_n$ diverge et $\sum_{k=0}^n b_k \sim \sum_{k=0}^n a_k$.

I.3 Séries de fonctions

Définition : Convergences

Soit $(u_n) \in \mathcal{F}(A, F)^{\mathbb{N}}$, on dit que la série de fonction $(\sum u_n)$ converge simplement si la suite des sommes partielles $\left(\sum_{k=0}^n u_k\right)$ converge simplement.

On dit que $(\sum u_n)$ converge uniformément si la suite des sommes partielles $\left(\sum_{k=0}^n u_k\right)$ converge uniformément. On dit que $\sum u_n$ converge normalement si $\sum \sup_A \|u_n\|$ converge.

Théorème :

Tout série de fonction qui converge normalement converge uniformément.

Théorème : continuité uniforme des séries de fonctions

Soit $(u_n) \in \mathcal{C}(A, F)^{\mathbb{N}}$, si $\sum u_n$ converge uniformément sur A , alors $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$ est continue.

Théorème : échange de limites de séries

Avec $(u_n) \in \mathcal{F}(A, F)^{\mathbb{N}}$ et $a \in \bar{A}$

Si $\forall n \in \mathbb{N}, u_n(x) \rightarrow_{x \rightarrow a} v_n$ et que $(\sum u_n)$ converge uniformément, alors $\left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right)$ a une limite en a et

$$\lim_{x \rightarrow a} \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$$

Théorème : Théorème de dérivation terme à terme à l'ordre k

Avec I un intervalle, si :

- $(u_n) \in \mathcal{C}^1(I, F)^{\mathbb{N}}$
- $(\sum u_n)$ converge simplement
- $(\sum u_n^{(k)})$ converge uniformément sur tout segment de I

alors $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ est \mathcal{C}^1 tel que $\forall j \in \llbracket 0, k \rrbracket, \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right)' = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n'$ et la somme converge uniformément sur tout segment de I .

I.4 Séries entières

Définition :

Soit $(a_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. On appelle série entière associée à (a_n) (de variable complexe) la série de fonctions $(\sum(z \mapsto a_n z^n))$ qu'on notera en général $(\sum a_n z^n)$

$z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ est la somme de cette série entière.

Définition : Rayon de convergence

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière. On appelle rayon de cette série $R = \sup\{|z| \mid z \in \mathbb{C}, (\sum a_n z^n) \text{ est bornée}\}$
Par convention, $R = +\infty$ si cet ensemble n'est pas majoré.

Théorème : Lemme d'Abel

Soit $(\sum a_n z^n)$ une série entière. Soit $z_0 \in \mathbb{C}^*$. Si $(a_n z_0^n)$ est bornée, alors la série $\sum a_n z^n$ converge absolument pour $z \in \mathbb{C}, |z| < |z_0|$

Théorème : Relations de comparaison

Soient $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ des séries entières de rayons R_a et R_b :

- Si $a_n = o(b_n)$ alors $R_a \geq R_b$
- Si $a_n = \mathcal{O}(b_n)$ alors $R_a \geq R_b$
- Si $a_n \sim b_n$ alors $R_a = R_b$

Théorème : Critère de D'Alembert

Si (a_n) ne s'annule pas à partir d'un certain rang :

si $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \rightarrow l$ avec $l \in \bar{\mathbb{R}}$, alors $R_a = \frac{1}{l}$

(On prend la convention de $\frac{1}{+\infty} = 0$ et que $\frac{1}{0} = +\infty$)

Théorème : Produit de Cauchy

Pour $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières de rayons respectifs R_a et R_b

On pose pour $n \in \mathbb{N}$, $c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$

La série entière $\sum c_n z^n$ est de rayon de convergence $R \geq \min(R_a, R_b)$ et $\forall z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < \min(R_a, R_b)$, $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n$

Théorème : Continuité

La somme d'une série entière est continue sur son disque ouvert de convergence

Théorème :

Soit $(a_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, alors les séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum n a_n z^n$ ont même rayon.

Théorème : Corollaire

La somme d'une série entière est \mathcal{C}^∞ sur son intervalle ouvert de convergence

Les dérivées s'obtiennent par dérivation terme à terme

Théorème : Convergence radiale

Soit $(a_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, $(\sum a_n z^n)$ de rayon $R > 0$

Si $\sum a_n R^n$ converge alors : $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \rightarrow_{x \rightarrow R} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n R^n$ pour $x \in]-R, R[$

Plus précisément, si f définie en R en tant que somme de série entière, alors f continue sur \mathcal{D}_f

II Analyse - intégration

II.1 Intégration - intégrales impropres

Définition :

Soit $f : [a, b[\rightarrow \mathbb{K}$ une fonction continue par morceaux avec $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$

Notons F la fonction :

$$F : \begin{cases} [a, b[& \rightarrow \mathbb{K} \\ x & \mapsto \int_a^x f \end{cases}$$

On dit que $\int_a^b f$ est convergente si $F(x)$ a une limite finie quand x tend vers b .

Dans ce cas, on note :

$$\int_a^b f = \lim_{x \rightarrow b} \int_a^x f$$

Dans le cas contraire, on dit que $\int_a^b f$ est divergente.

Etudier la nature de $\int_a^b f$, c'est étudier si l'intégrale est convergente ou divergente.

Définition :

Soit I un intervalle, f continue par morceaux sur I à valeurs dans \mathbb{K}
 On dit que $\int_I f$ est absolument convergente si $\int_I |f|$ converge.

Théorème :

Soit $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ avec $a < b$. Soit $f \in \mathcal{CM}([a, b[, \mathbb{R})$
 Si f est positive, l'intégrale $\int_a^b f$ converge si, et seulement si, $x \mapsto \int_a^x f$ est majorée.

Théorème :

Soit f continue par morceaux sur un intervalle I .
 Si $\int_I f$ est absolument convergente alors $\int_I f$ est convergente.

Théorème :

Soit $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ avec $a < b$
 Soit $f, g \in \mathcal{CM}([a, b[, \mathbb{R})$ deux fonctions à valeurs positives telles que $0 \leq f \leq g$:
 — Si $\int_a^b g$ converge alors $\int_a^b f$ converge.
 — Si $\int_a^b f$ diverge alors $\int_a^b g$ diverge.

Théorème : Corollaire

Soit $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ avec $a < b$
 Soit $f, g \in \mathcal{CM}([a, b[, \mathbb{R})$ deux fonctions à valeurs positives telles que $f =_b o(g)$ ou $f =_b \mathcal{O}(g)$:
 — Si $\int_a^b g$ converge alors $\int_a^b f$ converge.
 — Si $\int_a^b f$ diverge alors $\int_a^b g$ diverge.

Théorème :

$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$ converge si, et seulement si, $\alpha > 1$

Théorème :

$\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} dt$ converge si, et seulement si, $\lambda > 0$

Théorème :

$\int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha}$ converge si, et seulement si, $\alpha < 1$

Théorème :

$\int_0^1 \ln(t) dt$ converge

Théorème :

Si $a < b$:
 $\int_a^b \frac{dt}{|t-a|^\alpha}$ converge si, et seulement si, $\alpha < 1$

Théorème :

Si $a > b$: $\int_b^a \frac{dt}{|b-t|^\alpha}$ converge si, et seulement si, $\alpha < 1$

II.2 Propriétés des intégrales

Théorème : Sommes de Riemann

Si f est continue sur $[a, b]$, alors :

$$\frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t) dt$$

Théorème : Propriétés des intégrales impropres

- Linéarité : si I un intervalle, f, g continues par morceaux sur I d'intégrales convergentes sur I , $\lambda \in \mathbb{K}$, alors :

$$\int_I f + \lambda g \text{ converge et } \int_I f + \lambda g = \int_I f + \lambda \int_I g$$

- Positivité : si f continue par morceaux sur I réelle positive, d'intégrale sur I convergente, alors $\int_I f \geq 0$
- Croissance : si f et g sont continues par morceaux sur I réelles positives d'intégrales sur I convergentes avec $f \leq g$, alors $\int_I f \leq \int_I g$
- Inégalité triangulaire : si f continue par morceaux sur I intégrable sur I , alors $|\int_I f| \leq \int_I |f|$
- Positivité améliorée : si I un intervalle, f continue réelle positive sur I d'intégrale sur I convergente, alors $\int_I f = 0 \Rightarrow \forall x \in I, f(x) = 0$
- Relation de Chasles : Soit I un intervalle, soit $f \in \mathcal{CM}(I, \mathbb{K})$. Soit a, b, c dans l'adhérence de I dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$
Si $\int_I f$ converge, alors $\int_a^c f, \int_c^b f$ et $\int_a^b f$ convergent et

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$$

- Intégration par parties : Avec $f, g \in \mathcal{C}^1$ sur $]a, b[$, si fg a une limite en a^+ et en b^- alors $\int_a^b f(t)g'(t)dt$ et $\int_a^b f'(t)g(t)dt$ sont de même nature et en cas de convergence :

$$\int_a^b f(t)g'(t)dt = [f(t)g(t)]_a^b - \int_a^b f'(t)g(t)dt$$

- Changement de variables : Soient a, b, α, β tels que $-\infty \leq a < b \leq +\infty, -\infty \leq \alpha < \beta \leq +\infty$
Soit $f \in]a, b[\rightarrow \mathbb{K}$ une fonction continue.
Soit $\varphi :]\alpha, \beta[\rightarrow]a, b[$ une fonction bijective, strictement croissante et de classe \mathcal{C}^1
Les intégrales $\int_a^b f(t)dt$ et $\int_\alpha^\beta (f \circ \varphi)(u)\varphi'(u)du$ sont de même nature, et en cas de convergence

$$\int_a^b f(t)dt = \int_\alpha^\beta (f \circ \varphi)(u)\varphi'(u)du$$

Théorème : Intégration des ordres de grandeur

Soit $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ avec $a < b$

Soit $f \in \mathcal{CM}([a, b[, \mathbb{K})$

Soit $\varphi \in \mathcal{CM}([a, b[, \mathbb{R})$ une fonction positive sur $[a, b[$

- Si φ est intégrable :
 - Si $f =_b \mathcal{O}(\varphi)$ alors f est intégrable sur $[a, b[$ et $\int_x^b f =_b \mathcal{O}(\int_x^b \varphi)$
 - Si $f =_b o(\varphi)$ alors f est intégrable sur $[a, b[$ et $\int_x^b f =_b o(\int_x^b \varphi)$
 - Si $f \sim_b \varphi$ alors f est intégrable sur $[a, b[$ et $\int_x^b f \sim_b \int_x^b \varphi$
- Si φ n'est pas intégrable :
 - Si $f =_b \mathcal{O}(\varphi)$ alors $\int_a^x f =_b \mathcal{O}(\int_a^x \varphi)$
 - Si $f =_b o(\varphi)$ alors $\int_a^x f =_b o(\int_a^x \varphi)$
 - Si $f \sim_b \varphi$ alors f n'est pas intégrable sur $[a, b[$ et $\int_a^x f \sim_b \int_a^x \varphi$

II.3 Intégration - théorèmes de Lebesgues

Théorème : de convergence dominée

Soit (f_n) une suite de fonctions continues par morceaux de I intervalle de \mathbb{R} dans \mathbb{K} . On suppose que :

- La suite (f_n) converge simplement sur I vers une fonction f continue par morceaux
- Il existe une fonction φ positive et intégrable sur I telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, |f_n| \leq \varphi \text{ (hypothèse de domination)}$$

Alors les fonctions f_n pour $n \in \mathbb{N}$ et la fonction f sont intégrables sur I et

$$\int_I f_n \rightarrow \int_I f$$

Théorème : Intégration terme à terme positive

Soit I une intervalle, soit (u_n) une suite de fonctions définies de I dans \mathbb{R}_+^* . On suppose que :

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est continue par morceaux et intégrable sur I
- $(\sum u_n)$ converge simplement
- $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ est continue par morceaux sur I .

Alors :

$$\int_I \sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I u_n$$

Théorème : Intégration terme à terme

Soit I un intervalle

Soit (u_n) une suite de fonctions à valeur dans \mathbb{K} . On suppose que :

- Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, u_n est continue par morceaux et intégrable sur I
- La série $\sum u_n$ converge simplement et $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ est continue par morceaux sur I
- La série $\sum \int_I |u_n|$ converge

Alors $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ est intégrable sur I et

$$\int_I \sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I u_n$$

Théorème : échange des limites non-discrètes

Soient I, J deux intervalles de \mathbb{R} , f une fonction définie sur $J \times I$ à valeurs dans \mathbb{K} . Soit λ_0 dans l'adhérence de J ($\in \bar{R}$). On suppose que :

- pour tout $\lambda \in J$, la fonction $t \mapsto f(\lambda, t)$ est continue par morceaux sur I
- il existe une fonction l continue par morceaux de I dans \mathbb{K} telle que pour tout $t \in I$, $\lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} f(\lambda, t) = l(t)$
- Il existe une fonction φ continue par morceaux positive et intégrable sur I telle que :
 $\forall (\lambda, t) \in J \times I, |f(\lambda, t)| \leq \varphi(t)$ (hypothèse de domination)

Alors les fonctions $t \mapsto f(\lambda, t)$ (pour tout $\lambda \in J$) et la fonction l sont intégrables sur I et :

$$\lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} \int_I f(\lambda, t) dt = \int_I l(t) dt$$

Théorème : Autre formulation

Soit I et J deux intervalles de \mathbb{R} , $(f_\lambda)_{\lambda \in J}$ une famille de fonctions définies sur I dans \mathbb{K} . Soit λ_0 dans l'adhérence de J (dans $\bar{\mathbb{R}}$). On suppose que :

- pour tout $\lambda \in J$, la fonction f_λ est continue par morceaux sur I
- il existe une fonction l continue par morceaux de I dans \mathbb{K} telle que pour tout $t \in I$,
 $\lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} f_\lambda(t) = l(t)$
- il existe une fonction φ continue par morceaux, positive et intégrable sur I telle que
 $\forall (\lambda, t) \in J \times I, |f_\lambda(t)| \leq \varphi(t)$ (hypothèse de domination)

Alors les fonctions f_λ (pour $\lambda \in J$) et l sont intégrables sur I et

$$\lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} \int_I f_\lambda = \int_I l$$

Théorème : Continuité dominée

Soit A une partie d'un EVN de dimension finie, I un intervalle de \mathbb{R} , f une fonction définie sur $A \times I$ à valeurs dans \mathbb{R} . On suppose que :

- pour tout $x \in A$, la fonction $t \mapsto f(x, t)$ est continue par morceaux sur I
- pour tout $t \in I$, la fonction $x \mapsto f(x, t)$ est continue sur A
- il existe une fonction φ continue par morceaux, positive et intégrable sur I telle que

$$\forall (x, t) \in A \times I, |f(x, t)| \leq \varphi(t) \text{ (hypothèse de domination)}$$

Alors, pour tout $x \in A$, la fonction $t \mapsto f(x, t)$ est intégrable sur I et la fonction

$$g : \begin{cases} A & \rightarrow \mathbb{K} \\ x & \mapsto \int_I f(x, t) dt \end{cases}$$

est continue.

Théorème : Extension

Si l'hypothèse de domination est satisfaite au voisinage d'un point a de A , on peut en conclure la continuité de $x \mapsto \int_I f(x, t) dt$ en a

Si A est un intervalle de \mathbb{R} , et que l'hypothèse de domination est satisfaite sur tout segment de A , alors

$$g : \begin{cases} A & \rightarrow \mathbb{K} \\ x & \mapsto \int_I f(x, t) dt \end{cases} \text{ est continue}$$

Théorème : Dérivabilité

Soit I et J deux intervalles de \mathbb{R} , f une fonction définie sur $J \times I$ à valeurs dans \mathbb{K} . On suppose que :

- pour tout $x \in J$, la fonction $t \mapsto f(x, t)$ est continue par morceaux et dérivable sur I
- la fonction f admet sur $J \times I$ une dérivée partielle par rapport à la première variable, $\frac{\partial f}{\partial x}$
- la fonction $\frac{\partial f}{\partial x}$ vérifie les hypothèses du théorème 36 :

- pour tout $x \in J$, la fonction $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)$ est continue par morceaux sur I

- pour tout $t \in I$, la fonction $x \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)$ est continue sur J

- il existe une fonction φ continue par morceaux, positive et intégrable sur I telle que

$$\forall (x, t) \in J \times I, \left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| \leq \varphi(t) \text{ (hypothèse de domination)}$$

Alors pour tout $x \in J$, la fonction $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)$ est intégrable sur I ,

la fonction $g : x \mapsto \int_I f(x, t) dt$ est de classe \mathcal{C}^1 sur J et vérifie :

$$\forall x \in J, g'(x) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt$$

Théorème : Classe d'une intégrale à paramètre

Soit I et J deux intervalles de \mathbb{R} , f une fonction définie sur $J \times I$ à valeurs dans \mathbb{K} et $k \in \mathbb{N}^*$. On suppose que :

- pour tout $j \in \llbracket 0, k \rrbracket$, la fonction f admet sur $J \times I$ une dérivée partielle d'ordre j par rapport à la première variable, $\frac{\partial^j f}{\partial x^j}$
- pour tout $j \in \llbracket 0, k-1 \rrbracket$, pour tout $x \in J$, la fonction $\frac{\partial^j f}{\partial x^j}(x, t)$ est continue par morceaux et intégrable sur I
- pour tout $t \in I$, pour tout $j \in \llbracket 0, k \rrbracket$, $x \mapsto \frac{\partial^j f}{\partial x^j}(x, t)$ est continue sur J
- pour tout segment K inclus dans J , il existe une fonction φ_K continue par morceaux, positive et intégrable sur I telle que

$$\forall (x, t) \in K \times I, \left| \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x, t) \right| \leq \varphi_K(t) \text{ (hypothèse de domination sur tout segment)}$$

Alors, pour tout $x \in J$, la fonction $t \mapsto \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x, t)$ est intégrable sur I , la fonction $g : x \mapsto \int_I f(x, t) dt$ est de classe \mathcal{C}^k sur J et vérifie

$$\forall x \in J, g^{(k)}(x) = \int_I \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x, t) dt$$

III Analyse - différentiation

III.1 Les équations différentielles

Définition : Premier ordre

Soit I un intervalle, soit E un \mathbb{K} -ev de dimension finie.

