

# Table des matières

<b>I</b>	<b>Mécanique</b>	<b>5</b>
I	M1 : Référentiels non-galiléens . . . . .	5
I.1	Application 1.2 . . . . .	5
I.2	1.3 . . . . .	5
I.3	1.4 . . . . .	5
I.4	Application 4 . . . . .	6
I.5	1.5.1 . . . . .	6
I.6	1.5.2 . . . . .	6
I.7	Application 5 . . . . .	6
I.8	2.1 . . . . .	6
I.9	Application 6 . . . . .	6
I.10	3.1 . . . . .	7
I.11	Application 7 . . . . .	7
I.12	4.1 . . . . .	7
I.13	4.3 . . . . .	7
II	M2 : Frottements . . . . .	8
II.1	Application 1 . . . . .	8
II.2	3 : puissance de la force de réaction . . . . .	8
II.3	Application 2 . . . . .	8
<b>II</b>	<b>EM</b>	<b>9</b>
I	EM1 . . . . .	9
I.1	Application 1 . . . . .	9
I.2	2.2 . . . . .	9
I.3	Application 1 bis . . . . .	9
I.4	Application 1 ter . . . . .	9
I.5	Application 2 . . . . .	9
I.6	Application 3 . . . . .	10
I.7	4.2 . . . . .	10
I.8	5.2 . . . . .	10
I.9	5.3 . . . . .	10
I.10	5.4 . . . . .	11
II	EM2 . . . . .	11
II.1	1.1 . . . . .	11
II.2	Application 1 . . . . .	12
II.3	1.2 . . . . .	12
II.4	Application 2 . . . . .	12
II.5	2.1 . . . . .	12
II.6	2.2 . . . . .	12
II.7	Application 3 . . . . .	12

	II.8	2.3	13
	II.9	Application 2 bis	13
	II.10	Application 4	13
	II.11	3.2	13
	II.12	3.3	13
	II.13	3.4	14
III	Compléments EM2		14
	III.1	1.1	14
	III.2	Application 1	14
	III.3	1.2	15
	III.4	Application 2	15
	III.5	Application 3	15
IV	EM3		15
	IV.1	1.3	15
	IV.2	Application 1	15
	IV.3	Application 3	16
	IV.4	Application 4	16
	IV.5	Application 5	16
	IV.6	Application 6	16
	IV.7	Application de cours 1	16
	IV.8	Application de cours 2	17
	IV.9	Application 7	17
V	EM4 : distributions dipôlares		17
	V.1	1.2	17
	V.2	1.3	17
	V.3	1.4	18
	V.4	2.1	18
	V.5	2.2	18
	V.6	2.3	18
	V.7	3.2	19
	V.8	Application 2	19
VI	EM5 LESGOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOO		19
	VI.1	1.1	19
	VI.2	2	19
	VI.3	2.2	19
	VI.4	3.1	20
	VI.5	3.2	20
	VI.6	3.3	20
	VI.7	3.4	20
	VI.8	Application 1	20
	VI.9	4.1	21
	VI.10	5.1	21
	VI.11	5.2	21
VII	EM6 : Energie du champ électromagnétique, cours intégral en ces lieux		21
	VII.1	Bilan d'énergie électromagnétique	22
	VII.2	Grandeurs énergétiques associées à un champ	23
VIII	Bilan énergétique dans un conducteur dit ohmique		24

<b>IIITS</b>		<b>27</b>
I	TS1 . . . . .	27
	I.1 Application 1 . . . . .	27
	I.2 Application 2 . . . . .	27
	I.3 Application 3 . . . . .	27
	I.4 Application 4 . . . . .	28
II	TS2 . . . . .	29
	II.1 Application 1 . . . . .	29
<b>IV Thermodynamique</b>		<b>31</b>
I	Th2 . . . . .	31
	I.1 2.3 équation de la diffusion thermique . . . . .	31
	I.2 2.5 Généralisation : présence d'un terme source . . . . .	31
	I.3 3.2 Conduction thermique en géométrie unidimensionnelle . . . . .	31
	I.4 3.2 Résistance thermique . . . . .	32
	I.5 3.3 . . . . .	32
	I.6 4.1 . . . . .	32
	I.7 4.3 . . . . .	32
	I.8 5.1 . . . . .	33
II	TH3 : Thermodynamique statistique (1) - Facteur de Boltzman . . . . .	34
	II.1 Statique des fluides . . . . .	34
	II.2 Loi de Boltzmann . . . . .	38
<b>V Thermodynamique chimique</b>		<b>45</b>
I	TC1 . . . . .	45
	I.1 Application 1 . . . . .	45
	I.2 Application 2 . . . . .	45
	I.3 Application 3 . . . . .	45
	I.4 3.2 . . . . .	45
	I.5 Application 4 . . . . .	46
	I.6 Application 5 . . . . .	46
	I.7 Démonstration de la Hess . . . . .	46
	I.8 4.3 Influence de la température . . . . .	46
	I.9 Application 6 changement d'état de l'eau . . . . .	47



# Chapitre I

## Mécanique

### I M1 : Référentiels non-galiléens

#### I.1 Application 1.2

1. Le référentiel de Copernic  $\mathcal{R}_C$  est défini par rapport au centre de masse du système solaire,  $\mathcal{R}_T$  par rapport au centre de masse de la Terre.
2. Non.
3. o
4. Copernic.

#### I.2 1.3

$$\begin{aligned}\vec{A} &= a(t)\vec{u}_{x'} + b(t)\vec{u}_{y'} + c(t)\vec{u}_{z'} \\ \left(\frac{d\vec{A}}{dt}\right)_{\mathcal{R}'} &= \dot{a}(t)u'_x + \dot{b}(t)u'_{y'} + \dot{c}(t)u'_{z'} \\ \left(\frac{d\vec{A}}{dt}\right)_{\mathcal{R}} &= \dot{a}(t)u_x + \dot{b}(t)u_y + \dot{c}(t)u_z + \dot{a}\left(\frac{du'_x}{dt}\right)_{\mathcal{R}} + \dot{b}\left(\frac{du'_{y'}}{dt}\right)_{\mathcal{R}} + \dot{c}\left(\frac{du'_{z'}}{dt}\right)_{\mathcal{R}} \quad (\text{cette dernière partie vaut 0 si } \mathcal{R}' \text{ en translation par rapport à } \mathcal{R})\end{aligned}$$

$$\vec{u}_{x'} = \cos\theta\vec{u}_x + \sin\theta\vec{u}_y \text{ et } \vec{u}_{y'} = -\sin\theta\vec{u}_x + \cos\theta\vec{u}_y$$

$$\Rightarrow \left(\frac{d\vec{u}_{x'}}{dt}\right)_{\mathcal{R}} = -\dot{\theta}\sin\theta\vec{u}_x + \dot{\theta}\cos\theta\vec{u}_y = \dot{\theta}\vec{u}_{y'} = \dot{\theta}\vec{u}_z \wedge \vec{u}_{x'} = \vec{\omega}(\mathcal{R}'/\mathcal{R}) \wedge \vec{u}_{x'}$$

$$-\dot{\theta}\vec{u}_{x'} = -\dot{\theta}(-\vec{u}_z \wedge \vec{u}_{y'}) = \vec{\omega} \wedge \vec{u}_{y'}$$

Si  $\mathcal{R}'$  en rotation par rapport à  $\mathcal{R}$  :  $a\vec{\omega} \wedge \vec{u}_{x'} + b\vec{\omega} \wedge \vec{u}_{y'} + \vec{0} = \vec{\omega} \wedge [a\vec{u}_{x'} + b\vec{u}_{y'} + c\vec{u}_{z'}]$ , cette dernière parenthèse correspondant à  $\vec{A}$

#### I.3 1.4

$$\begin{aligned}\vec{v}_{\mathcal{R}'}(M) &= \left(\frac{d\vec{O}\vec{M}}{dt}\right)_{\mathcal{R}'} \\ \vec{v}_{\mathcal{R}}(M) &= \left(\frac{d\vec{O}\vec{M}}{dt}\right)_{\mathcal{R}} = \left(\frac{d\vec{O}\vec{O}'}{dt}\right)_{\mathcal{R}} + \left(\frac{d\vec{O}'\vec{M}}{dt}\right)_{\mathcal{R}} = \vec{v}_e + \vec{v}_{\mathcal{R}'}(M) = \vec{v}_r(O') + \vec{v}_r + \vec{0} \\ (\text{e signifie d'entraînement, r signifie relative}) \\ \vec{a}_{\mathcal{R}'}(M) &= \left(\frac{d^2\vec{O}'\vec{M}}{dt^2}\right)_{\mathcal{R}'} = \frac{d}{dt}[\vec{v}_{\mathcal{R}'}(M)]_{\mathcal{R}}\end{aligned}$$

$$\vec{a}_{\mathcal{R}}(M) = \frac{d}{dt} [\vec{v}_{\mathcal{R}}(O') + \vec{v}_{\mathcal{R}'}(M)]_{\mathbb{R}} = \vec{a}_{\mathcal{R}}(O') + \frac{d}{dt}(\vec{v}_{\mathbb{R}'}(M)) + \vec{0} = \vec{a}_e + \vec{a}_r$$

$\vec{a}_a$  est l'accélération absolue

## I.4 Application 4

On définit  $\mathcal{R}_T$  comme le référentiel terrestre et le référentiel lié  $\mathcal{R}_A$  comme celui de l'ascenseur

1. Son accélération est  $\vec{g}$  dans le référentiel galiléen  $\mathcal{R}$  : en appliquant le PFD au livre en chute libre on écrit que  $m\vec{a}_{\mathcal{R}_T} = mg$  d'où  $a_{\mathcal{R}_T} = g$ .
2.  $\vec{a}_{acc} = \vec{a}_e = \vec{a}_{\mathcal{R}_T}(O')$  d'où  $\vec{a}_{\mathcal{R}_A}(M) = \vec{a}_r = \vec{a}_a - \vec{a}_e = \vec{a}_{\mathcal{R}_T}(M) - \vec{a}_{\mathcal{R}_T}(O') = -g\vec{u}_z - a_{acc}\vec{u}_z = -(g + a_{acc})\vec{u}_z$  Pendant la phase d'accélération et  $-gu$  à vitesse constante.
3.  $\vec{v}_{\mathcal{R}_T}(M) = \vec{v}_{\mathcal{R}_A}(M) + \vec{v}_{\mathcal{R}_T}(O')$  et  $\dot{z}u_z = \dot{z}'\vec{u}_z + v_{mon}\vec{u}_z$  avec  $\dot{z}' = \dot{z} - v_{mon}$  donc  $|\dot{z}'| > |\dot{z}|$
4. Si  $\vec{a}_{\mathcal{R}_T}(O') = \vec{a}_e = g$  alors  $\vec{a}_{\mathcal{R}_A}(M) = \vec{a}_{\mathcal{R}_T}(M) - \vec{a}_{\mathcal{R}_T}(O') = \vec{g} - \vec{g} = \vec{0}$  et le livre semble flotter.

## I.5 1.5.1

$$\vec{v}_{\mathcal{R}'}(M) = \left. \frac{dO'\vec{M}}{dt} \right)_{\mathcal{R}'}$$

$$\vec{v}_{\mathcal{R}}(M) = \left. \frac{dO\vec{M}}{dt} \right)_{\mathcal{R}} = \left. \frac{dO'\vec{M}}{dt} \right)_{\mathcal{R}'} + \vec{\omega}(R'/R) \wedge O\vec{M} = \vec{v}_{R'}(M) + \vec{v}_e \text{ où } \vec{\omega}\vec{u}_z \wedge r\vec{u}_r = r\omega\vec{u}_{\theta} = v_e$$

## I.6 1.5.2

$$\vec{a}_{\mathcal{R}'} = \left. \frac{d^2O'\vec{M}}{dt^2} \right)_{\mathcal{R}'} = \left. \frac{d\vec{v}_{\mathcal{R}'}(M)}{dt} \right)_{\mathcal{R}'}$$

$$\vec{a}_{\mathcal{R}}(M) = \left. \frac{d}{dt}(\vec{v}_{\mathcal{R}}(M)) \right)_{\mathcal{R}} = \left. \frac{d}{dt} [\vec{R}'(M) + \vec{\omega} \wedge O\vec{M}] \right)_{\mathcal{R}} + \vec{\omega} \wedge [\vec{v}_{\mathcal{R}'}(M) + \vec{\omega} \wedge O\vec{M}] = \left. \frac{d\vec{v}_{R'}(M)}{dt} \right)_{R'} + \vec{\omega} \wedge \left. \frac{dO\vec{M}}{dt} \right)_{\mathcal{R}'} + \vec{\omega} \wedge \vec{v}_{\mathcal{R}'}(M) + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge O\vec{M}) = \left. \frac{d\vec{v}_{R'}(M)}{dt} \right)_{\mathcal{R}'} + \vec{\omega} \wedge \vec{v}_{\mathcal{R}'}(M) + \vec{\omega} \wedge \vec{v}_{\mathcal{R}'}(M) + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge O\vec{M})$$

$$\Rightarrow \vec{a}_R(M) = \vec{a}_{R'}(M) + 2\vec{\omega} \wedge \vec{v}_{R'}(M) + \vec{\omega} \wedge (\omega \wedge O\vec{M}) = \vec{a}_r + \vec{a}_c + \vec{\omega} \wedge (r\omega\vec{u}_{\theta}) = \vec{a}_r + \vec{a}_c - r\omega^2\vec{u}_r = \vec{a}_r + \vec{a}_c + \vec{a}_e$$

où  $\vec{a}_c$  est l'accélération de Coriolis. On écrit souvent  $\vec{a}_e = -\omega^2 H\vec{M}$  avec  $H\vec{M}$  le projeté orthogonal de M sur l'axe de rotation.

## I.7 Application 5

$$1. \vec{v}_{\mathcal{R}_T}(M) = \vec{v}_{R'}(M) + \vec{v}_e = \vec{v}_r + \vec{v}_e = \vec{v}_0\vec{u}_{x'} + \omega\vec{u}_z \wedge O\vec{M} = v_0\vec{u}_{x'} + \omega v_0 t \vec{u}_{y'}$$

## I.8 2.1

$$\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a}_{\mathcal{R}_G}(M) = m\vec{a}_{\mathcal{R}'}(M) + m\vec{a}_e + m\vec{a}_c$$

$$m\vec{a}_{\mathcal{R}'} = \sum \vec{F}_{ext} - m\vec{a}_e - m\vec{a}_c = \sum \vec{F}_{ext} + \vec{f}_{ie} + \vec{f}_{ic}$$

## I.9 Application 6

1. Non, il est en rotation, pas en translation rectiligne uniforme autour de  $\mathcal{R}_T$  supposé galiléen.
2.  $\vec{v}_{\mathcal{R}}(M) = \dot{x}\vec{u}_x$ ,  $\vec{a}_{\mathcal{R}}(M) = \ddot{x}\vec{u}_x$  1 seul degré de liberté de mouvement, translation selon  $(Ox)$

3. BdF : Poids  $\vec{P}$  et réaction du support  $\vec{R}_N$  qui ne travaillent pas; force d'inertie d'entraînement  $\vec{f}_{ie} = +m\omega^2\vec{OM} = m\omega^2x\vec{u}_x$  et la force d'inertie de Coriolis  $\vec{f}_{ic} = -2m\vec{\omega} \wedge \vec{v}_r = -2m\omega\dot{x}\vec{u}_r$  qui ne travaille pas.
4.  $m\vec{a}_R = \vec{P} + \vec{R}_N + \vec{f}_{ie} + \vec{f}_{ic}$  et en projetant sur  $\vec{u}_x$  :  $m\ddot{x} = m\omega^2x \Rightarrow \ddot{x} - \omega^2x = 0$ . De solutions  $x(t) = Ae^{\omega t} + Be^{-\omega t}$ ; en réintroduisant les CI :  $x(0) = d = A + B, \dot{x}(0) = 0 = \omega(A + B)$  d'où  $A = B = \frac{d}{2}$ . D'où  $x(t) = d\cosh(\omega t)$
5. Partie énergétique : Les travaux élémentaires du poids, de la réaction normale et de la force d'inertie de Coriolis sont nuls, puisque les forces sont perpendiculaires au mouvement. Alors pour la force d'inertie d'entraînement :  $\delta W_{ie} = m\omega^2x\vec{u}_x \cdot d\vec{x} = m\omega^2x dx$
6. L'énergie potentielle de la force inertielle d'entraînement sera :  $\frac{E_p^{ie}}{dx} = -m\omega^2x \Rightarrow E_p^{ie} = -\frac{1}{2}m\omega^2x^2$ .  
Donc l'énergie mécanique est  $E_m^{tot} = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - m\omega^2x^2 = cste$  dans  $\mathcal{R}$  non-galiléen.
7. On a donc  $0 = \frac{d}{dt} \left[ \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}m\omega^2x^2 \right] = m\dot{x}\ddot{x} - m\omega^2\dot{x}x = \dot{x}(\ddot{x} - \omega^2x)$

### I.10 3.1

Le mouvement de la Terre est constitué de deux parties : elle a sa rotation propre d'une durée de 24 heures et il y a sa translation quasi-circulaire autour du Soleil, qui se manifeste sur des temps bien plus longs. L'aspect rotation propre entraîne deux conséquences selon la force d'inertie d'entraînement et la force d'inertie de Coriolis. Donc le poids est en fait la résultante de la force de gravitation et de la force d'inertie d'entraînement :  $\vec{P} = -G\frac{mM_T}{r_T^2}\vec{u}_{OM} + m\omega_p^2H\vec{M}$ . Pour un dynamomètre, on aura un équilibre dans  $\mathcal{R}_T$  si  $\vec{F}_e + \vec{f}_{grav} + \vec{f}_{ie} = \vec{0}$ . Donc  $\vec{g} = \vec{g}_0 + \omega_p^2H\vec{M}$ .

Comparons les ordres de grandeur :  $\frac{\|\vec{f}_{grav}\|}{\|\vec{f}_{ie}\|} \sim \frac{g_0}{\omega_p^2 2R_T} = \frac{10}{\left(\frac{2\pi}{8,6 \cdot 10^4}\right)^2 6,4 \cdot 10^6} \sim 3 \cdot 10^2$  : il y a environ un

facteur 300 entre le poids et la force d'inertie d'entraînement.

En équateur, l'inertie d'entraînement est maximale, et elle est minimale aux pôles.

