Table des matières

Chapitre I

Rappels séries numériques

I Généralités

Définition : Convergence série

Avec $u_n \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ on dit que la série $(\sum u_n)$ converge si la suite $(\sum\limits_{k=1}^{n} u_k)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. En cas de convergence, on définit la somme de la série $\sum_{n=0}^{\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \sum u_n$ seulement si la série est convergente. $(S_n) = \left(\sum\limits_{[} k = 0]^n\right)$ est la suite des sommes partielles de la série. En cas de convergence, $(R_n) = \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} u_n\right)$ est la suite des restes (d'ordre n) de la série. R_n tend vers 0 par définition.

Théorème : de divergence grossière

$(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, si $(\sum u_n)$ converge, alors $(u_n) \to 0$.

Preuve

$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = S_n - S_{n-1}$ donc quand (u_n) tend vers une limite l, alors u_n tend vers 0.

Théorème : Séries géométriques

On prend $a \in \mathbb{C}$, la série $(\sum a^n)$ converge si, et seulement si, $|a| < 1$ et alors : $\sum_{n=0}^{\infty} a^n = \dfrac{1}{1-a}$

Preuve

Si $|a| \geq 1$ alors la série diverge grossièrement. Si $|a| < 1$ en particulier $a \neq 1$, donc $\forall n \in \mathbb{N}, \sum\limits_{k=0}^{n} a^n = \dfrac{1-a^{n+1}}{1-a}$

Théorème : Dominos ou série téléscopique

$(a_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, la série $(\sum a_n - a_{n+1})$ converge si, et seulement si, la suite (a_n) converge.

Preuve

Soit $n \in \mathbb{N}$, $\sum\limits_{k=0}^{n} a_k - a_{k+1} = a_0 - a_1 + a_1 - a_2 + a_2 ... = a_0 + a_{n+1}$. Alors la suite des sommes partielles converge si, et seulement si, a_n converge. En cas de convergence, on a $\sum_{n=0}^{\infty} a_n - a_{n+1} = a_0 - \lim\limits_{n \to +\infty} a_n$

Proposition : Opérations sur les séries convergentes

$(u_n), (v_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ termes généraux de séries convergentes, alors $(\sum u_n + v_n)$ converge. Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, alors $(\sum \lambda u_n)$ converge aussi.

Exemple I.1. *Avec $\sum u_n$ convergente et $\sum v_n$ divergente, quel est le comportement de $\sum u_n + v_n$? Elle diverge. Prouvons-le par l'absurde. Supposons que $\sum(u_n + v_n)$ converge. On a que $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = (u_n + v_n) - u_n$. Donc $\sum v_n$ converge. D'où la contradiction.*

II Cas des séries à terme général réel positif

Définition : Série à terme général réel positif

Soit $(u_n) \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}$, alors $(\sum\limits_{k=0}^{n} u_k)$ est croissante. Elle converge si, et seulement si, $(\sum\limits_{k=0}^{n} u_k)$ est majorée, et $(\sum u_n)$ diverge si, et seulement si, $(\sum\limits_{k=0}^{n} u_k) \to +\infty$.

Théorème : Critères de convergence d'une série

Si $(u_n), (v_n) \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}$:

- Si $\forall n \in \mathbb{N}, v_n \leq u_n$, alors si $\sum u_n$ converge alors $\sum u_n$ converge. De même, si $\sum u_n$ diverge, alors $\sum v_n$ aussi (critère de majoration positif)
- Si $u_n = o(v_n)$, alors si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge (critère de domination positif)
- Si $u_n \sim v_n$, alors $\sum v_n$ et $\sum u_n$ sont de même nature (critère d'équivalent positif)

Théorème : Séries de Riemann

Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, alors $(\sum \dfrac{1}{n^\alpha})$ converge si, et seulement si, $\alpha > 1$.

Preuve

Avec $\alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq 1$, on a que $(n+1)^{\alpha+1} = n^{\alpha+1}(1 + \dfrac{1}{n})^{\alpha+1} = n^{\alpha+1}(1 + \dfrac{\alpha+1}{n} + o(\dfrac{1}{n})) = n^{\alpha+1} + (\alpha + 1)n^\alpha + o(n^\alpha)$.
$(n+1)^{\alpha+1} - n^{\alpha+1} \sim (\alpha+1)n^\alpha$, $(n^\alpha) > 0$ donc $\sum n^\alpha$ et $\sum (n+1)^{\alpha+1} - n^{\alpha+1}$ sont de même nature.
Alors la suite des $\sum n^\alpha$ converge si, et seulement si, la somme des $n^{\alpha+1}$ converge, donc quand $\alpha + 1 < 0$, donc $\alpha < -1$.
Dans le cas de $\alpha = -1$...

Exemples II.1. *1. Avec $u_n = \dfrac{(n^2+n+3)^{2/3}}{n(n+\sqrt{n})^{3/2}}$. C'est un terme général positif. $(u_n) \sim \dfrac{n^{4/3}}{n \times n^{3/2}}$ (ce qu'on prouve en mettant en facteur le prépondérant sur le dénominateur et le numérateur).*
$u_n \sim \dfrac{n^{4/3}}{n \times n^{3/2}} \sim n^{-7/6} \sim \dfrac{1}{n^{7/6}}$.

$\sum \frac{1}{n^{7/6}}$ est une série de Riemann convergente, donc par critère d'équivalent positif, $\sum u_n$ converge.

2. *$u_n = th(n) + \frac{1}{n}$, d'un côté $\sum th(n)$ diverge grossièrement et accessoirement $\sum \frac{1}{n}$ diverge, donc par critère de majoration positive, $\sum th(n) + \frac{1}{n}$ diverge.*
3. *$u_n = th(\frac{1}{n}) + ln(1 - \frac{1}{n})$ or $th(x) = \frac{1}{2}(1 + x + o(x) - 1 - x + o(x)) = x + o(x)$ et $ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$ en 0. Donc en l'infini $u_n = \frac{1}{n} + o(\frac{1}{n^2}) - \frac{1}{n} + -\frac{1}{2n^2} + o(\frac{1}{n^2}) = -\frac{1}{2n^2} + o(\frac{1}{n^2})$ Donc par critère d'équivalent positif avec une série convergente, $\sum u_n$ converge.*
4. *$u_n = e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, et $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \exp(n \ln(1 + \frac{1}{n})) = \exp(n(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} +)$*

Théorème : Critère de d'Alembert

Soit $(u_n) \in \mathbb{R}_+^{*\mathbb{N}}$. Si $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) \to l \in \mathbb{R}$, alors :
- Si $l < 1$ alors $\sum u_n$ converge.
- Si $l > 1$ alors $\sum u_n$ diverge grossièrement.
- Si $l = 1$ alors on ne peut rien dire.

Preuve

C'est le rapport entre un terme et son successeur, donc c'est la raison locale en comparaison à une série géométrique. Si $l < 1$, prenons $\varepsilon = \frac{1-l}{2}$. On peut fixer n_0 tel que $\forall n \geq n_0, \frac{u_{n+1}}{u_n} < l + \varepsilon \Rightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n} < \frac{1+l}{2}$ donc pour $n \geq n_0$: $u_n \leq \left(\frac{1+l}{2} u_{n_0}\right) . \frac{1+l}{2} < 1$ donc $\sum u_n$ converge par critère de majoration positif.

Si $l > 1$, on prend $\varepsilon = \frac{l-1}{2}, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \Rightarrow u_n \geq (\frac{1+L}{2})^{n-n_0} u_{n_0}$

Proposition : Comparaisons séries-intégrales

Si $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ fonction réelle positive décroissante, continue par morceaux alors : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \int_n^{n+1} f(t)dt \leq f(n) \leq \int_{n-1}^n f(t)dt$.

Théorème : Comparaisons séries-intégrales

Si $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ fonction positive décroissante continue par morceaux, alors $(\sum f(n))$ est de même nature que la suite $(\int_0^n f(t)dt)$

Preuve

Montrer que la suite des sommes partielles converge c'est que la suite est majorée, et on doit utiliser la croissance de l'intégrale.