Soit a une application continue de I dans $\mathcal{L}(E)$

Soit b une application continue de I dans E

On appelle $y' + a \cdot y = b$ équation différentielle linéaire du premier ordre normalisée.

Ses solutions sont les fonctions $y \in \mathcal{D}(I, E)$ vérifiant $\forall t \in I, y'(t) + a(t) \cdot y(t) = b(t)$

Définition : Traduction matricielle

Avec les notations ci-dessus, on fixe une base \mathcal{B} de E .

$\forall t \in I, Y(t) = \text{Mat}_{\mathcal{B}} y(t) \Rightarrow Y'(t) = \text{Mat}_{\mathcal{B}} y'(t) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$

$A(t) = \text{Mat}_{\mathcal{B}} a(t) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

$B(t) = \text{Mat}_{\mathcal{B}} b(t) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$

L'équation devient :

$$Y'(t) = A(t)Y(t) + B(t)$$

Définition : Equation homogène associée

Avec $(E_q) : y' + a \cdot y = b$

(où $a \in \mathcal{C}(I, \mathcal{L}(E))$ et $b \in \mathcal{C}(I, E)$)

L'équation homogène associée est :

$$(H) : y' + a \cdot y = 0$$

Théorème : Résolution de l'équation différentielle linéaire normalisée à coefficients constants

Notons $\forall t \in I, y'(t) = a \cdot y(t)$, où $a \in \mathcal{L}(E)$

L'ensemble des solutions de cette équation est : $\{t \mapsto \exp(ta) \cdot x \mid x \in E\}$

plus précisément, la solution du problème de Cauchy $\begin{cases} y' = a \cdot y \\ y(t_0) = x_0 \end{cases}$ est $t \mapsto \exp((t - t_0)a) \cdot x_0$

Théorème : Superposition

(E_{q_1}) et (E_{q_2}) deux équations de même équation homogène associé et $\lambda \in \mathbb{K}$:

$$(E_{q_1}) : y' + a(t) \cdot y = b_1$$

$$(E_{q_2}) : y' + a(t) \cdot y = b_2$$

$$(E_{q_+}) : y' + a(t) \cdot y = b_1 + b_2$$

$$(E_{q_\lambda}) : y' + a(t) \cdot y = \lambda b_1$$

Si $y_1 \in S_{E_{q_1}}$ et $y_2 \in S_{E_{q_2}}$, alors :

$$y_1 + y_2 \in S_{E_{q_+}}$$

et

$$\lambda y_1 \in S_{E_{q_\lambda}}$$

Théorème : Cauchy-Lipschitz linéaire

Soit I un intervalle de \mathbb{R}

Soit E un \mathbb{K} -ev de dimension finie

Soit (E_q) une équation différentielle linéaire normalisée $y' + a \cdot y = b$

Soit $t_0 \in I$, $y_0 \in E$, alors :

Il existe une unique solution f de (E_q) vérifiant :

$$f(t_0) = y_0$$

Théorème : Corollaire

Si I est un intervalle et $(H) : y' = a \cdot y$ une équation différentielle linéaire **normalisée**

L'ensemble des solutions de (H) sur I à valeurs dans E est un \mathbb{K} -ev de dimension $\dim E$

Théorème : Variation des constantes

Soit I un intervalle, (E_q) une équation différentielle linéaire normalisée $y' = a \cdot y + b$

(H) l'équation homogène associée.

Si (u_1, \dots, u_p) est une base de S_H

Alors (E_q) possède une solution particulière de la forme $t \mapsto \lambda_1(t) + \dots + \lambda_p(t)u_p(t)$

où $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ sont des fonctions dérivables à valeurs dans \mathbb{K}

III.2 Calcul différentiel - différentiabilité et classe

Définition :

Soit f une fonction définie d'un ouvert U dans F et a un point de U .

On dit que f est différentiable au point a s'il existe une application $u \in \mathcal{L}(E, F)$ telle qu'au voisinage de 0 :

$$f(a+h) = f(a) + u(h) + o(h)$$

Dans ce cas, une telle application linéaire u est unique, on la note $df(a)$ et on l'appelle différentielle de f en a .

On l'appelle aussi application linéaire tangente à f en a .

Définition :

Soit f une fonction définie d'un ouvert U dans F . Si f est différentiable en tout point de U , on dit que f est différentiable sur U et on appelle différentielle de f sur U l'application :

$$df : \begin{cases} U & \rightarrow \mathcal{L}(E, F) \\ a & \mapsto df(a) \end{cases}$$

Théorème :

Soit f une fonction définie d'un ouvert U dans F et $a \in U$. Si f est différentiable en a , alors f est continue en a .

Théorème :

Soit f une fonction définie d'un ouvert U dans F et $a \in U$.

Si f est différentiable en a , alors f est dérivable en a selon tout vecteur $v \in E$ et :

$$D_v f(a) = df(a) \cdot v$$

Théorème : Corollaire

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E . Soit f une fonction définie d'un ouvert U dans F et $a \in U$.

Si f est différentiable en a , alors f admet des dérivées partielles (dans la base \mathcal{B}) et pour $v = \sum_{i=1}^n v_i e_i \in E$:

$$D_v f(a) = df(a) \cdot v = \sum_{i=1}^n v_i \partial_i f(a)$$

Définition : Matrice Jacobienne

Si $E = \mathbb{R}^m$ et $F = \mathbb{R}^n$. Soit f une fonction définie d'un ouvert U dans F différentiable sur U . Soit $a \in U$. La matrice, dans les bases canoniques, de l'application linéaire $df(a)$ est :

$$J_f(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m}(a) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_m}(a) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_m}(a) \end{pmatrix}$$

et est appelée matrice jacobienne de f en a .

Théorème : Différentielle d'une combinaison linéaire

Soit f et g deux fonctions définies d'un ouvert U dans F , différentiables sur U . Soit λ, μ deux réels. La fonction $\lambda f + \mu g$ est différentiable sur U et :

$$d(\lambda f + \mu g) = \lambda df + \mu dg$$

Théorème : Différentielle d'une application bilinéaire

Soit E, F, G, H quatre espaces vectoriels normés de dimension finie et U un ouvert de E . Soit f (respectivement g) une fonction définie de U dans F (respectivement G) et différentiable sur U . Soit B une application bilinéaire définie de $F \times G$ dans H .

La fonction $B(f, g) : x \mapsto B(f(x), g(x))$ est différentiable sur U et :

$$d(B(f, g)) = B(df, g) + B(f, dg)$$

Théorème : Différentielle d'une composée

Soit E, F, G trois espaces vectoriels normés de dimension finie et U un ouvert de E . Soit f une fonction définie de U dans F , différentiable sur U . Soit g une fonction définie de V dans G , avec V un ouvert de F contenant $f(U)$, différentiable sur V . La fonction $g \circ f$ est différentiable sur U et, pour tout $a \in U$,

$$d(g \circ f)(a) = dg(f(a)) \circ df(a)$$

Théorème : Règle de la chaîne

Soit m, p, n des entiers naturels non nuls.

Soit f une application différentiable sur U un ouvert de \mathbb{R}^m et à valeurs dans \mathbb{R}^p .

Soit g une application différentiable sur V un ouvert de \mathbb{R}^p contenant $f(U)$ et à valeurs dans \mathbb{R}^n .

On note f_1, \dots, f_p les fonctions composantes de f et on pose $h = g \circ f$.

On a donc le schéma suivant :

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R}^m & & \xrightarrow{f} & \mathbb{R}^p & \xrightarrow{g} & \mathbb{R}^n \\ (x_1, \dots, x_m) & \mapsto & (f_1, \dots, f_p) & \mapsto & (g_1, \dots, g_n) \end{array}$$

Soit $x = (x_1, \dots, x_m) \in U$. Pour $j \in \llbracket 1, m \rrbracket$ et $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$:

$$\frac{\partial (g \circ f)_i}{\partial x_j}(x) = \sum_{k=1}^p \frac{\partial g_i}{\partial f_k}(f(x)) \cdot \frac{\partial f_k}{\partial x_j}(x)$$

$$\partial_j h(x) = \sum_{k=1}^p \partial_k g(f(x)) \partial_j f_k(x)$$

Ou encore, avec une notation plus abusive :

$$\frac{\partial g_i}{\partial x_j} = \sum_{k=1}^p \frac{\partial f_k}{\partial x_j} \frac{\partial g_i}{\partial f_k}$$

Définition :

Une application f d'un ouvert U dans F est dite de classe \mathcal{C}^1 si elle est différentiable sur U et si df est continue sur U

(i.e. $\begin{array}{ccc} U & \rightarrow & \mathcal{L}(E, F) \\ x & \mapsto & df(x) \end{array}$ continue)

Théorème : de Schwarz

Soit \mathcal{B} une base de E et soit f définie d'un ouvert U dans F .

Si f est de classe \mathcal{C}^2 alors :

$$\forall i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, \partial_i \partial_j f = \partial_j \partial_i f$$

Théorème :

Soit \mathcal{B} une base de E . Soit f une application définie d'un ouvert U dans F .

L'application f est de classe \mathcal{C}^1 sur U si, et seulement si, les dérivées partielles relativement à la base \mathcal{B} existent en tout point de U et sont continues sur U .

Théorème : Classe d'une combinaison linéaire

Soit f et g deux fonctions de U dans F de classe \mathcal{C}^k . Soit λ, μ deux réels.

La fonction $\lambda f + \mu g$ est de classe \mathcal{C}^k sur U .

Théorème : Classe d'une application bilinéaire

Soit E, F, G, H quatre espaces vectoriels normés de dimension finie et U un ouvert de E .
 Soit f une fonction définie de U dans F de classe \mathcal{C}^k .
 Soit g une fonction définie de U dans G de classe \mathcal{C}^k .
 Soit B une application bilinéaire définie de $F \times G$ dans H .
 La fonction $B(f, g)$ est de classe \mathcal{C}^k sur U .

Théorème : Classe d'un produit scalaire

Supposons que F est un espace vectoriel euclidien. Soit f et g deux applications de classe \mathcal{C}^1 de U dans F .

La fonction $\begin{cases} U & \rightarrow \mathbb{R} \\ t & \mapsto \langle f(t), g(t) \rangle \end{cases}$ est \mathcal{C}^1

Théorème : Classe d'un produit

Soit f et g deux applications de classe \mathcal{C}^1 d'un ouvert U dans \mathbb{R} . La fonction fg est \mathcal{C}^1 .

Théorème : Classe d'une composée

Soit E, F, G trois espaces vectoriels normés de dimension finie et U un ouvert de E .
 Soit f une fonction définie de U dans F de classe \mathcal{C}^k sur U .
 Soit g une fonction définie de V un ouvert de F contenant $f(U)$ dans G et de classe \mathcal{C}^k sur V .
 La fonction $g \circ f$ est de classe \mathcal{C}^k sur U .

Théorème : Dérivée le long d'un arc

Soit f une fonction définie d'un ouvert U dans F . Soit γ une application définie sur un intervalle d'intérieur non-vide I de \mathbb{R} et à valeurs dans U .

Si γ est dérivable en t et si f est différentiable en $\gamma(t)$, alors $f \circ \gamma$ est dérivable en t et :

$$(f \circ \gamma)'(t) = df(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)$$

Théorème : Intégrale le long d'un arc

Si f est une application de classe \mathcal{C}^1 d'un ouvert U dans F , si γ est une application de classe \mathcal{C}^1 de $[0, 1]$ dans U , si $\gamma(0) = a$, $\gamma(1) = b$, alors :

$$f(b) - f(a) = \int_0^1 df(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt$$

III.3 Calcul différentiel - optimisation

Définition :

Soit f une fonction définie et différentiable sur un ouvert U et à valeurs dans \mathbb{R} . Soit $a \in U$.
 On appelle gradient de f en a et on note $\nabla f(a)$ l'unique vecteur de E tel que :

$$\forall h \in E, df(a) \cdot h = \langle \nabla f(a), h \rangle$$

Théorème : Interprétation géométrique du gradient

Pour h un vecteur de E , $D_h f(a) = df(a) \cdot h = \langle \nabla f(a), h \rangle$.

Si $\nabla f(a) \neq 0$, il est colinéaire et de même sens que le vecteur unitaire selon lequel la dérivée de f en a est maximale.

Théorème : Formule du gradient

Soit f une fonction définie et différentiable sur un ouvert U et à valeurs dans \mathbb{R} . Soit $a \in U$.

Dans (e_1, \dots, e_n) une base orthonormale de E , $\nabla f(a)$ s'écrit $\nabla f(a) = \sum_{i=1}^n \partial_i f(a) \cdot e_i$

Théorème : Constance sur un connexe

Si f est une application d'un ouvert U dans F .

Si U est connexe par arcs, la fonction f est constante sur U si, et seulement si, elle est différentiable sur U et si $df = 0$

Définition :

Si X est une partie de E et x un point de X , un vecteur v de E est tangent à X en x s'il existe $\varepsilon > 0$ et un arc γ défini sur $] -\varepsilon, \varepsilon[$, dérivable en 0, à valeurs dans X , tels que $\gamma(0) = x$ et $\gamma'(0) = v$.
On note $T_x X$ l'ensemble des vecteurs tangents à X en x . C'est un espace vectoriel.

Théorème :

Soit E un espace vectoriel euclidien. Soit f une fonction définie d'un ouvert U dans \mathbb{R} , de classe \mathcal{C}^1 . Soit X une ligne de niveau de f . Soit $x_0 \in X$ de X .

Si $df(x_0) \neq 0$, alors :

$$T_{x_0} X = \ker(df(x_0)) = (\nabla f(x_0))^\perp$$

Théorème :

Soit f une fonction définie sur un ouvert U et à valeurs dans \mathbb{R} et $a \in U$.

Si f admet un extremum local en a et si f est différentiable en a , alors $df(a) = 0$.
(i.e. a est un point critique de f)

Théorème : optimisation sous une contrainte

Si f et g sont des fonctions numériques définies et de classe ∞^1 sur l'ouvert Ω de E , si X est l'ensemble des zéros de g , si $x \in X$ et $dg(x) \neq 0$ et si la restriction de f à X admet un extremum local en x , alors $df(x)$ est colinéaire à $dg(x)$.

Preuve

Ici, on a que $T_x X = \ker dg(x)$ (théorème admis)

$df(x)$ et $dg(x)$ sont des formes linéaires telles que $\ker dg(x) \subset \ker df(x)$

Et donc $df(x) = \lambda dg(x)$

$X = g^{-1}(\{0\})$, $dg(x) \neq 0$ et $f|_X$ admet une différentielle en x

Ici, $T_x X = \ker dg(x)$ et de plus, $\ker dg(x) \subset \ker df(x)$ par le théorème précédent, comme $f|_X$ admet un extrémum en x

Si $df(x) = 0$: $df(x) = 0dg(x)$

Sinon : $\ker df(x)$ est un hyperplan (parce que $df(x)$ est une forme linéaire), donc $\ker df(x) = \ker dg(x)$ puisque $\ker dg(x)$ est de dimension 1 en tant que gradient d'un vecteur

On a quelques résultats très utiles sur une fonction \mathcal{C}^2 .

Définition :

Soit f une fonction de classe \mathcal{C}^2 sur un ouvert U de \mathbb{R}^n euclidien, à valeurs réelles. Soit $x \in U$. La matrice hessienne de f en x est la matrice symétrique :

$$H_f(x) = (\partial^2 f_{i,j}(x))_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2}$$

Théorème : Formule de Taylor-Young à l'ordre 2

Soit f une fonction de classe \mathcal{C}^2 sur un ouvert U de \mathbb{R}^n euclidien, à valeurs réelles. Soit $x \in U$.

$$f(x+h) =_{h \rightarrow 0} f(x) + \langle \nabla f(x), h \rangle + \frac{1}{2} \langle H_f(x) \cdot h, h \rangle + o(\|h\|^2)$$

$$f(x+h) =_{h \rightarrow 0} f(x) + \nabla f(x)^\top h + \frac{1}{2} h^\top H_f(x) \cdot h + o(\|h\|^2)$$

Théorème : Interprétation de la Hessienne

Si $f : U \subset E \rightarrow \mathbb{R}$ est \mathcal{C}^2 avec x_0 un point critique de f .

- Si $H_f(x_0) \in \mathcal{S}_p^{++}(\mathbb{R})$, f a un minimum local.
- Si $-H_f(x_0) \in \mathcal{S}_p^{++}(\mathbb{R})$, f a un maximum local.
- Si $H_f(x_0)$ possède une valeur propre strictement négative ($H_f \notin \mathcal{S}_p^+(\mathbb{R})$), alors f n'a pas de minimum en x_0 .
- Si $H_f(x_0)$ possède une valeur propre strictement positive ($-H_f \notin \mathcal{S}_p^+(\mathbb{R})$), alors f n'a pas de maximum en x_0 .

III.4 Hors programme - Différentielle d'un inverse

Théorème : Dans \mathbb{R}

Si f dérivable bijective d'un intervalle I sur un intervalle J , si f' ne s'annule pas alors f^{-1} est dérivable et :

$$(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$$

Théorème : Dans le cas général

Si f est différentiable bijective d'un ouvert U sur un ouvert V , et si f^{-1} est différentiable
Alors $\dim E = \dim F$ et :

$$\begin{cases} \forall x \in U, df^{-1}(f(x)) = df(x)^{-1} \\ \forall x \in V, df^{-1}(x) = df(f^{-1}(x)) \end{cases}$$

Théorème :

Si f est différentiable bijective d'un ouvert U sur un ouvert V

Soit $x \in U$ tel que $df(x)$ est bijective.

Alors f^{-1} est différentiable en $f(x)$ et :

$$df^{-1}(f(x)) = (df(x))^{-1}$$

IV Algèbre

IV.1 Espaces vectoriels normés

Ce chapitre a beaucoup de définitions qui lui sont propres.