### I.11 Application 7

On a dans ce cas que  $\vec{f}_{ic} = -2m\vec{\omega}_p \wedge \vec{v}_r$ . Alors  $\frac{\|\vec{P}\|}{\|\vec{f}_{ic}\|} \sim \frac{g}{2\omega_p\|\vec{v}_r\|} \sim 3 \cdot 10^2$

La force de Coriolis est responsable du sens des vents dans des ouragans.

### I.12 4.1

$\mathcal{P}(\vec{f}_{ic}) = \vec{f}_{ic} \cdot \vec{v} = (-2m\vec{\omega} \wedge \vec{v}_r) \cdot \vec{v}_r = \vec{0}$  donc la force d'inertie de Coriolis ne travaille pas.

### I.13 4.3

$\delta W_{ie} = \vec{f}_{ie} \cdot d\vec{OM} = m\omega^2H\vec{M} \cdot d\vec{OM} = m\omega^2r\vec{u}_r \cdot (dr\vec{u}_r + \dots) = m\omega^2rdr$ .

On peut écrire  $\delta W_{ie} = -dE_p^{ie} \Leftrightarrow \frac{dE_p^{ie}}{dr} = -m\omega^2r \Leftrightarrow E_p^{ie} = -\frac{1}{2}m\omega^2r^2$

## II M2 : Frottements

### II.1 Application 1

1. Système : palet. Référentiel terrestre  $\mathcal{R}_T$  supposé galiléen. Bilan des forces : Poids  $\vec{P} = m\vec{g}$  ; réaction normale  $\vec{N}$  ; réaction tangentielle  $\vec{T}$ .

Mouvement plan selon  $Ox$ . On en tire les équations : 
$$\begin{cases} \vec{P} + \vec{T} + \vec{N} = \vec{0} \\ \vec{T} < f_s \|\vec{N}\| \end{cases}$$

On projette : 
$$\begin{cases} \vec{u}_x : mg \sin \alpha - T = 0 \\ \vec{u}_y : -mg \cos \alpha + N = 0 \end{cases} .$$
 De là on déduit que  $N = mg \cos \alpha$  et  $T = mg \sin \alpha$ .

Donc  $mg \sin \alpha < f_s mg \cos \alpha$ , d'où  $\tan \alpha < f_s$

2. RFD sur  $(\vec{u}_x, \vec{u}_y)$  :  $m\ddot{x} = mg \sin \alpha - Y, 0 = -mg \cos \alpha + N$  et donc  $\ddot{x} = g(\sin \alpha - f_d \cos \alpha)$  comme on a que pendant le mouvement,  $T = f_d N$
3. On peut faire une mesure de l'angle limite  $\alpha_{lim}$  de mise en mouvement, ce qui permet d'avoir accès à  $f_s$ .  
On peut faire la mesure du temps de parcours d'une distance  $l$  avec  $\alpha_{lim} < \alpha$ , ce qui donne accès à  $f_d$ .

### II.2 3 : puissance de la force de réaction

$$\mathcal{P}(\vec{R}) = \vec{R} \cdot \vec{v} = (\vec{T} + \vec{N}) \cdot \vec{v} = \begin{cases} 0 & \text{si pas de glissement, si la vitesse est nulle} \\ -\|\vec{T}\| \|\vec{v}\| < 0 & \text{si glissement non constant} \end{cases}$$

On applique le TEC :  $\Delta E_c = W_{cons} + W_{non-cons}$  et donc  $\Delta E_m = W_{non-cons} < 0$ , ce qui implique que l'énergie mécanique décroît.

### II.3 Application 2

On applique le TEC : 
$$\begin{cases} \Delta E_c = 0 - \frac{1}{2}mv^2 \\ W_{tot} = W_{\vec{P}} + W_{\vec{N}} + W_{\vec{T}} \end{cases} \quad \text{mais les forces normales et le poids ne travaillent pas.}$$

$$\text{D'où } W_{tot} = W_{\vec{T}} = \int_0^d \vec{T} \cdot d\vec{OM} = \int_0^d -T dx = \int_0^d -(f_d mg) dx = -f_d mgd$$

$$\text{Donc } \Delta E_m = W_{tot}, \text{ d'où } \frac{1}{2}mv_0^2 = f_d mgd, \text{ dont on tire enfin } d = \frac{v_0^2}{2gf}.$$



# Chapitre II

## EM

### I EM1

#### I.1 Application 1

- Si on a  $dQ = \rho(M)d\tau$ , alors il faut intégrer sur le volume :  $\iiint dQ = \iiint \rho(x, y, z)d\tau$   
 $= \int_{x=0}^a \int_{y=0}^a \int_{z=0}^z \rho_0 e^{-z/\delta} dx dy dz$   
 $= a^2 \int_0^z \rho_0 e^{-z/\delta} dz = -\rho_0 a^2 \delta [e^{-z/\delta} - 1]$  donc  $Q(z) = \rho_0 a^2 \delta [1 - e^{-z/\delta}]$
- $Q = \rho_0 a^2 \delta [1 - e^{-z/\delta}] \simeq \rho_0 a^2 \delta$  comme  $e^{-z/\delta}$  tend vers 0.
- On a  $\frac{Q}{a^2} = \rho_0 \delta$  la densité surfacique de charge (par définition pour le premier), qui a la dimension d'une charge surfacique. Dans tous les problèmes avec deux dimensions et une dernière négligeable devant elles, on voudra plutôt définir la densité surfacique de charge  $\sigma$  par  $dQ = \sigma(M)dS$ .

#### I.2 2.2

De tout ça, on tire une expression pour la charge totale portée par la surface :  $Q = \iint_{ab} \sigma(M)dS$ .  
De cela, on tire une expression pour la charge totale portée par un fil :  $Q = \int_a \lambda(M)dl$

#### I.3 Application 1 bis

Il y a des plans de symétrie et d'antisymétrie. Elle admet un plan de symétrie si, en prenant deux points symétriques par rapport à un plan, la densité volumique de distribution sont les mêmes pour les deux points.

Sur le schéma, il y a des plans de symétrie : tous les plans qui contiennent l'axe ( $Ox$ ) sont des plans de symétries pour les distributions de charge. Il y en a donc une infinité.

#### I.4 Application 1 ter

Le plan d'antisymétrie est unique, et est perpendiculaire à l'axe  $x$  et passant par le point au milieu de la distance entre les deux charges.

#### I.5 Application 2

1. Il y a des invariances par translation selon les axes ( $Ox$ ) et ( $Oy$ ).
2.  $\vec{E}(M) = \vec{E}(x, y, z) = \vec{E}(z)$
3. On a comme plans de symétrie tout plan contenant l'axe ( $Oz$ ), comme  $\Pi_1 \equiv (xOz)$  ou  $\Pi_2 \equiv (yOz)$ .  
On a un dernier plan, qui est le plan ( $xOy$ ) qui partage toute la plaque infinie.

4.  $M \in \text{plan}(M, \vec{e}_x, \vec{e}_y) \equiv \Pi_1$ , ce qui implique que  $\vec{E}(M) = E_x \vec{e}_x + E_z \vec{e}_z$  et comme  $M \in \text{plan}(M, \vec{e}_y, \vec{e}_z) \equiv \Pi_2$  alors  $M = E_y \vec{e}_y + E_z \vec{e}_z$ . Et donc nécessairement  $\vec{E}(M) = E_z(z) \vec{e}_z$ . Il est nécessaire que la fonction  $E_z(z)$  soit impaire.

## I.6 Application 3

1. Dans ce cylindre infini, on a une invariance de la distribution de charges par translation selon l'axe ( $Oz$ ) et une invariance par rotation selon  $\theta$  autour de l'axe ( $Oz$ ). On se place donc en coordonnées polaires.
2. On en déduit que  $\|\vec{E}\|(r, \theta, z) = \|\vec{E}\|(r)$ .
3. Une infinité : l'ensemble des plans contenant l'axe ( $Oz$ ) et le plan ( $M, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta$ ).
4. On a que  $\vec{E}(M) = E_r \vec{e}_r$  et que  $\vec{E}(M) \in \Pi_1 \cap \Pi_2$  (plans de symétrie). Donc  $\vec{E}(M) = E_r(r) \vec{e}_r$ .

## I.7 4.2

$$\begin{aligned} \iint \vec{E} \cdot d\vec{S} &= \int_\theta \int_\varphi \vec{E}(p) R^2 \sin \theta d\theta d\varphi \vec{e}_r \\ &= \int_{\theta=0}^\pi \int_{\varphi=0}^{2\pi} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2} \vec{e}_r R^2 \sin \theta d\theta d\varphi \vec{e}_r = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} 2\pi [-\cos \theta]_0^\pi \\ \text{Donc : } \iint \vec{E} d\vec{S} &= \frac{Q}{\epsilon_0} \text{ puisque l'intégrale de } -\cos \text{ entre } 0 \text{ et } \pi \text{ vaut } 2. \end{aligned}$$

## I.8 5.2

1. On a une invariance de distribution par rotation d'angle  $\theta$  et une invariance par rotation d'angle  $\varphi$  des coordonnées sphériques. Donc  $\|\vec{G}\|(M) = \|\vec{G}\|(r)$
2. On a des symétries de plan  $(M, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta) = \Pi_1$  et  $(M, \vec{e}_r, \vec{e}_\varphi) = \Pi_2$ . Tous les plans passant par  $M$  et contenant le vecteur  $\vec{e}_r$  sont des plans de symétrie. Donc  $\vec{G}(M) = G_r(M) \vec{e}_r$ .
3. Pour la surface de Gauss : On prend la sphère de rayon  $r$  centrée en  $O$ . (On aura donc à traiter un cas où  $M$  appartient à la sphère gravitationnelle et le cas où  $M$  est en-dehors.)

$$4. \text{ Calcul de } M_{int} = \begin{cases} \text{si } r < R & M_{int} = \mu \frac{4}{3} \pi r^3 \\ \text{si } r \geq R & M_{int} = \mu \frac{4}{3} \pi R^3 = M_{tot} \end{cases}$$

$$\text{Calcul du flux : } \iint \vec{G} d\vec{S} = \int_\theta \int_\varphi G_r(r) \vec{e}_r dS \vec{e}_r = G_r(r) S_{sphere} = G_r(r) 4\pi r^2$$

5. On applique le théorème de Gauss gravitationnel :  $\iint \vec{G} d\vec{S} = -4\pi \mathcal{G} M_{int}$  et donc

$$G_r(r) 4\pi r^2 = \begin{cases} -4\pi \mathcal{G} M_{tot} \frac{r^3}{R^3} & \text{si } r < R \\ -4\pi \mathcal{G} M_{tot} & \text{si } r \geq R \end{cases}$$

$$\text{D'où, finalement } \vec{G}(M) = \begin{cases} -\frac{\mathcal{G} M_{tot}}{R^3} r \vec{e}_r & \text{si } r < R \\ -\frac{\mathcal{G} M_{tot}}{r^2} \vec{e}_r & \text{si } r \geq R \end{cases}$$

## I.9 5.3

1. Dans ce cylindre infini, on a une invariance de la distribution de charges par translation selon l'axe ( $Oz$ ) et une invariance par rotation selon  $\theta$  autour de l'axe ( $Oz$ ). On se place donc en coordonnées polaires. On en déduit que  $\|\vec{E}\|(r, \theta, z) = \|\vec{E}\|(r)$ .
2. On a une infinité de plans de symétrie, ceux qui contiennent l'axe ( $Oz$ ).

3. On prend comme surface de Gauss un cylindre de rayon  $r$  et de hauteur  $h$  quelconque passant par  $M$ . C'est un objet en trois parties : un bord cylindrique et deux disques.

$$4. \text{ Calcul de } Q_{int} = \begin{cases} \text{si } r < R & \rho_0 h \pi r^2 \\ \text{si } r \geq R & \rho_0 h \pi R^2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{Calcul de } \Phi_2 : \iint \vec{E} d\vec{S} &= \iint_{bordcylindrique} E_r(r) \vec{e}_r dS \vec{e}_r + \iint_{disquehaut} E_r(r) \vec{e}_r dS \vec{e}_z + \iint_{disquebas} E_r(r) \vec{e}_r dS \vec{e}_y \\ &= \iint_{bordcylindrique} E_r(r) dS \\ &= E_r(r) \iint_{cylindre} = E_r(r) 2\pi r h \end{aligned}$$

5. On applique le théorème de Gauss :  $\iint \vec{E} d\vec{S} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$

$$\text{Donc } E_r(r) 2\pi r h = \begin{cases} \frac{\rho_0 h \pi r^2}{\varepsilon_0} & \text{si } r < R \\ \frac{\rho_0 h \pi R^2}{\varepsilon_0} & \text{si } r \geq r \end{cases}$$

$$\text{Donc } \vec{E}(M) = \begin{cases} \frac{\rho_0}{2\varepsilon_0} r \vec{e}_r & \text{si } r < R \\ \frac{\rho_0 R^2}{2\varepsilon_0 r} \vec{e}_r & \text{si } r \geq r \end{cases}$$

## I.10 5.4

1. On a des invariances de translation selon les axes  $(Ox)$  et  $(Oy)$ , donc  $\vec{E}(M) = \vec{E}(z)$
2. On a des symétries de plan selon  $(M, \vec{e}_x, \vec{e}_z) = \Pi_1, (M, \vec{e}_y, \vec{e}_z) = \pi_2$  et  $(xOy)$  plan de symétrie. De ça, on déduit que  $\vec{E}(-z) = -\vec{E}(z)$  et donc  $E_z(-z) = -E_z(z)$
3. On prend comme surface de Gauss un parallépipède de hauteur  $2z$  et de surface  $a$  selon  $x$  et  $b$  selon  $y$ . (Reformulation : on prend le parallépipède rectangle de base  $ab$  et de hauteur  $h$ .)

4. Calcul de  $Q_{int} = \sigma_0 ab$

$$\begin{aligned} \text{Calcul du flux : } \iint \vec{E} d\vec{S} &= \iint_{bords} E_z \vec{e}_z dy dz + \iint_{haut} E_z(z) \vec{e}_z dS \vec{e}_z + \iint_{bas} E_z(-z) \vec{e}_z dS (-\vec{e}_z) \\ &= ab [E_z(z) - E_z(-z)] = 2ab E_z(z) \end{aligned}$$

5. On applique le théorème de Gauss :  $\iint \vec{E} d\vec{S} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$

$$\text{Donc } 2ab E_z(z) = \frac{\sigma_0 ab}{\varepsilon_0}$$

$$\text{Donc } E_z(z) = \frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0} \text{ avec } z > 0 \text{ et donc :}$$

$$\begin{cases} \vec{E} = +\frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0} \vec{e}_z & \text{si } z > 0 \\ \vec{E} = -\frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0} \vec{e}_z & \text{si } z < 0 \end{cases}$$

## II EM2

### II.1 1.1

$$W_{A \rightarrow B}(\vec{f}_{Coulomb}) = \int_A^B \vec{f}_{Coulomb} d\vec{l} = \int_A^B \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \vec{e}_r (dr \vec{e}_r + \dots) = \int_A^B \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0 r^2} dr = \left[ -\frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0 r} \right]_A^B = [-qV(r)]_A^B = q(V_A - V_B)$$

Avec  $V(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$  le potentiel créé par la charge  $Q$  placée en  $O$ .

$$\Rightarrow \mathcal{E}_p^{elec} + qW(\vec{f}_{Coulomb}) = -\Delta \mathcal{E}_p^{elec} \Leftrightarrow \mathcal{E}_p^{elec} = qV(+cste)$$

## II.2 Application 1

On a que  $V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \frac{Q_i}{P_i M}$

## II.3 1.2

Et comme  $\int_A^B \vec{F}_L d\vec{l} = -\Delta\mathcal{E}_P \Rightarrow \int_A^B q\vec{E}d\vec{l} = -q\Delta V$  lors le potentiel  $V$  est relié au champ électrostatique  $\vec{E}$  par :

$$\int \vec{E}d\vec{l} = -\Delta V \Leftrightarrow \vec{E}d\vec{l} = E_x dx + E_y dy + E_z dz = -\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial V}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial z} = -dV$$

Donc  $\vec{E} = -\vec{grad}(V)$  (Aussi important que  $u = Ri$ )

## II.4 Application 2

Comme on a une invariance par rotation d'angles  $\theta$  et  $\varphi$  autour de  $O$ , on a que  $\|\vec{E}\|(M) = \|\vec{E}\|(r)$

$$\text{Si } r \geq R : \vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r = \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r$$

$$\text{Si } r \leq R : \vec{E} = \frac{\rho(\frac{4}{3}\pi r^3)}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r = \frac{\rho r}{3\epsilon_0} \vec{e}_r$$

$$\vec{E}(r) = -\vec{grad}(V)(r) = -\frac{dV}{dr} \vec{e}_r$$

Et donc, si  $r \geq R$ ,  $\frac{dV}{dr} = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \Leftrightarrow V(r) = -\int \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} (+cste) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} + cste$  et on considère la constante comme nulle de manière à ce que  $V \rightarrow 0$

$$\text{Et si } r \leq R, \frac{dV}{dr} = -\frac{\rho r}{3\epsilon_0} \Leftrightarrow V(r) = -\int \frac{\rho r}{3\epsilon_0} dr (+C) = -\frac{\rho r^2}{6\epsilon_0} + C$$

Donc  $V$  est continue à la traversée de la surface de la sphère (chargée en volume), donc il est nécessaire que  $V(R^-) = V(R^+)$

$$C - \frac{\rho R^2}{6\epsilon_0} = \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 R} \Rightarrow C = \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0}$$

## II.5 2.1

Soient  $M, M'$  deux points voisins d'une surface équipotentielle. On a que :

$$\begin{cases} V(M') &= V(M) \\ V(M') - V(M) &= dV \end{cases}$$

$$\text{Et } dV = \vec{grad}V d\vec{l} = -\vec{E} \cdot M\vec{M}'$$

Mais  $V(M') - V(M) = 0$  donc  $\vec{E}$  est perpendiculaire à la surface.