Remarque II.1. *L'encadrement de $f(n)$ par les intégrales $\int_{n-1}^n f(t)dt, \int_n^{n+1} f(t)dt$ peut être exploité dans d'autres cadres, par exemple dans le cas où la série $\sum f(n)$ converge, on peut écrire pour $n, p \in \mathbb{N}^*, n < p, \int_n^{p+1} f(t)dt \leq \sum_{k=n}^{p} f(n) \leq \int_{n-1}^p f(t)dt$, et par passage à la limite quand $p \to +\infty$, $\lim_{p\to+\infty} \int_n^p f(t)dt \leq \sum_{k=n}^{\infty} f(k) \leq \lim_{p\to+\infty} \int_{n-1}^p f(t)dt$.*

Exemple II.1. *On peut retrouver par comparaisons séries-intérales que* $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ *converge si, et seulement si,* $\alpha < 1$ *(ce qui n'est valable que pour* $\alpha > 0$*). Soit* $\alpha \in \mathbb{R}, \alpha > 1, R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$*. On cherche un équivalent de* R_n*.*

Alors : $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$ *est positive décroissante. Donc :* $\forall n, p \in \mathbb{N}, 2 \leq n < p, \int_n^{p+1} \frac{dt}{t^\alpha} \leq \sum\limits_{k=n}^{p} f(k) \leq \int_{n-1}^{p} \frac{dt}{t^\alpha}$*. On a que* $\int_a^b \frac{dt}{t^\alpha} = \left[-\frac{1}{-\alpha+1} t^{-\alpha+1}\right]_a^b$*.*

Par passage à la limite quand p *tend vers l'infini, on a pour* $n \in \mathbb{N}$ *:* $\frac{1}{(\alpha-1)(n+1)^{\alpha-1}} \leq \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \leq \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$

Et, les suites encadrantes étant positives et équivalentes à $\frac{1}{n^{\alpha-1}}$ *donc par théorème d'endcadrement des équivalents,* $R_n \sim \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$

On cherche un équivalent de $\left(\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{n}\right)$*. Par séries-intégrales, on obtient que* $\left(\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{n}\right) \sim (log(n))$

Théorème : Sommation des ordres de grandeur

Avec $(a_n), (b_n)$ deux suites réelles positives :

- Si $b_n = O(a_n)$: si $\sum a_n$ converge, alors $\sum b_n$ converge et $\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} b_k = O(\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} a_k)$; si $\sum a_n$ diverge, alors $\sum\limits_{k=0}^{n} b_k = O(\sum\limits_{k=0}^{n} a_k)$.
- Si $b_n = o(a_n)$: si $\sum a_n$ converge, alors $\sum b_n$ converge et $\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} b_k = o(\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} a_k)$; si $\sum a_n$ diverge, alors $\sum\limits_{k=0}^{n} b_k = o(\sum\limits_{k=0}^{n} a_k)$.
- Si $b_n \sim (a_n)$: si $\sum a_n$ converge, alors $\sum b_n$ converge et $\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} b_k \sim \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} a_k$; si $\sum a_n$ diverge, alors $\sum b_n$ diverge et $\sum\limits_{k=0}^{n} b_k \sim \sum\limits_{k=0}^{n} a_k$.

Preuve

Prenons $(u_n), (v_n) \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}$, avec $(u_n) = o(v_n)$. On suppose que $\sum v_n$ converge.
Alors $\sum u_n$ converge par critère de domination positif. Donc $(u_n) = (v_n \varepsilon_n)$ avec $(\varepsilon_n) \to 0$. Soit $\varepsilon > 0$, on peut fixer n_0 tel que $\forall n \geq n_0, \varepsilon_n < \varepsilon$
Donc pour $n_0 \leq n \leq p$: $\sum\limits_{k=p}^{n} u_k \leq \left(\sum\limits_{k=n}^{p} v_k\right) \varepsilon$.
Donc par passage à la limite quand $p \to +\infty$, $\sum\limits_{k=n}^{\infty} u_k \leq \varepsilon \sum\limits_{k=n}^{\infty} v_k$

Si (v_n) n'est pas la suite nulle, $\sum v_k > 0$. On a montré que : $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, \dfrac{\sum\limits_{k=n}^{\infty} u_k}{\sum\limits_{k=n}^{\infty} v_k} < \varepsilon$

$(u_n), (v_n) \geq 0$, si $\sum v_n$ diverge alors : on pose aussi $(u_n) = (\varepsilon v_n)$ avec $\varepsilon_n \to 0$
Soit $n \in_N$, $\sum\limits_{k=0}^{n} u_k = \sum v_k \varepsilon_k$
Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, on fixe n_0 tel que $\forall n \geq n_0, \varepsilon_n \leq \varepsilon$.
Pour $n \geq n_0, \sum u_k = \sum\limits_{k=0}^{n_0} \varepsilon_k v_k + \sum\limits_{k=n_0}^{n} \varepsilon_k v_k$

On peut supposer $\sum v_k > 0$, alors : $\dfrac{\sum\limits_{k=0}^{n} u_k}{\sum\limits_{k=0}^{n} v_k} \leq \dfrac{\sum\limits_{k=0}^{n_0} \varepsilon_k v_k}{\sum\limits_{k=0}^{n} v_k} + \varepsilon$

$\left(\dfrac{\sum\limits_{k=0}^{n_0} \varepsilon_k v_k}{\sum\limits_{k=0}^{n} v_k}\right) \to 0$ donc on peut fixer $n_1 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_1, \dfrac{\sum\limits_{k=0}^{n_0} \varepsilon_k v_k}{\sum\limits_{k=0}^{n} v_k} < \varepsilon$

Alors $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists N = \max(n_0, n_1), \forall n \geq N, \dfrac{\sum\limits_{k=0}^{n} u_k}{\sum\limits_{k=0}^{n} v_k} < 2\varepsilon$

Pour les équivalents : $u_n \sim v_n \Rightarrow (u_n) = (v_n) + o(v_n) = (v_n) + (w_n)$ avec $\dfrac{w_n}{v_n} \to 0$.
Dans le cas convergent : $\left(\sum\limits_{k=n}^{\infty} u_k\right) = \left(\sum\limits_{k=n}^{\infty} v_k\right) + \left(\sum\limits_{k=n}^{\infty} w_k\right)$ mais comme $w_n = o(v_n)$, on a bien l'équivalence.
Pour les O : $\exists M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq M v_n$. Il suffit de majorer les sommes.

III Séries de terme général quelconque

Ici, $(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$

Définition : Absolue convergence

Soit $(u_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, on dit que $\sum u_n$ converge absolument si $\sum |u_n|$ converge.

Théorème : Conséquences de l'absolue convergence

Toute série absolument convergente est convergente

Preuve

Dans le cas réel, en utilisant que $u_n^+ \leq |u_n|$ et $u_n^- \leq |u_n|$ donc les deux convergent par critère de majoration, comme $\sum u_n = \sum u_n^+ - u_n^-$.
Dans le cas complexes, les séries des parties réelles et imaginaires sont majorées par les modules.