Définition : Norme

Soit E un \mathbb{K} -ev. Soit φ une application de E dans \mathbb{R}_+ . On dit que φ est une norme si elle vérifie :

1. $\forall u \in E, \varphi(u) = 0 \Rightarrow u = 0$ (on dit que l'application est définie)
2. homogénéité : $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall u \in E, \varphi(\lambda u) = |\lambda| \varphi(u)$
3. inégalité triangulaire : $\forall u, v \in E, \varphi(u + v) \leq \varphi(u) + \varphi(v)$

Définition : Distance

Soit E un EVN. On appelle distance associée à la norme sur E l'application :

$$d : \begin{cases} E & \rightarrow \mathbb{R}_+ \\ (x, y) & \mapsto \|x - y\| \end{cases}$$

Une distance définit un espace métrique.

Définition : Normes équivalentes

Soit E un espace vectoriel, et $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ deux normes sur E . On dit que $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ sont équivalentes si : $\exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^*, \forall x \in E, \alpha \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq \beta \|x\|_1$, ou si $x \neq 0 : \alpha \leq \frac{\|x\|_2}{\|x\|_1} \leq \beta$

Remarque IV.1. Toutes les notions topologiques qui suivent sont invariantes par changement de normes équivalentes. En dimension finie, on a même que ce sont des notions qui ne dépendent pas d'une norme.

Définition : Point intérieur

Soit $A \subset E$ et $a \in A$, on dit que a est intérieur à A si $\exists \alpha \in \mathbb{R}_+^*, \mathcal{B}(a, \alpha) \subset A$

Définition : Intérieur

Soit $A \subset E$, on appelle intérieur de A l'ensemble des points intérieurs de A , noté $\overset{\circ}{A}$; on a donc $\overset{\circ}{A} \subset A$

Définition : Ouvert

Soit $A \subset E$, on dit que A est ouvert si tous les points de A sont intérieurs (ou si A contient un voisinage de chacun de ses points), ce qui signifie $A \subset \overset{\circ}{A}$

Définition : Point adhérent

Soit $A \subset E$ et $x \in E$, on dit que x est adhérent à A si : $\forall \alpha \in \mathbb{R}_+^*, \mathcal{B}(x, \alpha) \cap A \neq \emptyset$

Définition : Adhérence

Soit $A \subset E$, on appelle adhérence de A l'ensemble des points adhérents à A , noté \bar{A} . On notera que $A \subset \bar{A}$

Définition : Fermé

Si $A \subset E$, A est fermé si $\bar{A} = A$ (donc que $\bar{A} \subset A$), donc que A contient tous les points qui lui sont adhérents.

Définition : Compact

Soit E un EVN, soit $A \subset E$. On dit que A est compact si de toute suite de A , on peut extraire une suite convergente dans A .

Théorème : Deuxième forme de l'inégalité triangulaire

Soit E un EVN, $\forall x, y \in E, |||x|| - ||y||| \leq ||x \pm y|| \leq ||x|| + ||y||$

Théorème : L'équivalence des normes

Toutes les normes sont équivalentes en dimension finie

Théorème : Réunion et intersection d'ouverts

Avec E un EVN, $(O_i)_{i \in I}$ une famille d'ouverts de E , on a que :

- $\cup_{i \in I} O_i$ est un ouvert
- $\cap_{i \in I} O_i$ est un ouvert à condition que I soit fini

Théorème : Caractérisation séquentielle de l'adhérence

Soient $A \subset E, x \in E$, alors x est adhérent à A si, et seulement si, $\exists (a_n) \in A^{\mathbb{N}}, (a_n) \rightarrow x$

Théorème : Caractérisation séquentielle des fermés

Soit $A \subset E$, A est fermé si, et seulement si, pour toute suite d'éléments de A convergente vers l , $l \in A$. ie $\forall (a_n) \in A^{\mathbb{N}}, (a_n) \rightarrow l \Rightarrow l \in A$

Théorème : Complémentarité d'un ouvert

Soit E un EVN et $A \subset E$, alors A est fermé si, et seulement si, $\mathcal{C}_E A$ est ouvert.

Théorème : Compacts

Dans un espace de dimension finie E , les compacts sont les fermés bornés.

IV.2 Limites dans un EVN

Définition : Limite

Soient E, F deux EVN, et $A \subset E$. Soit $f \in \mathcal{F}(A, F)$, $x_0 \in \bar{A}$. Soit $l \in F$. On dit que f converge vers l en x_0 si :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists \alpha \in \mathbb{R}_+^*, \forall x \in \mathcal{B}(x_0, \alpha) \cap A, f(x) \in \mathcal{B}(l, \varepsilon)$$

On notera $f \rightarrow_{x_0} l$ ou $f(x) \rightarrow_{x \rightarrow x_0} l$ (notation plus abusive) ou $\lim f = l$ (notation plus adaptée à une conclusion) et $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$.

Définition : Continuité

Soit $f \in \mathcal{F}(A, F)$ avec $A \subset E$ et E, F deux EVN. Soit $a \in A$, on dit que f est continue en a si $f \rightarrow_a f(a)$.

Définition : Uniforme continuité

Soit $f \in \mathcal{F}(A, F)$ où $A \subset E$ avec E, F deux EVN. On dit que f est uniformément continue si :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists \eta \in \mathbb{R}_+^*, \forall x, y \in A, \|x - y\| < \eta \Rightarrow \|f(x) - f(y)\| < \varepsilon$$

Définition : Fonctions lipschitziennes

Soit $f \in \mathcal{F}(A, F)$, où $A \subset E$ avec E, F EVN. Soit $k \in \mathbb{R}_+^*$. On dit que f est k -lipschitzienne si :

$$\forall x, y \in A, \|f(x) - f(y)\| \leq k\|x - y\|$$

Définition : Norme triple

Soit E, F deux EVN, on appelle $\mathcal{L}_C(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires continues de E dans F .

Alors $\mathcal{L}_C(E, F)$ est un espace vectoriel normé pour la norme

$$\varphi \mapsto \|\varphi\| = \sup_{x \in E, x \neq 0} \frac{\|\varphi(x)\|_F}{\|x\|_E} = \sup_{x \in E, \|x\|=1} \|\varphi(x)\|$$

Théorème : Union d'applications d'extraction

Si φ, ψ sont deux applications de \mathbb{N} dans \mathbb{N} strictement croissantes vérifiant $\varphi(\mathbb{N}) \cup \psi(\mathbb{N}) = \mathbb{N}$, si $(u_{\varphi(n)})$ et $(u_{\psi(n)})$ convergent vers l , alors u_n est convergente de limite l .

Théorème : Bolzano-Weierstrass

De toute suite bornée dans un \mathbb{K} -ev de dimension finie on peut extraire une suite convergente.

Définition : Convergence

Soit E un EVN sur \mathbb{K} , soit $(u_n) \in E^{\mathbb{N}}$. Soit $l \in E$. On dit que (u_n) converge vers l si $(\|u_n - l\|) \rightarrow 0$.
On peut aussi écrire :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \Rightarrow u_n \in \mathcal{B}(l, \varepsilon)$$

On parle de suites convergentes et de limites (notées $\lim(u_n) = l$ et $(u_n) \rightarrow l$) dans un EVN

Théorème : Convergence des suites extraites

Si une suite $(u_n) \in E^{\mathbb{N}}$ converge l alors toute suite extraite de (u_n) converge vers l .

Théorème : Caractérisation séquentielle de la limite

Avec $f \in \mathcal{F}(A, F)$ avec $A \subset E$ et E, F deux EVN. Avec $x_0 \in \bar{A}$ et $l \in F$, alors :

$$f \rightarrow_{x_0} l \Leftrightarrow \forall (u_n) \in A^{\mathbb{N}}, (u_n) \rightarrow x_0, (f(u_n)) \rightarrow l$$

Théorème : Images réciproques

Soit $f \in \mathcal{F}(A, F)$ continue, alors l'image réciproque d'un ouvert de F par f est un ouvert relatif de A .

L'image réciproque d'un fermé de F par f est un fermé relatif de A .

Théorème : Théorème de Heine

Toute fonction continue sur un compact est uniformément continue.

Théorème : Bornes atteintes

L'image d'un compact par une application continue est un compact.

Théorème : Valeurs intermédiaires

L'image d'un connexe par arcs par une application continue est connexe par arcs.

Théorème : Critère de continuité des applications linéaires

Soit E, F des \mathbb{K} -EVN et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. f est continue si, et seulement si, elle vérifie l'une des propriétés équivalentes suivantes :

1. f est continue en 0 ;
2. $\exists k \in \mathbb{R}_+^*, \forall x \in E, \|f(x)\|_F \leq k\|x\|_E$;
3. f est lipschitzienne.

Remarque IV.2. En dimension finie, toute application linéaire est continue, par continuité des projecteurs (les applications linéaires sont des polynômes de degré au plus 1 sur les coordonnées).

Si φ est linéaire et injective en dimension finie, on a que $\|\varphi\|$ est une norme, qu'on appelle la norme φ .

Théorème : Sous-multiplicativité

Soit E, F, G des EVN, soit $f \in \mathcal{L}_C(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}_C(F, G)$, alors $|||g \circ f||| \leq |||g||| |||f|||$

IV.3 Réduction

Définition : Valeur propre

Soit E un \mathbb{K} -ev et $f \in \mathcal{L}(E)$. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$.

On dit que λ est une valeur propre de f si : $f - \lambda id$ n'est pas injective.

Ce qui correspond à $\ker(f - \lambda id) \neq \{0\}$

Ce qui correspond à $\exists x \in E, x \neq 0, (f - \lambda id)(x) = 0$

Ce qui correspond à $\exists x \in E, x \neq 0, f(x) - \lambda x = 0$

Définition : Spectre d'un endomorphisme

Soit E un \mathbb{K} -ev et $f \in \mathcal{L}(E)$. On appelle spectre de f l'ensemble des valeurs propres de f , noté $S_p(f)$.

On peut étendre la notion aux matrices.

Définition : Espace propre

Soit E un \mathbb{K} -ev, $f \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda \in S_p(f)$. On appelle espace propre associé à λ l'ensemble $\ker(f - \lambda id)$, qu'on note $E_\lambda(f)$

C'est un sev de E non-réduit à 0.

On étend la notion aux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in S_p(A)$, alors $E_\lambda(A) = \ker(A - \lambda I_n)$ est un sev de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

Définition : Polynôme annulateur

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et $f \in \mathcal{L}(E)$. On dit que P est un polynôme annulateur de f si $P(f) = 0$

Définition : Polynôme minimal

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On appelle polynôme minimal de f un polynôme non-nul unitaire annulateur de f de degré minimal, qu'on note π_f ou μ_f (cette notation existe mais elle est très rare).

Définition : Polynôme caractéristique

Avec $f \in \mathcal{L}(E)$, $\begin{matrix} \mathbb{K} & \rightarrow & \mathbb{K} \\ \lambda & \mapsto & \det(f - \lambda id) \end{matrix}$ est polynomiale. Le polynôme associé est de degré n unitaire. On appelle ce polynôme le polynôme caractéristique de f , noté χ_f

Théorème :

Une somme finie de sous-espaces propres d'un endomorphisme associés à des valeurs propres distinctes est directe.

Ce qui correspond à : si $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ sont des valeurs propres distinctes de $f \in \mathcal{L}(E)$, alors $E_1 + \dots + E_p$ est une somme directe.

Théorème :

Soit E un \mathbb{K} -ev de dimension finie. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Soit λ une valeur propre de f d'ordre α
 Alors $\dim E_\lambda(f) \leq \alpha$

Théorème :

Un endomorphisme d'un \mathbb{K} -ev E de dimension finie est trigonalisable si, et seulement si, son polynôme caractéristique est scindé.

Théorème :

Soit E un \mathbb{K} -ev de dimension finie n , $f \in \mathcal{L}(E)$. Alors f est nilpotente si, et seulement si, $\chi_f = X^n$ et $\chi_f = X^n$ si, et seulement si, il existe une base B de E dans laquelle $Mat_B(f)$ est triangulaire avec des 0 sur la diagonale.

Théorème : Opérations sur les polynômes d'endomorphismes

Pour $P, Q \in \mathbb{K}[X]$, $\lambda \in \mathbb{K}$ et $f \in \mathcal{L}(E)$, on a :

- $(P + Q)(f) = P(f) + Q(f)$
- $(\lambda \cdot P)(f) = \lambda P(f)$
- $(P \times Q)(f) = P(f) \circ Q(f) = Q(f) \circ P(f)$
- $(P \circ Q)(f) = P(Q(f))$

Théorème : Cayley-Hamilton

Avec E un \mathbb{K} -ev de dimension finie, $f \in \mathcal{L}(E)$, alors χ_f est un polynôme annulateur de f .

Théorème :

Avec E un \mathbb{K} -ev de dimension finie, $f \in \mathcal{L}(E)$. f est diagonalisable si, et seulement si, π_f est scindé à racines simples
 Ce qui correspond à ce qu'il existe un polynôme annulateur non-nul scindé à racines simples de f .

IV.4 Espaces préhilbertiens**Définition :**

Soit E un \mathbb{R} -ev, on dit qu'une application $\varphi : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ est :

- une forme bilinéaire si : $\forall x \in E, y \mapsto \varphi(x, y) = \varphi(x, \cdot)$ est linéaire et $\varphi(\cdot, x)$ est linéaire.
- symétrique si :

$$\forall x, y \in E, \varphi(x, y) = \varphi(y, x)$$

- positive si :

$$\forall x \in E, \varphi(x, x) \geq 0$$

- définie si :

$$\forall x \in E, \varphi(x, x) = 0 \Rightarrow x = 0$$

Une forme bilinéaire symétrique définie positive est un produit scalaire.

Théorème : Identités polaires

φ une forme bilinéaire symétrique.

$$\begin{aligned}\forall x, y \in E, \varphi(x, y) &= \frac{1}{2}(\varphi(x+y, x+y) - \varphi(x, x) - \varphi(y, y)) \\ &= \frac{1}{4}(\varphi(x+y, x+y) - \varphi(x-y, x-y))\end{aligned}$$

φ est donc entièrement caractérisée par l'application $u \mapsto \varphi(u, u)$

Théorème : Cauchy-Schwarz

E un \mathbb{R} -v et φ une forme bilinéaire symétrique positive

Alors $\forall x, y \in E, |\varphi(x, y)| \leq \varphi(x, x)\varphi(y, y)$

Dans un espace préhilbertien réel E ,

$$\forall x, y \in E, |\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$$

avec le cas d'égalité si, et seulement si, x et y sont colinéaires.

Théorème : Inégalité triangulaire

Soient $x, y \in E$, alors :

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\langle x, y \rangle$$

$$(\|x\| + \|y\|)^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\|\|y\|$$

Donc par Cauchy-Schwarz, $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\|\|y\|$ et on en déduit l'inégalité triangulaire :

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

Avec cas d'égalité si x et y sont colinéaires et de même sens.

Définition : Orthogonalité

- pour $u, v \in E$, u et v sont orthogonaux, noté $u \perp v$, si $\langle u, v \rangle = 0$
- deux sev F et G de E sont orthogonaux si $\forall x \in F, \forall y \in G, \langle x, y \rangle = 0$
- pour $A \subset E$, l'orthogonal de A est l'ensemble $A^\perp = \{x \in E | \forall a \in A, \langle a, x \rangle = 0\}$

Théorème : Propriétés des orthogonaux

— Pour A, B inclus dans E , $A \subset B \Rightarrow B^\perp \subset A^\perp$

—

$$\forall A \subset E, A^\perp = \text{vect}(A)^\perp$$

— A^\perp est un sev de E

— F, G sev de E :

$$F^\perp \cap G^\perp = (F + G)^\perp$$

$$F^\perp + G^\perp \subset (F \cap G)^\perp$$

(réciproque fausse)

—

$$F \subset (F^\perp)^\perp$$

Définition : Familles orthogonales

Soit $(x_i)_{i \in I}$ une famille de vecteurs d'un espace préhilbertien E
 (x_i) est une famille orthogonale si :

$$\forall i, j \in I, i \neq j \Rightarrow \langle x_i, x_j \rangle = 0$$

(x_i) est une famille orthonormale si :

$(x_i)_{i \in I}$ est orthogonale et $\forall i \in I, \|x_i\| = 1$

Toute famille orthogonale est libre (s'il n'y a pas de vecteurs nuls dedans).

Théorème :

Soit E un espace euclidien et F un sev de E

Alors

$$F \oplus F^\perp = E$$

(ie : F^\perp est un supplémentaire de F)

Théorème : Extension

Soit E préhilbertien réel et F un sev de E de dimension finie. Alors :

$$F \oplus F^\perp = E$$

Théorème : Méthode de Schmidt

Cette méthode permet de "redresser une boîte à chaussures écrasée", c'est à dire construire une base orthogonale.

(on se sert du fait que tout espace euclidien possède une BON, une base orthogonale où tous les vecteurs ont même norme)

Soit E un espace préhilbertien, $(u_i)_{i \in I}$ famille libre de E avec $I \subset \mathbb{N}$

Alors on peut construire par récurrence une famille orthogonale $(v_n)_{n \in I}$ qui vérifie :

$$\forall n \in I, \text{Vect}(u_0, \dots, u_n) = \text{Vect}(v_0, \dots, v_n)$$

(v_n) est définie par la relation :

$$\begin{cases} v_0 = u_0 \\ v_{n+1} = u_{n+1} - \sum_{i=1}^n \frac{\langle u_{n+1}, v_i \rangle}{\|v_i\|^2} v_i \end{cases}$$

Pour rendre cette famille orthonormale, il suffit de prendre la famille et de diviser chaque vecteur par sa norme

Définition :

Dans tous les cas où $F \oplus F^\perp = E$, on peut définir :

- la projection orthogonale sur F (la projection sur F parallèlement à F^\perp)
- la symétrie orthogonale par rapport à F

Théorème : de la meilleure approximation

Soit E un espace préhilbertien et F un sev de dimension finie.