## II.6 2.2

Soient  $M, M'$  deux points voisins d'une même ligne de champ.

$$\text{Alors } V(M') - V(M) = dV = \vec{grad}V \cdot M\vec{M}' = -\vec{E} \cdot M\vec{M}'$$

$$\text{Donc si } V(M') > V(M), \text{ alors } \vec{E} \cdot M\vec{M}' < 0$$

ce qui équivaut à  $\vec{E}$  de sens opposé à  $M\vec{M}'$  (et inversement)

## II.7 Application 3

1. Voir schéma, les équipotentielles sont soit le plan entre les deux charges, soient des patatoïdes qui sont toujours perpendiculaires au ligne de champ. Plus une surface est petite et centrée sur une des charges, plus la valeur absolue de sa charge sera grande.
2. Baragouinage
3. Mensonge

## II.8 2.3

$$\iint_{\text{tube du champ et 2 sections}} \vec{E} d\vec{S} = \iint_{\text{section S1}} \vec{E}_1 d\vec{S}_1 + \iint_{\text{section S2}} \vec{E}_2 d\vec{S}_2 + \iint_{\text{tube}} \vec{E} d\vec{S}$$

$$\text{Et ici } \vec{E} d\vec{S} = \vec{0}$$

$$\text{Donc } \iint_{\text{sections}} \vec{E} d\vec{S} = -E_1 S_1 + E_2 S_2 \text{ or } \iint \vec{E} d\vec{S} = 0 \text{ s'il n'y a pas de charge intérieure. Donc } E_1 S_1 = E_2 S_2$$

## II.9 Application 2 bis

Les surfaces sont les sphères de même centre que la sphère chargée, plus leur rayon est grand, moins leur potentiel est élevé.

## II.10 Application 4

1. On a des invariances par translation selon  $z$  et par rotation d'angle  $\theta$ , donc  $\|\vec{E}\|(M) = E_r$  et donc que  $V(M) = V(r)$ , et donc  $\vec{E} = -\vec{\text{grad}}V = -\frac{dV}{dr}\vec{e}_r$

$$\text{On écrit le théorème de Gauss : } \iint \vec{E} d\vec{S} = 2\pi r h E_r(r)$$

$$\text{On a que } \vec{E} = \frac{\rho r}{2\varepsilon_0}\vec{e}_r \text{ et si } r \leq R \text{ et } \vec{E} = \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0 r}\vec{e}_r \text{ si } r \geq R.$$

$$\text{Si } r \leq R, \text{ alors : } V = -\frac{\rho r^2}{4\varepsilon_0} + D$$

$$\text{Si } r \geq R, \text{ alors : } V = -\frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0} \ln(r) + C$$

$$\text{Avec, comme le champ est continu : } V(R^-) = V(R^+) \Leftrightarrow -\frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0} \ln(R) + C = -\frac{\rho R^2}{4\varepsilon_0} + D$$

$$\text{Donc } C = -\frac{\rho R^2}{4\varepsilon_0} + \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0} \ln(R) + D \text{ avec } D = V(0)$$

$$\text{Et donc, finalement : } V(r) = -\frac{\rho R^2}{4\varepsilon_0} + D \text{ si } r \leq R \text{ et } V(r) = \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0} \ln\left(\frac{R}{r}\right) - \frac{\rho R^2}{4\varepsilon_0} + D \text{ si } r \geq R$$

2. NON. Les lignes de champ sont radiales et les équipotentielles sont des sphères de même centre que la sphère.

## II.11 3.2

$$\vec{E}_{\text{tot}} = \vec{E}_+ + \vec{E}_- \text{ par théorème de superposition.}$$

$$\vec{E}_+ = \begin{cases} +\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{e}_z & \text{si } z > \frac{e}{2} \\ -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{e}_z & \text{si } z < \frac{e}{2} \end{cases}$$

$$\vec{E}_- = \begin{cases} -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{e}_z & \text{si } z > -\frac{e}{2} \\ -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{e}_z & \text{si } z < -\frac{e}{2} \end{cases}$$

$$\text{Donc } \vec{E} = \begin{cases} \vec{0} & \text{Si } z > \frac{e}{2} \\ -\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{e}_z & \text{si } -\frac{e}{2} < z < \frac{e}{2} \\ \vec{0} & \text{Si } z < -\frac{e}{2} \end{cases}$$

## II.12 3.3

Calcul de  $V$  : On a invariance par translation sur les axes  $x$  et  $y$ .  $z$  est le seul paramètre, donc  $V = -\int E_z dz$

$$\text{Donc : } V(z) = \begin{cases} V_+ = cste & \text{Si } z > \frac{e}{2} \\ \frac{\sigma}{\varepsilon_0} z & \text{si } -\frac{e}{2} < z < \frac{e}{2} \\ V_- = cste & \text{Si } z < -\frac{e}{2} \end{cases}$$

$$\text{Donc il existe une tension } U = V(z = \frac{e}{2}) - V(z = -\frac{e}{2}) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} e = \frac{Q}{S\varepsilon_0} e$$

$$\text{On revient à } Q = Cu = \frac{S\varepsilon_0}{e} U$$

Comme on n'a en fait pas de vide entre les deux armatures, on doit multiplier  $C$  par  $\varepsilon_r$ , permittivité électronique entre les deux armatures. Mais c'est négligé.

### II.13 3.4

$$\mathcal{P}_{elec} = u \cdot i = u \frac{dQ}{dt} = uC \frac{du}{dt} = \frac{d}{dt} \left[ \frac{1}{2} Cu^2 \right] \text{ ou } \frac{d}{dt} \left[ \frac{1}{2C} Q^2 \right]$$

$$\text{D'où la variation d'énergie électrique : } \Delta E_{elec} = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{P}_{elec} dt = \left[ \frac{1}{2} Cu^2 \right]_{t_1}^{t_2} = \left[ \frac{1}{2C} Q^2 \right]$$

$$\text{Donc } \mathcal{E}_{elec} = \frac{1}{2C} Q^2 = \frac{1}{2\varepsilon_0 S} (S\varepsilon_0 E)^2 = \frac{S\varepsilon_0}{2} E^2 \Rightarrow w_{elec} = \frac{\mathcal{E}_{elec}}{V} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2$$

## III Compléments EM2

### III.1 1.1

Appliquons le théorème de Gauss à un petit volume mésoscopique, de forme cubique et de volume  $d\tau = dxdydz$  :

$$\begin{aligned} \iint \vec{E} d\vec{S} &= \vec{E}(x+dx)d\vec{S}_1 + \vec{E}(x)d\vec{S}_2 + \vec{E}(y+dy)d\vec{S}_3 + \vec{E}(y)d\vec{S}_4 + \vec{E}(z+dz)d\vec{S}_5 + \vec{E}(z)d\vec{S}_6 \\ &= E_x(x+dx)dydz + E_x(x)(-dydz) + E_y(y+dy)dxdz + E_y(y)(-dxdz) + E_z(z+dz)dxdy + E_z(z)dxdy \\ &= dydz(E_x(x+dx) + E_x(x)) + dxdz(E_y(y+dy) - E_y(y)) + dxdy(E_z(z+dz) - E_z(z)) \\ &= dydz \frac{\partial E_x}{\partial x} dx + dxdz \frac{\partial E_y}{\partial y} dy + dxdy \frac{\partial E_z}{\partial z} dz \\ &\Rightarrow \iint \vec{E} d\vec{S} = dxdydz \left[ \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \right] = \frac{dQ}{\varepsilon_0} = \frac{dxdydz\rho}{\varepsilon_0} \\ &\Rightarrow \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \end{aligned}$$

D'où l'équation de Maxwell-Gauss :  $\text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$

### III.2 Application 1

1. On se place en coordonnées cylindriques : dedans, on a des invariances de translation selon  $z$  et de rotation selon  $\theta$ , avec des symétries qui font que  $\vec{E}(M) = E_r(r)\vec{e}_r$ , et on néglige les effets de bord car on suppose le fil infini.

2. On place  $M$  à l'extérieur, à distance  $r$ . On a que  $\text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$  par Maxwell-Gauss.

$$\text{Et donc } \frac{\rho}{\varepsilon_0} = \frac{1}{r} \frac{\partial(rE_r)}{\partial r}$$

$$\text{Mais comme } M \text{ à l'extérieur du fil, } \rho(M) = 0, \text{ et donc } \frac{\partial(rE_r)}{\partial r} = 0$$

$$\text{Et finalement } E_r(r) = \frac{B}{r} \text{ en extérieur}$$

3. En  $M$  à l'extérieur du fil :  $\frac{1}{r} \frac{\partial(rE_r)}{\partial r} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$  comme la charge est uniforme. Donc :  $rE_r = \int \frac{\rho}{\varepsilon_0} r dr = \frac{\rho}{2\varepsilon_0} r^2 + C$

$$\text{Et donc } E_r = \frac{\rho}{2\varepsilon_0} r + \frac{C}{r}$$

Mais  $C = 0$  par symétries au centre du fil.

4. Par continuité en  $r = R$ , on a que  $\frac{\rho}{2\varepsilon_0} R = \frac{B}{R}$

$$\text{Et donc } B = \frac{\rho}{2\varepsilon_0} R^2$$

Dans une distribution linéique, avec  $\lambda = \pi R^2 \rho$  on aurait  $\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} \vec{e}_r$

### III.3 1.2

On a vu qu'en régime stationnaire, le potentiel scalaire  $V$  dépendait de  $E$  par la relation :  $\vec{E} = -\vec{grad}(V)$

En injectant cette égalité dans Maxwell-Gauss, on obtient :  $d\text{div}\vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$

$$\Rightarrow \text{div}(-\vec{grad}(V)) = -\left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial V}{\partial z}\right)$$

$$= -\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}\right) = -\Delta V = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

D'où l'équation de Laplace :  $\Delta V = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$

### III.4 Application 2

D'après les applications dans EM2, on a que  $\vec{E}(M) = E_z(z)\vec{e}_z$

On a que  $\Delta V = -\frac{\rho(z)}{\epsilon_0} = 0$

$$\Rightarrow V(z) = Az + B$$

On pose ensuite ces conditions limites :  $\begin{cases} V_2 &= A\frac{e}{2} + B \\ V_1 &= -A\frac{e}{2} + B \end{cases}$

On en déduit  $B = \frac{V_1+V_2}{2}$  et  $A = \frac{V_2-V_1}{e}$

### III.5 Application 3

On peut utiliser Laplace parce qu'on a une charge nulle entre les deux armatures. On a alors  $\Delta V(r)$ .

$$\text{Donc } \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dV(r)}{dr} \right)$$

$$\Rightarrow r \frac{dV(r)}{dr} = C_1 \Rightarrow \frac{dV(r)}{dr} = \frac{C_1}{r}$$

$$\Rightarrow V(r) = C_1 \ln(r) + C_2$$

Prenons ensuite les conditions aux limites :  $\begin{cases} V_1 &= V(R_1) &= C_1 \ln(R_1) + C_2 \\ V_2 &= V(R_2) &= C_1 \ln(R_2) + C_2 \end{cases}$

$$\Rightarrow C_1 = \frac{V_2 - V_1}{\ln(R_2/R_1)}$$

$$\Rightarrow C_2 =$$

D'où l'expression de  $V(r) =$

## IV EM3

### IV.1 1.3

On a  $n$  électrons de charge  $q_0$  qui se déplacent à vitesse  $v$ . On a que  $i = \frac{dQ}{dt}$ , les charges qui passent à travers de la section  $S$  pendant  $dt$ .

On a que  $dQ = n[Svdt]q_0$  et donc  $i = nSvq_0$

On pose alors  $\vec{j} = nq_0\vec{v}$ , le vecteur densité volumique de courant.

### IV.2 Application 1

On a  $I = \iint \alpha r^2 r dr d\theta = 2\pi\alpha \frac{R^4}{4}$  et donc  $\alpha = \frac{2I}{\pi R^4}$

### IV.3 Application 3

1. On a une invariance par translation selon l'axe ( $Oz$ ) et par rotation d'angle  $\theta$  autour de l'axe ( $Oz$ )
2. On se place ensuite en coordonnées cylindriques, alors la norme du champ ne dépendra que de  $r$
3. Le plan  $(M, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$  est un plan d'antisymétrie de  $\mathcal{D}$  et que  $(M, \vec{e}_r, \vec{e}_z)$  est un plan de symétrie de  $\mathcal{D}$ .  
Alors on a que  $\vec{B}$  sera seulement selon  $\vec{e}_r$  et  $\vec{e}_\theta$  et aussi que  $\vec{B}$  est perpendiculaire au plan de symétrie.
4. Donc  $\vec{B} = B_\theta(r)\vec{e}_\theta$
5. La même expression que précédemment.

### IV.4 Application 4

1. On a  $d\Phi_1 = \vec{B}(M_1)d\vec{S}_1 = B(M_1)\vec{e}_\theta dS_1(-\vec{e}_\theta) = -B(M_1)DS_1 = -B(r)dS$   
Et de même  $d\Phi_2 = \vec{B}(M_2)d\vec{S}_2 = B(M_2)\vec{e}_\theta dS_2\vec{e}_\theta = B(r)dS$
2. Selon la surface du bord du tore,  $d\vec{S} \perp \vec{B} \Rightarrow d\Phi_b = 0$   
 $\Rightarrow \Phi_{tot} = -B(r)dS + B(r)dS + 0 = 0$

### IV.5 Application 5

1.  $\vec{B} = B(r)\vec{e}_\theta$
2.  $\oint \vec{B}d\vec{l} = \int_{\theta=0}^{2\pi} B(r)\vec{e}_\theta \cdot r d\theta \vec{e}_\theta = 2\pi r B(r)$  qui à priori n'est pas nulle.
3. Alors :  $\vec{B}(M) = B(r)\vec{e}_\theta = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{e}_\theta$

### IV.6 Application 6

$$I_{enl} = -I_1 - I_2 + I_3$$

Le courant passe dans l'autre sens, donc  $I_1$  et  $I_2$  sont négatifs et les autres sont positifs.

### IV.7 Application de cours 1

1. On a  $I = \iint \vec{j}d\vec{S} = \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=0}^R \vec{j}dr r d\theta \vec{e}_z = \vec{j} = \frac{I}{\pi R^2} \vec{e}_z$  avec  $\vec{j} = j\vec{e}_z$
2. Sur les symétries et les invariances : on a des invariances par translation selon l'axe  $Oz$  et par rotation d'angle  $\theta$  donc la norme dépend uniquement de  $r$

$\Pi = (M, \vec{e}_r, \vec{e}_z)$  est un plan de symétrie de  $\mathcal{D}$ , donc  $\vec{B} \perp \Pi$  donc  $\vec{B}(M) = B(M)\vec{e}_\theta$

Donc  $\vec{B} = B(r)\vec{e}_\theta$

Comme pour l'électrostat, il va falloir choisir une forme géométrique. Cette fois, c'est plus une surface de Gauss mais un contour d'Ampère, le cercle de rayon  $r$  centré sur  $Oz$  qui passe par  $M$ .

On a donc la circulation :  $\oint \vec{B}d\vec{l} = 2\pi r B(r)$

On calcule le courant enlacé :  $I_{enl} = \begin{cases} \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_0^r \vec{j}d\vec{S} = j\pi r^2 = \frac{I r^2}{R^2} & \text{si } r \leq R \\ I & \text{sinon} \end{cases}$

Donc par théorème d'Ampère :  $\oint \vec{B}d\vec{l} = \mu_0 I_{enl} \Rightarrow \vec{B}(M) \begin{cases} \frac{\mu_0 j}{2} r \vec{e}_\theta = \frac{\mu_0 I}{2\pi R^2} r \vec{e}_\theta & \text{si } r \leq R \\ \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{e}_\theta & \text{sinon} \end{cases}$



## IV.8 Application de cours 2

1. Symétries de  $\mathcal{D}$  : on a  $(M, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$  un plan de symétrie, donc  $\vec{B} \perp (M, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$  et donc  $\vec{B}(M) = B(M)\vec{e}_z$   
On a une invariance par translation selon  $Oz$  et une invariance par rotation selon  $\theta$ , le système de coordonnées adapté est cylindrique. Et donc  $\|\vec{B}(M)\| = B(r)$
2. On choisira un contour d'Ampère rectangulaire dont une partie est selon l'axe  $Oz$ . Ce rectangle ACDE aura deux côtés parallèles à l'axe  $Oz$   
Sur le contour intérieur : comme on peut l'orienter selon  $\vec{e}_\theta$ , on le fait. Le champ est alors à priori porté par  $Oz$  :  

$$\oint \vec{B} d\vec{l} = \int_A^C B(0)\vec{e}_z dz \vec{e}_z + \int_C^D B\vec{e}_z dr \vec{e}_r + \int_D^C B(r)\vec{e}_z (-dz \vec{e}_z) + \int_C^A B\vec{e}_z (-dr \vec{e}_r)$$

$$= B(0)a - B(r)a = \mu_0 I_{enl} = 0$$
Donc  $B(0) = B(r) = B_{int}$   
Sur le contour extérieur : on aura la même chose, et on obtiendra aussi un champ uniforme en tout  $r_1$  et  $r_2$ .
3. Prenons un dernier contour qui enjambe :  $\oint \vec{B} d\vec{l} = \int_A^C B_{int}\vec{e}_z dz \vec{e}_z + 0 + 0 + \int_E^A B_{ext}\vec{e}_z (-dz \vec{e}_z)$   

$$= [B_{int} - B_{ext}]a = B_{int}a$$
 en faisant l'hypothèse que le champ extérieur est nul.  

$$= \mu_0 I_{enl} = \mu_0 naI$$
 par théorème d'Ampère  

$$\Rightarrow \vec{B}_{int} = \mu_0 nI \vec{e}_z$$

## IV.9 Application 7

Le champ dans le centre sera forcément nul.

# V EM4 : distributions dipôlaires

## V.1 1.2

Considérons une distribution de charges  $q_i$  (placées aux points  $OP_i$ ) portant une charge totale nulle  $\sum_i q_i = 0$

On appelle moment dipolaire le vecteur  $\vec{p} = \sum_i q_i \vec{OP}_i = \sum_{j \text{ charge} < 0} q_j \vec{OP}_j + \sum_{k \text{ charge} > 0} q_k \vec{OP}_k$

Où  $\sum_j q_j = -q$  (charge totale négative) et  $\sum_k q_k = +q$  (charge totale positive)

$\sum_{k \text{ charge} > 0} q_k \vec{OP}_k$  correspond au barycentre d'un ensemble de points  $(M_i)$  affectés de coefficients  $(m_i)$  :

le point  $G$  tel que  $\sum_i m_i \vec{GM}_i = \vec{0}$

Pour le trouver, si  $\sum m_i \neq 0$  :  $\sum m_i (\vec{GO} + \vec{OM}_i) = \vec{0}$

Ce qui permet de faire  $\vec{GO} \sum m_i + \sum m_i \vec{OM}_i = \vec{0}$

Et donc  $\vec{OG} = \frac{1}{\sum m_i} \sum m_i \vec{OM}_i$

Alors :  $\vec{p} = \sum_j q_j \vec{ON} + \sum_k q_k \vec{OP} = -q\vec{ON} + q\vec{OP} = q(\vec{NO} + \vec{OP}) = q\vec{NP}$

## V.2 1.3

Symétries et invariances : à cause de la séparation de charge entre N chargé  $-q$  et P chargé  $+q$ .