Remarque III.1. *Pour une série absolument convergente,* $\left|\sum_{n=0}^{+\infty}\right| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$*. Comme on a* $\forall p \in \mathbb{N}, \left|\sum_{n=0}^{p} u_n\right| \leq \sum_{n=0}^{p} |u_n|$*, on passe à la limite et on a la propriété.*

Exemple III.1. *Quelques exemples de séries absolument convergentes sont* $\sum \frac{(-1)^n}{n^2}, \sum \frac{sin(n)}{n^2}$*, mais il existe cependant des séries qui soient convergentes sans l'être absolument, telles que* $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ *ou* $\sum \frac{sin(n)}{n}$*.*

Théorème : Théorème spécial des séries alternées

Soit (a_n) une suite réelle positive décroissante de limite nulle. Alors $\sum(-1)^n a_n$ converge et $\forall n \in \mathbb{N}, \left|\sum_{k=n}^{+\infty}(-1)^k a_k\right| \leq a_n$

Preuve

Pour montrer la convergence, considérons la suite (S_n) des sommes partielles : $\forall n \in \mathbb{N}, S_n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k u_k$;
Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :

- $S_{2n+2} - S_{2n} = u_{2n+2} - u_{2n+1} \leq 0$ donc la suite (S_{2n}) est décroissante ;
- $S_{2n+3} - S_{2n+1} = -u_{2n+3} + u_{2n+2} \geq 0$ donc la suite (S_{2n+1}) est croissante ;
- $S_{2n} - S_{2n+1} = u_{2n+1} \to 0$ en l'infini

Donc les suites $(S_{2n}), (S_{2n+1})$ sont adjacentes : elles convergent vers une même limite l qui est donc la limite de (S_n). Donc la série $\sum(-1)^n u_n$ est convergente, de somme l. Et de plus, l vérifie :
$\forall n, m \in \mathbb{N}, S_{2m+1} \leq l \leq S_{2n}$
Pour la majoration de $|R_n|$ on procède par disjonction de cas :

- Si n est pair : on a par propriétés des suites adjacentes que : $S_{n+1} \leq l \leq S_n$. Et donc $R_n = l - S_n \in [S_{n+1} - S_n, 0] = [-u_{n+1}, 0]$. Donc $|R_n| = -R_n \leq u_{n+1}$.
- Si n est impair : on a de même que : $S_n \leq l \leq S_{n+1}$ et donc $R_n \in [0, u_{n+1}]$. Donc $|R_n| = R_n \leq u_{n+1}$.

Exemple III.2. *On a ainsi cet exemples de série semi-convergente, pour* $0 < \alpha \leq 1$ *:* $\sum \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$*. Pour* $\alpha \leq 0$*, on a divergence grossière, et pour* $\alpha > 0$*, on a* $(\frac{1}{n^\alpha})$ *positive décroissante tendant vers 0, donc le critère spécial des séries alternées dit que ces séries sont convergentes.*

On en tire aussi cette inégalité pour $\alpha > 0$ *:* $\forall n \in \mathbb{N}, \left|\sum_{k=n}^{+\infty}\right| \leq \frac{1}{n^\alpha}$

Remarque III.2. *Les critères des séries positives ne s'appliquent plus pour ces séries.*

Pour le critère des équivalents : on peut prendre la série de terme général $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}$*. On a que* $u_n \sim \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$*, dont la série associée est convergente. Mais* $\sum u_n$ *n'est pas convergente à cause de la somme harmonique.*

Pour le critère de domination : on peut prendre la série de terme général $\frac{1}{n}$*, dominée par* $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$*. Si le terme général qui domine est celui d'une série convergente, on sait que* $\sum \frac{1}{n}$ *n'est pas convergente.*

On a donc un nouveau critère de domination positive : Si $(u_n), (v_n)$ *termes généraux de séries, qu'on a que* $v_n > 0$*, que* $\sum v_n$ *converge et que* $u_n = o(v_n)$*, alors on aura bien que* u_n *est absolument convergente.*

Le critère de d'Alembert subit une petite modification : On considère (u_n) *terme général d'une série, si* $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|$ *admet une limite* l*, on a que* $\sum u_n$ *est absolument convergente si* $l < 1$ *et diverge grossièrement si* $l > 1$*. Toujours pas de lois s'appliquant sur le cas où* $l = 1$ *cependant.*

Pour le théorème de sommation des ordres de grandeur, on a pour le o et le O besoin que $v_n > 0$ *pour que le théorème fonctionne, le signe de* u_n *n'a pas besoin d'être controlé. "La suite de référence doit être positive pour appliquer le théorème." Pour les équivalents, on a que les deux sont déjà du même signe.*

Exemple III.3. *On fait les séries de Bertrand, alternées et non.*

Pour les séries de Bertrand : on finit par trouver une convergence si, et seulement si, $\alpha > 1$ *ou* $\alpha = 1, \beta > 1$

Pour les séries de Bertrand alternée : on étudie $\sum \frac{(-1)^n}{n^\alpha ln(n)^\beta}$*. On commence par regarder les divergences grossières :* $\sum u_n$ *diverge si* $\alpha < 0$ *ou si* $\alpha = 0$ *et* $\beta \leq 0$*.*

Les cas de convergence absolue sont les cas où $\alpha > 1$ *ou* $\alpha = 1, \beta > 1$ *d'après ce qui venait avant.*

On prend le cas de $\alpha = 0$ *et* $\beta > 0$*, alors* u_n *tend vers* 0*, et elle est décroissante en l'infini, donc par critère des séries alternées on a la convergence.*

Si $0 < \alpha < 1$*, alors* $\exists \alpha' > 0$ *tel que* $|u_n| \ll \frac{1}{n^{\alpha'}}$ *Ainsi,* w_n *est positive et décroissante à partir d'un certain rang, et tend vers* 0*, donc en utilisant le critère des séries alternées on a la convergence.*

Si $\alpha = 1$*,* $\sum u_n$ *est semi-convergente.*

Exemple III.4. *Exemple de série avec un terme en* $(-1)^n$ *: on pose* $u_n = \frac{(-1)^n}{n^\alpha + (-1)^n}$ *terme général d'une série.*

Les cas de divergence grossière sont si $\alpha < 0$ *et on a des impossibilités si* $\alpha = 0$*.*

Si $\alpha > 1$*, alors la série converge absolument puisqu'on trouve un équivalent qui converge par Riemann à* $|u_n|$

Prenons les cas $0 < \alpha \leq 1$ *: on va faire un "éclatement des termes" (un DL quoi) :* $\frac{(-1)^n}{n^\alpha}\left(\frac{1}{1+\frac{(-1)^n}{n^\alpha}}\right) = \frac{(-1)^n}{n^\alpha}\left(1 + \frac{(-1)^n}{n^\alpha} + o(\frac{1}{n^\alpha})\right) = \frac{(-1)}{n^\alpha} - \frac{1}{n^{2\alpha}} + o(\frac{1}{n^\alpha})$*. On pose* v_n *tel que* $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{(-1)^n}{n^\alpha} + v_n$*, avec* $(v_n) \sim \frac{1}{n^{2\alpha}}$*. On a que* $(-v_n)$ *est positive, et que* $\sum v_n$ *converge si, et seulement si,* $\alpha > \frac{1}{2}$*. Donc on en déduit que* $\sum u_n$ *converge si* $\alpha > \frac{1}{2}$ *et diverge sinon.*

Donc $\sum u_n$ *converge si, et seulement si,* $\alpha > \frac{1}{2}$

Chapitre II

Familles sommables

I Dénombrabilité

Définition : Dénombrable

On dit qu'un ensemble est dénombrable s'il est en bijection avec $\mathbb{N}$.

Définition : Au plus dénombrable

Un ensemble est au plus dénombrable s'il est fini ou dénombrable.

Exemple I.1. *$\mathbb{Z}$ est dénombrable avec $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}, \varphi : n \mapsto (-1)^{n+1}\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor$ bijective :*

- *Injectivité : supposons $\varphi(n_1) = \varphi(n_2)$, si n_1 pair, alors n_1...*
- *surjectivité : Soit $n \in \mathbb{Z}$, trouvons un antécédent ; si n est positif on a $2n-1$, si n est négatif $-2n$*

Proposition : Parties infinies de $\mathbb{N}$

Toute partie infinie de $\mathbb{N}$ est dénombrable.