Alors pour tout x de E ,

$d(x, F)$ est atteinte en un unique vecteur de F , le projeté orthogonal de x sur F

Théorème : Calcul pratique du projeté

F un sev de E de dimension finie p , (u_1, \dots, u_p) une base de F

$x \in E$, $p(x)$ son projeté orthogonal sur F

Donc (px) est entièrement défini par les équations :

$$(1) \begin{cases} p(x) \in F \\ x - p(x) \in F^\perp \end{cases}$$

Théorème : de représentation de Reese (cas euclidien)

Soit E un espace euclidien, l'application :

$$\psi \begin{cases} E & \rightarrow & E^* \\ a & \mapsto \varphi_a : \begin{cases} E & \rightarrow & \mathbb{K} \\ x & \mapsto & \langle a, x \rangle \end{cases} \end{cases} \quad \text{est un isomorphisme}$$

Définition : Adjoint

Soit E un espace euclidien et $u \in \mathcal{L}(E)$.

On appelle adjoint de u l'application de E dans E u^* telle que :

$$\forall x, y \in E \times E, \langle u(x), y \rangle = \langle x, u^*(y) \rangle$$

Théorème : Propriétés de l'adjoint

Soit E euclidien, $u, v \in \mathcal{L}(E)$.

—

$$u^* \in \mathcal{L}(E)$$

—

$$(u^*)^* = u$$

—

$$(u \circ v)^* = v^* \circ u^*$$

— $u \rightarrow u^*$ est linéaire, ie $(u + v)^* = u^* + v^*$ et $\forall \lambda \in \mathbb{R}, (\lambda u)^* = \lambda u^*$

Théorème :

Soit E un espace euclidien. Soit B une BON de E . Soit $u \in \mathcal{L}(E)$

On note $A = \text{Mat}_B(u)$

Alors $\text{Mat}_B(u^*) = A^T$

Théorème :

Soit E un espace euclidien, $u \in \mathcal{L}(E)$, F un sev de E .

Si F est stable par u alors F^\perp est stable par u^*

Définition :

Soit E un espace euclidien et $f \in \mathcal{L}(E)$. On dit que f est une isométrie si

$$\forall x \in E, \|f(x)\| = \|x\|$$

Théorème : Caractérisation

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ avec E euclidien muni d'une base \mathcal{B} orthonormée, f est une isométrie si, et seulement si, elle vérifie l'une des propriétés suivantes :

1.

$$\forall x \in E, \|f(x)\| = \|x\|$$

2.

$$\forall x, y \in E, \langle f(x), f(y) \rangle = \langle x, y \rangle$$

3. $f(\mathcal{B})$ est une base orthonormée.

4. $f \in \mathcal{GL}(E)$ et $f^* = f^{-1}$

Théorème :

Soit E un espace euclidien, u une isométrie. Alors :

$$(\det u) \in \{-1, 1\}$$

On dit que u est une isométrie directe si $\det(u) = 1$, indirecte sinon.

Définition :

On dit qu'une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est orthogonale si elle vérifie l'une des propriétés équivalentes suivantes :

1.

$$M^T M = I$$

2.

$$M M^T = I$$

3. $M \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ et $M^T = M^{-1}$

4. Les vecteurs colonnes de M forment une base orthonormale pour le produit scalaire canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$

5. Les vecteurs lignes de M forment une base orthonormale pour le produit scalaire canonique de $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$

Théorème :

La matrice de passage entre deux BON est une matrice orthogonale.

Le déterminant d'une matrice orthogonale est égal à 1 ou -1 .

On a ces équivalences pour $u \in \mathcal{L}(E)$:

- u est une isométrie
- la matrice associée à u dans une BON est orthogonale
- il existe une BON dans laquelle la matrice associée à u est orthogonale

Théorème :

Soit E un espace euclidien et $u \in \mathcal{O}(E)$ alors il existe une base orthonormale \mathcal{B} telle que $Mat_{\mathcal{B}}(u)$ est diagonale par bloc et chaque bloc est de la forme :

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ R_\theta \end{bmatrix}$$

pour $\theta \in \mathbb{R}$

ie chaque bloc est soit I , soit $-I$, soit une rotation.

Théorème :

Soit E un espace euclidien de dimension n , soit \mathcal{B} une base orthonormale de E , soit $u \in \mathcal{L}(E)$ u est auto-adjoint si $Mat_{\mathcal{B}}(u) \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$

Théorème : Théorème spectral

Tout endomorphisme auto-adjoint d'un espace euclidien est diagonalisable dans une BON.

Théorème : Théorème spectral matriciel

Toute matrice symétrique réelle est orthogonalement semblable à une matrice diagonale.

Théorème :

Soit E un espace euclidien et φ une fbs sur E . Il existe un unique endomorphisme auto-adjoint u tel que :

$$\forall x, y \in E, \varphi(x, y) = \langle x, u(y) \rangle$$

Définition :

Soit $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

On dit que :

- S est positive si $(X, Y) \mapsto X^T S Y$ est une forme bilinéaire symétrique positive sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On note l'ensemble de ces matrices $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.
- u est défini positif si $(X, Y) \mapsto X^T S Y$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On note l'ensemble de ces endomorphismes $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

Théorème :

Soit E un espace euclidien et $u \in \mathcal{S}(E)$ alors :

- u est positif si, et seulement si, $S_p(u) \subset \mathbb{R}_+$
- u est défini positif si, et seulement si, $S_p(u) \subset \mathbb{R}_+^*$

IV.5 Classification des matrices orthogonales du plan

$(\mathcal{O}_2(\mathbb{R}))$ l'ensemble des matrices orthogonales de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$)

$$\mathcal{O}_2(\mathbb{R}) = \{R_\theta | \theta \in \mathbb{R}\} \cup \{S_\theta | \theta \in \mathbb{R}\}$$

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

$$S_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}$$

$\mathcal{SO}_2(\mathbb{R}) = \mathcal{O}_2^+(\mathbb{R}) = \{R_\theta | \theta \in \mathbb{R}\}$ (ensemble des rotations d'angle θ , ensemble des matrices de $\mathcal{O}_2(\mathbb{R})$ de déterminant 1)

$$\mathcal{O}_2^-(\mathbb{R}) = \{S_\theta | \theta \in \mathbb{R}\} \text{ (ensemble des matrices de } \mathcal{O}_2(\mathbb{R}) \text{ de déterminant } -1)$$

Théorème :

$\forall(\theta, \varphi) \in \mathbb{R}^2 :$

$$R_\theta R_\varphi = R_{\theta+\varphi}$$

$$R_\theta^{-1} = R_{-\theta} = R_\theta^T$$

— $\mathcal{SO}_2(\mathbb{R})$ est un groupe commutatif, en particulier :

$$\forall \theta, \varphi \in \mathbb{R}, R_\theta R_\varphi R_\theta^{-1} = R_\varphi$$

Dans ce cas, R_θ est la matrice de passage d'une BOND dans une BOND.

Preuve

Se prouvent par du calcul matriciel, et un peu de trigonométrie.

S_θ est une symétrie orthogonale par rapport à une droite

$$S_\theta \times \begin{pmatrix} \cos(\frac{\theta}{2}) \\ \sin(\frac{\theta}{2}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\frac{\theta}{2}) \\ \sin(\frac{\theta}{2}) \end{pmatrix}$$

$$S_\theta \times \begin{pmatrix} -\sin(\frac{\theta}{2}) \\ \cos(\frac{\theta}{2}) \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} -\sin(\frac{\theta}{2}) \\ \cos(\frac{\theta}{2}) \end{pmatrix}$$

Donc $S_p(S_\theta) = \{-1, 1\}$ Et $E_1(S_\theta)$ est orthogonal à $E_{-1}(S_\theta)$

IV.6 Classification des matrices orthogonales d'un espace euclidien orienté de dimension 3

Pour $u \in \mathcal{O}(E_3)$, on note $F = \ker(u - id)$

Si $\dim F = 3$: alors $u = id$, donc u est nécessairement dans $\mathcal{O}_+(E_3)$

Si $\dim F = 2$, alors $\dim F^\perp = 1$, l'endomorphisme induit par u sur F^\perp est égal à id_{F^\perp} ou $-id_{F^\perp}$

Si u_{F^\perp} était égal à id_{F^\perp} , alors u serait l'identité. Donc nécessairement, $u_{F^\perp} = -id_{F^\perp}$

Donc u est la symétrie orthogonale par rapport à F

Si $\dim F = 1$, alors $\dim F^\perp = 2$. Notons v l'endomorphisme induit par u sur F^\perp .

v est donc soit une symétrie orthogonale par rapport à une droite, soit une rotation du plan. Si v était une symétrie orthogonale, on aurait $\dim F = 2$, donc v est une rotation du plan F^\perp

Donc si on choisit w un vecteur qui oriente F et qu'on choisit u, v dans F^\perp tels que (u, v) soit une base orientée de F^\perp et que (w, u, v) soit une base directe de E_3 , on a alors que u est la rotation d'axe w orienté par w d'angle θ

Si $\dim F = 0$, alors ça veut dire que 1 n'est pas valeur propre, donc -1 est valeur propre. u est donc la composée d'une symétrie orthogonale et d'une rotation.

Exemple IV.1. Prenons $u \in \mathcal{L}(E_3)$ avec \mathcal{B} une BOND de E_3 telle que $Mat_{\mathcal{B}}(u) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$

On peut faire les produits scalaires des colonnes les unes avec les autres, et on obtiendra que les produits scalaires sont nuls. Donc $A \in \mathcal{O}_3(\mathbb{R})$, soit $u \in \mathcal{O}(E_3)$

Le calcul du déterminant de A donne 1, donc $u \in \mathcal{SO}(E_3)$, et $u \neq id$. Donc u est une rotation d'axe d'angle θ orientée par w .

w est solution de $(id - u)(w) = 0$. On échelonne le système, et on obtient que w est solution de

$$\begin{cases} x - y - 2z = 0 \\ 3y - 3z = 0 \\ -3y + 3z = 0 \end{cases}$$

Choisissons $w = 3e_1 + e_2 + e_3$, qu'on norme en $e'_1 = \frac{1}{\|w\|}w = \frac{1}{\sqrt{11}}w$

Pour le choix du deuxième élément de la base, on a juste besoin d'un élément de F^\perp , donc on peut choisir le vecteur normé qu'on veut. On prend $e'_2 = \frac{1}{\sqrt{10}}(e_1 - 3e_2)$

On n'a plus de choix pour le troisième élément de la base cependant. Pour déterminer un vecteur qui soit orthogonal aux deux précédents, on peut utiliser le produit vectoriel, et on a $e'_3 = \frac{1}{\sqrt{10}\sqrt{11}}(3e_1 + e_2 - 10e_3)$

On note $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$

On a alors $Mat_{\mathcal{B}'}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$

(La matrice de passage de \mathcal{B} dans \mathcal{B}' est la matrice d'une BOND dans une BOND, donc son inverse est égal à sa transposée.)

On a que $tr(A) = tr(A')$, donc $\frac{-2}{3} = 1 + 2 \cos \theta$.

D'où $\cos \theta = \frac{-5}{6}$

Et donc $\theta = \pm \arccos\left(\frac{-5}{6}\right)$

Pour déterminer le signe, on fait le produit mixte de $w, e'_2, r_{w,\theta}(e'_2)$, qui vaut $\|w\| \sin \theta$ dans la base \mathcal{B}' .

Dans la base \mathcal{B} d'origine, on a que leur produit mixte vaut $\begin{vmatrix} 3 & \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{-5}{3\sqrt{10}} \\ 1 & \frac{-3}{\sqrt{10}} & \frac{8}{3\sqrt{10}} \\ 1 & 0 & \frac{-5}{3\sqrt{10}} \end{vmatrix} > 0$

Donc $\sin \theta > 0$

Donc $\theta = + \arccos\left(\frac{-5}{6}\right)$

IV.7 Groupes et anneaux

Définition :

Un groupe est monogène s'il est engendré par un élément.

i.e. G est monogène si $\exists a \in G, G = \{a^n | n \in \mathbb{Z}\}$ ou $\{na | n \in \mathbb{Z}\}$

Définition :

G est cyclique si G est monogène fini.

Définition : Ordre

Soit G un groupe

Soit $a \in G$

On dit que a est d'ordre fini si $\langle a \rangle$ est de cardinal fini (cyclique).

On dit alors que l'ordre de a est $\text{card}\langle a \rangle$

Théorème :

Soit G un groupe fini et $a \in G$

$$\text{ordre}(a) = \text{card}\langle a \rangle = \min\{n \in \mathbb{N}^* | a^n = e\}$$

$$\forall p \in \mathbb{Z}, a^p = e \Leftrightarrow \text{ordre}(a) | p$$

Théorème : Théorème de Lagrange

Si G est fini et $a \in G$, alors l'ordre de a divise le cardinal de G .

Théorème :

- Un groupe monogène infini est isomorphe à \mathbb{Z}
- Un groupe monogène fini G est isomorphe à $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ (où $n = \text{card}(G)$)

On étudie ensuite $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

Définition : Lois de composition interne de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

On définit la loi additive par :

$$+ : \begin{cases} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} & \rightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \\ (\bar{x}, \bar{y}) & \mapsto \bar{x} + \bar{y} = \overline{x + y} \end{cases}$$

On définit la loi multiplicative par :

$$\times : \begin{cases} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} & \rightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \\ (\bar{x}, \bar{y}) & \mapsto \bar{x} \times \bar{y} = \overline{xy} \end{cases}$$

On n'a pas l'intégrité de cet anneau si n n'est pas premier.

Théorème :

Pour $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$

Soit $p \in \mathbb{Z}$

- \bar{p} est un générateur de $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$ si, et seulement si, $p \wedge n = 1$
- \bar{p} est un inversible de $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \times)$ si, et seulement si, $p \wedge n = 1$

Donc $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est un corps si, et seulement si, n est premier. On note \mathbb{F}_n ce corps.

Théorème : Euler-Fermat

Soit $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ et $a \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$

Alors :

$$a^{\varphi(n)} = \bar{1}$$

Théorème : Lemme chinois

Si $(n, p) \in (\mathbb{N} \setminus \{0, 1\})^2$ avec $n \wedge p = 1$,

Alors $\mathbb{Z}/np\mathbb{Z}$ est un anneau isomorphe à $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$

Définition : Indicatrice d'Euler

On note $\varphi(n) = \text{Card}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times = \text{Card}\{\in \llbracket 0, n \rrbracket, p \wedge n = 1\}$

On appelle φ l'indicatrice d'Euler. Elle sert à compter les inversibles de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Théorème :

Si $n \wedge p = 1$, alors $\varphi(np) = \varphi(n)\varphi(p)$

IV.8 Idéaux et anneaux**Définition : Anneau euclidien**

A est un anneau euclidien si :

- A est un anneau commutatif intègre ($AB = 0 \Rightarrow A = 0$ ou $B = 0$)
- A est muni d'une division euclidienne : il existe $\varphi \in \mathcal{F}(A \setminus \{0\}, \mathbb{N})$ telle que $\forall b \in A \setminus \{0\}, \forall a \in A, \exists q, r \in A, a = bq + r$ et ($r = 0$ ou $\varphi(r) < \varphi(b)$)

Définition : Divisibilité

Soit A un anneau euclidien (ou intègre). Soit $a, b \in A$.

On dit que b divise a (noté $b|a$) ou que a est un multiple de b si $\exists c \in A, a = bc$

Théorème : Association

Soit A un anneau euclidien

Soit $a, b \in A$, a divise b et b divise a si, et seulement si, il existe un inversible tel que $b = au$

Définition : Idéal

Soit A un anneau euclidien. Soit $I \subset A$.

On dit que I est un idéal si :

- I est un sous-groupe de $(A, +)$
- $\forall i \in I, \forall a \in A, ia \in I$

Définition : PGCD

Avec A un anneau euclidien, soit $a, b \in A$, on appelle $\text{pgcd}(a, b)$ un générateur de $aA + bA$

Dans \mathbb{Z} ou $\mathbb{K}[X]$, on choisit un générateur spécifique, noté $a \wedge b$, et on l'appelle le pgcd.

$$aA + bA = (a \wedge b)A$$

Théorème :

Avec J un ensemble quelconque, $(I_j)_{j \in J}$ une famille d'idéaux de A , alors $\bigcap_{j \in J} I_j$ est un idéal

Théorème :

Si I_1 et I_2 sont des idéaux, alors $I_1 + I_2$ est un idéal.

C'est le plus petit idéal contenant $I_1 \cup I_2$.

Théorème :

Si A est un anneau euclidien, alors tout idéal de A est principal.
Cela signifie que si I est un idéal de A , alors $\exists a \in A, I = aA$

Théorème : Bézout

$a, b \in A$ sont premiers entre eux si, et seulement si, $\exists(u, v) \in A^2, au + bv = 1$

Théorème : Bézout étendu

$$\forall a, b \in A, \forall x \in A : \exists u, v \in A, x = au + bv \Leftrightarrow (a \wedge b) | x$$

Théorème : Bézout généralisé

$(a_1, a_2, \dots, a_n) \in A^n$ sont premiers entre eux si, et seulement si, $\exists(u_1, \dots, u_n) \in A^n, 1 = a_1u_1 + a_2u_2 + \dots + a_nu_n$

Théorème :

Tout élément de \mathbb{Z} et de $\mathbb{K}[X]$ peut se décomposer en un produit unique d'éléments irréductibles (éléments qui, à un inversible près, ont un seul diviseur) et d'un inversible.

Définition : Espaces caractéristiques

Soit E un \mathbb{K} -ev de dimension finie, soit $f \in \mathcal{L}(E)$ telle que χ_f est scindé.

$$\chi_f = \prod_{i=1}^p (x - \lambda_i)^{\alpha_i} \text{ avec } S_p(f) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_p\} \text{ et } (\alpha_1, \dots, \alpha_p) \in \mathbb{N}^{*p}$$

Alors $E = \bigoplus_{1 \leq i \leq p} \ker((f - \lambda_i \text{id})^{\alpha_i})$ par lemme des noyaux.

Les sev de E , $F_i = \ker((f - \lambda_i)^{\alpha_i})$ sont appelés sous-espaces caractéristiques de f .