On a invariance par rotation d'angle  $\varphi$  autour de l'axe du dipôle. Donc  $V(M) = V(r, \theta)$  en coordonnées sphériques.

On a comme symétries de  $D$  : tout plan contenant N et P est plan de symétrie. Le plan  $(M, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$  est plan de symétrie donc  $\vec{E} \in (O, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ . Le plan médian qui passe par O est un plan d'antisymétrie, auquel le champ est toujours orthogonal.

Expression du potentiel : par superposition, on aura :

$$V(r, \theta) = V_+(r, \theta) + V_-(r, \theta) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 PM} + \frac{-q}{4\pi\epsilon_0 NM}$$

$$\text{On a } PM = \sqrt{PM^2} = \sqrt{\vec{P}\vec{M} \cdot \vec{P}\vec{M}} = \sqrt{(\vec{P}\vec{O} + \vec{O}\vec{M})(\vec{P}\vec{O} + \vec{O}\vec{M})}$$

$$= \sqrt{r^2 - ar\vec{e}_z\vec{e}_r + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = r\sqrt{1 - \frac{a}{r}\cos\theta + \left(\frac{a}{2r}\right)^2}$$

$$\text{Et on a } NM = r\sqrt{1 + \frac{a}{r}\cos\theta + \left(\frac{a}{2r}\right)^2}$$

$$\text{D'où } V(r, \theta) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r \sqrt{1 - \frac{a}{r}\cos\theta + \left(\frac{a}{2r}\right)^2}} + \frac{-q}{4\pi\epsilon_0 r \sqrt{1 + \frac{a}{r}\cos\theta + \left(\frac{a}{2r}\right)^2}}$$

$$\text{Donc } V(r, \theta) \simeq \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \left[ \left(1 + \frac{a}{2r}\cos\theta\right) - \left(1 - \frac{a}{2r}\cos\theta\right) \right]$$

$$V(r, \theta) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \left[ 2\frac{a}{2r}\cos\theta \right] = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

$$\text{En trichant un peu, on peut réécrire de manière intrinsèque : } V(r, \theta) = \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3}$$

### V.3 1.4

Expression du champ de  $\vec{E}$  :  $\vec{E} = -\text{grad}(V)$

$$= \begin{vmatrix} -\frac{\partial V}{\partial r} \\ -\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta} \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{2p\cos\theta}{4\pi\epsilon_0 r^3} \\ \frac{p\sin\theta}{4\pi\epsilon_0 r^3} \\ 0 \end{vmatrix} = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3} \begin{vmatrix} 2\cos\theta \\ \sin\theta \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$\text{Pour les équipotentiels : } V(r, \theta) = \frac{p\cos\theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} = V_0 \Rightarrow r^2 = \frac{p\cos\theta}{4\pi\epsilon_0 V_0} \Rightarrow r = \sqrt{\left| \frac{p\cos\theta}{4\pi\epsilon_0 V_0} \right|}$$

$$\text{Pour les lignes de champ, on cherche les courbes telles que } d\vec{l} \wedge \vec{E} = \vec{0}$$

### V.4 2.1

$$\text{Moment du couple : } \vec{\Gamma} = \vec{O}\vec{P} \wedge \vec{F}_+ + \vec{O}\vec{N} \wedge \vec{F}_- = \left(\frac{a}{2}\vec{u} \wedge q\vec{E}_0\right) + \left(-\frac{a}{2}\vec{u} \wedge (-q\vec{E}_0)\right) = qa\vec{u} \wedge \vec{E}_0 = \vec{p} \wedge \vec{E}_0$$

Le champ extérieur tend à faire tourner le dipôle pour l'aligner dans son sens.

### V.5 2.2

On reprend l'exemple d'une charge  $-q$  au point  $N$  et la charge  $q$  au point  $P$ .

On rappelle :  $\mathcal{E}_p = +qV(P) - qV(N)$

$$\text{où } \begin{cases} V(P) \simeq V(O) + \text{grad}(V(O))\vec{O}\vec{P} \\ V(N) \simeq V(O) + \text{grad}(V(O))\vec{O}\vec{N} \end{cases}$$

$$\text{Et donc } \mathcal{E}_p \simeq q\text{grad}(V) \cdot (\vec{N}\vec{P}) = -\vec{p}\vec{E}$$

$$\text{Et donc } \mathcal{E}_p \simeq -pE_0 \cos\theta \text{ dans ce cas}$$

$$\text{On rappelle qu'en dimension 3, les DL sont : } f(x+dx, y+dy, z+dz) = f(x, y, z) + \text{grad}(f)d\vec{l}$$

### V.6 2.3

$$\text{On a que } F_x = qE_x(P) - qE_x(N) = q[E(O) + \text{grad}(E_x) \cdot \vec{O}\vec{P}] - q[E(O) + \text{grad}(E_x) \cdot \vec{O}\vec{N}]$$

$$= q\text{grad}(E_x) \cdot (\vec{O}\vec{P} - \vec{O}\vec{N}) = q\text{grad} \cdot \vec{N}\vec{P} = \vec{p}(\text{grad}(E_x))$$

$$= (\vec{p} \cdot \text{grad})E_x = \left[ p_x \frac{\partial}{\partial x} + p_y \frac{\partial}{\partial y} + p_z \frac{\partial}{\partial z} \right] E_x = \text{grad}(\vec{p}E_x \vec{e}_x)$$

Conséquence : la force qui apparaît dans un champ non-uniforme tend à attirer le dipôle vers les zones de champ fort.

## V.7 3.2

Invariances de la distribution par rotation autour de l'axe autour du vecteur  $\vec{m}$  donc de rotation selon l'angle  $\varphi$ . On se place en coordonnées sphériques.

Symétries de la distribution : le plan  $(xOy) = \Pi$  perpendiculaire à  $\vec{m}$  contenant le dipôle.  $\Pi$  est un plan de symétrie de la distribution, donc c'est un plan d'antisymétrie du champ  $\vec{B}$

Le plan  $(M, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta) = \Pi^*$  est un plan d'antisymétrie de la distribution, donc un plan de symétrie du champ  $\vec{B}$  : on en déduit que  $\vec{B}$  est dans ce plan.

## V.8 Application 2

1. Elle adopte la direction du champ magnétique terrestre : son vecteur  $\vec{m}$  est aligné avec le champ magnétique terrestre  $\vec{B}_{T_H}$  en sa position.

On le justifie par l'énergie potentielle :  $\mathcal{E}_p = -\vec{m} \cdot \vec{B}_{T_H} = -m B_{T_H} \cos \theta$  qui a une position d'équilibre stable en  $\theta = 0$  donc  $\vec{m}$  est parallèle à  $\vec{B}_T$  et de même sens.

2. On mesure  $\theta = 45^\circ$  quand  $\vec{m}$  a atteint sa nouvelle position d'équilibre, c'est que  $\vec{B}_{tot}$  est de même sens.

$$\text{Et donc } \vec{B}_{tot} = \vec{B}_{T_H} + \vec{B}_S = \begin{vmatrix} B_{tot} \cos \theta \\ B_{tot} \sin \theta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{B_{tot}}{\sqrt{2}} \\ \frac{B_{tot}}{\sqrt{2}} \end{vmatrix}$$

Donc  $B_{T_H} = B_S$

On peut donc mesurer le champ de la terre avec cette expérience.

3. On a donc  $\vec{B}_{T_H} = \mu_0 \frac{N}{L} I$

# VI EM5 LESGOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOO

## VI.1 1.1

On va choisir un système fermé qui contient le système ouvert et le faire se déplacer dans l'espace et le temps.

Soit  $\Sigma^*$  un système fermé entre deux sections. Soit  $\Sigma^*(t + dt)$ . La largeur de la tranche de  $\Sigma^*$

$\Sigma^*$  est un système fermé, donc par conservation de la charge,  $q_{\Sigma^*}(t + dt) - q_{\Sigma^*} = 0$

Et donc  $[dq_s + q_\sigma(t + dt)] - [dq_s + q_\sigma(t)] = 0$

$S dx [\rho(t + dt) - \rho(t)] - j(x) S dt + j(x + dx) S dt = 0$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} dt dx + \frac{\partial j}{\partial x} dx dt = 0$$

$$\text{et Donc } \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial j}{\partial x} = 0$$

Donnons un exemple de grandeur qui n'est pas conservative. L'entropie n'est pas conservative, elle est créée!

## VI.2 2

Ce que montrent les équations de Maxwell, c'est que si on connaît  $\text{div} \vec{A}$  et  $\vec{rot}(\vec{A})$ , alors on peut connaître  $\vec{A}$  tout entier. Et c'est beau.

## VI.3 2.2

On veut retrouver  $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} \vec{j} = 0$  avec les équations de Maxwell-Ampère et de Maxwell-Gauss.

$$\operatorname{div}(\vec{r\ot{B}}) = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{B}) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} \right)$$

Or la dérivation commute. Donc  $\operatorname{div}(\vec{r\ot{B}}) = 0$  pour tout champ  $\vec{B}$

Donc en faisant le  $\operatorname{div}$  de l'équation de Maxwell-Ampère, on obtient :

$$\operatorname{div}(\vec{r\ot{B}}) = 0 = \operatorname{div} \left( \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$$

Or  $\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$  par Maxwell-Gauss.

$$\text{Donc } 0 = \mu_0 \operatorname{div} \vec{j} + \mu_0 \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

## VI.4 3.1

On a que  $\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$  et donc :  $\iiint \operatorname{div} \vec{E} d\tau = \oint \vec{E} d\vec{S}$  avec  $M$  dans le volume  $V$  délimité par une surface fermée  $S$  par Green-Ostrogradsky.

$$\text{Or } \iiint \operatorname{div} \vec{E} d\tau = \iiint \frac{\rho(M)}{\varepsilon_0} d\tau = \oint \vec{E} d\vec{S}$$

D'où le théorème de Gauss.

## VI.5 3.2

Flux conservatif veut dire que le flux entrant dans une surface fermée est égal au flux sortant de cette surface

On a que  $\operatorname{div} \vec{B} = 0$  et donc :  $\iiint \operatorname{div} \vec{B} d\tau = \oint \vec{B} d\vec{S}$  avec  $M$  dans le volume  $V$  délimité par une surface fermée  $S$  par Green-Ostrogradsky.

$$\text{Or } \iiint \operatorname{div} \vec{B} d\tau = \iiint 0 d\tau = \oint \vec{B} d\vec{S}$$

Le champ  $\vec{B}$  ne diverge pas à partir de ses sources (différent de  $\vec{E}$ )

Maxwell-Flux reste valable aussi en dynamique (en régime non-stationnaire).

## VI.6 3.3

$$\oint_{(S)} \vec{r\ot{B}} \cdot d\vec{S} = \oint_{(C)} \vec{B} d\vec{l} \text{ avec } (C) \text{ le contour fermé sur lequel s'appuie } (S)$$

$$= \oint_{(S)} \mu_0 \vec{j} d\vec{S} + \oint_{(S)} \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} d\vec{S} = \mu_0 I_{(S)} + \mu_0 I_{depl} \text{ avec } I_{depl} = \oint_{(S)} \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} d\vec{S}$$

$$\text{On obtient le théorème d'Ampère généralisé : } \oint_{(C)} \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 I_{(S)} + \mu_0 I_{depl}$$

## VI.7 3.4

$$\begin{aligned} \text{On intègre l'équation de Maxwell-Faraday sur une surface } (S) : \oint_{(S)} \vec{r\ot{B}} \cdot d\vec{S} &= \oint \vec{E} d\vec{l} = \oint -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S} = \\ &= -\frac{\partial}{\partial t} \oint \vec{B} d\vec{S} = -\frac{\partial \phi_b}{\partial t} \end{aligned}$$

Quand le champ  $\vec{B}(t)$  varie, il apparaît une circulation non-nulle du champ  $\vec{E}$  le long d'un contour fermé. (En statique, on aurait  $\vec{E} = -\vec{grad}(V) \Leftrightarrow \oint \vec{E} d\vec{l} = \oint -\vec{grad}(V) d\vec{l} = -[V]_A^A = 0$ )

On retrouve hors statique la loi de Faraday qui correspond au phénomène d'induction :  $\oint \vec{E} d\vec{l} = e_{ind} = -\frac{d\phi_B}{dt}$

## VI.8 Application 1

1. On utilisera l'équation de Maxwell-Ampère :  $\vec{r\ot{B}} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ . Il n'y a pas de courant entre les armatures, donc  $\vec{r\ot{B}} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

2. On a des invariances de translation selon  $r$  (tant qu'il est grandement inférieur à  $R$  pour négliger l'effet de bord, on le considérera donc comme un paramètre) et rotation selon  $\theta$ . Donc  $\|\vec{B}\|(M) = \|\vec{B}\|(r, z)$ . On se placera alors en coordonnées cylindriques.

Sur les symétries : le plan  $(M, \vec{e}_r, \vec{e}_z)$  est un plan de symétrie de  $D$  et de  $\vec{E}$  donc le champ magnétique sera selon  $\vec{e}_\theta$

3. On va donc avoir  $\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = -\mu_0 \varepsilon_0 E_0 \omega \sin(\omega t) \vec{e}_z$  qui est égal à  $r \vec{\text{rot}} \vec{B} \cdot \vec{e}_z = \frac{1}{r} \frac{\partial r B_\theta}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial B_r}{\partial \theta}$

Et donc  $\frac{1}{r} \frac{d}{dr}(r B_\theta) = -\mu_0 \varepsilon_0 E_0 \omega \sin(\omega t)$

$\frac{d}{dr}(r B_\theta) = -\mu_0 \varepsilon_0 E_0 r \omega \sin(\omega t)$

en primitivant :  $r B_\theta(r) = -\mu_0 \varepsilon_0 E_0 \frac{r^2}{2} \omega \sin(\omega t)$  sans constante d'intégration car sinon le champ divergerait en 0, ce qui est incohérent.

Donc  $\vec{B} = -\mu_0 \varepsilon_0 E_0 \omega \frac{r}{2} \sin(\omega t) \vec{e}_\theta$

## VI.9 4.1

Maxwell-Gauss et Maxwell-Thomson ne changent pas en stationnaire, n'ayant pas de dépendance temporelle.

Pour Maxwell-Faraday :  $r \vec{\text{rot}}(\vec{E}) = \vec{0}$  qui donne que  $E = -\vec{\text{grad}}(V)$

Pour Maxwell-Ampère :  $r \vec{\text{rot}}(\vec{B}) = \mu_0 \vec{j}$  qui permet de retrouver le théorème d'Ampère

## VI.10 5.1

On peut se placer dans l'ARQS quand on peut négliger le temps de retard  $\tau$  à la propagation du signal dans le circuit par rapport au temps caractéristique de variation des signaux  $T_{\text{signal}}$ .

Avec un circuit de longueur  $L$  :  $\tau = \frac{L}{c}$  (enfin,  $\frac{2}{3}c$  plus rigoureusement.)

On veut donc  $\frac{L}{c} \ll T_{\text{signal}} = \frac{1}{f_{\text{signal}}} \Leftrightarrow f_{\text{signal}} \ll \frac{c}{L}$  ou si on peut négliger la taille du circuit devant la longueur d'onde du signal :  $L \ll \lambda_{\text{signal}} = \frac{c}{f_{\text{signal}}}$

## VI.11 5.2

On a  $\epsilon_0 \mu_0 = \frac{1}{c^2}$

On a en termes d'ordres de grandeur  $\left[ \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t} \right] \sim \frac{|E|}{c^2 T}$  or  $[r \vec{\text{rot}} \vec{E}] \sim \frac{E}{L}$

On a  $[r \vec{\text{rot}} \vec{B}] \sim \frac{|B|}{L}$  or  $\left[ -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right] \sim \frac{B}{T}$

Donc  $[r \vec{\text{rot}} \vec{B}] \sim \frac{|B|}{L}$

Le terme de déplacement est négligé dans l'ARQS, on retrouve donc dans l'ARQS et donc Maxwell-Ampère stationnaire.

# VII EM6 : Energie du champ électromagnétique, cours intégral en ces lieux

Energies associées à la présence de champs  $(\vec{E}, \vec{B})$  dans certains systèmes :

On a déjà vu l'énergie emmagasinée dans une bobine :  $\mathcal{E}_{\text{mag}} = \frac{1}{2} L i^2$

On a déjà vu l'énergie emmagasinée dans un condensateur :  $\mathcal{E}_{\text{elec}} = \frac{1}{2} C u^2$

On veut savoir si on peut obtenir des expressions pareilles ailleurs, en faisant les liens avec les champs  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$ .

## VII.1 Bilan d'énergie électromagnétique

### Puissance cédée ou fournie par le champ à une charge (un porteur de charge)

Si on a une particule chargée  $q_i$  avec une vitesse  $\vec{v}_i$  dans un référentiel  $\mathcal{R}$  donné, dans une zone de l'espace où existe un champ  $(\vec{E}, \vec{B})$  (pas forcément créé par la charge  $q_i$ ).

Si on veut étudier les forces s'appliquant mécaniquement sur la charge, on doit écrire la force de Lorentz et surtout sa puissance :

$$\mathcal{P}_{L_i} = \vec{F}_{L_i} \cdot \vec{v}_i = [q_i(\vec{E} + \vec{v}_i \wedge \vec{B})] \cdot \vec{v}_i = q_i \vec{v}_i \cdot \vec{E}$$

Donc seul  $\vec{E}$  fournit de la puissance aux charges.