Preuve

Soit X une partie infinie de $\mathbb{N}$. On construit $(x_n) \in X^{\mathbb{N}}$ par récurrence. $x_0 = \min(X)$ qui existe comme toute partie non-vide de $\mathbb{N}$ possède un plus petit élément. Avec $n \in \mathbb{N}$, on suppose $x_0, ...x_n$ bien définies, et on définit $x_{n+1} = min(X \backslash \{x_0, ..., x_n\})$.
Il faut démontrer que (x_n) est une bijection. Elle est injective parce que par construction, elle est croissante. Elle est surjective par l'absurde : s'il y avait un élément qui n'avait pas d'antécédent, considérons le plus petit élément sans antécédent, mais son prédécesseur aurait un antécédent, etc.

Proposition : Parties infinies

Toute partie infinie d'un ensemble dénombrable est dénombrable.

Preuve

Soit X dénombrable, $Y \subset X$ infinie, alors on peut composer la bijeection avec laquelle on obtient les éléments de Y par les éléments de X avec la bijection entre X et $\mathbb{N}$, qui est donc bijective aussi.

Proposition : Produit cartésien

$\mathbb{N}^2$ est dénombrable.

Preuve

$\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{N}^2 & \to & \mathbb{N} \\ (p,q) & \mapsto & 2^p(2q+1) \end{array} \right.$. Prouvons sa bijectivité.
Pour l'injectivité, avec $(p,q),(p',q') \in \mathbb{N}^2$, on suppose que $2^p(2q+1) = 2^{p'}(2q'+1)$. Par lemme de Gauss : $2^p | 2^{p'}(2q'+1)$, or $2^p \wedge (2q'+1) = 1$ donc $2^p | 2^{p'}$ donc $p \leq p'$, de même on a $p' \leq p$ donc $p = p'$ et $q = q'$, d'où l'injectivité.
Pour la surjectivité, soit $n \in \mathbb{N}$. Considérons $A = \{p \in \mathbb{N} | 2^p | n\}$. A est non-vide car $2^0 = 1$ divise tout, c'est une partie de $\mathbb{N}$ et A est majoré (2^p tend vers l'infini et n est fini). Donc A possède un plus grand élément p_0. Donc $\frac{n}{2^{p_0}}$ est impair, alors $(p_0, \dfrac{1}{2}(\dfrac{n}{2^{p_0}} - 1))$ est antécédent de n, d'où la surjectivité.

Proposition : Produit cartésien étendu

$\mathbb{N}^p$ est dénombrable.

Preuve

Par récurrence, avec l'application de la preuve précédente mais des ensembles $\mathbb{N}^{n-1} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ pour prouver le tout.

Proposition : Dénombrabilité de $\mathbb{Q}$

$\mathbb{Q}$ est dénombrable.

Preuve

C'est une partie infinie de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$, donc elle est dénombrable.

Proposition : Dénombrabilité de $\mathbb{R}$

$\mathbb{R}$ est en bijection avec $[0,1[$, donc $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable.

Preuve

Avec un nombre écrit sous la forme $0, a_1 a_2 a_3 \ldots$. On peut écrire $a_1 = \lfloor 10x \rfloor$, $a_2 = \left\lfloor (x - \dfrac{a_1}{10}) 10^2 \right\rfloor, \ldots$
On peut construire une bijection avec $\mathbb{R}$. Par diagonalisation (on indexe tous les réels entre 0 et 1 par des entiers, et ensuite on construit un nouveau réel qui n'est pas du tout présent dans la suite), on a que $\mathbb{N}$ n'est pas en bijection avec $[0,1[$. Ainsi, $\mathbb{N}$ n'est vraiment pas en bijection avec $\mathbb{R}$.

Remarque I.1. *L'hypothèse du continu est indécidable, et dit que tout ensemble inclus dans $\mathbb{R}$ est soit en bijection avec $\mathbb{N}$, soit avec $\mathbb{R}$, sans entre-deux. Il faut le rajouter à l'axiomatique pour ne pas créer de paradoxes en se posant la question.*

Proposition : Réunion

Toute réunion au plus dénombrable d'ensembles au plus dénombrables est au plus dénombrable. Si I est au plus dénombrable, avec $(A_i)_{i\in I}$ est une famille d'ensembles au plus dénombrable, alors $\cup_{i\in I} A_i$ est au plus dénombrables.

Preuve

E ensemble, A, B deux parties de E. Alors $A \cup B = \{x \in E | (x \in A) \vee (x \in B)\}$. Alors $(A_i)_{i\in I} \in \mathcal{P}(E)^I$, et donc $\cup_{i\in I} A_i = \{x \in E | \exists i \in I, x \in A_i\}$.

II Familles sommables de réels positifs

Définition : Somme de familles réelles positives

Soit I un ensemble, soit $(u_i)_{i\in I} \in \mathbb{R}_+^I$. On définit la somme des $(u_i)_{i\in I}$ comme : $\sum\limits_{i\in I} u_i = \sup\left(\sum\limits_{j\in J, J\subset I \text{ fini}} u_j\right)$ si ces sommes sont majorées et $+\infty$ sinon.

Définition : Familles sommables de réels positifs

Soit $(u_i)_{i\in I} \in \mathbb{R}_+^I$, on dit que $(u_i)_{i\in I}$ est sommable si $\sum\limits_{i\in I} u_i \in \mathbb{R}_+$

Proposition : Sommabilité et dénombrabilité

Si I est non-dénombrable et $(u_i)_{i\in I} \in \mathbb{R}_+^I$, alors $(u_i)_{i\in I}$ n'est pas sommable.

Preuve

Ici, I est non-dénombrable. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $A_n = \left\{i \in I | u_i > \dfrac{1}{n}\right\}$. Alors $\cup_{n\in\mathbb{N}^*} A_n = I$.
On a une réunion dénombrable d'ensembles donnant un ensemble non-dénombrable, donc il existe n_0 tel que A_{n_0} non-dénombrable. Donc A_{n_0} est infini : pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, on peut trouver $J \subset A_{n_0}$ tel que $\text{card}(J) = p$.
Donc $\sum\limits_{j\in J} u_j > \dfrac{p}{n_0}$ donc la somme n'est pas majorée. Donc $\sum\limits_{i\in I} u_i = +\infty$

Dans la suite du cours, I est dénombrable.

Théorème :

Soit I un ensemble dénombrable, soit $\begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & I \\ n & \mapsto & i_n \end{array}$ une bijection de $\mathbb{N}$ dans I. Soit $(u_i)_{i\in I} \in \mathbb{R}_+^I$. $(u_i)_{i\in I}$ est sommable si, et seulement si, la série $\sum u_{i_n}$ est convergente. En cas de convergence, $\sum\limits_{i\in I} u_i = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_{i_n}$.

Preuve

Dans le cadre de l'énoncé, on suppose $(u_i)_{i\in I}$ sommable.

Fixons $n \in \mathbb{N}$, $\sum\limits_{k=0}^{n} u_{i_k} = \sum\limits_{k\in[\![0,n]\!]} u_{i_k}$ donc $\sum\limits_{k=0}^{n} u_k \leq \sum\limits_{i\in I} u_i$.

Donc $\sum u_{i_n}$ converge et $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n \leq \sum\limits_{i\in I} u_i$.

Soit $J \subset \mathbb{N}$ fini. $\sum\limits_{j\in J} u_{i_j} \leq \sum\limits_{n=0}^{\max(J)} u_{i_n} \leq \sum\limits_{i=0}^{+\infty} u_{i_n}$

donc $\sum\limits_{i\in I} u_i \leq \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_{i_n}$

Pour $(u_i)_{i\in I} \in \mathbb{R}_+^I$, avec I dénombrable. Alors $\sum\limits_{i\in I} u_i = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_{\varphi(n)}$ si la sére converge et $+\infty$ sinon.