- les sous-espaces caractéristiques sont stables par f ;
- f est entièrement caractérisée par f_1, f_2, \dots, f_p les endomorphismes induits par f sur F_1, \dots, F_p ;
- $\forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, (f_i - \lambda_i \text{id})^{\alpha_i} = 0$, ou $f_i - \lambda_i \text{id}$ est nilpotent, donc f_i a pour unique valeur propre λ_i ;
- les f_i sont trigonalisables (leur polynôme caractéristique est scindé) ;
- dans une base $\mathcal{B} = (\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_p)$ où $\forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, \mathcal{B}_i$ est une base de diagonalisation de f_i , alors $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ est diagonale par blocs, chaque bloc étant triangulaire de taille $\alpha_i \times \alpha_i$;
- pour $i \in \llbracket 1, p \rrbracket, \dim F_i = \alpha_i$.

Théorème : Lemme des noyaux

Soit E un \mathbb{K} -ev, $f \in \mathcal{L}(E)$.

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P = P_1 \dots P_n$ où P_1, \dots, P_n sont premiers entre eux deux à deux.

$$\ker P(f) = \bigoplus_{i=1}^n \ker(P_i(f))$$

Chapitre III

Physique - sup

I L'électrocinétique

Théorème : Loi des noeuds

La somme des courants entrants dans un noeud est égale à la somme des courants sortants.

Théorème : Loi des mailles

La somme des tensions dans une maille est nulle.

Théorème : Pont diviseur de tension

Si la tension entre deux dipôles d'impédance Z_1 et Z_2 vaut U_e et qu'on cherche la tension U aux bornes de Z_1 , alors :

$$U = \frac{Z_1 U_e}{Z_1 + Z_2}$$

Théorème : Pont diviseur de courant

Avec deux dipôles en parallèle, Z_1 dans lequel passe le courant i_1 et Z_2 dans lequel passe le courant i_2 , avec i le courant qui arrive dans le noeud qui se sépare dans les branches des deux :

$$i_1 = \frac{R_2 i}{R_1 + R_2}$$

Définition : La résistance

Un dipôle, qui en convention récepteur a une tension de :

$$U = Ri$$

Avec R sa résistance en ohms Ω .

Son impédance complexe est R .

Son admittance complexe est $\frac{1}{R}$.

Définition : Le condensateur

Un dipôle constitué de deux barres de métal avec un isolant entre les deux, tel que, en convention récepteur :

$$i = C \frac{du}{dt}$$

C est la capacité du condensateur, en farads F. ($= A.s.V^{-1} = m^{-2}kg^{-1}s^4A^2$)

Il y a continuité de la tension dans un condensateur.

Sur chaque barre du condensateur, on peut mettre une charge q . Une barre est chargée positivement, l'autre l'est négativement.

La charge respecte la relation :

$$q = Cu$$

Son impédance complexe est $\frac{1}{jC\omega} = -\frac{j}{C\omega}$

Son admittance complexe est $jC\omega$

En basse fréquence, un condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert.

En haute fréquence, un condensateur se comporte comme un fil.

Définition : Le solénoïde

Un dipôle constitué de fils de métal enroulés, tel que, en convention récepteur :

$$U = L \frac{di}{dt}$$

L est son inductance en Henry H. ($V.s.A^{-1}$)

Il y a continuité du courant au travers d'un solénoïde.

Son impédance complexe est $jL\omega$

Son admittance complexe est $\frac{1}{jL\omega} = -\frac{j}{L\omega}$

En basse fréquence, un solénoïde se comporte comme un fil.

En haute fréquence, un solénoïde se comporte comme un interrupteur ouvert.

II Mécanique du point

Dans tout ce chapitre, on se place dans un référentiel galiléen \mathcal{R} et on considère un point M de masse m , repéré par un vecteur $\overrightarrow{OM}(t)$, qui subit des forces (\vec{F}_i)

Théorème : RFD

Pour un point de masse m repéré par un vecteur $\overrightarrow{OM}(t)$ en fonction du temps, subissant des forces \vec{F}_i :

$$m \frac{d^2 \overrightarrow{OM}(t)}{dt^2} = \sum \vec{F}_i$$

On note $\vec{p} = m \frac{d\overrightarrow{OM}(t)}{dt} = m\vec{v}(t)$ la quantité de mouvement du point, en

On note $E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{p^2}{2m}$ l'énergie cinétique d'un point, en joules J .

Définition : Grandeurs relatives à une force

Une force est représentée par un vecteur, qui a une norme en Newton, ou en $kg.m.s^{-2}$.

On définit la puissance d'une force \vec{F} s'appliquant sur un point qui va à la vitesse \vec{v} comme :

$$\mathcal{P} = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

La puissance est en watts $W = J.s^{-1} = kgm^2s^{-3}$

On définit le travail d'une force \vec{F} de puissance \mathcal{P} comme :

$$W = \int_0^\tau \mathcal{P}(t)dt$$

Le travail est une énergie, qui s'exprime en joules J

Si le travail entre deux points A et B peut s'exprimer sous la forme de $E_p(A) - E_p(B)$, alors on dit que la fonction E_p représente l'énergie potentielle de la force. On dit aussi que la force est conservative. Il est à noter que E_p est définie à une constante additive près.

Si le travail est positif, on le dit moteur. Sinon, on le dit résistant. S'il est nul, la force ne travaille pas (elle est orthogonale à la trajectoire)

Théorème : Théorème de la puissance mécanique TPM

En tout instant :

$$\frac{dM(t)}{dt} = \sum \mathcal{P}_i$$

Théorème : Théorème de l'énergie cinétique TEC

En intégrant la relation précédente, on a :

$$\Delta E_c = \sum W_i$$

Théorème : Conservation de l'énergie mécanique TEM

Si toutes les forces s'appliquant à M sont conservatives, on peut écrire :

$$E_c + \sum E_{p,i} = cste$$

Même si elle n'est pas constante, on note $E_m = E_c + \sum E_{p,i} = E_c + E_{ptot}$ l'énergie mécanique du point.

Les extréma de E_{ptot} sont appelés des points d'équilibres. Les maxima sont des points instables (un changement d'énergie potentielle va leur faire descendre une pente), et les minima sont des points stables.

On les identifie en regardant les points critiques de E_{ptot} puis en calculant sa dérivée seconde (si elle est positive, c'est un minimum, si elle est négative c'est un maximum)

Théorème : Modélisation des forces usuelles

Tension ressort : sa masse est négligeable et on a, avec \vec{e}_r la direction du ressort, l sa longueur, k son coefficient de raideur et l_0 sa longueur au repos : $\vec{T} = -k(l - l_0)\vec{e}_r$

Energie potentielle tension ressort : $E_{pe} = \frac{1}{2}k(l - l_0)^2 + cste$

Pression : La pression exercée par un fluide sur un plan S solide est $\vec{F} = PS\vec{n}$ avec \vec{n} normal à la surface, dirigé du fluide vers le solide et P pression du fluide. Si un solide est totalement immergé, la force est la poussée d'Archimède, égale à l'opposée du poids du fluide déplacé.

Frottement fluide : Quand un objet est en mouvement dans un fluide, on a la force de frottement : $\vec{F}_f = -h\vec{v}(M)$ ou $\vec{F}_f = -h\vec{v}(M)^2$, avec h une constante.

Gravitation : La gravité entre deux points A et B est : $\vec{F}_{g_{A \rightarrow B}} = -G \frac{m_A m_B}{AB^2} \vec{e}_{A \rightarrow B}$ avec $G = 6.674.10^{-11} m^3.kg^{-1}.s^{-2}$ constante de gravitation universelle.

Energie potentielle gravitation : $E_{pg} = -G \frac{Mm}{r} + cste$

Force électrique : La force électrique entre deux points A et B est : $\vec{F}_{el_{A \rightarrow B}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_A q_B}{AB^2} \vec{e}_{A \rightarrow B}$ avec $\epsilon_0 = 8.854.10^{-12} F.m^{-1}$ la permittivité du vide.

Force de Lorentz : La force induite sur une particule de charge q par un champ électrique \vec{E} et un champ magnétique \vec{B} est : $\vec{F}_L = q\vec{E} + q\vec{v} \wedge \vec{B}$

Poids : Sur Terre, on a $\vec{P} = m\vec{g}$ où $g = 9.81 m.s^{-2}$ est la norme du vecteur \vec{g}

Energie potentielle du poids : $E_{pp} = mgz + cste$ si z est la position verticale.

III Mécanique du solide

On se place toujours dans un référentiel galiléen \mathcal{R} , mais désormais dans le cas d'un solide S indéformable, en rotation autour d'un axe Δ , sur lequel s'appliquent les forces (\vec{F}_i)

Définition : Moment cinétique

Pour un point M , le moment cinétique par rapport à un point O est le vecteur :

$$\vec{L}_O(M) = m\vec{OM} \wedge \vec{v}(M)$$

Pour un point M , le moment cinétique par rapport à l'axe Δ contenant le point O , orienté par \vec{e}_Δ est :

$$L_\Delta(M) = \vec{L}_O(M) \cdot \vec{e}_\Delta = m[\vec{OM} \wedge \vec{v}(M)] \cdot \vec{e}_\Delta$$

C'est donc le projeté du moment cinétique de M par rapport à O sur l'axe Δ

On peut définir à partir de ça le moment cinétique d'un système par rapport à un point ou un axe, ça sera la résultante des moments de tous les points du système.

Définition : Moment d'une force

Pour une force \vec{F} , son moment vectoriel par rapport au point O est le vecteur :

$$\overrightarrow{\mathcal{M}}_O(\vec{F}) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}$$

On peut aussi définir son moment scalaire selon l'axe Δ passant par O et de vecteur unitaire \vec{e}_Δ :

$$\mathcal{M}_\Delta(\vec{F}) = \overrightarrow{\mathcal{M}}_O(\vec{F}) \cdot \vec{e}_\Delta = [\overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}] \cdot \vec{e}_\Delta$$

Théorème : Théorème du moment cinétique

On a :

$$\frac{dL_\Delta(M)}{dt} = \sum \mathcal{M}_\Delta(\vec{F}_i)$$

Ce qu'on peut écrire en vectoriel par :

$$\frac{dL_O(\vec{M})}{dt} = \sum \mathcal{M}_O(\vec{F}_i)$$

Définition : Rotation

Un solide S est en rotation autour d'un axe Δ si tous ses points ont une trajectoire circulaire centrée sur un point de Δ .

Donc tous les points du solide sont à une distance constante les uns des autres, on n'a besoin que d'un seul angle θ pour tous les repérer dans l'espace.

On définit $\omega = \dot{\theta}$ la vitesse angulaire du solide.

On définit $\dot{\omega} = \ddot{\theta}$ l'accélération angulaire du solide.

Comme S est en rotation, pour un point M de S on peut écrire :

$$v(\vec{M}) = r\omega\vec{e}_\theta$$

$$\Gamma(\vec{M}) = -r\omega^2\vec{e}_r + r\dot{\omega}\vec{e}_\theta$$

Définition : Moment d'inertie

Pour S un solide en rotation autour de Δ , on a toujours que :

$$L_\Delta(S) = J_\Delta\omega$$

Où J_Δ est une constante, appelée le moment d'inertie du solide.

Donc dans la formule du moment cinétique, on aura très simplement :

$$\frac{dL_\Delta(S)}{dt} = J_\Delta\dot{\omega}$$

L'énergie cinétique du solide peut aussi être calculée très facilement, et vaut :

$$E_c(S) = \frac{1}{2}J_\Delta\omega^2$$

Théorème : Exemples de moments d'inertie

Pour une tige de masse m de longueur L par rapport à un axe orthogonal : $J_{\Delta} = \frac{1}{3}mL^2$ si la tige touche l'axe en ses extrémités ; $J_{\Delta} = \frac{1}{12}mL^2$ si l'axe est au milieu de la tige.

Pour un cerceau de masse M et de rayon R par rapport à son axe de révolution : $J_{\Delta} = mR^2$.

Disque ou cylindre de masse m , de rayon R par rapport à son axe de révolution : $J_{\Delta} = \frac{1}{2}mR^2$.

Boule pleine de masse m , de rayon R par rapport à l'un de ses axes de révolution : $J_{\Delta} = \frac{2}{5}mR^2$.

Définition : Forces à considérer

On peut, dans un solide en rotation, avoir deux forces de résultante nulle (elles ont même norme) mais dont la somme des moments ne l'est pas. On l'appelle un couple de forces.

Il y a aussi, pour la rotation entre le solide et l'axe, un pivot qui peut être solide. Soit on néglige le frottement engendré par ce pivot et on dit qu'on a une liaison pivot parfaite, soit on la considère comme un couple de forces résistant.

Théorème : Théorème du moment cinétique

On a vu comment on devait écrire $\frac{dL_{\Delta}}{dt}$, ce qui quand on réinjecte dans le théorème du moment cinétique donne :

$$J_{\Delta} \frac{d\omega}{dt} = \sum \mathcal{M}_{\Delta}(vec F)$$

Définition : Grandeurs associées à une force

Dans ce système, on peut réécrire la puissance d'une force comme :

$$\mathcal{P} = \mathcal{M}_{\Delta} \omega$$

Et son travail comme :

$$W = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \mathcal{M}_{\Delta} d\theta$$

Théorème : Théorème de l'énergie cinétique

On peut donc réécrire le théorème de l'énergie cinétique :

$$\frac{1}{2} J_{\Delta} (\omega_f^2 - \omega_i^2) = \sum W^{i \rightarrow f}$$

IV Mouvement à force centrale

Une force est centrale lorsque son support passe par un point fixe du référentiel. Dans notre étude, elle sera colinéaire à $O\vec{M}$ (on choisit ce point fixe comme l'origine du repère sphérique)

Théorème : Conservation du moment cinétique

Pour M en mouvement à force centrale dans un référentiel galiléen, le moment cinétique de M en O est une constante.

Obligatoirement, ça veut dire que le mouvement de M se passe dans un plan contenant O et orthogonal à son moment. Si le moment devait être nul, alors le mouvement se ferait selon une droite.

Dans le plan du mouvement, on a que $r^2\dot{\theta}$ est une constante, qu'on appelle la constante des aires C . (On dit ça parce que l'aire balayée pendant un temps Δt est $S = \frac{|C|}{2}\Delta t$)

Chapitre IV

Thermo

Définition : Définitions générales

Un système est une portion de matière séparée du milieu extérieur. L'univers est le système union l'extérieur.

Un système est isolé (resp. fermé, ouvert) s'il n'échange ni matière (resp. ni matière, de la matière) ni énergie (resp. de l'énergie, de l'énergie) avec le milieu.

Une paroi est dite diatherme/diathermane (resp. calorifugée/athermane) si elle permet le transfert thermique (resp. si elle ne le permet pas)

Un équilibre thermodynamique (resp. thermique, mécanique) d'un système est lorsque les variables d'état sont constantes et qu'il n'y a pas d'échange avec le milieu extérieur (resp. égalité des températures intérieures et extérieures, égalité des pressions à l'intérieur et à l'extérieur sur la frontière)

La vitesse quadratique moyenne d'une particule de masse m est $u = \sqrt{\frac{3RT}{m}} = \sqrt{\frac{3k_B T}{m}}$

L'équation d'état d'un gaz parfait est $PV = nRT$, et on suppose en pratique que les gaz réels sont parfaits.

Une phase est une partie d'un système où les grandeurs intensives dépendent de l'espace

Une phase condensée (liquide ou solide) est une phase de volume constant

Un thermostat est un système fermé n'échangeant pas de travail mais capable d'échanger de la chaleur sans que sa température varie (sa capacité thermique est considérée infinie)

Définition : Transformations

Une transformation est infinitésimale quand les états d'équilibre initiaux et finaux sont infiniment proches

Une transformation quasi-statique est une suite de transformations infinitésimales

Une transformation est réversible si elle est quasi-statique et en équilibre thermodynamique permanent, donc que son sens peut être inversée. Toute transformation autre est irréversible.

Une transformation est monotherme (resp. isotherme) si la température extérieure est constante (resp. la température du système est constante)

Une transformation est monobare (resp. isobare) si la pression extérieure est constante (resp. la pression du système est constante)

Une transformation est isochore si le volume du système est constant

Une transformation est cyclique si les états initiaux et finaux sont confondus

Une transformation est adiabatique s'il n'y a pas de transfert thermique avec l'extérieur

Une transformation est isentropique si son entropie est constante, donc si elle est réversible adiabatique

Définition : Grandeurs

Une grandeur d'état est intensive (resp. extensive) si elle a une propriété locale en tout chaque point d'un système (resp. si elle constitue un stock dans le système)

La quantité de matière est n , d'unité la mole (mol), extensive

La pression est P , dont l'unité est le Pascal (Pa), intensive

Le volume est V , dont l'unité est le mètre cube (m^3), extensive

La température est T , dont l'unité est le Kelvin (K), intensive

La masse est m , dont l'unité est le kilogramme (kg), extensive

La concentration est c , dont l'unité est la mole par litre ($mol.L^{-1}$), intensive

L'énergie interne d'un système est U , correspond aux mouvements de translation aléatoires des molécules et est donc fonction de la température, d'unité le joule (J), extensive

Définition : Constantes

k_B est la constante de Boltzmann, $k_B = 1,381.10^{-23} J.K^{-1}$

$n_A = 6,022.10^{23} mol^{-1}$ est la constante d'Avogadro, le nombre d'atomes dans une mole

$R = 8,314 J.K^{-1}.mol^{-1}$ est la constante des gaz parfaits, $R = k_B n_A$

Théorème : Premier Principe

Pour tout système fermé, il existe une fonction extensive E appelée énergie qui ne peut être qu'échangée (Lavoisier), sous forme de travail W ou de transfert thermique Q .