### Puissance volumique cédée par le champ aux porteurs de charges

Soit un volume de l'espace  $d\tau$  avec des charges de type  $q_i, q_j$  de vitesses respectives  $\vec{v}_i, \vec{v}_j$ , chaque type étant distinct. Dans un élément de volume  $d\tau$ , on note  $n_i$  la densité volumique de porteurs de charges de type  $i$

Il y a un nombre  $dN_i = n_i d\tau$  de porteurs de charges de type  $i$  dans  $d\tau$

Donc la puissance totale cédée par le champ  $\vec{E}$  à tous les porteurs de charge de  $d\tau$  est :

$$d\mathcal{P} = \sum_i dN_i \mathcal{P}_{L_i} = \sum_i q_i \vec{v}_i \cdot \vec{E} d\tau = \vec{j} \cdot \vec{E} d\tau$$

En effet,  $\vec{j} = \sum_i q_i \vec{v}_i$  est la densité volumique de courant

Si on veut la puissance volumique cédée par le champ aux charges :

$$\frac{d\mathcal{P}}{d\tau} = \vec{j} \cdot \vec{E}$$

Quelques remarques

1. Seules les charges mobiles reçoivent de l'énergie du champ électromagnétique.
2. Le signe de  $\frac{d\mathcal{P}}{d\tau}$  est le signe de  $\vec{j} \cdot \vec{E}$  :
  - Si  $\vec{j} \cdot \vec{E} > 0$  : le champ fait "bouger les charges", il leur fournit de l'énergie
  - Si  $\vec{j} \cdot \vec{E} < 0$  : ce sont les charges qui fournissent de l'énergie au champ

### Equation locale de Poynting

Normalement, on devrait nous la fournir, mais c'est quand même bien de la retenir par coeur parce que c'est pas totalement sûr que ça soit donné. Elle se démontre à partir des équations de Maxwell, mais la démonstration est hors-programme.

Considérons une distribution de charge et de courant  $(\rho, \vec{j})$  créant un champ  $(\vec{E}, \vec{B})$  dans une zone de l'espace.

$(\rho, \vec{E}, \vec{j}, \vec{B})$  sont reliés par les équations de Maxwell.

$$\text{Si on utilise Maxwell-Ampère : } \vec{j} \cdot \vec{E} = \left[ \frac{1}{\mu_0} r\vec{ot} \vec{B} - \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right] \cdot \vec{E} = -\epsilon_0 \frac{\partial E^2}{\partial t} + \frac{1}{\mu_0} r\vec{ot} \vec{B} \cdot \vec{E}$$

$$\text{div}(\vec{E} \wedge \vec{B}) = \vec{B} \cdot r\vec{ot} \vec{E} - \vec{E} \cdot r\vec{ot} \vec{B}$$

$$\text{Et donc } \vec{j} \cdot \vec{E} = -\epsilon_0 \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{1}{\mu_0} [\vec{B} \cdot r\vec{ot} \vec{E} - \text{div}(\vec{E} \wedge \vec{B})]$$

$$= -\frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{\epsilon_0}{2} \vec{E}^2 + \frac{1}{2\mu_0} \vec{B}^2 \right] - \text{div} \left( \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} \right)$$

D'où l'équation locale de Poynting :

$$\text{div} \left( \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} \right) + \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{\epsilon_0}{2} \vec{E}^2 + \frac{1}{2\mu_0} \vec{B}^2 \right] = -\vec{j} \cdot \vec{E}$$

On note  $\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}$  le vecteur de Poynting,  $u_{em} = \frac{\epsilon_0}{2} \vec{E}^2 + \frac{1}{2\mu_0} \vec{B}^2$  la densité volumique d'énergie électromagnétique

On peut faire une analogie avec l'équation de conservation de la charge  $\text{div}(\vec{j}) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ , la somme du  $\text{div}$  d'un vecteur dont le flux cause une variation de  $\rho$  et d'une dérivée temporelle d'une grandeur dont on sait l'évolution temporelle locale, somme qui donne le terme source nul pour la charge.

## VII.2 Grandeurs énergétiques associées à un champ

### Version intégrale de l'équation de Poynting

En intégrant l'équation sur un volume ( $V$ ), de surface extérieure ( $S$ ), on aura :

$\iint_V \text{div} \vec{\Pi} d\tau = \oint_S \vec{\Pi} d\vec{S}$  = flux sortant du vecteur de Poynting (au travers de la surface ( $S$ ))

$\iint_V \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{\epsilon_0}{2} E^2 + \frac{1}{2\mu_0} B^2 \right] d\tau = \frac{\partial}{\partial t} \iint_V \frac{\epsilon_0}{2} E^2 + \frac{1}{2\mu_0} B^2 d\tau$  = variation temporelle de l'énergie électromagnétique contenue dans le volume ( $V$ ), à cause de la présence de ( $\vec{E}$ ,  $\vec{B}$ )

$\iint_V -\vec{j} \cdot \vec{E} d\tau = \iint_V -\frac{d\mathcal{P}}{d\tau} d\tau = -\mathcal{P}$  = opposé de la puissance cédée par le champ aux charges présentes dans le volume ( $V$ )

Multiplions par  $dt$  :  $\Phi_S(\vec{\Pi})dt + du_{em} = -\mathcal{P}dt$

$du_{em} = -\Phi_S(\vec{\Pi})dt - \mathcal{P}dt$  où  $du_{em}$  est la variation d'énergie électromagnétique,  $\Phi_S(\vec{\Pi})dt$  est la quantité d'énergie sortante par flux de  $\vec{\Pi}$ , donc par rayonnement et  $\mathcal{P}dt$  est la quantité d'énergie fournie par le champ aux charges.

### Densité volumique d'énergie

$$u_{em} = \frac{\epsilon_0}{2} E^2 + \frac{1}{2\mu_0} B^2$$

Faisons la vérification dimensionnelle :  $\left[ \frac{\epsilon_0}{2} E^2 \right] = [\epsilon_0 E][E] = \left[ \frac{Q}{L^2} \right] [E]$ , par la force de Lorentz,  $[QE]$  est une force et  $[E]L^2 = \frac{[Q]}{[\epsilon_0]}$  par le théorème de Gauss

Donc  $\left[ \frac{\epsilon_0}{2} E^2 \right] = \frac{M.L.T^{-2}.L}{L^3}$  et donc une énergie sur un volume.

$\left[ \frac{1}{2\mu_0} B^2 \right]$  : d'après la force de Lorentz, on a que  $[F] = [Q][B]LT^{-1}$  et on a par théorème d'Ampère que  $[B]L = [\mu_0][I] = [\mu_0] \frac{[Q]}{T}$

Donc  $\left[ \frac{1}{2\mu_0} B^2 \right] = \frac{[Q][B]}{TL} = \frac{[F]}{TLLT^{-1}} = \frac{[F]L}{L^3}$  qui est aussi une énergie sur un volume.

Donc on a bien que  $u_{em}$  est une énergie volumique liée à la présence des champs  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$

Energies électromagnétiques macroscopiques reliées à  $u_{em}$  :

— énergie magnétique "emmagasinée" dans une bobine :  $U_{mg} = \frac{1}{2} Li^2$  : voir l'exercice 1 du TD

— énergie électrique "emmagasinée" dans un condensateur :  $U_{elec} = \frac{1}{2} Cu^2$

Prenons un condensateur plan infini, avec des armatures de surface  $S \gg e^2$ . Le champ à l'intérieur est  $\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{e}_z = \frac{Q}{S\epsilon_0} \vec{e}_z$

Lien avec la tension  $U = \Delta V = E.e = \frac{Qe}{S\epsilon_0}$

Donc si on écrit l'énergie électrique dans tout le volume intérieur au condensateur :  $u_{em}Se = \frac{\epsilon_0 E^2 Se}{2} =$

$$\frac{\epsilon_0}{2} \left( \frac{Q}{S\epsilon_0} \right)^2 Se = \frac{\epsilon_0}{2e} \left( \frac{Qe}{S\epsilon_0} \right)^2 S = \frac{1}{2} Cu^2$$

Dans ces deux modèles simples, on obtient que la formule de  $u_{em}$  est compatible.

### Vecteur de Poynting et puissance rayonnée

Le vecteur de Poynting représente à quel point il y a un rayonnement du champ électromagnétique au travers d'une surface, donc la densité surfacique de puissance rayonnée par le champ électromagnétique :

$$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}$$

Donc la puissance rayonnée au travers d'une surface ( $S$ ) orientée s'écrit  $\Phi = \iint_S \vec{\Pi} \cdot d\vec{S} = \iint_S \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} \cdot d\vec{S}$  (en W)

Donc la puissance rayonnée est nulle si  $\vec{E}$  ou  $\vec{B}$  est nul.

Applications : Prenons un LASER, qui a une puissance de  $1mW$ , sur une section avec un diamètre de  $2mm$ . Calculer la norme de  $\vec{\Pi}$

$$\|\vec{\Pi}\| \simeq \frac{\mathcal{P}}{S} \simeq \frac{\mathcal{P}}{\pi \frac{D^2}{4}} \sim \frac{10^{-3}}{\pi 10^{-6}} \sim 0.3 \times 10^3 \sim 300W.m^{-2}$$

## VIII Bilan énergétique dans un conducteur dit ohmique

### Loi d'Ohm locale

Dans un milieu possédant des porteurs de charge mobile (en densité volumique  $n$ ), le champ  $\vec{E}$  appliqué met les charges en mouvement. C'est un milieu "conducteur", qui permet aux charges de se déplacer.

Expérimentalement, on constate que la densité volumique de courant  $\vec{j}$  est proportionnelle à  $\vec{E}$  :  $\vec{j} = \gamma \vec{E}$  avec  $\gamma$  la conductivité du matériau

$$(L'unité de  $\gamma$  est :  $A.m^{-2}.V^{-1}.m = A.V^{-1}.m^{-1} = \Omega^{-1}.m^{-1} = S.m^{-1})$$$

Lien avec la loi d'Ohm intégrale : Prenons un cylindre de longueur  $l$ , de section  $S$ . Ses extrémités sont  $A$  et  $B$ .  $\vec{E}$  et donc  $\vec{j}$  sont de  $A$  vers  $B$  selon l'axe  $x$ .

Pour un conducteur rectiligne (axe  $Ox$ , section  $S$ , longueur  $l$ ) de conductivité  $\gamma$  soumis à un champ appliqué  $\vec{E}$  uniforme.

$$I = \iint_S \vec{j} d\vec{S} = jS = \gamma ES \text{ où } \vec{E} = -\vec{grad}(V) = E\vec{e}_x = -\frac{dV}{dx}$$

$$\text{Donc } E[x_b - x_a] = -[V(x)]_A^B = V_a - V_b = U$$

$$\text{Donc } I = \gamma S \frac{U}{l} \text{ et donc } U = \frac{l}{\gamma S} I$$

Donc la résistance de la portion de section  $S$  de longueur  $l$  est  $R = \frac{l}{\gamma S}$ , de plus la conductance de la portion sera  $G = \gamma \frac{S}{l}$

### Puissance transférée aux porteurs de charges

$$\text{Densité volumique de puissance cédée par } \vec{E} \text{ aux charges : } \frac{\mathcal{P}}{dt} = \vec{j} \cdot \vec{E} = \gamma E^2 > 0$$

Donc dans un matériau conducteur, les charges reçoivent de la puissance du champ

$$\text{Dans tout le volume du conducteur } (l, S) : \mathcal{P} = \gamma E^2 Sl$$

$$\text{et comme } E = \frac{U}{l}, \text{ on a : } \mathcal{P} = \gamma \frac{U^2}{l^2} Sl = \gamma \frac{S}{l} U^2 = \frac{1}{R} U^2 = RI^2$$

$$\text{Donc } \mathcal{P} = RI^2 \equiv \frac{U^2}{R} \text{ qui la puissance "dissipée par effet joule", la puissance cédée par } \vec{E} \text{ aux charges.}$$

### Puissance rayonnée (au travers des parois du conducteur)

Pour un conducteur cylindrique d'axe de symétrie  $Oz$ , de section  $S$  et de longueur  $l$ . On a un champ  $\vec{E} = E\vec{e}_z$  uniforme, un vecteur  $\vec{j} = \gamma E\vec{e}_z$  uniforme selon le même axe. Déterminons le champ magnétique engendré par le courant :

$$\text{On a des invariances par translation selon } z \text{ et par rotation selon } \theta. \text{ Donc } \|\vec{B}\| = B(r)$$

$$\text{On a que } (M, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta) \text{ est plan de symétrie du courant, donc } \vec{B} = B\vec{e}_\theta$$

Appliquons le théorème d'Ampère à un contour circulaire centré sur  $Oz$  :

$$\oint \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 I_{enl} \Rightarrow \int_0^{2\pi} B(r) r d\theta = \mu_0 \iint \vec{j} d\vec{S}$$

$$\Rightarrow 2\pi r B(r) = \mu_0 j \pi r^2$$

$$\text{Et donc } \vec{B}(r) = \frac{\mu_0}{2} j r \vec{e}_\theta$$

Donc  $\vec{\Pi}$  sera en surface du conducteur.

$$\vec{\Pi} = \frac{E\vec{e}_z \wedge \mu_0 j a \vec{e}_\theta}{2\mu_0} = -\frac{Eja}{2} \vec{e}_r = -\frac{j^2 a}{2\gamma} \text{ en se servant de } E = \frac{j}{\gamma}. \text{ On aurait pu utiliser } I = \pi a j^2.$$

$\vec{\Pi}$  est bien selon  $-\vec{e}_r$ .

Donc la puissance rayonnée au travers de toute la surface du conducteur est :

$$\Phi = \iint_{\text{paroi}} \vec{\Pi} d\vec{S} + \iint_{\text{extremite}} \vec{\Pi} d\vec{S} + \iint_{\text{extremite}} \vec{\Pi} d\vec{S}$$



$$\Phi = \iint_{\text{paroi}} -\frac{j^2 a}{2\gamma} \vec{e}_r \cdot (a d\theta dz \vec{e}_r) = -\frac{j^2 a}{2\gamma} a 2\pi l = -\frac{j^2 \pi a^2 l}{\gamma} = -\frac{I^2 l}{\pi a^2 \gamma} = -RI^2 = -\mathcal{P}_{\text{joule}}$$

En régime stationnaire, la puissance électromagnétique entrant dans le conducteur (par rayonnement) est égale à la puissance dissipée par effet Joule.



# Chapitre III

## TS

### I TS1

#### I.1 Application 1

1. Ce signal n'admet pas de composante continue (rien dans la fréquence 0Hz) ; sa valeur moyenne est  $0 = \langle V_0 + \sum V_k \cos(k\omega t + \varphi_k) \rangle$ .
2. On peut l'obtenir en regardant la période entre les différents pics. On trouve alors une fréquence de 50Hz. On a trois harmoniques autres. Ainsi :  $u_e(t) = 0 + V_1 \cos(2\pi ft + \varphi_1) + V_2 \cos(4\pi ft + \varphi_2) + V_3 \cos(6\pi ft + \varphi_3) + V_5 \cos(10\pi ft + \varphi_5)$ , sans qu'on ait de connaissances sur les phases.
3. Ce signal est pair, donc toutes ses phases sont nulles :  $u_e(t) = 0 + V_1 \cos(2\pi ft) + V_2 \cos(4\pi ft) + V_3 \cos(6\pi ft) + V_5 \cos(10\pi ft)$
4. On trouve  $\frac{169}{2}$

#### I.2 Application 2

1. On voit que la fonction en dents de scie est impaire, donc sa décomposition en série de Fourier n'a que des termes en sin.
2. Un voltmètre en mode DC (Direct Current, contre Alternative Current) donc en courant continu, mesure alors la valeur moyenne. Donc dans ce cas, il mesurera 0. En mode AC, il mesurera la valeur efficace, donc la moyenne du signal au carré.
3. Celle dont les composantes décroissent le plus rapidement est la fonction en triangles, qui a donc le moins de discontinuités.

#### I.3 Application 3

1. On a  $H(w) = \frac{R}{R+jL\omega} = \frac{1}{1+j\omega \frac{L}{R}}$ , et on pose  $\omega_c = \frac{L}{R}$ . On a donc une fonction de transfert de la forme :  $H(\omega) = \frac{1}{1+j\frac{\omega}{\omega_c}}$ . On fait l'application numérique et on obtient  $f_c = 10kHz$
2. On reconnaît la fonction de transfert d'un filtre passe-bas d'ordre 1.
3. On obtient un module de  $|H(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1+(\frac{\omega}{\omega_c})^2}}$  et un déphasage de  $\varphi = -\arg(1+j\frac{\omega}{\omega_c}) = -Arctan(\frac{\omega}{\omega_c})$

On les évalue dans les trois cas proposés :  $\begin{cases} |H(\omega_1)| &= \frac{1}{1+\frac{1}{100}} &\simeq 1 \\ \varphi_1 &= -\arctan(0,1) &\simeq -0,1 \end{cases}$

$\begin{cases} |H(\omega_2)| &= \frac{1}{1+1} = \frac{1}{\sqrt{2}} &\simeq 0,72 \\ \varphi_2 &= -\arctan(1) &\simeq -\frac{\pi}{4} \end{cases}$

$$\begin{cases} |H(\omega_3)| &= \frac{1}{1+100} \simeq \frac{1}{10} \\ \varphi_3 &= -\arctan(10) \simeq -\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

- 4.
- 5.
- 6.
- 7.
- 8.
- 9.
10. Temporellement, on aura un début de charge et de décharge sur chaque demi-période, on aura donc un signal quasi-triangulaire.
11. À hautes fréquences, on aura que  $H(\omega) \sim \frac{\omega_c}{\omega}$  qui est un pseudo-intégrateur (puisqu'il ne l'est qu'à hautes fréquences). Un demi-créneau va donner un signal affine.
12. On a dans cette autre filtre que  $H(\omega) = \frac{1}{1 - j\frac{\omega_c}{\omega}} = \frac{1}{1 - j\frac{f_c}{f}}$ . On a donc un diagramme de Bode avec un dérivateur, et donc un signal à 50 kHz serait transmis presque à 100 pourcents et les harmoniques suivants seront vraiment très bien transmis. On récupérera le même signal en entrée et en sortie. Cependant, il ne sera plus centré en  $\frac{V_0}{2}$ , il sera centré en 0, sans composante continue.
13. Le condensateur à hautes fréquences se comporte comme un fil, et donc on aura bien une sortie qui est globalement l'entrée. Cela ne fonctionne pas pour la composante continue, qui est à trop basse fréquence.
14. Si  $f \ll f_c$ , alors  $H \sim \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{f_c}{f}}} \sim \frac{1}{\sqrt{20^2}} = \ll 1$  et on a un signal atténué de dérivateur en basses fréquences.