Théorème : Sommation par paquets positif

Soit I dénombrable et $(J_j)_{j\in J}$ une partition de I avec J au plus dénombrable, ie $\cup_{j\in J} J_j = I, \forall j, h \in I, j \neq h \Rightarrow J_j \cap J_h = \emptyset$. Soit $(u_i)_{i\in I} \in \mathbb{R}_+^I$, alors : $\sum\limits_{i\in I} u_i = \sum\limits_{j\in J}\left(\sum\limits_{k\in J_j} u_k\right)$

Exemple II.1. $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^2} = \sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{(2n)^2} + \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{(2n+1)^2}$ *d'où* $\frac{3}{4}\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{(2n+1)^2}$

Mais en revanche, on n'a pas que $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2n} - \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2n+1}$ *puisque ces deux séries ne sont pas convergentes.*

$\left(\frac{1}{n^2+p^2}\right)_{(n,p)\in\mathbb{N}^{*2}}$ *est-elle sommable ? D'abord, notons que* $\left(\sum \frac{1}{n^2+p^2}\right)_{np}$ *est positive, et donc on a le droit d'écrire :*

$\sum\limits_{n,p\in\mathbb{N}} \frac{1}{n^2+p^2} = \sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*}\sum\limits_{p\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n2+p^2}$ *car* $\mathbb{N}^{*2} = \cup\{(n,p) | n \in \mathbb{N}^*, p \in \mathbb{N}^*\}$ *et la réunion est disjointe (signe* $\coprod$, *non homologué)*

$= \sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} I_n$ *avec* $I_n = \sum p \in \mathbb{N}^* \frac{1}{n^2+p^2}$. *Soit* $n \in \mathbb{N}^*$, *alors* $\left(\frac{1}{n^2+p^2}\right)_p \sim \frac{1}{p^2}$, *donc* $\forall n \in \mathbb{N}^*, I_n < +\infty$. *Soit* $n \in \mathbb{N}^*$. *On définit* $f : x \mapsto \frac{1}{n^2+p^2}$ *décroissante et positive. On fixe* $p \in \mathbb{N}^* a$. *Et alors :* $\int_p^{p+1} \frac{dt}{n^1+t^2} \leq \frac{1}{n^2+p^2}$.

Donc $\forall N \in \mathbb{N}$, $\sum\limits_{p=1}^{N} \frac{1}{n^2+p^2} \geq \int_1^{N+1} \frac{dt}{n^2+t^2} \geq \frac{1}{n}[\arctan(u)]_{\frac{1}{n}}^{\frac{N+1}{n}} \geq \frac{1}{n}\left(\arctan(\frac{N+1}{n}) - \arctan(\frac{1}{n})\right)$. *Par passage à la limite quand* N *tend vers* $+\infty$, *on a que* $I_n \geq \frac{\pi}{2n}\arctan(\frac{1}{n})$.

Donc $\frac{\pi}{2n} - \frac{1}{n}\arctan(\frac{1}{n}) \sim \frac{\pi}{n}$. *Or* $\frac{\pi}{n}$ *diverge, donc* $\sum I_n$ *diverge. Donc* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} = +\infty$. *Donc* $\left(\frac{1}{n^2+p^2}\right)_{n,p}$ *n'est pas sommable.*

Dans le cas plus général de $\left(\frac{1}{n^\alpha+p^\alpha}\right)_{(n,p)\in\mathbb{N}^{*2}}$

III Familles de complexes.

Définition : Sommabilité complexe

Soit $(u_i)_{i\in I} \in \mathbb{C}^I$. On dit que la famille est sommable si $(|u_i|)_{i\in I}$ est sommable, donc que $\sum\limits_{i\in I} |u_i| < +\infty$

Proposition : Somme d'une famille sommable.

Soit I dénombrable et $(u_i)_{i\in I}$ sommable. Alors : pour toute bijection $\varphi : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & I \\ n & \mapsto & \varphi(n) \end{array}\right.$ pn a que $\sum\limits_n u_{\varphi(n)}$ est une série absolument convergente et $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_{\varphi(n)}$ ne dépend pas de φ.
On appelle somme de $(u_i)_{i\in I}$: $\sum\limits_{i\in I} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} u_{\varphi(n)}$ où φ est une bijection donnée. La somme d'une famille non-sommable n'est pas définie.

Preuve

(u_i) sommable. φ bijection de $\mathbb{N}$ dans I. $\sum |u_i| = \sum |u_{\varphi(n)}| = \sum\limits_{n=0}^{\infty} |u_{\varphi(n)}$. $\sum u_{\varphi(n)}$ est absolument convergente. De plus, $\forall N \in \mathbb{N}$, $\sum\limits_{k=0}^{N} u_{\varphi(k)} = \sum\limits_{k=0}^{N} \mathcal{R}\rceil(u_{\varphi(k)})_+ - \mathcal{R}\rceil(u_{\varphi(k)})_- + i(\mathcal{I}\Updownarrow(u_{\varphi(k)})_+ - \mathcal{I}\Updownarrow(u_{\varphi(k)})$.
Tous ces restes sont majorés par $|u_{\varphi(k)}|$ donc sommables. Donc $\sum\limits_{k=0} u_{\varphi(k)} \to \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{R}\rceil(u_{\varphi(n)})_+ + \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{R}\rceil(u_{\varphi(n)})_- + \ldots$

Théorème : Sommation par paquets

I dénombrable, dont les J_j sont une partition. Avec $(u_i)_{i\in I} \in \mathbb{C}^I$ sommable. Alors $\sum\limits_{i\in I} u_i = \sum\limits_{j\in J} \sum\limits_{k\in J_j} u_k$

IV Applications

Théorème : de Fubini

Soit $(u_{i,j})_{(i,j)\in I\times J} \in \mathbb{C}^{I\times J}$ sommable. Alors $\sum\limits_{i,j\in I\times J} u_{i,j} = \sum\limits_{i\in I} \sum\limits_{j\in J} u_{i,j} = \sum\limits_{j\in J} \sum\limits_{j\in J}$, avec le cas particulier où $u_{i,j} = a_i b_j$ où : $(a_i b_j)_{i,j\in I\times J}$ qui est sommable si, et seulement si, $(a_i)_{i\in I}$ et $(b_j)_{j\in J}$ sont sommables et dans ce cas, $\sum\limits_{(i,j)\in I\times J} a_i b_j = \left(\sum\limits_{i\in I} a_i\right)\left(\sum\limits_{j\in J} b_j\right)$

Preuve

On prend $I \times J = \cup_{i\in I}\{(i,j), j \in J, i \in I\}$. Par sommation par paquets : $\sum\limits_{(i,j)\in I\times J} |a_i b_j| = \sum\limits_{i\in I}\left(\sum\limits_{j\in J} |a_i||b_j|\right) = \sum\limits_{i\in I} |a_i| \left(\sum\limits_{j\in J} |b_j|\right) = \left(\sum\limits_{i\in I} |a_i|\right)\left(\sum\limits_{j\in J} |b_j|\right)$
Donc $\sum |a_i b_j| < +\infty$ si, et seulement si, $\sum |a_i| < +\infty$ et $\sum |b_j| < +\infty$. Dans le cas de sommabilité, on peut reprendre tous ces calculs en enlevant les modules.

Théorème : Produit de Cauchy

Soit $(a_n), (b_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. Si $\sum a_n, \sum b_n$ sont abolument convergentes alors $\sum \left(\sum\limits_{k=0}^{n} a_n b_{n-k}\right)$ est absolument convergente et $\left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n\right)\left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} b_n\right) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}\left(\sum\limits_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right)$

Preuve

$(a_n b_p)_{(n,p)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable. $\mathbb{N}^2 = \cup_{s\in\mathbb{N}}\{(n,p) \in \mathbb{N}^2 | n+p = s\} = \cup_{s\in\mathbb{N}} S_s$ donc par théorème de sommation par paquets, on a que $\sum\limits_{(n,p)\in\mathbb{N}^2} a_n b_p = \sum\limits_{s\in\mathbb{N}} \sum\limits_{(n,p)\in S_s} a_n b_p = \sum\limits_{s\in\mathbb{N}} \left(\sum\limits_{k=0}^{n} a_k b_{s-k}\right)$

Exemple IV.1. *Avec $t \in]-1,1[$, montrez que $\dfrac{1}{(1-t)^2} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}(n+1)t^n$. C'est convergent par $(n+1)t^n$ est absolument convergent en remarquant que $[n+1]t^n = o(\dfrac{1}{n^2})$. On peut donc faire un produit de Cauchy :* $\left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} t^n\right)\left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} t^n\right) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}\left(\sum\limits_{k=0}^{n} t^k t^{n-k}\right)$

Exemple IV.2. *Prenons l'exponentielle complexe, définie par : pour $z \in \mathbb{C}$, on définit : $\exp(z) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{z^n}{n!}$.*

On prouve sa convergence facilement par le critère de d'Alembert : $\left|\dfrac{|z|}{n+1}\right|$ qui tend vers 0. Donc par critère de d'Alembert, on a sa convergence absolue. Comme elle est absolument convergence, on peut l'écrire comme une famille sommable : $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \dfrac{z^n}{n!}$.