Donc pour une transformation entre deux états : $\Delta E = Q + W$

Donc pour une transformation infinitésimale : $dE = \delta W + \delta Q$

Théorème : Capacité thermique du gaz parfait

Dans un volume constant, on a que $\Delta U = C_V \Delta T$

C_V est la capacité thermique à volume constant du gaz en joules par Kelvin

$C_{Vm} = C_V/n$ est la capacité molaire du gaz en joules par Kelvin par moles

$c_v = C_V/m$ est la capacité thermique massique en joules par Kelvin par kilogrammes

On n'a pas de modélisation pour les variations du volume

Théorème : Capacité thermique de la phase condensée

On a pour une phase condensée que $\Delta U = C_V \Delta T$

C_V est la capacité thermique de la phase

Théorème : Travail

Le travail reçu par un système par la pression pendant une transformation est $W = P_{ext}(V_I - V_F) = - \int_{V_I}^{V_F} P_{ext} dV$

Théorème : Transfert thermique

Le transfert thermique ou la chaleur correspond à l'énergie échangée par l'interaction des particules du système avec celles du milieu extérieur au niveau microscopique.

Il y a trois types de transferts : la conduction qui est de proche en proche, la convection qui vient avec un mouvement de fluide, le rayonnement qui se fait par une onde électromagnétique.

Définition : Enthalpie

Une fonction d'état extensive définie par $H = U + PV$ donc d'unité le joule.

Dans une transformation monobare avec une pression intérieure sans variation entre l'état final et initial ou dans une transformation isobare réversible, on a : $\Delta H = Q + W'$ (où W' est le travail de toutes les forces sauf des forces de pression)

L'enthalpie d'un gaz parfait est définie par la relation $\Delta H = C_P \Delta T$, avec C_P la capacité thermique à pression constante de unité le joule par Kelvin.

On note $\gamma = \frac{C_P}{C_V}$ le rapport des capacités thermiques, on a aussi que $C_P - C_V = nR$

Dans une transformation adiabatique réversible d'un gaz parfait, on a que $PV^\gamma = cste$

En conséquences, $TV^{\gamma-1} = cste$ et $T^\gamma P^{1-\gamma} = cste$

Pour une phase condensée, on a que $PV \ll U \Rightarrow H \simeq U$, donc $C_P \simeq C_V$ et la même équation.

Définition : Enthalpie massique de transition de phase

L'enthalpie massique de transition de phase à la température T est définie comme la différence des enthalpies massiques d'un corps pur entre la phase 2 et la phase 1, à la même température T de changement d'état et à la pression d'équilibre $P_{sat}(T)$

On a donc $\Delta_{1 \rightarrow 2} h(t) = h_2(t) - h_1(t)$

Théorème : Second Principe

Pour tout système thermodynamique fermé, il existe une fonction d'état S extensive appelée l'entropie, qui ne peut qu'augmenter.

On écrit alors : $\Delta S = S_f - S_i = S_e - S_c$ où S_e est l'entropie d'échange reçue depuis l'extérieur et S_c l'entropie de création interne au système.

Dans une transformation monotherme, on a $S_e = \frac{Q}{T_0}$. L'entropie d'échange est positive si le système reçoit de la chaleur, et négative s'il en cède. On a nécessairement $S_c \leq 0$, avec $S_c = 0$ indiquant une transformation réversible.

Un système isolé n'a pas d'échanges, $\Delta S = S_c$ et donc ne peut que croître jusqu'à un équilibre.

Théorème : Variation d'entropie d'un gaz parfait

Pour un gaz parfait on a que $S = \frac{nR}{\gamma-1} \ln(T) + nR \ln V + cste = \frac{nR\gamma}{\gamma-1} \ln T - nR \ln P + cste = \frac{nR}{\gamma-1} \ln P + \frac{nR\gamma}{\gamma-1} \ln V + cste$

Donc on exprime $\Delta S = nC_{Pm} \ln\left(\frac{T_f}{T_i}\right) - nR \ln\left(\frac{P_f}{P_i}\right) = nC_{Vm} \ln\left(\frac{T_f}{T_i}\right) + nR \ln\left(\frac{V_f}{V_i}\right)$

Pour une phase condensée incompressible, on a que $\Delta S = C \ln\left(\frac{T_f}{T_i}\right)$

Définition : Généralités sur les machines thermiques

Une machine est un dispositif qui réalise une conversion de données.

Une machine thermique réalise une conversion continue d'énergie. Un fluide y subit une transformation cyclique, permettant la conversion d'énergie.

Une source thermique (resp. mécanique) est un système qui échange de la chaleur mais pas de travail et dont la température ne varie pas (resp. qui échange du travail en l'absence d'énergie thermique)

Un cycle est moteur (resp. récepteur) s'il fournit du travail à l'extérieur au total/si la courbe est parcourue en sens horaire (resp. s'il reçoit du travail à l'extérieur au total/si la courbe est parcourue en sens trigonométrique).

I Optique

Snell-Descartes $n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$ (réfraction) et $i'_1 = -i_1$ où i_1 l'angle d'incidence

Condition de réfraction limite : si $n_2 < n_1$, on note $i_{lim} = \arcsin\left(\frac{n_2}{n_1}\right)$ et $i_1 < i_{lim}$ donne réfraction. Sinon, réflexion totale. $n_1 < n_2$ et il y a toujours réfraction.

Grandissement : $\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}$

Formule Descartes : $\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{\overline{OF}}$

(et aussi $\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}$)

Formule Newton : $\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{FO}}{\overline{FA}} = \frac{\overline{F'A'}}{\overline{F'O}}$

(et aussi $\overline{FA} \cdot \overline{F'A'} = -\overline{OF}^2$)

Association de lentilles : $\frac{1}{f_{tot}} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2}$

II Cinétique

Définition : Généralités

Une espèce (physico-chimique) est une substance avec une formule chimique et un état (solide, liquide, gaz, soluté).

La composition d'un système est l'ensemble des quantités de matière des constituants du système.

Une espèce dissoute dans un solvant est un soluté, si le solvant est l'eau, l'espèce est aqueuse. Toutes les espèces dans l'eau sont dissoutes, sauf l'eau.

On associe à une espèce dissoute une concentration en $\text{mol.L}^{-1} = \frac{n}{V}$ où n est la quantité de matière de l'espèce et V le volume total. On définit la concentration en masse comme la concentration multipliée par la masse molaire de l'espèce.

Une espèce gazeuse se comporte comme un gaz parfait dans cette modélisation, on a donc : $PV = n_{\text{totgaz}}RT$

La pression partielle d'une espèce indicée i est donc $P_iV = n_iRT$. La fraction molaire d'un constituant dans un mélange est $\frac{n_i}{n_{\text{totgaz}}}$

Une transformation est totale (resp. limitée) si un réactif appelé limitant disparaît (resp. lorsque l'avancement total n'atteint pas sa valeur maximale).

L'état final d'une transformation est un état d'équilibre chimique : $x_f = x_{eq}$

Théorème : Evolution chimique

Le quotient de réaction est défini par $Q_r = \prod_i a(A_i)^{v_i}$, où $a(A_i)$ réfère à l'activité d'une espèce :

- L'activité d'un solide ou d'un liquide pur vaut toujours 1.
- L'activité d'un soluté est $a(A_i) = \frac{[A_i]}{c^0}$ avec $[A_i]$ concentration molaire et $c^0 = 1\text{mol.L}^{-1}$
- L'activité d'un gaz parfait est $a(A_i) = \frac{P_i}{P^0}$ où P_i pression partielle et $P^0 = 1\text{bar} = 10^5\text{Pa}$

Le quotient de réaction tend vers une constante d'équilibre $K^0(T)$ qui ne dépend que de la température. On a en déduit la loi d'action de masse : $K^0(T) = \prod_i a(A_i)_{eq}^{v_i}$.

On a que si $Q_r < K^0(T)$ (resp. $Q_r = K^0(T)$, $Q_r > K^0(T)$), le système évolue dans le sens direct de l'équation de réaction (resp. est à l'équilibre, évolue dans le sens indirect).

Définition : Vitesses dans une réaction

La vitesse de consommation d'un réactif (resp. de formation d'un produit) A_i est définie par :

$$v_{d,A_i} = -\frac{d[A_i]}{dt} \quad (\text{resp. } v_{f,A_i} = \frac{d[A_i]}{dt})$$

La vitesse de volumique de réaction de la réaction $\sum_i v_i A_i = 0$ est définie par : $v = \frac{1}{V} \frac{dx}{dt}$ avec x

l'avancement. Alors pour tout constituant, $v = \frac{1}{v_i V} \frac{dn_{A_i}}{dt}$

Si la réaction admet un ordre, la vitesse de réaction s'écrit sous la forme : $v = k \prod_i [A_i]^{\alpha_i}$; α_i est l'ordre partiel de la réaction par rapport à A_i , distinct de v_i ; k est la constante de vitesse de la réaction. $\sum_i \alpha_i$ est appelé ordre total de la réaction.

La constante k ne dépend que de la température. Loi empirique d'Arrhenius : $k = A \exp(-\frac{E_a}{RT})$ où A est une constante et E_a est l'énergie molaire d'activation de la réaction ($J.mol^{-1}$)

Méthode : Calculs d'ordre

On a ces avancements pour l'espèce A selon l'ordre de sa réaction :

- En ordre 0 : $-\frac{1}{|v_A|} \frac{d[A]}{dt} = k \Rightarrow [A] = [A]_0 - |v_A|kt$
- En ordre 1 : $-\frac{1}{|v_A|} \frac{d[A]}{dt} = k[A] \Rightarrow \ln([A]) = \ln([A]_0) - |v_A|kt$
- En ordre 2 : $-\frac{1}{|v_A|} \frac{d[A]}{dt} = k[A]^2 \Rightarrow \frac{1}{[A]} - \frac{1}{[A]_0} = |v_A|kt$
- Avec les produits $|v_a|A + |v_b|B$, si on a des ordres partiels, alors $-\frac{1}{|v_a|} \frac{d[A]}{dt} = k[A]^\alpha[B]^\beta$ qui peut parfois se simplifier.

Méthode : Temps de demi-réaction

Le temps de demi-réaction est le temps au bout duquel la moitié de l'avancement final est atteint. Avec une réaction totale d'équation $|v_A|A = \text{produits}$, on a :

- En ordre 0 : $t_{1/2} = \frac{[A]_0}{2|v_A|k}$
- En ordre 1 : $t_{1/2} = \frac{\ln(2)}{|v_A|k}$
- En ordre 2 : $t_{1/2} = \frac{1}{|v_A|k[A]_0}$

Théorème : Beer-Lambert

La loi de Beer-Lambert est que $A = \varepsilon_{\lambda,T} l c$ avec $\varepsilon_{\lambda,T}$ le coefficient d'absorption molaire à la température T et à la longueur d'onde λ , l la longueur de la cuve du spectrophotomètre et c la concentration molaire de l'espèce qui absorbe.

La conductivité d'une solution s'écrit $\sigma = \sum_{i, \text{ions}} \lambda_i c_i$ où λ_i est la conductivité molaire de l'ion i ($S.m^2.mol^{-1}$) et c_i la concentration molaire de l'ion.

On note $G = k_{cell} \sigma$ où k_{cell} la constante de cellule de la sonde du conductimètre.

III Molécules et ions

Méthode : Déterminer un schéma de Lewis

La position dans le tableau périodique permet de déterminer le nombre d'électrons de valence : 1 pour la colonne 1, 2 pour la 2, 3 pour la 13, 4 pour la 14, 5 pour la 15, 6 pour la 16, 7 pour la 17 et 8 pour la 18 (sauf l'hélium, qui a 2)

une fois déterminé, on en déduit le nombre P_v de paires de valence : $N_v = \sum_i n_i$ et on en déduit $P_v = \frac{N_v}{2}$.

On décide d'un atome central, on répartit ensuite les doublets liants pour respecter la règle de l'octet (et plus rarement celle du duet).

Pour calculer la charge formelle d'un atome dans l'édifice, on détermine son nombre d'électrons de valence n_v , puis on détermine son nombre d'électrons de valence dans la molécule noté $n_{v,m}$ (on compte 2 pour tout doublet non-liant, 1 pour tout doublet liant, un par électron célibataire). On en déduit alors la charge formelle $c_f = n_v - n_{v,m}$

Méthode : Déterminer la configuration électronique

1. Déterminer le nombre total d'électrons de l'atome
2. S'il y a assez d'électrons pour remplir une sous-couche, on la note de la forme md^n , où n est le nombre d'électrons maximal de la couche, m un nombre (qui indique la couche) et d une lettre (qui indique la sous-couche), md représente une sous-couche.
3. S'il n'y a pas assez d'électrons pour remplir une sous-couche, on la note de la forme md^n , où n est le nombre d'électrons qui restaient après avoir distribué les autres dans les couches précédentes.

Les couches sont, dans l'ordre :

- 1s qui peut contenir 2 électrons
- 2s qui peut contenir 2 électrons
- 2p qui peut contenir 6 électrons
- 3s qui peut contenir 2 électrons
- 3p qui peut contenir 6 électrons
- 3d qui peut contenir 10 électrons
- 4s qui peut contenir 2 électrons
- 4p qui peut contenir 6 électrons
- 4s qui peut contenir 10 électrons
- 4f qui peut contenir 14 électrons

IV Solides cristallins

Définition : Grandeurs

Coordinnence : nombre de plus proches voisins d'un atome, à l'intérieur et à l'extérieur de la maille

Population : nombre d'entités présentes dans la maille, sans compter les bouts de l'entité dans une maille voisine. Noeuds par maille quoi.

Tangence : relation qui relie a le rayon de la maille cubique et r le rayon de l'atome (exemple : $a = 2r$ pour cubique simple)

Compacité \mathcal{C} : rapport du volume occupé par les atomes de la maille sur le volume de la maille (compacité de 1 : tout l'espace serait occupé)

Rayon de Van der Waals : distances entre deux molécule plus proches voisines

Rayon métallique : demi-distance entre les noyaux de deux atomes plus proches voisins

Rayon covalent : demi-distance entre les noyaux de deux atomes liés par liaison covalente

Rayon ionique : distance entre anion et cation voisin (somme de leurs rayons ioniques)

Définition : Types de cristaux

Types de cristaux :

- Les cristaux métalliques : ce sont des cations, dedans, les électrons de valence sont répartis dans tout le cristal. Les liaisons sont dites "métalliques" (donc fortes, il faut $100 - 600 \text{ kJ.mol}^{-1}$ pour en casser). Les liaisons ne sont pas directionnelles, vu que les électrons se baladent dans tout le cristal, sans se préoccuper des noyaux. Le métal est libertaire ???
- Les cristaux covalents : toutes les liaisons sont covalentes, donc elles relient un électron d'un atome à un électron de l'autre (liaisons fortes, il faut $\sim 100 \text{ kJ.mol}^{-1}$ pour en casser). Les angles entre liaisons sont régies par règles de Lewis, et donc les liaisons sont directionnelles.
- Les cristaux moléculaire : les liaisons entre les molécules sont des liaisons hydrogènes (donc plus faibles, il faut 10 kJ.mol^{-1} pour en casser). Les liaisons sont directionnelles.
- Les solides ioniques : ce qui compose les éléments de la maille, c'est pas des atomes mais des ions (genre le sel NaCl , ou Na^+, Cl^-). Dans ce cas, un des ions sera dans les lieux géométriques normaux de la maille, et l'autre ion sera dans les sites interstitiels. Encore une fois, liaisons fortes, il faut quelques centaines de kJ.mol^{-1} pour casser des liaisons. La liaison n'est pas directionnelle.

Définition : Types de mailles

- Cubique simple : un atome sur tous les sommets d'un cube
 - tangence : $a = 2r$;
 - population 1 ;
 - coordinence 6 ;
 - compacité $\frac{1 \times \frac{4}{3}\pi r^3}{a^3} = \frac{\pi}{6} \simeq 0,52$.
- Hexagonale complète : hors programme
- Cubique Face Centrée (CFC) : un atome sur tous les sommets du cube, et un atome sur toutes les faces du cube
 - tangence $\frac{a\sqrt{2}}{2} = 2r$ (ou $a\sqrt{2} = 4r$) ;
 - population 4 ;
 - coordinence 12 (pour un sommet, les 3 ppv dans une maille sont sur les faces. Le sommet est partagé dans huit cubes, et il faut calculer les ppv sur chaque maille et enlever les redondants pour obtenir 12)
 - Compacité : $\frac{4 \times \frac{4}{3}\pi r^3}{a^3} = \frac{\pi}{3\sqrt{2}} \simeq 0,74$ (qui est la compacité max possible, peu importe le sphere packing qu'on tenterait, même l'hexagonale complète fait pas mieux)

Théorème : Sites interstitiels (CFC)

Comme on peut le remarquer si on trace les cercles qui se touchent dans la maille CFC, il y a en fait des trous ; les sphères sur des sommets ne touchent que les sphères sur les faces, et pas les autres sphères sur les sommets.

Ces trous sont des sites interstitiels, intéressants parce qu'on peut insérer des atomes dedans... Ils sont en deux catégories.

Les sites interstitiels tétraédriques, au nombre de 8 par maille. Ils sont situés entre un sommet et les trois atomes les plus proches (ceux sur les faces). Le rayon maximum dans lequel on peut insérer un atome dans un site tétraédrique est $0,225r$ (avec r le rayon d'un atome sommet ou face)

Les sites octaédriques, au nombre de 4 par maille. Ils sont situés entre deux centres et deux sommets, qui sont étendus aux mailles les plus proches (ce qui donne bien un octaèdre). Le rayon maximum d'insertion est $0,414r$ (avec r le rayon d'un atome sommet ou face)

Les sites interstitiels permettent par exemple de faire des alliages, et faire un solide plus résistant. On parle d'insertion si l'atome est inséré dans un site interstitiel, de substitution si on enlève un atome de la maille pour le remplacer par un autre.

On pourrait faire la même avec la cubique simple.