## I.4 Application 4

1. On fait un diviseur de tension dans la maille 1 :  $u_s = \frac{Z_L}{2Z_L} u_1 = \frac{1}{2} u_1$   
 On fait ensuite un diviseur de tension dans la maille globale (où la maille 1 a une impédance équivalente) :  $u_1 = \frac{Z_{eq}}{Z_{eq} + R} u_e = \frac{1}{1 + \frac{R}{Z_{eq}}} u_e$ .  
 Or  $Z_{eq} = Y_c + 2Y_L = jC\omega + \frac{2}{jL\omega}$   
 Donc :  $u_1 = \frac{1}{1 + R(jC\omega + \frac{2}{jL\omega})} u_e$ . On en tire :  $u_s = \frac{\frac{1}{2}}{1 + j\sqrt{\frac{C}{2L}}(\sqrt{2LC}\omega - \frac{1}{\sqrt{2LC}\omega})} u_e$   
 On pose alors le facteur de qualité  $Q = R\sqrt{\frac{C}{2L}}$  et la pulsation propre  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{2LC}}$  et on a  $H_0 = \frac{1}{2}$
2. À haute fréquence, on a que :  $H \sim \frac{H_0}{jQ\frac{\omega}{\omega_0}} \sim \frac{\omega_0 H_0}{jQ\omega} \sim \frac{\omega_0 H_0}{Q} \times \frac{1}{j\omega}$  qui est un comportement intégrateur.  
 À basse fréquence, on a que :  $H \sim -\frac{H_0}{jQ\frac{\omega_0}{\omega}} \sim \frac{j\omega H_0}{Q\omega_0} \sim \frac{H_0}{Q\omega_0} \times j\omega$  qui est un comportement dérivateur.  
 On a donc un filtre passe-bande d'ordre 2, dont le point maximal est  $H_0$ .
3. La définition de la bande passante à -3dB est :  $[\omega_1, \omega_2]$  telles que  $|H(\omega_{1,2})| = \frac{H_0}{\sqrt{2}}$ . On rappelle la formule  $\Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q}$  pour la longueur de la bande passante.  
 On les trouve en résolvant  $|H(\omega)| = \frac{H_0}{\sqrt{2}}$ . On en tire rapidement l'équation  $Q^2(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}) = 1 \Leftrightarrow Q(X - \frac{1}{X}) = \pm 1 \Leftrightarrow X^2 \pm \frac{1}{Q}X - 1 = 0$   
 On a ces racines :  $\pm \frac{1}{2Q} \pm \frac{1}{2}\sqrt{4 + \frac{1}{Q^2}}$

On élimine les solutions incompatibles avec le problème et on obtient : 
$$\begin{cases} \omega_1 &= \frac{\omega_0}{2Q} + \frac{\omega_0}{2} \sqrt{4 + \frac{1}{Q^2}} \\ \omega_2 &= -\frac{\omega_0}{2Q} + \frac{\omega_0}{2} \sqrt{4 + \frac{1}{Q^2}} \end{cases}$$

On a  $\Delta f = \frac{f_0}{Q} = \frac{500}{50} = 10Hz$

4. On a que  $s(t) \simeq |H(f_0)| \frac{2E}{\pi} \cos(2\pi f_0 t)$

On multiplie d'un gros facteur la première harmonique. La sortie temporelle est un cosinus (on n'a plus que la première composante). On a extrait un des pics, mais ça aurait pu le faire sur n'importe quel harmonique.

## II TS2

### II.1 Application 1

1. On a un pic unique en  $f_0$ .
2. On a que  $p(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} p_k \cos(2\pi k f_0 t + \varphi k) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \cos(2\pi k f_0 t) + \sum_{k=1}^{+\infty} b_k \sin(2\pi k f_0 t)$  Or la fonction est paire donc  $p(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \cos(2\pi k f_0 t)$  et on a que tous les  $a_k$  sont égaux à 1 d'après l'énoncé, donc, en rappelant que la valeur moyenne vaut  $\frac{1}{2}$ , on a que  $p(t) = \frac{1}{2} + \cos(2\pi f_0 t) + \cos(4\pi f_0 t) + \dots$
3. On a que  $s_{ech}(t) = s(t)p(t) = s_0 \cos(2\pi f_0 t) \left[ \frac{1}{2} + \cos(2\pi f_0 t) + \dots \right]$   
 $= \frac{s_0}{2} \cos(2\pi f_0 t) + \frac{s_0}{2} [\cos(2\pi(f_e - f_0)t) + \cos(2\pi(f_e + f_0)t)] + \frac{s_0}{2} [\cos(2\pi(2f_e - f_0)t) + \cos(2\pi(2f_e + f_0)t)] + \dots$



# Chapitre IV

## Thermodynamique

### I Th2

#### I.1 2.3 équation de la diffusion thermique

En 1D : l'équation locale de conservation de l'énergie donne :

$$\frac{\partial j_Q(x)}{x} + \mu c \frac{\partial T}{\partial t} = 0$$

On injecte  $j_Q = -\lambda \vec{\text{grad}}(T)$  :

$$-\lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \mu c \frac{\partial T}{\partial t} = 0$$

D'où l'équa diff finale :  $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \frac{\mu c}{\lambda} \frac{\partial T}{\partial t} = 0$

En 3D :  $\text{div} \vec{j_Q} + \mu c \frac{\partial T}{\partial t}$

$$\text{div}(-\lambda \vec{\text{grad}} T) + \mu c \frac{\partial T}{\partial t} = 0$$

$$\Delta T - \frac{\mu c}{\lambda} \frac{\partial T}{\partial t} = 0$$

On note  $D_{th} = \frac{\lambda}{\mu c}$  la diffusivité thermique. Sa dimension :  $\frac{\Theta}{L^2} = \frac{1}{[D_{th}]} \frac{\Theta}{T}$

Donc  $[D_{th}] = \frac{L^2}{\Theta} = L^2 \cdot K^{-1}$

#### I.2 2.5 Généralisation : présence d'un terme source

Bilan d'enthalpie à la tranche  $\{x, x + dx\}$  pendant  $dt$  :

En 1D :  $[\phi(x) - \phi(x + dx)]dt + p_s dt S dx = dH = \mu c_p S dx dt$

$$-\frac{\partial j_Q}{\partial x} S dx dt + p_s dt S dx = \mu c_p S dx dt \text{ comme } \phi = j_Q S$$

$$\lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + p_s = \mu c_p \frac{\partial T}{\partial t}$$

#### I.3 3.2 Conduction thermique en géométrie unidimensionnelle

Méthode 1 : utilisation de l'équation de la chaleur stationnaire : On fait l'hypothèse que tout est parfaitement calorifugé entre 0 et  $L$ ,  $S_e$  est connecté à une source de chaleur illimitée à la température  $T_1$  et  $S_s$  est connecté à une source de température  $T_2$ . On fait l'hypothèse de  $T_1 > T_2$

On écrit  $\Delta T - \frac{1}{D_{th}} \frac{\partial T}{\partial t} = 0$ . En régime stationnaire, on aura  $\Delta T = 0$ .

Comme on est à 1 dimension,  $\Delta T = \frac{d^2 T}{dx^2}$  (d droit parce qu'aucune dépendance temporelle)

Donc :  $T(x) = Ax + B$ , et on utilise les conditions limites pour déterminer  $A$  et  $B$

$$T_1 = A \cdot 0 + B \text{ et } T_2 = AL + B$$

$$\text{D'où } B = T_1 \text{ et } A = \frac{T_2 - T_1}{L}$$

D'où  $T(x) = T_1 + \frac{T_2 - T_1}{L}x$  entre  $S_e$  et  $S_s$ , après ça on a les constantes des sources.

Méthode 2 : bilan énergétique en régime stationnaire (méthode plus générale)

En régime stationnaire, le flux entrant est égal au flux sortant, donc en un point donné de la barre, l'enthalpie ne varie pas.

$$\phi(x) = \phi(x + dx) \text{ car } \phi(x) - \phi(x + dx) = dH = 0$$

$$\text{Donc } j_Q(x)S = j_Q(x)S$$

$$\text{D'où } \frac{dj_Q}{dx} = 0$$

$$\text{Donc } -\lambda \frac{d^2T}{dx^2} = 0 \text{ et on retrouve } T(x) = Ax + B, \text{ et on résout de la même manière sur la fin.}$$

## I.4 3.2 Résistance thermique

$\phi$  dans la barre :

$$\phi = j_Q S = -\lambda \frac{dT}{dx} S = -\lambda S \frac{T_2 - T_1}{L} = \lambda S \frac{T_1 - T_2}{L} = \frac{\lambda S}{L} \Delta S$$

ATTENTION, là c'est la différence et pas le Laplacien scalaire.

$$\text{On définit donc } R_{th} = \frac{\Delta T}{\phi_Q}. \text{ Ici, on a donc } R_{th} = \frac{L}{\lambda S}$$

## I.5 3.3

Résistances thermiques bout-à-bout :

Ecrivons la conservation du flux thermique dans les tiges :

$$\phi_1 = \phi_2 \Leftrightarrow \frac{T_0 - T_1}{R_{th1}} = \frac{T_1 - T_2}{R_{th2}}$$

$$\text{Donc : } T_0 - T_1 = \phi R_{th1} \text{ et } T_1 - T_2 = \phi R_{th2}$$

$$\text{Et donc } T_0 - T_2 = \phi(R_{th1} + R_{th2})$$

Résistances thermiques en parallèle :

Ecrivons la conservation du flux thermique dans les tiges :

$$\phi_1 + \phi_2 = \phi \Leftrightarrow \frac{T_0 - T_2}{R_{th1}} + \frac{T_0 - T_2}{R_{th2}} = \frac{T_0 - T_2}{R_{theq}}$$

$$\text{Donc } \frac{1}{R_{theq}} = \frac{1}{R_{th1}} + \frac{1}{R_{th2}}$$

## I.6 4.1

En régime stationnaire, le flux thermique solide→fluide se conserve :

$$\Phi_{s \rightarrow l} = \iint \vec{j}_Q d\vec{S} = \vec{j}_Q \vec{S} = -\lambda \vec{\text{grad}}(T) \cdot \vec{S}$$

$$= -\lambda \left| \frac{T_f - T_s}{e} \right| \vec{u}_x \cdot S \vec{u}_x = \lambda S \frac{T_s - T_f}{e}$$

$e$  est l'épaisseur de la couche limite et  $S$  la surface de la couche limitée considérée.

$$\frac{\lambda S}{e} = \frac{1}{R_{th}}$$

## I.7 4.3

On peut considérer que le problème est à une dimension. 1. Bilan thermique entre  $x$  et  $x + dx$  : par conservation du flux :

$$\Phi(x) - \Phi(x + dx) - \Phi_{cc} = 0$$

$$\Phi(x) = -\lambda \frac{dT}{dx} S \text{ donc :}$$

$$\Phi(x) - \Phi(x + dx) = \frac{d\Phi}{dx} dx = -\lambda \frac{d^2T}{dx^2} dx$$

Et avec  $R$  le rayon du cylindre, on reprend la première équation et :



$$\lambda \frac{d^2 T}{dx^2} dx \pi R^3 - h 2\pi R dx (T - T_a) = 0$$

$$\text{D'où : } \frac{d^2 T}{dx^2} - \frac{2h}{\lambda R} T(x) = -\frac{2h}{\lambda R} T_a$$

2. Conditions limites : On a  $T(x=0) = 0$  et  $T(x=L) = T_a$  (on suppose que la tige est très longue)

Posons  $D = \sqrt{\frac{\lambda R}{2h}}$  la longueur caractéristique dans ce problème. On réécrit donc :  $\frac{d^2 T}{dx^2} - \frac{1}{D^2} T(x) = -\frac{1}{D^2} T_a$

Les solutions générales sont  $T : x \mapsto Ae^{-x/D} + Be^{x/D}$

Donc la solution complète est :  $T : x \mapsto Ae^{-x/D} + Be^{x/D} + T_a$

Avec les conditions limites, on obtient que  $B = 0$  (sinon la température serait infinie à l'infini et ne serait pas  $T_a$ ), et  $T(x=0) = T_0 = A + T_a$ , donc  $A = T_0 - T_a$

Donc  $T(x) = T_a + (T_0 - T_a)e^{-x/D}$

3. Au bout de quelques  $D$ , on est arrivés à  $T_a$ .

$D = \left(\frac{\lambda R}{2h}\right)^{1/2} \simeq \left(\frac{100 \times 6.10^{-3}}{2.10}\right) \simeq \sqrt{3.10^{-2}} \simeq 17cm$  ( $\lambda = 100$  pour les métaux,  $R = 6mm$  par choix,  $h$  est de l'ordre de 10 ou 20)

Donc  $D \ll L = 1m$

## I.8 5.1

1. Bilan d'énergie interne dans le sol  $\{z, z + dz\}$  (de section  $S$ ) :

$$dt[\Phi_Q(z) - \Phi_Q(z + dz)] = \mu c S dz dT$$

$$dtS[j_{Q_z}(z) - j_{Q_z}(z + dz)] = dtSdz \frac{\partial j_{Q_z}}{\partial z} = \mu c S dz dT$$

$$\text{Avec } \vec{j}_Q = -\lambda \text{grad}(T) = -\lambda \frac{\partial T}{\partial z} \vec{u}_z$$

$$\text{D'où } \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \mu c \frac{\partial T}{\partial t}$$

2. On cherche  $T(z, t) = T_0 + f(z) \cos(\omega t)$ , complexifiée en  $T = T_0 + f(z)e^{i\omega t}$

$$\text{On a donc } \lambda f''(z)e^{i\omega t} = \mu c i \omega f(z)e^{i\omega t}$$

$$\lambda f''(z) - \mu c i \omega f(z) = 0$$

3. Notons  $\tau = \frac{\mu c \omega}{\lambda}$ , alors  $X^2 - i\tau = 0$  a pour solutions  $\pm \sqrt{i\tau} = e^{i\pi/4} \sqrt{\tau}$

En posant  $\delta = \sqrt{\frac{2\lambda}{\mu c \omega}}$ , on a  $f''(z) - i \frac{2}{\delta^2} f(z) = 0$

Dimensionnellement,  $\delta$  est donc une longueur. C'est la longueur caractéristique d'évolution de la température. On a  $X^2 - \frac{2i}{\delta^2} = 0$ , et donc  $r_{1,2} = \pm \frac{\sqrt{2}}{\delta} \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)$

$$\text{Donc } f(z) = Ae^{\frac{(1+i)z}{\delta}} + Be^{-\frac{(1+i)z}{\delta}}$$

$T$  tend vers 0 en  $z \rightarrow +\infty$  donc  $A = 0$

$$\text{On a donc } T(z, t) = T_0 + Be^{-\frac{z}{\delta} - \frac{iz}{\delta} i\omega t}$$

$$\text{D'où } T = T_0 + Be^{-z/\delta} \cos(\omega t - \frac{z}{\delta})$$

Pour respecter la forme de l'énoncé, on aura donc  $\theta = B$

On a donc que  $\delta$  est la distance sur laquelle l'onde de température s'atténue et que  $\delta = \frac{\lambda_{th}}{2\pi}$ , où  $\lambda_{th}$  est la longueur d'onde de température dans le sol.

4. On a  $\omega = \frac{2\pi}{T}$  où  $T$  est la durée d'une journée, donc  $\omega \simeq 7,23.10^{-5}$

Alors  $\delta \simeq 13,5cm$ , l'onde est significativement atténuée au bout de  $3\delta < 50cm$

À 50cm sous terre, l'amplitude est d'environ  $0,04\theta \simeq 0,4^\circ C$ , donc la température est entre 2.6 et 3.4 degrés celsius.

## II TH3 : Thermodynamique statistique (1) - Facteur de Boltzmann

### II.1 Statique des fluides

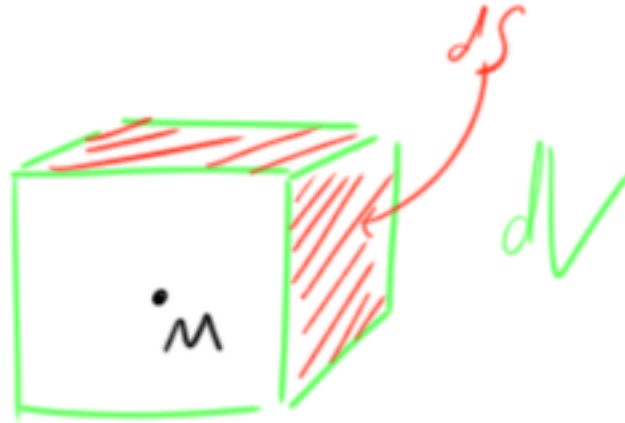
#### Rappel : différentes échelles de description de la matière

On distingue 3 échelles pour étudier la matière :

- échelle macroscopique : distances/tailles  $> 1\text{mm}$ , à cette échelle la matière sera continue et les systèmes considérés seront constitués de  $N$  particules avec  $N \sim \mathcal{N}_A = 10^{23}$ . Il est impossible d'étudier les comportements individuels des particules à cette échelle (on observe des moyennes).
- échelle microscopique : tailles entre  $10^{-10}$  à  $10^{-9}$ , on s'intéresse à des particules individuelles, de nombre  $N$  de 1 à 100 environ. On observe des comportements désordonnés, la matière est discontinue.
- échelle mésoscopique : tailles autour de  $1\mu\text{m}$ , et on a  $N$  entre  $10^6$  et  $10^9$ . On peut définir des moyennes locales :  $\langle v^2 \rangle$  ou  $\langle \vec{F}_p \rangle$

La thermo classique se fait à l'échelle macroscopique, et la thermodynamique statistique se fait à l'échelle mésoscopique.

#### Fluide au repos (dans le champ de pesanteur)



On étudie une particule de fluide de volume  $dV$  (volume mésoscopique) dans un fluide au repos :  $\langle \vec{v} \rangle_M = \vec{0} \forall t$  (par rapport à un référentiel  $\mathcal{R}_T$ ).