Prouvons que $\forall z, z' \in \mathbb{C}, \exp(z+z') = \exp(z)\exp(z')$: comme la famille est sommable, avec $z, z' \in \mathbb{C}$, on a donc que $\exp(z)\exp(z')$ existe en tant que limite de la famille $\sum\limits_{p\in\mathbb{N}}\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \dfrac{z^n}{n!}\dfrac{z'^{p-n}}{(p-n)!} = \sum\limits_{p\in\mathbb{N}}\sum\limits_{p\in\mathbb{N}} \dfrac{1}{p!}\binom{p}{n} z z'^{n-p} = \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \dfrac{(z+z')^n}{n!}$

Prouvons que $\forall z \in \mathbb{C}, \exp(\bar{z}) = \bar{\exp}(z)$. Soit $z \in \mathbb{C}$, soit $n \in \mathbb{N}$: $\sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{\bar{z}^k}{k!} = \overline{\sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{z^k}{k!}}$. Par passage à la limite lorsque n tend vers l'infini, on a donc que $\exp(\bar{z}) = \bar{\exp}(z)$.

On peut alors utiliser que $\forall \theta \in \mathbb{R}, \exp(i\theta)\bar{\exp}(i\theta) = \exp(i\theta)\exp(-i\theta) = \exp(i(\theta-\theta)) = \exp(0) = 1$

La restriction de l'exponentielle à $\mathbb{R}$ coïncide bien avec la fonction exponentielle réelle.

Chapitre III

Espaces vectoriels normés

I Généralités

On note $\mathbb{K}$ un corps, $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Dans tous les cours, E est un $\mathbb{K}$-ev.

Définition : Norme

Soit E un $\mathbb{K}$-ev. Soit φ une application de E dans $\mathbb{R}_+$. On dit que φ est une norme si elle vérifie :

1. $\forall u \in E, \varphi(u) = 0 \Rightarrow u = 0$ (on dit que l'application est définie)
2. homogénéité : $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall u \in E, \varphi(\lambda u) = |\lambda|\varphi(u)$
3. inégalité triangulaire : $\forall u, v \in E, \varphi(u + v) \leq \varphi(u) + \varphi(v)$

Définition : EVN

On dit que E est un espace vectoriel normé si on a choisi une norme dans E. On note alors $(E, \varphi), (E, N), (E, \|.\|)$.

Définition : Boule unité

Avec $(E, \|.\|)$, on appelle la boule unité de E l'ensemble $\mathcal{B}(\vec{0}, 1) = \{x \in \mathbb{K}^p, \|x\| \leq 1\}$. Une norme est définie par sa boule unité.

Exemple I.1. *Dans $\mathbb{K}^p$, avec $p \in \mathbb{N}, p \geq 1$, pour $(x_1, x_2, ..., x_p) \in \mathbb{K}^p$, $\|x\|_\infty = \max\limits_{1\leq i\leq p} |x_i|$ est une norme : prenons un vecteur $x = (x_1, ..., x_p)$, alors si leur max est nul leur vecteur est nul, pour l'homogénéité, toutes les composantes sont multipliées fonctionne*

Pour l'inégalité triangulaire, prenons aussi $y = (y_1, ..., y_p)$. Alors $\|x+y\|_\infty = \max\limits_{1\leq i\leq p} |x_i+y_i| \leq \max\limits_{1\leq i\leq p}(|x_i|+|y_i|) \leq \max\limits_{1\leq i\leq p} |x_i| + \max\limits_{[} 1 \leq i \leq p]|y_i| \leq \|x\|_\infty + \|y\|_\infty$

Dans $\mathbb{R}^2$, on note $\mathcal{B}(\vec{0}, 1)$ la boule de centre 0 de rayon 1, telle que $\mathcal{B}(\vec{0}, 1) = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^2 | \|x\|_\infty \leq 1\}$. Dans $\mathbb{R}^2$ munie de la norme infinie précédente, on obtient un carré et pas un rond, comme on aurait pu l'attendre. Les différentes nrmes sont donc catégorisées par leurs boules unités, ce qui découle de l'homogénéité.

On appelle la norme 1 de $x = (x_1, ..., x_p) \in \mathbb{K}^p$ l'application : $\|x\|_1 = \sum\limits_{i=1}^{p} |x_i|$, qui est bien une norme. L'inégalité triangulaire vient des propriétés du module. Sa boule unité est un carré dont les sommets sont sur les axes.

On appelle la norme 2 de $x = (x_1, ..., x_p) \in \mathbb{K}^p$ l'application : $\|x\|_2 = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{p} |x_i|^2}$, qui est bien une norme : la définition est assurée par le fait que si une somme de réels positifs est nulle, ils sont nuls, *l'homogénéité se fait par calcul direct (sur les modules, sur les facteurs de sommes, sur la racine carrée) et l'inégalité triangulaire est prouvée par :* $\forall x, y \in \mathbb{C}^{2p}, \sqrt{\sum_{i=1}^{p} |x_i + y_i|^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{p} |x_i|^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{p} |y_i|^2}$.

En considérant $\mathbb{R}^p$ *muni du produit scalaire canonique et* $xti\vec{l}de = (|x_1|, ..., |x_p|), yti\vec{l}de = (|y_1|, ..., |y_p|)$. *Alors* $\|xti\vec{l}de + yti\vec{l}de\|_{euclidienne} \leq \|xti\vec{l}de\| + \|\vec{y}\|$ *donc on a l'égalité précédente.*

Donc on a trois normes usuelles pour $\mathbb{K}^p$.

Exemple I.2. *Si* E *est de dimension finie, on choisit une base* $B = (e_1, ..., e_p)$. *On pourra parler de la norme infinie, de la norme 1 et de la norme 2 relativement à la base* B *: si* x *élément de* E *avec une décomposition* $x \sum_{i=1}^{p} x_i e_i$, *alors on définira* $\|x_i\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq p} |x_i|, \|x\|_1 = \sum_{i=1}^{p} |x_i|, \|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{p} |x_i|^2}$

Si E *est en dimension infinie, par exemple* $E = \mathbb{K}[X]$ *(réunion dénombrable d'espaces de dimension finie), on peut définir pour* $P = \sum_{k=0}^{p} a_k X^k$ *les mêmes normes :* $\|P\|_\infty = \max_{k \in \mathbb{N}} |a_k|$, $\|P\|_1 = \sum_{k=0}^{\deg P} |a_k|$, $\|P\|_2 = \sqrt{\sum_{k=0}^{\deg P} |a_k|^2}$

Si $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{K})$, *pour* $f \in E$, *on considère* $\|f\|_\infty = \sup_{[0,1]} |f|$ *qui est d'ailleurs même un max mais le sup est toujours plus adapté. C'est une norme : elle est définie car si le sup du module de la fonctin est nul, elle est nulle partout ; soit* $\lambda \in \mathbb{K}$, *montrons l'homogénéité avec deux inégalités :*

On doit majorer l'ensemble : $\forall x \in [0, 1], |\lambda f(x)| = |\lambda||f(x)| \leq |\lambda| \sup_{[0,1]} |f(x)|$

On doit minorer l'ensemble : si $\lambda = 0$, *on a* $|\lambda| \sup |f| \leq \sup |\lambda f|$.