Preuve

Pour l'habitabilité du site tétraédrique :

On représente la vue dans le plan diagonal d'un petit cube d'arête $\frac{a}{2}$ (on considère le cube constitué par un sommet et les trois faces les plus proches)

En notant r le rayon des sphères et r_t le rayon du site tétraédrique, on obtient la relation suivante :

$$a \frac{\sqrt{3}}{4} = r + r_t$$

(Schéma du plan qui coupe deux atomes de la maille qui se touchent, rectangle de taille $2r = \frac{a}{2}\sqrt{2}$ et $\frac{a}{2}$)

Sachant que $4r = a\sqrt{2}$, on obtient finalement :

$$r_t = \left(\sqrt{\frac{3}{2}} - 1 \right) r \simeq 0,225r$$

Preuve

Pour l'habitabilité du site octaédrique :

On représente la vue dans le plan médian d'un cube d'arête a (on considère la maille classique et le site octaédrique au milieu de lui)

En notant r le rayon des sphères et r_o le rayon du site tétraédrique, on obtient la relation suivante :

$$2r + 2r_o = a$$

(Schéma du plan médian qui coupe quatre atomes de la maille qui se touchent, carré de côté a , les centres des cercles au milieu des côtés)

Sachant que $4r = a\sqrt{2}$, on obtient finalement :

$$r_o = (\sqrt{2} - 1) r \simeq 0,414r$$

Méthode : Population d'une maille

Une entité peut appartenir à plusieurs mailles, pour déterminer combien d'entités d'un type appartiennent à une maille, on les compte en pondérant selon ces règles :

- $\frac{1}{8}$ pour une entité sur un sommet de la maille (participe à huit autres mailles)
- $\frac{1}{4}$ pour une entité sur une arête
- $\frac{1}{2}$ pour une entité sur une face
- 1 pour une entité complètement à l'intérieur

Méthode : Rayons des sphères à partir des paramètres de maille

Il faut déterminer la direction selon laquelle le contact entre sphère se fait, et en déduire la relation entre le rayon et le paramètre de maille a

Pour la maille CFC : On a des sphères dans tous les coins de la maille, et une sphère au milieu de la face. Les sphères se touchent toutes.

Le contact se fait sur la diagonale de la face, or la diagonale d'un carré de côté a est de longueur $a\sqrt{2}$, on en déduit $4r = a\sqrt{2}$

Méthode : Compacité d'une structure

Déterminer :

- N la population de la maille
- V le volume de la maille
- r le rayon des sphères

La compacité dans le modèle des sphères dures est $C = \frac{N(\frac{4}{3}\pi r^3)}{V}$

Méthode : Masse volumique d'une structure

Déterminer :

- N le nombre d'entités par maille
- V le volume de la maille

La masse volumique est $\rho = \frac{m_{\text{maille}}}{V_{\text{maille}}} = \frac{NM}{N_A V}$

V Oxydo-réduction

Définition :

Oxydant : peut capter électron

Réducteur : peut céder électron

Couple Ox/Red lié par la demi-équation électronique : $Ox + ne^- + xH^+ = Red + yH_2O$

Nombre d'oxydation NO : déficit ou gain en électrons d'un élément (pour un couple, le réducteur a le NO le plus bas).

Méthode : Déterminer le NO

Si monoatomique, égal à la charge de l'édifice.

Sinon, on fait un schéma de Lewis (en notant bien où les charges finales sont localisées). Ensuite, on compte le nombre n_e d'électrons autour de l'atome dont on veut le NO (en considérant que dans une liaison, l'atome le plus électronégatif attire les électrons). Le NO sera $Z - n_e$

Définition : Pile

Avec deux couples Ox/Red, on les met dans des béchers avec une électrode de métal dedans, on appelle ça des électrodes. On relie les béchers par un pont salin (ce qui permet la réaction d'oxydo-réduction, oxydation d'un élément et réduction de l'autre) et les lames de métal par un conducteur de courant.

L'électrode où se produit l'oxydation est l'anode (c'est là qu'un réactif reçoit des électrons, devient plus négatif et ion négatif = anion)

L'électrode où se produit la réduction est la cathode (c'est là qu'un réactif cède des électrons, devient plus positif et ion positif = cation)

La réduction cède des électrons : le courant va de la cathode vers l'anode.

On appelle δq la charge élémentaire débitée par une pile.

On a alors $\delta q = idt = zF d\xi$

$F = 96485 C \cdot mol^{-1}$ est la constante de Faraday

z est le nombre d'électrons dans l'équation d'oxydo-réduction (ils s'annulent des deux côtés)

Théorème : Nernst

$$E = E^0(Ox/Red) + \frac{RT}{nF} \ln \frac{a_{Ox} a_{H^+}^x}{a_{Red} a_{H_2O}^y}$$

E est le potentiel d'un couple Ox/Red particulier.

$E^0(Ox/Red)$ est une constante liée à un couple, le potentiel standard. Plus il est grand, plus on dit que son oxydant est fort, plus il est petit, plus on dit que le réducteur est fort. La réaction prépondérante est entre l'oxydant le plus fort et le réducteur le plus fort, et se déroule jusqu'à la consommation du réactif limitant ou jusqu'à l'état où les potentiels des deux couples sont égaux.

n est le nombre d'électrons impliqués.

On a $\frac{RT}{F} \ln(10) \simeq 0,06V$, ce qu'on utilise en pratique.

La constante d'équilibre d'une réaction d'oxydo-réduction est $K^0 = 10^{\frac{n(E^0(Ox1/Red1) - E^0(Ox2/Red2))}{0,06}}$, où Ox1 est réduit et Red2 est oxydé. n est le nombre d'électrons impliqués.

VI Acides et bases

Pour toute grandeur X de cette section, on peut ajouter p devant afin d'obtenir la grandeur $pX = -\log X$

Définition :

Acide : peut céder H^+ (proton)

Base : peut capter H^+

Couple acide/base HA/A^-

Ampholyte ou amphotère : base d'un couple et acide d'un autre.

Constante d'acidité : $K_a = \frac{[A^-][H_3O^+]}{[HA]c_0}$ (constante de basicité : $K_b = K_e/K_a$)

Un acide/une base est forte si sa réaction avec l'eau est totale (resp K_a haut, K_b haut)

Définition : Réaction

Soient HA_1/A_1^- et HA_2/A_2^- deux couples acide/base, le proton qui passe du premier couple à l'autre est $HA_1 + A_2^- = HA_2 + A_1^-$

La constante d'équilibre s'écrit $K = K_{a1}/K_{a2}$

Théorème : Autoprotolyse

La réaction $2H_2O = HO^- + H_3O^+$ est l'autoprotolyse de l'eau

Sa constante d'équilibre est $K_e = \frac{[H_3O^+][HO^-]}{(c_0)^2}$ (où $c_0 = 1mol.L^{-1}$)

On a $pH = -\log \frac{[H_3O^+]}{c_0}$

Dans une réaction avec un seul couple HA/A^- , on a $pH = pK_a + \log \frac{[A^-]}{[HA]}$

Méthode : Déterminer la réaction prépondérante

1. Déterminer les espèces dans le mélange après la réaction totale des acides et bases fortes avec l'eau
2. La réaction prépondérante est celle de l'acide le plus fort avec la base la plus faible (règle du Gamma)
3. écrire l'équation de la RP
4. Tableau d'avancement
5. Conclusion

VII Précipités

Définition :

Un précipité est un solide composé de deux ions. On le note C_xA_y , où C_x est le cation (positif) et A_y l'anion (négatif).

On parle de couple donneur/accepteur d'anion pour C_xA_y/C_x .

Une réaction de dissolution est $C_xA_y = xC^{y+} + yA^{x-}$

Une réaction de précipitation est $xC^{y+} + yA^{x-} = C_xA_y$

Comme pour les acides, un cation qui peut être dissous une nouvelle fois est appelé un amphotère.

Définition :

La constante de solubilité K_S est la constante d'équilibre thermodynamique de la réaction de dissolution, soit $K_S = \frac{[C^{y+}]^x [A^{x-}]^y}{c_0^{x+y}}$ à l'équilibre.

On peut aussi utiliser le quotient de réaction Q_r , en remplaçant K^0 par K_S
(Rappel : si $Q_r < K^0(T)$ (resp. $Q_r = K^0(T)$, $Q_r > K^0(T)$), le système évolue dans le sens direct de l'équation de réaction (resp. est à l'équilibre, évolue dans le sens indirect).)

On note $pC = -\log \frac{[C^{y+}]}{c_0}$ et $pA = -\log \frac{[A^{x-}]}{c_0}$

s la solubilité est la quantité maximale de matière qu'on peut dissoudre dans un litre de solution (on la calcule avec un tableau d'avancement et K_S)

Méthode : Utiliser la condition de précipitation

On calcule d'abord le quotient de réaction Q_r , puis on le compare à K_S . Si $Q_r > K_S$, la solution est saturée et le précipité est formé.

Méthode : Diagramme d'existence

On écrit l'équation de dissolution, la frontière du domaine d'existence du précipité est le point où le précipité apparaît. L'espèce soluble est alors de concentration initiale x_0

Chapitre V

Physique - spé

Chapitre VI

Proba

I Bases de la proba

Définition :

Une expérience aléatoire est une expérience renouvelable, et qui renouvelée dans des conditions identiques ne donne pas le même résultat à chaque renouvellement.

Définition :

On appelle univers l'ensemble des issues possibles d'une expérience aléatoire donnée. On le note en général Ω

Définition :

Soit Ω l'univers d'une expérience aléatoire

On appelle tribu sur Ω une partie de \mathcal{A} vérifiant les trois hypothèses suivantes :

1. $\Omega \in \mathcal{A}$
2. $\forall A \in \mathcal{A}, \bar{A} \in \mathcal{A}$ (stabilité par passage au complémentaire)
3. Pour toute suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de \mathcal{A} , $\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n \in \mathcal{A}$ (stabilité par réunion dénombrable)

Le couple (Ω, \mathcal{A}) est dit espace probabilisable.

\mathcal{A} est l'ensemble des événements (on rappelle qu'un événement est une partie de Ω)

Définition :

Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'événements.

- La suite (A_n) est dite croissante lorsque

$$\forall n \in \mathbb{N}, A_n \subset A_{n+1}$$

ie : pour tout $n \in \mathbb{N}$, la réalisation de A_n implique celle de A_{n+1}

- La suite (A_n) est dite décroissante lorsque

$$\forall n \in \mathbb{N}, A_{n+1} \subset A_n$$

ie : pour tout $n \in \mathbb{N}$, la réalisation de A_{n+1} implique celle de A_n

- La suite (A_n) est une suite d'événement deux à deux incompatibles (disjoints) lorsque :

$$\forall i, j \in \mathbb{N}, i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \emptyset$$

ie : il est impossible que deux événements d'indices différents de la suite soient réalisés simultanément

Définition :

On appelle probabilité sur l'espace probabilisable (Ω, \mathcal{A}) toute application P définie sur \mathcal{A} vérifiant :

1. $\forall A \in \mathcal{A}, P(A) \in [0, 1]$
2. $P(\Omega) = 1$
3. Pour toute famille dénombrable $(A_i)_{i \in I}$ d'événements deux-à-deux incompatibles :

$$P\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = \sum_{i \in I} P(A_i) \quad (\sigma\text{-additivité})$$

Théorème :

Soit (Ω, \mathcal{A}) un espace probabilisé, et soit A et B deux événements. On a :

- $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$
- $P(\emptyset) = 0$ (cas particulier du résultat précédent)
- $P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B)$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ (formule de Poincaré)
- P est croissante : Si $A \subset B$ alors $P(A) \leq P(B)$

Théorème :

Soit (Ω, \mathcal{A}, P) un espace probabilisé.

1. Pour toute suite croissante $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'événements de \mathcal{A} :

$$P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P(A_n) \quad (\text{Continuité croissante})$$

2. Pour toute suite décroissante $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'événements de \mathcal{A} :

$$P\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P(A_n) \quad (\text{Continuité décroissante})$$

3. Pour toute suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'événements de \mathcal{A} :

$$P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n)$$

II Dénombrement

Théorème :

On rappelle ces formules pour les coefficients binomiaux :

— Définition :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall p \in \llbracket 0, n \rrbracket, \binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

— Formule des compléments :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall p \in \llbracket 0, n \rrbracket, \binom{n}{n-p} = \binom{n}{p}$$

— Petite formule :

$$\forall (n, p) \in (\mathbb{N}^*)^2, p \binom{n}{p} = n \binom{n-1}{p-1}$$

— Formule de Pascal :

$$\forall (n, p) \in (\mathbb{N}^*)^2, \binom{n}{p} = \binom{n-1}{p} + \binom{n-1}{p-1}$$

Théorème :

On suppose qu'il existe $p \in \mathbb{R}_+^*$ tel que

$$\forall \omega \in \Omega, P(\{\omega\}) = p$$

Alors :

— Ω est un ensemble fini et

$$p = \frac{1}{\text{Card}(\Omega)}$$

— Pour tout événement A ,

$$P(A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)}$$

Une partie de cardinal $k \in \mathbb{N}$ de E est une k -combinaison. On peut voir une k -combinaison comme un prélèvement simultané de k éléments de E ; donc sans tenir compte ni d'ordre de tirage, ni de répétition.

Théorème : Nombre de parties

Soit E un ensemble à n éléments

1. Le nombre de k -combinaisons de E est

$$\binom{n}{k} = \frac{1}{k!} n(n-1)\dots(n-k+1) = \begin{cases} \frac{n!}{k!(n-k)!} & \text{si } k \leq n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

2. Le nombre de parties de E est

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$$

Compter des listes

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. L'ensemble des k -listes d'éléments de E est le produit cartésien E^k . On distingue deux cas particuliers de listes :

- Une k -liste sans répétition (ou k -arrangement) est un élément $(x_1, \dots, x_k) \in E^k$ où $x_i \neq x_j$ si $i \neq j$. On rencontre des k -listes sans répétition quand par exemple on modélise des tirages successifs sans remise.
- Une permutation de E est une n -liste sans répétition de l'ensemble E (de cardinal n)
On peut voir aussi une permutation de E comme une bijection de $\llbracket 1, n \rrbracket$ dans E ou une façon de réordonner les éléments de E .

Théorème : Nombre de listes

Soit E un ensemble à n éléments.

1. Soient E_1, \dots, E_k k ensembles de cardinaux respectifs $n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}^*$

$$\text{Card}(E_1 \times E_2 \times \dots \times E_k) = n_1 n_2 \dots n_k$$

2. Le nombre de k -listes sans répétitions d'éléments de E est $A_n^k = n(n-1)\dots(n-k+1)$
3. Le nombre de permutations d'éléments de E est $n!$

III Conditionnel

Définition :

Soit (Ω, \mathcal{A}, P) un espace probabilisé et A un événement.

On peut définir la probabilité conditionnelle de A sachant B notée $P(A/B)$ ou $P_B(A)$:

- Si B un événement de probabilité non-nulle :

$$P(A/B) = P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

- Si $P(B) = 0$

$$P_B(A) = 0$$

Définition :

Un système complet d'événements est une famille $(A_i)_{i \in I}$ au plus dénombrable d'événements tels que :

- les événements sont deux à deux incompatibles ($\forall i, j \in I, i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \emptyset$)
- leur union est l'univers tout entier ($\bigcup_{i \in I} A_i = \Omega$)

Définition :

Un système quasi-complet d'événements est une famille $(A_i)_{i \in I}$ au plus dénombrable d'événements tels que :

- les événements sont incompatibles deux à deux ($\forall i, j \in I, i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \emptyset$)
- leur union est presque sûre : $P(\bigcup_{i \in I} A_i) = 1$

Théorème : Formule des probabilités composées

Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une famille d'événements telle que pour tout entier n , $P\left(\bigcap_{i=1}^{n-1} A_i\right) \neq 0$. Alors, pour tout entier n :

$$P\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right) = P(A_1)P_{A_1}(A_2) \dots P_{A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1}}(A_n)$$

$$P\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P(A_1)P_{A_1}(A_2) \dots P_{A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}}(A_n)$$

Théorème :

Soit (Ω, \mathcal{A}, P) un espace probabilisé. Pour tout système complet d'événements $(A_i)_{i \in I}$, on a :

$$\sum_{i \in I} P(A_i) = 1$$

Théorème : Formule des probabilités totales

Soit (Ω, \mathcal{A}, P) un espace probabilisé. Soit $(A_i)_{i \in I}$ un système complet ou quasi-complet d'événements. Pour tout événement B :

$$P(B) = \sum_{i \in I} P(A_i \cap B) = \sum_{i \in I} P(A_i)P_{A_i}(B)$$

Théorème : Formule d'inversion de Bayes

Soit $(A_i)_{i \in I}$ un système complet ou quasi-complet d'événements d'un espace probabilisé (Ω, \mathcal{A}, P) . Soit B un événement de probabilité non-nulle, soit $i_0 \in I$.

Alors :

$$P_B(A_{i_0}) = \frac{P(B \cap A_{i_0})}{P(B)} = \frac{P(A_{i_0})P_{A_{i_0}}(B)}{\sum_{i \in I} P(A_i)P_{A_i}(B)}$$

IV Variables aléatoires discrètes

IV.1 Définitions

Définition :

Soit E un ensemble et (Ω, \mathcal{A}) un espace probabilisable.

Une application $X : \Omega \rightarrow E$ est une variable aléatoire discrète si :

- L'ensemble $X(\Omega)$ des valeurs prises par X est au plus dénombrable.
- Pour tout $x \in X(\Omega)$, l'ensemble $X^{-1}(\{x\})$, noté $(X = x)$ ou $[X = x]$, est un événement (un élément de \mathcal{A})

Lorsque $E = \mathbb{R}$, la variable X est dite réelle.

Définition :

Soit X une variable aléatoire discrète sur un espace probablisé, à valeurs dans un ensemble E

La loi P_X de X est la donnée de :

- l'ensemble des valeurs prises par X appelé univers image : $X(\Omega)$
- les probabilités élémentaires : $p_x = P(X = x)$ pour tout $x \in X(\Omega)$

Théorème :

Si X est une variable aléatoire discrète sur l'espace probablisable (Ω, \mathcal{A}) , alors la suite $((X = x))_{x \in X(\Omega)}$ est un système complet d'événements de Ω

Théorème :

Si X une variable aléatoire discrète à valeurs dans un ensemble E ,

- la famille $(P(X = x))_{x \in E}$ est sommable de somme 1 :

$$\sum_{x \in E} P(X = x) = 1$$

- par σ -additivité, pour toute partie U de $X(\Omega)$,

$$P(X \in U) = P\left(\bigcup_{x \in U} (X = x)\right) = \sum_{x \in U} P(X = x)$$

- $(X(\Omega), \mathcal{P}(X(\Omega)), P_X)$ est un espace probablisé.