On sera toujours en régime stationnaire : aucune grandeur ne dépend de  $t$

Bilan des forces :

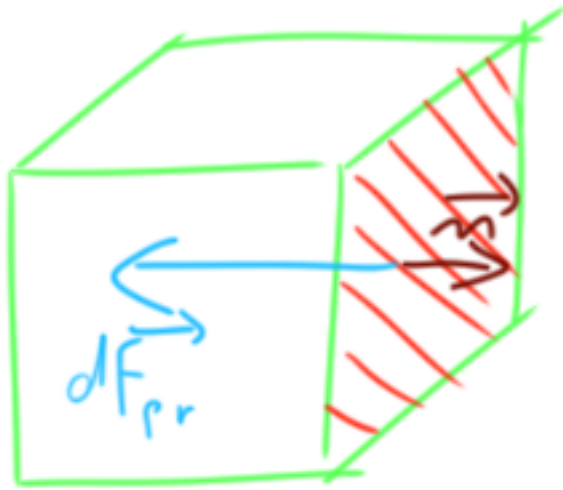
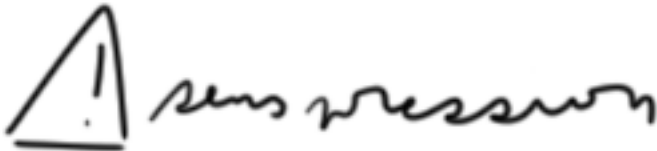
- forces volumiques : ce sont des forces  $d\vec{F}$  à longue portée qui s'exercent sur tout l'élément de volume. Par exemple : le poids d'expression  $d\vec{P} = \mu(M)dV\vec{g}$ , la force de Lorentz...

On peut écrire la force volumique  $\vec{f}_V$  associée :  $\vec{f}_V = \frac{d\vec{F}}{dV}$

Par exemple, la force volumique associée au poids est  $\frac{d\vec{P}}{dV} = \mu\vec{g}$

- forces surfaciques : ce sont des forces à courte portée, qui s'exercent donc sur les parois/frontières du volume  $dV$  donc sur des surfaces  $dS$ . Par exemple : la force de pression, la force de trainée, la force d'Archimède...

La force  $d\vec{F}_s$  sur un élément de surface  $dS$  s'écrit  $d\vec{F}_s = \vec{f}_s dS$ , ou  $\vec{f}_s = \frac{d\vec{F}_s}{dS}$



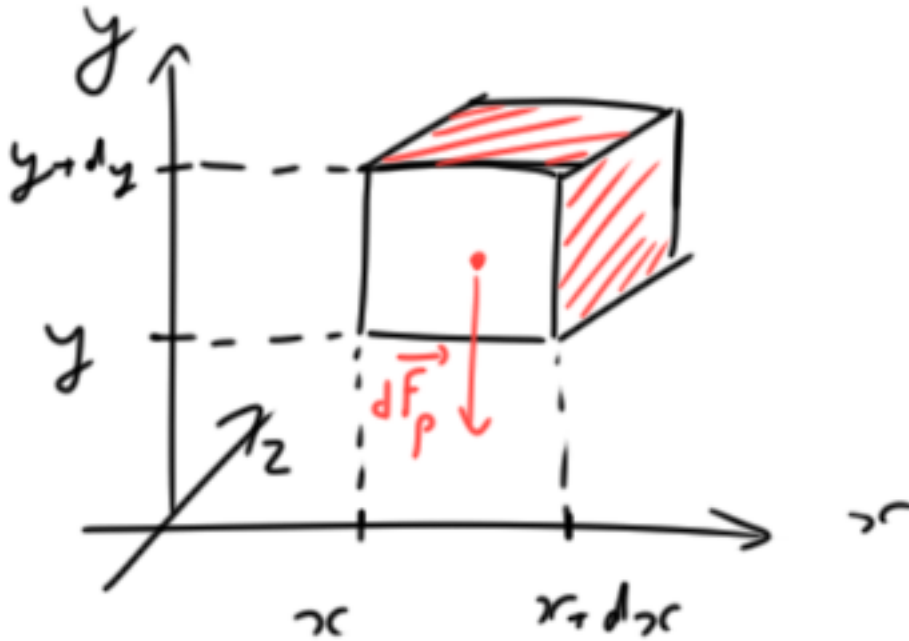
### Relation fondamentale de la statique des fluides (RFSF)

Système : volume  $dV = dxdydz$  de masse  $dm = \mu(M)dV = \mu(x, y, z)dxdydz$  (la masse volumique peut varier) situé en  $\{x + dx, y + dy, z + dz\}$

Bilan des forces dans  $\mathcal{R}_T$  galiléen :

- poids :  $d\vec{P} = \mu(x, y, z)dxdydz\vec{g}$

- résultante des forces de pression sur toutes les faces :  $d\vec{F}_{pr} = \sum_{\text{faces } i} d\vec{F}_{pr,i}$   
 $= [P(x, y, z) - P(x + dx, y, z)]dydz\vec{u}_x + [P(x, y, z) - P(x, y + dy, z)]dxdz\vec{u}_y + [P(x, y, z) - P(x, y, z + dz)]dxdy\vec{u}_z$   
 $= -\left[\frac{\partial P}{\partial x}dxdydz\vec{u}_x + \frac{\partial P}{\partial y}dydxdz\vec{u}_y + \frac{\partial P}{\partial z}dzdxdy\vec{u}_z\right]$   
 $= -\vec{\text{grad}}(P)dV$



RFD : à l'équi-

libre de la particule de fluide :  $d\vec{P} + d\vec{F}_{pr} = dm\vec{a}(M) = \vec{0}$

$$[\mu\vec{g} - \overrightarrow{\text{grad}}(P)]dV = \vec{0}$$

$$\text{D'où } \overrightarrow{\text{grad}}(P) = \mu\vec{g}$$

Enfin,  $\frac{dP}{dz} = -\mu g$ , qui est la RELATION FONDAMENTALE DE LA STATIQUE DES FLUIDES.

### Champ de pression dans un fluide incompressible (liquide)

Fluide incompressible  $\Rightarrow$  masse volumique uniforme dans tout le fluide (c'est le cas dans les liquides :  $\mu(T, P) = \mu(T)$ ) (on supposera  $T = \text{cste}$  uniforme)

$$\frac{dP}{dz} = -\mu g \Rightarrow P(z) = P(z_0) - \mu g(z - z_0)$$

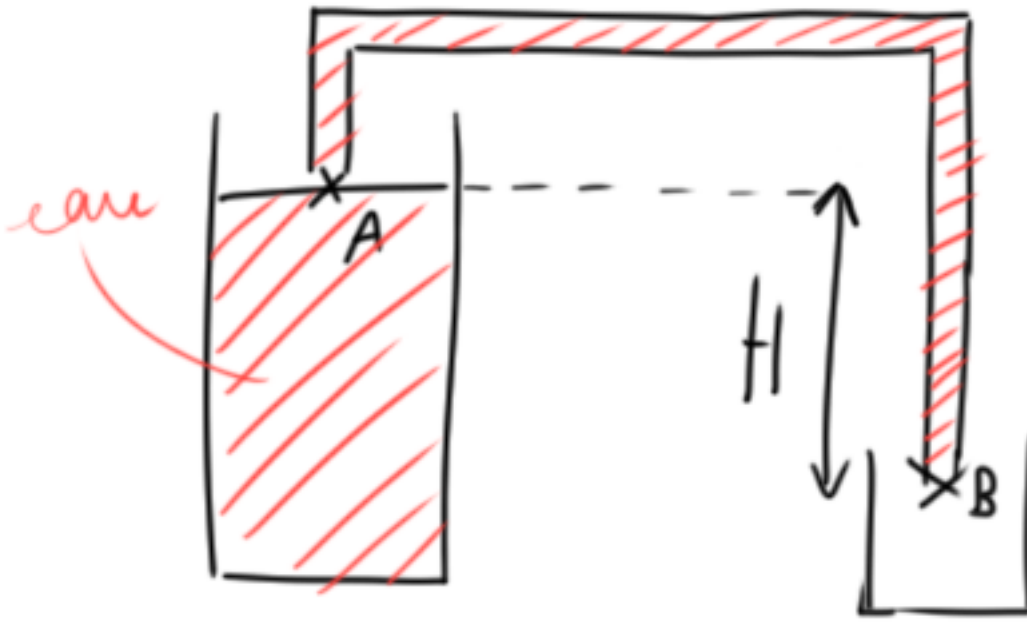
On a  $\mu_{\text{eau}} \simeq 10^3 \text{ kg.m}^{-3}$ . Calculons la pression dans l'eau, à  $H = -10\text{m}$  sous l'eau :

$$P(z = -H) = P(z = 0) + \mu g(H) \simeq 10^5 + 10^5 = 2P_{\text{atm}}$$

Calculons la pression dans la fosse des îles Marianne ( $H = 10\text{km}$ ) :

$$P(H) \sim 10^3 P_{\text{atm}}$$

Application :



$$P(B) = P(A) + \mu g H = 10^5 + 10^4 > P_{atm}$$

Pour  $H = 1m$

Comme  $P(B) > P_{atm}$ , le fluide dans le siphon "pousse", ce qui provoque un écoulement tant que le niveau du récipient du haut est supérieur à celui du récipient du bas.

### Champ de pression dans un fluide compressible : modèle d'atmosphère isotherme

Dans l'air, fluide compressible :  $PV = nRT \Leftrightarrow PM = \frac{nM}{V}RT = \mu RT \Leftrightarrow \mu = \frac{PM}{RT}$  (hypothèse gaz parfait)

On fait l'hypothèse  $T = T_0$  uniforme

On utilise la Relation Fondamentale de la Statique des Fluides :

$$\frac{dP}{dz} = -\mu(z)g = -P(z)\frac{M}{RT}g$$

$$\Leftrightarrow \frac{dP}{P} = -\frac{Mg}{RT}dz$$

Notons  $H = \frac{RT}{Mg}$  la hauteur caractéristique de variation de P.

On intègre :  $\ln\left(\frac{P}{P_0}\right) = \frac{-z}{H}$

$$\Rightarrow P(z) = P_0 e^{-z/H} = P_0 e^{-\frac{Mgz}{RT}}$$

$$\text{AN : } H = \frac{8,314 \times 290}{9,8 \times 29,10^{-3}} \simeq 8,6.10^3 m$$

Donc à 8,6km au-dessus de l'océan, on a 0,37 pourcents de la pression au niveau de la mer.

$P(3H) \simeq 0,05P_{atm}$ , donc l'épaisseur de l'atmosphère est d'environ  $3H$ , entre 25 et 30 km.

Application : comparons la variation de pression pour  $H = 4m$  entre le haut et le bas :

- D'une pièce remplie d'air :  $\Delta P = P_0(e^{-\frac{z}{H}} - 1) \simeq 4.10^{-4} bar$   
Il y a environ 0,4 pourcents de variation entre le haut et le bas.
- D'une piscine remplie d'eau :  $\Delta P = \mu g H = 3,8.10^4 Pa$   
Il y a environ 38 pourcents de variation entre le haut et le bas

## II.2 Loi de Boltzmann

### Interprétation de la loi de variation de pression en atmosphère isotherme

On réécrit la loi  $P(z)$  en faisant apparaître les caractéristiques des molécules à l'échelle microscopique :

- $M = \mathcal{N}_A \times m$  où  $m$  est la masse d'une molécule  
 $\frac{Mgz}{RT} = \frac{\mathcal{N}_A}{RT} mgz$
- $\frac{R}{\mathcal{N}_A} = k_B$  la constante de Boltzmann. On a  $k_B = 1,38.10^{-23} J.K^{-1}$   
 $\frac{Mgz}{RT} = \frac{mgz}{k_B T}$

$$P(z) = P_0 e^{-\frac{mgz}{k_B T}} = P_0 e^{-\frac{\mathcal{E}_p^{pes}(z)}{k_B T}}$$

avec  $\mathcal{E}_p^{pes}(z) = mgz$  l'énergie potentielle de pesanteur d'une molécule de masse  $m$  à l'altitude  $z$

On peut exprimer  $N^*(z)$  le nombre de molécules par unité de volume :

$$N^* = \frac{n(z)\mathcal{N}_A}{V} = \frac{P(z)}{RT} \mathcal{N}_A = \frac{P(z)}{k_B T}$$

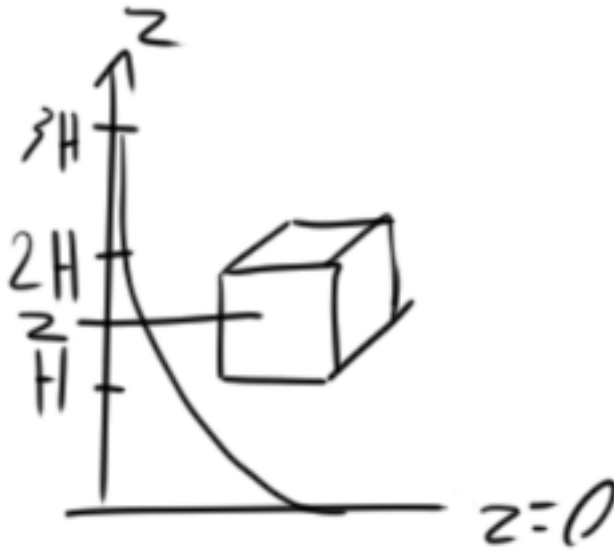
On aura :  $N^*(z) = \frac{P_0}{k_B T} e^{-\frac{\mathcal{E}_p^{pes}(z)}{k_B T}}$

La probabilité  $p(z)$  de trouver une molécule à l'altitude  $z$  est  $p(z) \propto N^*(z) \propto e^{-\frac{\mathcal{E}_p^{pes}(z)}{k_B T}}$

$$\begin{cases} \int_0^{+\infty} p(z) & = 1 \\ \int_0^z N^*(x) dx & = \frac{N_{tot}}{S} \end{cases}$$

On appelle  $e^{-\frac{\mathcal{E}_p^{pes}(z)}{k_B T}}$  le facteur de Boltzmann.  $k_B T$  représente l'énergie d'agitation thermique. Si la température croît, ce facteur de Boltzmann aussi : l'agitation thermique tend à homogénéiser la répartition particulière en fonction de  $z$ .

À l'inverse, si  $T$  décroît, le système se retrouve piégé dans la configuration d'énergie potentielle minimale.



### Loi de Boltzmann

Propriété générale : Dans un système macroscopique en équilibre à la température  $T_0$ , la probabilité de trouver une particule dans un état d'énergie  $\mathcal{E}$  est proportionnelle au facteur de Boltzmann :

$$\exp\left(-\frac{\mathcal{E}}{k_B T}\right)$$

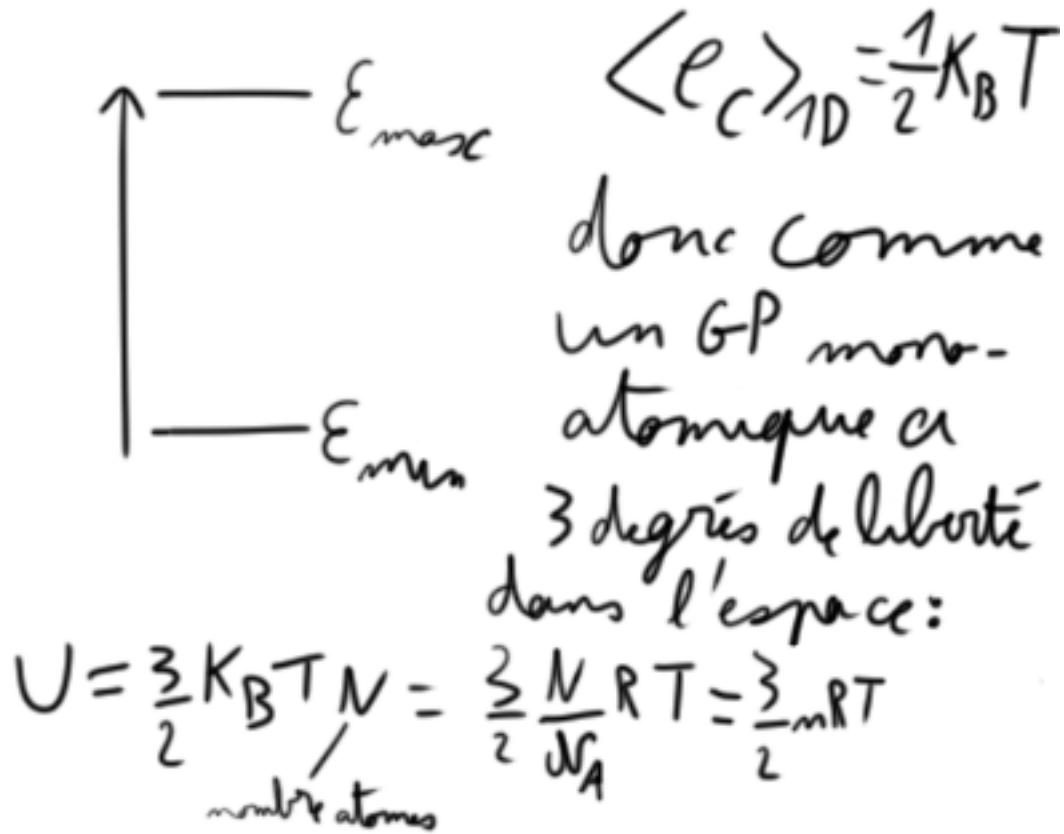
- Les états de plus faible énergie sont préféralement occupés.
- Plus la température est élevée, le moins cette sélectivité est importante.