Si $\lambda \neq 0$, $\forall x \in [0, 1], |f(x)| \dfrac{1}{|\lambda|} |\lambda||f(x)| \leq \dfrac{1}{|\lambda|} \sup_{[0,1]} |\lambda||f|$

donc $\sup |f| \leq \dfrac{1}{|\lambda|} \sup_{[0,1]} |\lambda f|$. *D'où l'homogénéité.*

Pour l'inégalité triangulaire : $\sup_{[0,1]} |f+g| \leq \sup_{[0,1]} |f|+|g| \leq \sup_{[0,1]} |f| + \sup_{[0,1]} |g|$. *Soit* $x \in [0, 1], |f(x)|+|g(x)| \leq \sup_{[0,1]} |f| + \sup_{[0,1]} |g|$, *voilà l'inégalité prouvée.*

Pour $\mathcal{C}([0, 1, \mathbb{K})$, *on définit pour* $f \in \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{K}), \|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|dt, \|f\|_2 = \sqrt{\int_0^1 |f(t)|^2 dt}$.

Pour la norme 1 : soit $f \in E$, *supposons que* $\|f\|_1 = 0$, *alors on a la définition par positivité (améliorée) de l'intégrale puisqu'on a une fonction continue sur tout le segment* $[0, 1]$ *positive d'intégrale nulle. Le reste est évident.*

Pour la norme 2 : soit $f, g \in E$, *montrons que* $\sqrt{\int_0^1 |f + g|^2} \leq \sqrt{\int_0^1 |f|^2} + \sqrt{\int_0^1 |g|^2}$. *On en déduit son produit scalaire* $< f, g >= \int_0^1 f(t)g(t)dt$, *puis on applique Cauchy-Schwarz avec les modules des deux fonctions.*

Si on prend $E = \mathbb{K}^\mathbb{N}$, *alors on peut définir pour* $(u_n) \in E$, *on a besoin de restreindre aux suites bornées pour que* $\|u\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} |u_n|$, *ou pour que* $\|u\|_1 = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$, *il faut se restreindre à l'ev des termes généraux de séries absolument convergentes (*L_1*), tandis que la norme* $\|u\|_2 = \sqrt{\sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|^2}$ *n'est bien définie que sur* L_2, *ensemble des suites dont le module au carré est sommable. Mais il faut encore savoir si c'est un ev...*

$|u_n + v_n|^2 \leq (|u_n| + |v_n|)^2 \leq |u_n|^2 + |v_n|^2 + 2|u_n||v_n| \leq 2(|u_n|^2 + |v_n|^2)$

Proposition : Produit fini d'EVN

Avec E, F deux EVN de normes $\|.\|_E, \|.\|_F$, alors $E \times F$ est un EVN qui admet comme norme l'application : $\left\{\begin{array}{ccc} E \times F & \to & \mathbb{R}_+ \\ (e,f) & \mapsto & \max(\|e\|_E, \|f\|_F) \end{array}\right.$.
On peut étendre par récurrence : si $E_1, ..., E_p$ un nombre fini d'EVN, on peut définir une norme sur $\prod_{i=1}^{p} E_i$ par : $\forall (e_1, ..., e_p) \in E_1 \times E_2 \times ... \times E_p, \|(e_1, ..., e_p)\| = \max_{i \in \{1,...,p\}} \|e_i\|$.

Définition : Distance

Soit E un EVN. On appelle distance associée à la norme sur E l'application :

$$d : \left\{\begin{array}{ccc} E & \to & \mathbb{R}_+ \\ (x,y) & \mapsto & \|x-y\| \end{array}\right.$$

Une distance définit un espace métrique.

Proposition : Propriétés de la distance

- $\forall x, y \in E, d(x,y) = 0 \Rightarrow x = y$;
- $\forall x, y, z \in E, d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$.

Proposition : Deuxième forme de l'inégalité triangulaire

Soit E un EVN, $\forall x, y \in E, |\|x\| - \|y\|| \leq \|x \pm y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Preuve

L'inégalité de droit est déjà une des propriétés des normes. Pour l'inégalité de gauche, elle est équivalente à $\begin{array}{ccc} \|x\| - \|y\| & \leq & \|x-y\| \\ -\|x-y\| & \|x\| - \|y\| & \end{array}$.
On la prouve en utilisant $x = x - y + y$ et puis $\|x\| \leq \|x-y\| + \|y\|$

Définition : Boule ouverte

Avec E un EVN, soit $x \in E, r \in \mathbb{R}_+$, on appelle la boule ouverte de centre x et de rayon r : $\mathcal{B}(x,r) = \{y \in E, \|x-y\| < r\}$

Définition : Boule fermée

Avec E un EVN, soit $x \in E, r \in \mathbb{R}_+$, on appelle la boule fermée de centre x et de rayon r : $\mathcal{B}_f(x,r) = \{y \in E, \|x-y\| \leq r\}$

Définition : Sphère

Avec E un EVN, soit $x \in E, r \in \mathbb{R}_+$, on appelle la sphère de centre x et de rayon r : $\mathcal{S}(x,r) = \{y \in E, \|x-y\| = r\}$

Définition : Partie convexe

Soit E un $\mathbb{R}$-ev, soit $A \subset E$, on dit que A est convexe si : $\forall x, y \in A, [x, y] \subset A$, où $[x, y] = \{tx + (1-t)y, 0 \leq t \leq 1\} = \{y + t(x-y), 0 \leq t \leq 1\}$

Proposition : Convexité des boules

Soit E un EVN. Toute boule de E est convexe.

Preuve

Prenons $x \in E, r \in \mathbb{R}_+$ et $\mathcal{B}(x, r)$ la boule ouverte qu'ils définissent. Alors, pour $y, z \in \mathcal{B}(x, r)$, on a que $\|x - z\| < r$ et $\|x - y\| < r$. Prenons $\exists t \in [0, 1]$, ce qui donne que $ty + (1-t)z \in [y, z]$.
On a que $\|ty+(1-t)z-x\| = \|ty-tx+(1-t)z-(1-t)x \leq |t|\|y-x\|+|1-t|\|z-x\| < (t+(1-t))r = r$ ce qui est justifié par $t \neq 0$ ou $(1-t) \neq 0$ et par les inégalités strictes de la boule ouverte.
Donc $ty + (1-t)z \in \mathcal{B}(x, r)$.
On procède de même pour les boules fermées, sauf qu'on n'a pas besoin de justifier une inégalité stricte.

Proposition : Séparabilité

Soit E un EVN. Soient $x, y \in E$ tels que $x \neq y$. Alors il existe deux boules disjointes centrées en x et y.

Preuve

Soient $x, y \in E$ différents. Alors $\|x - y\| \neq 0$, notons $\|x - y\| = d$.
Prenons les boules ouvertes $B_1 = \mathcal{B}(x, \frac{d}{4}), B_2 = \mathcal{B}(y, \frac{d}{4})$.
Soit $z \in B_1$, alors $\|z - x\| < \frac{d}{4}$.
On note que $\|z - y\| = \|z - x + x - y\|$, donc $\|z - y\| \geq \|y - x\| - \|z - x\| \geq d - \frac{d}{4}$
Donc $\|z - y\| \geq \dfrac{d}{4}$

Définition : Normes équivalentes

Soit E un espace vectoriel, et $\|.\|_1, \|.\|_2$ deux normes sur E. On dit que $\|.\|_1$ et $\|.\|_2$ sont équivalentes si : $\exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^*, \forall x \in E, \alpha\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq \beta\|x\|_1$, ou si $x \neq 0$: $\alpha \leq \dfrac{\|x\|_2}{\|x\|_2} \leq \beta$

Proposition : Bornes pour normes équivalentes

Soit E un espace vectoriel avec $\|.\|_1, \|.\|_2$ deux normes équivalentes. Toute partie de E bornée pour $\|.\|_1$ est bornée pour $\|.\|_2$

Exemple I.3. *Sur $\mathbb{K}^p$, comparons $\|.\|_\infty, \|.\|_1, \|.\|_2$. Soit $(x_1, ..., x_p) \in \mathbb{K}^p$: $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{p} |x_i| \leq p\|x\|_\infty$ et $\|x\|_\infty \leq \|x\|_1$. Donc les deux normes sont équivalentes.*

Comparsons $\|.\|_2$ et $\|.\|_\infty$: $\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{p} |x|^2} \leq \sqrt{p}\|x\|_\infty$ et $\|x\|_\infty \leq \|x\|_2$.