Réciproquement, si $(p_x)_{x \in E}$ est une famille sommable de réels positifs de somme 1 alors il existe une variable aléatoire discrète X telle que pour tout $x \in E$, $P(X = x) = p_x$

Définition :

X et Y sont deux variables aléatoires discrètes indépendantes lorsque pour toutes parties A et B de $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$ respectivement :

$$P((X \in A) \cap (Y \in B)) = P(X \in A)P(Y \in B)$$

On note $X \perp\!\!\!\perp Y$

Théorème :

Deux variables aléatoires discrètes X et Y sont dites indépendantes si, et seulement si,

$$\forall (x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega), P((X = x) \cap (Y = y)) = P(X = x)P(Y = y)$$

ie : $\forall (x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$, les événements $(X = x)$ et $(Y = y)$ sont indépendants.

Théorème :

Les variables aléatoires discrètes X_1, X_2, \dots, X_n sont (mutuellement) indépendantes si, et seulement si, pour tout n -uplet (x_1, x_2, \dots, x_n) de $X_1(\Omega) \times X_2(\Omega) \times \dots \times X_n(\Omega)$:

$$P\left(\bigcap_{i=1}^n (X_i = x_i)\right) = \prod_{i=1}^n P(X_i = x_i)$$

Théorème : Lemme des coalitions

Soient X_1, X_2, \dots, X_n n variables aléatoires discrètes définies sur Ω à valeurs dans E .
 Soient f et g deux applications respectivement de E^m dans F et de E^{n-m} dans F .
 Si X_1, X_2, \dots, X_n sont (mutuellement) indépendantes alors $f(X_1, \dots, X_m)$ et $g(X_{m+1}, \dots, X_n)$ le sont aussi.
 Ce théorème s'étend à plus de deux coalitions.

IV.2 Lois usuelles**Définition :**

Une variable aléatoire discrète X suit une loi de Bernoulli de paramètre p si

$$X(\Omega) = \{0, 1\} \text{ et } P(X = 1) = p$$

On note $X \sim \mathcal{B}(p)$

Théorème :

Si $X \sim \mathcal{B}(p)$ alors

$$E(X) = p \text{ et } V(X) = pq$$

En particulier, le paramètre d'une loi de Bernoulli est son espérance.

Définition :

Une variable aléatoire discrète X suit une loi uniforme sur l'ensemble fini non-vide $K \subset \mathbb{R}$ si

$$X(\Omega) = K \text{ et } \forall k \in K, P(X = k) = \frac{1}{\text{Card}(K)}$$

On note $X \sim \mathcal{U}(K)$

Théorème :

Si $X \sim \mathcal{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$ alors

$$E(X) = \frac{n+1}{2} \text{ et } V(X) = \frac{n^2-1}{12}$$

Définition :

Une variable aléatoire discrète X suit une loi binomiale des paramètres n et p si $X(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket$ et

$$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, P(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

$X \sim \mathcal{B}(n, p)$

Théorème : Modèle loi binomiale

Si X est le nombre de succès lors de la répétition de n épreuves de Bernoulli indépendantes de même paramètre p alors X suit la loi $\mathcal{B}(n, p)$

Formellement :

On pose pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ X_k la variable aléatoire discrète qui vaut 1 si la k -ième épreuve est un succès et 0 sinon. Si :

- pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $X_k \sim \mathcal{B}(p)$
- X_1, X_2, \dots, X_n sont mutuellement indépendantes
- $X = X_1 + X_2 + \dots + X_n$

Alors

$$X \sim \mathcal{B}(n, p)$$

En outre

$$E(X) = np \text{ et } V(X) = npq$$

Définition :

On suppose que $p \in]0, 1[$

Une variable aléatoire discrète X suit une loi géométrique de paramètre p si $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, P(X = n) = pq^{n-1}$$

On note $X \sim \mathcal{G}(p)$

Théorème :

Si X suit une loi géométrique de paramètre p alors pour tout $k \in \mathbb{N}^*$

$$P(X > k) = (1 - p)^k$$

Théorème : Espérance et variance d'une loi géométrique

Si la variable aléatoire discrète X suit une loi $\mathcal{G}(p)$ alors X possède une espérance et une variance qui valent

$$E(X) = \frac{1}{p} \text{ et } V(X) = \frac{q}{p^2}$$

Preuve

Espérance : $p \sum_{i=0}^{+\infty} npq^{n-1} = \left(\frac{p}{1-q} \right)' = \frac{1}{p}$

Variance : $V(X) = E(X^2 - X) + E(X)(E(X))^2 = \frac{2(1-p)}{p^2} + \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} = \frac{1-p}{p^2} = \frac{q}{p^2}$

Théorème : Modèle loi géométrique

Si X est le rang du premier succès dans une suite illimitée d'épreuves de Bernoulli indépendantes de même paramètre p alors X suit la loi $\mathcal{G}(p)$

Formellement :

On pose pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ X_k la variable aléatoire discrète qui vaut 1 si la k -ième épreuve est un succès et 0 sinon.

Si :

- pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $X_k \sim \mathcal{B}(p)$
- la suite (X_n) est une suite de variables mutuellement indépendantes
- $X = \min\{n \in \mathbb{N}^*, X_n = 1\}$

Alors $X \sim \mathcal{G}(p)$

Définition : Loi de Poisson

Une variable aléatoire discrète X suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ si $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, P(X = n) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!}$$

On note $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$

Théorème : Espérance et variance d'une loi de Poisson

Si la variable aléatoire discrète X suit une loi $\mathcal{P}(\lambda)$ alors X possède une espérance et une variance et

$$E(X) = V(X) = \lambda$$

IV.3 Espérance**Définition :**

Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $[0, +\infty]$.

$$E(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} xP(X = x)$$

Avec la convention $xP(X = x) = 0$ lorsque $X = +\infty$ et $P(X = +\infty) = 0$

Théorème :

Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$. On a :

$$E(X) = \sum_{n \in \mathbb{N}} P(X \geq n)$$

Théorème : Transfert

Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs réelles ou complexes et $f : X(\Omega) \rightarrow \mathbb{C}$

La variable aléatoire réelle $f(X)$ est d'espérance finie si, et seulement si, la famille $(f(x)P(X = x))_{x \in X(\Omega)}$ est sommable.

Dans ce cas :

$$E(f(X)) = \sum_{x \in X(\Omega)} f(x)P(X = x)$$

Théorème : Propriétés de l'espérance

Soient X, Y deux variables aléatoires discrètes à valeurs réelles ou complexes et d'espérance finie.

- $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{C}, \lambda X + \mu Y$ est d'espérance finie et

$$E(\lambda X + \mu Y) = \lambda E(X) + \mu E(Y) \text{ (linéarité)}$$

On peut généraliser cette propriété avec n variables aléatoires réelles discrètes d'espérance finie, qu'elles soient indépendantes ou non.

Dans la suite, X et Y sont à valeurs réelles.

- Si $X \geq 0$ alors $E(X) \geq 0$ (Positivité)
- Si $X \geq 0$ et $E(X) = 0$ alors $(X = 0)$ est presque sûr (stricte positivité)
- Si $X \leq Y$ alors $E(X) \leq E(Y)$ (croissance)

Théorème : Espérance d'un produit de variables indépendantes

Soit X, Y deux variables aléatoires discrètes à valeurs réelles ou complexes.

Si on a :

- X et Y d'espérance finie
(X et Y admettent une espérance serait plus adapté)
- X et Y indépendantes

Alors XY est d'espérance finie et

$$E(XY) = E(X)E(Y)$$

Théorème : Espérance d'un produit de n variables indépendantes

Soit X_1, \dots, X_n des variables aléatoires discrètes à valeurs réelles ou complexes.

Si on a :

- X_1, \dots, X_n d'espérance finie
- X_1, \dots, X_n (mutuellement) indépendantes

Alors la variable $X_1 \dots X_n$ est d'espérance finie et

$$E\left(\prod_{i=1}^n X_i\right) = \prod_{i=1}^n E(X_i)$$

IV.4 Variance**Définition :**

X une variable aléatoire complexe, on dit que X admet un moment d'ordre k pour $k \in \mathbb{N}^*$ si $E(X^k)$ existe

Théorème :

Si X admet un moment d'ordre $k + 1$ alors X admet un moment d'ordre k .

Ce théorème permet de justifier l'existence d'une espérance dans le cas où une variance existe, et donc de justifier la prochaine définition.

Définition : Variance et écart-type

Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs réelles.

Si X^2 est d'espérance finie, on définit la variance de X par

$$V(X) = E((X - E(X))^2)$$

et son écart-type par

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

Théorème : Propriétés de la variance

Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs réelles.

On suppose que X^2 est d'espérance finie.

1. Köning-Huygens : formule pratique pour la variance :

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

2. Soient $a, b \in \mathbb{R}$

$$V(aX + b) = a^2 V(X)$$

En particulier, la variance est invariante par translation

3. $V(X)$ est nulle si, et seulement si, $P(X = E(X)) = 1$
ie : X est presque sûrement constante.

Définition :

Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs réelles telle que X^2 est d'espérance finie et telle que $\sigma(X) > 0$

La variable $\frac{X}{\sigma(X)}$ a un écart-type égal à 1. Elle est appelée réduite de X .

La variable $\frac{X - E(X)}{\sigma(X)}$ a une espérance nulle et un écart-type égal à 1. Elle est appelée variable centrée réduite associée à X .

Définition :

Si les variables aléatoires X^2 et Y^2 sont d'espérance finie alors on peut définir la covariance de X et Y par :

$$\text{cov}(X, Y) = E((X - E(X))(Y - E(Y)))$$

Théorème : Propriétés de la covariance

Si les variables aléatoires X^2 et Y^2 sont d'espérance finie alors :

—

$$\text{cov}(X, X) = V(X)$$

— Köning-Huygens : formule pratique pour la covariance :

$$\text{cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

— Si X et Y sont indépendantes alors :

$$\text{cov}(X, Y) = 0$$

— La covariance est une forme linéaire positive, symétrique et bilinéaire (c'est "presque" un produit scalaire)

Théorème : Variance d'une somme

Si les variables aléatoires X^2 et Y^2 sont d'espérance finie alors $(X + Y)^2$ aussi avec

$$V(X + Y) = V(X) + 2\text{cov}(X, Y) + V(Y)$$

Si de plus les variables X et Y sont indépendantes :

$$V(X + Y) = V(X) + V(Y)$$

Théorème : Variance d'une somme

Si X_1, \dots, X_n sont n variables telles que X_1^2, \dots, X_n^2 sont d'espérance finie alors $(X_1 + \dots + X_n)^2$ l'est aussi avec :

$$V\left(\sum_{k=1}^n X_k\right) = \sum_{k=1}^n V(X_k) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \text{cov}(X_i, X_j)$$

Si de plus les variables X_1, \dots, X_n sont indépendantes **deux à deux** alors :

$$V\left(\sum_{k=1}^n X_k\right) = \sum_{k=1}^n V(X_k)$$

IV.5 Fonctions génératrices

Définition :

On note R_X le rayon de convergence de la série entière $\sum P(X = n)t^n$

La fonction génératrice d'une variable aléatoire X à valeurs dans \mathbb{N} est définie pour tout $t \in]-R_X, R_X[$ par

$$G_X(t) = E(t^X) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X = n)t^n$$

Théorème :

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans \mathbb{N} .

1. La loi de X est entièrement caractérisée par la connaissance de sa fonction génératrice G_X
 ie : $G_X : t \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$ est la fonction génératrice de X si, et seulement si, $\forall n \in \mathbb{N}, P(X = n) = a_n$
2. $G_X(1) = 1$
3. X admet une espérance si, et seulement si, G_X est dérivable en 1, avec dans ce cas

$$E(x) = G'_X(1)$$

4. X admet une variance si, et seulement si, G_X est deux fois dérivable en 1, avec dans ce cas :

$$E(X(X-1)) = G''_X(1)$$

et donc

$$V(X) = G''_X(1) + G'_X(1) - (G'_X(1))^2$$

Théorème :

Si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans \mathbb{N} alors :

$$\forall t \in [-1, 1], G_{X+Y} = G_X G_Y$$

Soit $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$. Si X_1, \dots, X_n sont des variables aléatoire réelles mutuellement indépendantes alors :

$$G_{X_1+\dots+X_n} = G_{X_1} \dots G_{X_n}$$

IV.6 Lois conjointes et conditionnelles

Définition :

Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes réelles sur un même espace probabilisé (Ω, \mathcal{A}, P) .

1. On appelle couple des variables X et Y , et on note $Z = (X, Y)$ l'application

$$Z : \begin{cases} \Omega & \rightarrow & X(\Omega) \times Y(\Omega) \\ \omega & \mapsto & (X(\omega), Y(\omega)) \end{cases}$$

2. La loi du couple $Z = (X, Y)$ est appelée loi conjointe, elle est définie par :
 - $Z(\Omega) = X(\Omega) \times Y(\Omega)$
 - Les probabilités élémentaires $P(X = x, Y = y) = P((X = x) \cap (Y = y))$ pour tous $(x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$

On a bien sûr

$$\forall (x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega), P(X = x, Y = y) \geq 0 \text{ et } \sum_{(x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)} P(X = x, Y = y) = 1$$

3. Les lois de X et Y sont appelées lois marginales du couple $Z = (X, Y)$

Si la loi conjointe du couple $Z = (X, Y)$ est connue, alors les lois marginales de X et Y le sont aussi :

- On détermine la loi de X en appliquant la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $([Y = y])_{y \in Y(\Omega)}$:

$$\forall x \in X(\Omega), P(X = x) = \sum_{y \in Y(\Omega)} P(X = x, Y = y)$$

- On détermine la loi de Y en appliquant la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $([X = x])_{x \in X(\Omega)}$:

$$\forall y \in Y(\Omega), P(Y = y) = \sum_{x \in X(\Omega)} P(X = x, Y = y)$$

La réciproque est évidemment fautive, la connaissance des lois marginales de X et Y ne permet pas de déterminer la loi conjointe du couple $Z = (X, Y)$

Définition :

Soit X une variable aléatoire réelle discrète sur (Ω, \mathcal{A}, P) et A un événement de probabilité non-nulle. La loi conditionnelle de X sachant A est la donnée de :

- $X(\Omega)$
- $\forall x \in X(\Omega), P_A(X = x)$

Elle est notée $X_{/A}$

Définition :

Soit $Z = (X, Y)$ un couple de variables aléatoires réelles discrètes sur (Ω, \mathcal{A}, P)

La loi de Z est donnée par :

1. Les lois de X conditionnées par Y sont les lois de X conditionnées par les événements $[Y = y]$ pour tout $y \in Y(\Omega)$
 Plus précisément, pour $y \in Y(\Omega)$ fixé tel que $P(Y = y) \neq 0$, la loi de X sachant $[Y = y]$ est définie par :
 - La donnée de $X(\Omega)$
 - Les nombres $P_{Y=y}(X = x) = \frac{P(X=x, Y=y)}{P(Y=y)}$ pour tout $x \in X(\Omega)$
2. Les lois de Y conditionnées par X sont les lois de Y conditionnées par les événements $[X = x]$ pour tout $x \in X(\Omega)$
 Plus précisément, pour $x \in X(\Omega)$ fixé tel que $P(X = x) \neq 0$, la loi de Y sachant $[X = x]$ est définie par :
 - La donnée de $Y(\Omega)$
 - Les nombres $P_{X=x}(Y = y) = \frac{P(X=x, Y=y)}{P(X=x)}$ pour tout $y \in Y(\Omega)$

V Résultats asymptotiques

Les preuves sont à savoir pour ces théorèmes.

Théorème : Inégalité de Markov

Soit X une variable aléatoire réelle discrète positive d'espérance finie, on a :

$$\forall a > 0, P(X \geq a) \leq \frac{E(X)}{a}$$

Preuve

Avec $a \in \mathbb{R}_+$ fixé :

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{x \in X(\Omega)} xP(X = x) \geq \sum_{x \in X(\Omega), x \geq a} xP(X = x) \text{ (comme } X \text{ est positive)} \\ &\geq a \sum_{x \in X(\Omega), x \geq a} P(X = x) \geq aP(X \geq A) \end{aligned}$$

$$\text{D'où l'inégalité } P(X \geq a) \leq \frac{E(X)}{a}$$

Théorème : Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Soit X une variable aléatoire réelle discrète telle que X^2 est d'espérance finie, on a :

$$\forall \varepsilon > 0, P(|X - E(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{V(X)}{\varepsilon^2}$$

En passant à l'événement contraire :

$$\forall \varepsilon > 0, P(|X - E(X)| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{V(X)}{\varepsilon^2}$$

Preuve

Pour $\varepsilon > 0$:

$$E((X - E(X))^2) = \sum_{x \in X(\Omega)} (x - E(X))^2 P(X = x)$$

$$\geq \varepsilon^2 \sum_{x \in X(\Omega), |x - E(X)| \geq \varepsilon} P(X = x)$$

$$\geq \varepsilon^2 P(|X - E(X)| \geq \varepsilon)$$

D'où l'inégalité.

Théorème : Loi faible des grands nombres

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables réelles indépendantes de même loi, de variance finie.

En notant $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$, $m = E(X_1)$ et $\sigma = \sigma(X_1)$, on a :

$$1. \forall \varepsilon > 0, P\left(\left|\frac{S_n}{n} - m\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}$$

Cette inégalité doit être démontrée à chaque utilisation d'après le programme

$$2. \forall \varepsilon > 0, P\left(\left|\frac{S_n}{n} - m\right| \geq \varepsilon\right) \rightarrow_{n \rightarrow +\infty} 0$$

Preuve

On a ici que $E\left(\frac{S_n}{n}\right) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E(X_i) = m$

Par indépendance, $V(S_n) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n V(X_i) = \frac{\sigma^2}{n}$