Pour deux niveaux d'énergie distincts  $\mathcal{E}_{min}$  et  $\mathcal{E}_{max}$ , le rapport des probabilités d'occupation est

$$\frac{p(\mathcal{E}_{max})}{p(\mathcal{E}_{min})} = e^{-\frac{\mathcal{E}_{max}-\mathcal{E}_{min}}{k_B T}} = e^{-\frac{\Delta\mathcal{E}}{k_B T}}$$

c'est à dire :

- à  $T$  "élevée"  $\Leftrightarrow k_B T \gg \Delta\mathcal{E} \Rightarrow \frac{p(\mathcal{E}_{max})}{p(\mathcal{E}_{min})} \rightarrow 1$   
Les états sont occupés de manière équiprobable
- à  $T$  "faible"  $\Leftrightarrow k_B T \ll \Delta\mathcal{E} \Rightarrow \frac{p(\mathcal{E}_{max})}{p(\mathcal{E}_{min})} \rightarrow 0$   
L'état d'énergie élevée est beaucoup moins peuplé

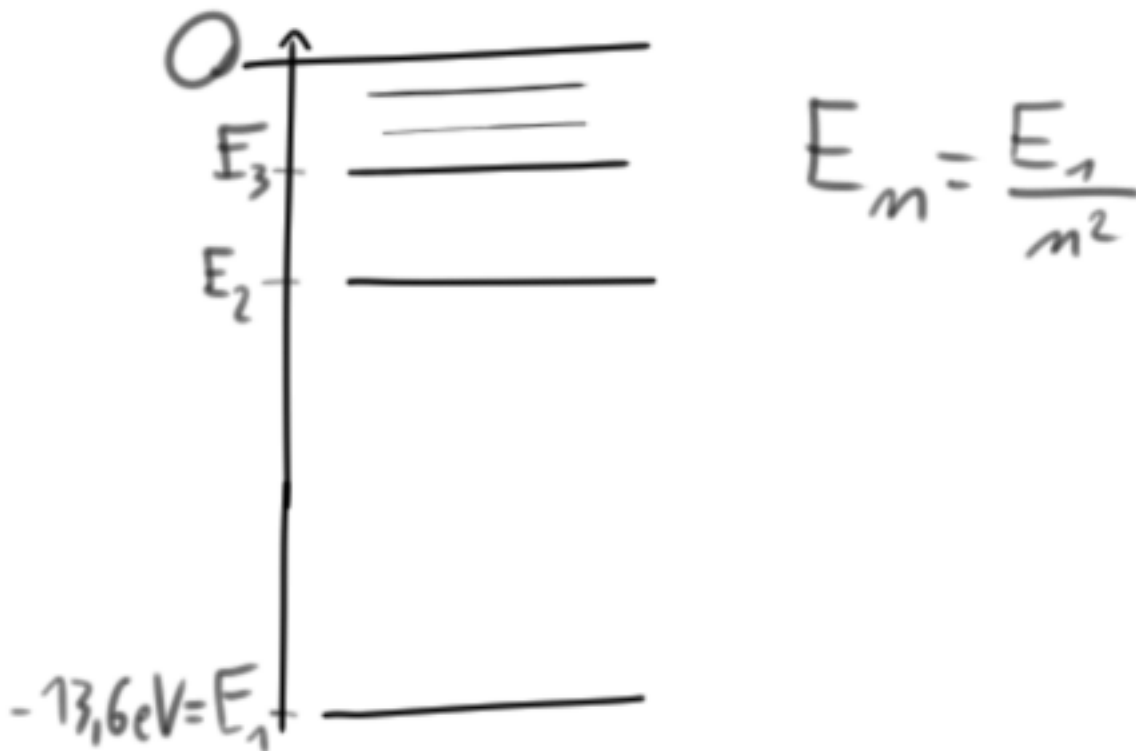


$\epsilon_{max}$   
 $\epsilon_{min}$

$\langle \epsilon_c \rangle_{1D} = \frac{1}{2} k_B T$   
 donc comme  
 un GP mono-  
 atomique a  
 3 degrés de liberté  
 dans l'espace :

$U = \frac{3}{2} k_B T N = \frac{3}{2} \frac{N}{N_A} R T = \frac{3}{2} n R T$   
 nombre atomes

Application à l'atome d'hydrogène :



1. À  $300^\circ \text{K}$ , calculer les rapports des probabilités d'occupation des deux premiers niveaux.



2. À quelle température a-t-on  $\frac{p(E_2)}{p(E_1)} = 0,1$  (donc 10 pourcents des atomes qui seraient au niveau 2) ?
3. À quelle température peut-on ioniser une fraction notable des atomes d'hydrogène ?
4. Que peut-on dire, à cette température, de la molécule de  $H_2$ , sachant que l'énergie nécessaire pour rompre la liaison  $H - H$  est  $D_{H-H} = 432 kJ.mol^{-1}$  ?

1. On a  $\frac{p(E_2)}{p(E_1)} = \exp\left(-\frac{E_1(\frac{1}{4}-1)}{k_B T}\right) \simeq e^{-392} \simeq 0$

Alors, tous les atomes ont leurs électrons au niveau fondamental  $E_1$  à température ambiante.

2.

$$\frac{p(E_2)}{p(E_1)} = \exp\left(-\frac{E_1(\frac{1}{4}-1)}{k_B T}\right) = 0,1$$

$$\Leftrightarrow \frac{3E_1}{k_B T} = -\ln(10)$$

$$\Leftrightarrow T = -\frac{3E_1}{4k_B \ln(10)}$$

D'où  $T \simeq 5.10^{40} K$

3. On cherche  $T$  tel que  $\frac{p(0)}{p(E_1)} = 0,1$

$$\Leftrightarrow \exp\left(\frac{E_1}{k_B T}\right) = -\ln(10)$$

$$\Leftrightarrow T = -\frac{E_1}{k_B \ln(10)}$$

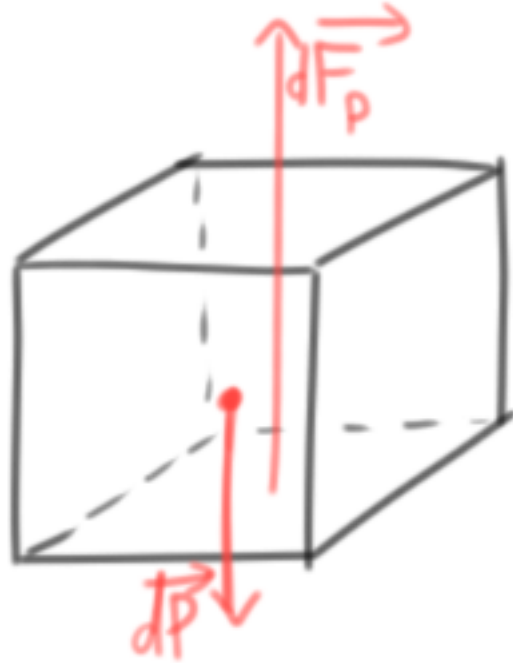
D'où  $T \simeq 7.10^{40} K$

4. Pour casser une molécule de  $H_2$ , il faut fournir  $\Delta\mathcal{E} = \frac{D_{H-H}}{N_A} \simeq 7.10^{19} J \simeq 4,5 eV$

À cette température, on fournit  $k_B T \simeq 5 eV$  d'énergie.

La liaison  $H - H$  est donc cassée.

## Equation locale de la statique des fluides



CF 1.3 : Equilibre d'une particule de fluide dans le champ de pesanteur.

$$d\vec{F}_p + d\vec{P} = \vec{0}$$

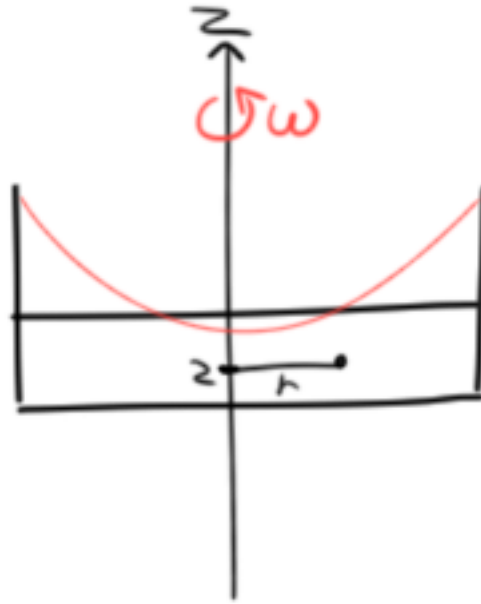
$$-\overrightarrow{\text{grad}}(P)dV + \mu\vec{g}dV = \vec{0}$$

$$\overrightarrow{\text{grad}}(P) = \mu\vec{g}$$

En présence d'autres forces volumiques de résultante  $d\vec{F}_{vol} = \vec{f}_{vol}dV$ , on aura à l'équilibre :

$$\overrightarrow{\text{grad}}(P) = \vec{f}_{vol}$$

Exemple : surface libre d'un fluide (en rotation par rapport à un référentiel galiléen)



On note  $\omega$  la vitesse angulaire de rotation ( $/^tOz$ )

On attend l'établissement d'un régime stationnaire, c'est à dire l'immobilité de la surface libre dans le référentiel tournant.

Dans le référentiel tournant, non-galiléen.

Bilan des forces : (sur une particule de fluide)

— poids :  $d\vec{P} = \mu \vec{g} dV$

— résultante des forces de pression :  $d\vec{F}_p = -\overrightarrow{grad}(P) dV$

— force d'inertie d'entraînement :  $d\vec{f}_{ie} = -dm\vec{a}_e = \mu dV \omega^2 H \vec{M} = \mu dV \omega^2 r \vec{u}_r$

RFD/SF :

$$dm\vec{a}_e = 0 = [\mu \vec{g} - \overrightarrow{grad}(P) + \mu \omega^2 r \vec{u}_r] dV$$

$$\overrightarrow{grad}(P) = \mu [\vec{g} + \omega^2 r \vec{u}_r]$$

$$\text{En cylindrique, on aura : } \overrightarrow{grad}(P) = \begin{pmatrix} \frac{\partial P}{\partial r} \\ 0 \\ \frac{\partial P}{\partial z} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial P}{\partial r} = \mu \omega^2 r \\ \frac{\partial P}{\partial z} = -\mu g \end{cases}$$

$$P(r, z) = -\mu g z + C(r)$$

$$\frac{dC(r)}{dr} = \mu \omega^2 r \Rightarrow C(r) = \frac{1}{2} \mu \omega^2 r^2 + B$$

$$P(r, z) = \frac{1}{2}\mu\omega^2 r^2 - \mu g z + P_1$$

En notant  $P_1$  la constante de pression en  $z = 0$  et  $r = 0$

Equation de la surface libre (surface en contact avec l'atmosphère) :

$P = P_0$  en tout point de la surface, et on a donc une équation qui relie  $r$  et  $z$  :

$$\frac{1}{2}\mu\omega^2 r^2 - \mu g z + P_1 = P_0$$

$$\Rightarrow z = \frac{P_1 - P_0}{\mu g} + \frac{\omega^2}{2g} r^2$$

On a donc bien la surface parabolique prédite.

# Chapitre V

## Thermodynamique chimique

### I TC1

#### I.1 Application 1

1.  $\Delta H = nC_{pm}\Delta T \simeq 7,2 kJ$
2.  $\Delta T = \frac{\Delta H}{nC_{pm}} = \frac{Q_p}{nC_{pm}} \simeq 34^\circ C$
3.  $C_{pm} = \frac{7}{2}R \simeq 19 J.K^{-1}.mol^{-1}$  puisque  $U = \frac{3}{2}nRT$  pour un GP monoatomique,  $U = \frac{5}{2}nRT$  pour un GP diatomique, or  $H = U + nRT$  pour un GP, et comme on est dans le cas du diazote,  $H = \frac{7}{2}nRT$

#### I.2 Application 2

1. Si on a  $\frac{1}{2}O_{2(g)} + H_{2(g)} \rightarrow H_2O_{(g)}$ , et qu'on a  $\Delta n_{H_2O} = \xi = 1 mol$   
Donc  $\Delta H(T) = \xi \Delta_r H^0(T) = \Delta_r H^0(T) = -285 kJ$
2.  $O_2 + 2H_{2(g)} \rightarrow 2H_2O_{(g)}$ , alors  $\Delta_r H_2^0 = 2\Delta_r H^0$  et  $\xi_2 = \frac{\Delta n_{H_2O}}{2}$  et donc  $\xi_2 = \frac{1}{2} mol$  et enfin  $\Delta H_2 = \xi_2 \Delta_r H_2^0 = \Delta_r H^0 = -285 kJ$

#### I.3 Application 3

On part de  $\frac{1}{2}O_{2(g)} + H_{2(g)} \rightarrow H_2O_{(g)}$ . On a à l'état final que  $\xi = 1 mol$  par un tableau d'avancement. On a alors  $Q = \Delta H = \xi \Delta_r H^0 = -285 kJ$  et donc que la transformation est exothermique.

#### I.4 3.2

En partant d'un état initial EI donné, avec un  $\Delta H$  global vers l'état final EI.

EI est constitué de réactifs, peut-être d'espèces spectatrices et de produits. Tout est à la température  $T_1$ .

EF est constitué de produits, peut-être de réactifs et d'espèces spectatrices. Le tout à la température  $T_2$ .

On décompose la transformation en deux parties : d'abord la réaction chimique vers Eint, où toutes les espèces sont dans le même état qu'en EF, mais la température n'a pas varié. On a cette enthalpie :  $\Delta H_1 = \xi \Delta_r h^0$ .

Ensuite, on a la seconde transformation, sans réaction chimique mais avec toutes les espèces présentes et avec un changement de températures :

$$\Delta H_2 = \left[ \sum_{i \text{ réactifs \& restants}} n_i C_{pmi}^0 + \sum_{j \text{ produits}} n_j C_{pmj}^0 + \sum_{k \text{ spectatrices}} n_k C_{pmk}^0 \right] \Delta T = C_{ptot} \Delta T$$

$\xi \Delta_r H^0 + C_{ptot} \Delta T = 0$  dans cette réaction.

## I.5 Application 4

1. En proportions stoechiométriques, on a deux fois plus de  $H_2$  que de  $O_2$ . On fait la même décomposition que précédemment, en deux transformations, une chimique et une thermique.

À l'état intermédiaire, on n'a plus que  $n = n(H_2)$  moles de  $H_2O$ , et c'est tout. Et donc  $\Delta_r H^0(T_1)\xi$  et  $\Delta_2 = nC_{pm}^0(H_2O)\Delta T$ .

Mais comme le cycle est adiabatique,  $n\Delta_r H^0(T_1) + nC_{pm}^0(H_2O)(T_2 - T_1) = 0$

Et donc  $T_2 = T_1 + \frac{-\Delta_r H^0(T_1)}{C_{pm}^0(H_2O)} \simeq 7500^\circ K$

2. On a nécessairement que  $n(O_2) = \frac{0.8}{0.2}n(N_2) = \frac{1}{4}N_2$ .

Donc l'équation devient  $n\Delta_r H^0(T_1) + (nC_{pm}(H_2O) + 2nC_{pm}(N_2))\Delta T = 0$ , d'où  $T_2 = 2900^\circ K$

Tu sais comment Aladin gazeux va à Bagdad liquide? En thalpie d'échange d'état.

## I.6 Application 5

$CO_{2(g)}$  a une enthalpie de formation non-nulle puisqu'il ne s'agit pas d'un corps simple. Pour  $Cu_g$ , on a besoin de l'enthalpie massique de sublimation, multipliée par la la masse molaire du cuivre.

Pour le cuivre solide, l'enthalpie pour qu'il devienne solide à  $298K$  est nulle. Pareil pour que  $H_2$  devienne gazeux à cette température.

## I.7 Démonstration de la Hess

$CH_{4(g)} + 2O_{2(g)} \leftrightarrow CO_{2(g)} + 2H_2O_{(g)}$  est réagencée en  $C_{(gr)} + 2H_{2(g)} + 2O_{2(g)} \rightarrow C_{(gr)} + 2H_{2(g)} + O_{2(l)}$

(A) est la réaction de formation standard de de  $CH_{4(g)}$

(C) est la réaction de formation standard de de  $CH_{4(g)}$

(D) est la réaction de formation standard de de  $H_2O_{(g)}$

Donc  $\Delta_r H^0 = \Delta_r H^0(A) + \Delta_r H^0(B) + \Delta_r H^0(B) + \Delta_r H^0(C) + \Delta_r H^0(D) = -\Delta_f H^0(CH_{4(g)}) + 0 + \Delta_f H^0(CO_{2(g)}) + 2\Delta_f H^0(H_2O_{(g)})$

## I.8 4.3 Influence de la température

Principe : Approximation d'Ellingham : connaissant une enthalpie standard de réaction à une température  $T_0$  donnée, on considèrera que l'enthalpie standard à une autre température  $T$  est identique, en l'absence de changement d'état des réactifs et produits entre  $T_0$  et  $T$  :  $\Delta_r H^0(T) \simeq \Delta_r H^0(T_0)$

$$\Delta_r H^0(T) = \Delta_r H^0(T_0) + \frac{\Delta_r H^0}{dT}|_{T_0}(T - T_0)$$

$$\text{avec } \frac{\Delta_r H^0}{dT} = \frac{\partial}{\partial T} \left( \frac{\partial H^0}{\partial \xi} \right) = \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{\partial H^0}{\partial T} \right) = \frac{\partial}{\partial \xi} C_p^0 = \Delta_r C_p^0 = \sum v_i C_p^0$$

Et on néglige cette dernière partie le plus souvent.

Attention, en présence de changement d'état d'un des réactifs ou produits  $A_j$  :  $A_{j(1) \rightarrow j(2)}$

$$\Delta H = m\Delta_{1 \rightarrow 2}h = Mn\Delta_{1 \rightarrow 2} = \xi [M\Delta_{1 \rightarrow 2}h] = \xi \Delta_{1 \rightarrow 2}H^0$$

$\Delta_r H^0$  par la réaction dans laquelle  $A_j$  change d'état (à  $T'$ ) :

$$\Delta_r H^0(T') = \Delta_r H^0(T) + v_j M_j \Delta_{1 \rightarrow 2}h$$

Principe : Au passage d'une phase à l'autre, l'enthalpie de l'espèce  $j$  subit une discontinuité : l'enthalpie massique  $h_j$  subit une discontinuité de  $\Delta h_{jj1 \rightarrow 2}$  (définition de l'enthalpie massique de changement d'état), l'enthalpie molaire  $H_{im}^0(T)$  une discontinuité de  $\Delta_{r1 \rightarrow 2}H_j^0$

Donc pour une réaction donnée  $\sum v_i A_i = 0$ , si une des espèces  $A_i$  change d'état entre  $T_0$  et  $T$  on aura :

$$\Delta_r H^0(T) = \Delta_r H^0(T_0) + v_j \Delta_{r1 \rightarrow 2}H^0(j) = \Delta_r H^0(T_0) + v_j M_j \Delta h_{j1 \rightarrow 2}$$

## I.9 Application 6 changement d'état de l'eau

$$\begin{aligned}
 1. \quad \Delta_r H^0(T = 100^\circ C) &= \Delta_r H^0(T = 25^\circ C) + \Delta_{vap} H^0(H_2O) (+C_p^0(H_2O)_{(l)}(100 - 25)) \\
 &= \Delta_f H^0(H_2O, T = 25^\circ C) + M(H_2O) \Delta_{vap} h \\
 &= -285.10^3 + 2260 \times 18 = -244.3 kJ.mol^{-1} \text{ et } -242 kJ.mol^{-1} \text{ en utilisant } \Delta_r C_p^0 \Delta T
 \end{aligned}$$