On a bien prouvé les équivalences (c'est une relation d'équivalence donc $\|.\|_1$ et $\|.\|_2$ aussi), mais on n'a pas forcément les constantes optimales. On a donc besoin d'établir que $\|x\|_2 \leq \|x\|_1$ (en mettant au carré) *et que* $\|x\|_1 \leq \sqrt{p}\|x\|_2$ *qui est immédiat en considérant* $\|.\|_1$ *comme un produit scalaire avec un vecteur de norme infinie valant 1, et ayant sur chaque coordonnée le même signe.*

On admet provisoirement le théorème : Dans un espace de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.

Exemple I.4. *Prenons les normes qu'on a défini sur* $E = \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ *(rappel :* $\forall f \in E, \|f\|_\infty = \sup\limits_{[0,1]} |f|, \|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|dt$*).*

Pour prouver que deux normes ne sont pas équivalentes, prouvons qu'un ensemble borné pour l'une ne l'est pas pour l'autre (rappel : avec $A \subset E$*,* A *bornée signifique* $\exists M \in \mathbb{R}_+^*, \forall x \in A, \|x\| \leq M$ *et* A *non-bornée signifie* $\forall M \in \mathbb{R}_+^*, \exists x \in A, \|x\| \geq M$*). On peut donc prouver la non-bornaison avec l'aide d'une suite tendant vers l'infini.*

Soit $f \in E$*, alors* $\int_0^1 |f| \leq \sup\limits_{[0,1]} |f|(1-0) \leq \|f\|_\infty$*. Cependant, il n'existe pas de constantes permettant une seconde inégalité, donc on peut faire des suites de fonction avec une norme 1 qui tend vers 0 et une norme infinie restant à 1. Par exemple :* $\forall n \in \mathbb{N}, f_n : \left\{ \begin{array}{ccc} [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & e^{-nx} \end{array} \right.$*. Alors,* $\|f_n\|_1 = \dfrac{1}{n}(1-e^{-n})$ *mais* $\|f_n\|_\infty = 1$ *donc les deux normes ne sont pas équivalentes.*

II Suites d'un EVN

Définition : Convergence

Soit E un EVN sur $\mathbb{K}$, soit $(u_n) \in E^{\mathbb{N}}$. Soit $l \in E$. On dit que (u_n) converge vers l si $(\|u_n - l\|) \to 0$
On peut aussi écrire :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \Rightarrow u_n \in \mathcal{B}(l, \varepsilon)$$

On parle de suites convergentes et de limites (notées $\lim(u_n) = l$ et $(u_n) \to l$) dans un EVN

Théorème : Unicité de la limite

La limite d'une suite convergente est unique.

Preuve

Supposons qu'une suite soit convergente avec deux limites l_1, l_2, on prend deux boules centrées sur les deux qui soient disjointes, puis on applique le fait qu'à partir d'un certain rang, tous les termes de la suite soient dedans. On y trouve une contradiction, et donc la limite est unique.

Proposition : Convergences équivalentes

Si E est un ev et que $\|.\|_1, \|.\|_2$ sont deux normes de E équivalentes, alors les suites convergentes de $(E, \|.\|_1)$ sont exactement les suites convergentes de $(E, \|.\|_2)$

Preuve

Il existe α, β tels que : $\forall x \in E, \alpha\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq \beta\|x\|1$.
Alors si $u_n \to l$ en norme 1, alors $\|u_n - l\|_1 \to 0$.
Comme $\forall n \in \mathbb{N}, \|u_n - l\|_2 \leq \beta\|u_n - l\|_1$, alors $(\|u_n - l\|_2) \to 0$
Et de même pour la réciproque.

Remarque II.1. *Si $\|.\|_1$ et $\|.\|_2$ ne sont pas équivalentes, il existe des suites qui convergent pour l'une et pas pour l'autre.*

En effet, si $\|.\|_1$ et $\|.\|_2$ ne sont pas équivalentes, on a soit $x \mapsto \dfrac{\|x\|_1}{\|x\|_2}$ non majorée, soit $x \mapsto \dfrac{\|x\|_1}{\|x\|_2}$.

Dans le premier cas, on peut construire $(u_n) \in E^{\mathbb{N}}$ telle que $\frac{\|u_n\|_1}{\|u_n\|_2} \to +\infty$ (existe par caractérisation séquentielle de la non-majoration). Prenons alors $v_n = \frac{1}{\|u_n\|_1} u_n$. Alors $\|v_n\|_2 = \frac{\|u_n\|_2}{\|u_n\|_1} \to 0$ et $\|v_n - 0\|_2 \to 0$ et donc v_n tend vers 0 au sens de la norme 2 alors qu'elle tend vers 1 au sens de la norme 1.

On rappelle que c'est seulement possible dans le cas de la dimension infinie, même si l'on n'a pas encore démontré qu'en dimension finie toutes les normes sont équivalentes.

Proposition : Opérations sur les suites convergentes

Avec E un EVN, (u_n) qui tend vers l_u et (v_n) qui tend vers l_v, $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, alors :

$$((\lambda u + \mu v)_n) \to \lambda l_u + \mu l_v.$$

Preuve

Soit $n \in \mathbb{N}$, alors $\|\lambda u_n + \mu v_n - (\lambda l_u + \mu l_v)\| \leq |\lambda| \|u_n - l_u\| + |\mu| \|v_n - l_v\|$.

Proposition : Corollaire

L'ensemble des suites convergentes est un sev de l'ensemble des suites d'un EVN.

Proposition : Extension

Si $(u_n) \in E^{\mathbb{N}}$, $(u_n) \to a$ et $(\lambda_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ avec $(\lambda_n) \to \alpha$, alors $\lambda_n u_n \to \alpha a$

Preuve

Soit $n \in \mathbb{N}$:
$\|\lambda_n u_n - \alpha a\| = \|\lambda_n u_n - \lambda_n a + \lambda_n a - \alpha a\|$
$\leq \|\lambda_n (u_n - a)\| + \|(\lambda_n - \alpha) a\|$
$\leq |\lambda_n| \|u_n - a\| + |\lambda - \alpha| \|a\|$
$\leq \sup |\lambda_n| \|u_n - a\| + |\lambda_n - \alpha| \|a\|$

Remarque II.2. *On "rappelle" rapidement ce que sont des algèbres :*

Une algèbre $(E, +, \times, \cdot)$ est un ensemble munis des lci $+$ et $\times$ et de la lce $\cdot$ tel que que $(E, \mathbb{K}, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$-ev et $(E, +, \times)$ est un anneau où on a pour $\lambda \in \mathbb{K}, a, b \in E, \lambda(ab) = a(\lambda b)$

$\mathbb{K}[X], (\mathcal{L}(E), +, \circ, \cdot), (\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), +, \times, \cdot)$ sont des $\mathbb{K}$-algèbres. De plus, $\mathbb{K}[X]$ est commutatif intègre. $\mathcal{L}(E)$ et $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ne sont ni commutatifs ni intègres (il y a bijection entre les deux).

Définition : Algèbre normée

Soit $(A, +, \times, \cdot)$ une algèbre, on dit qu'elle est normée si on la munit d'une norme $\|.\|$ vérifiant de plus : $\forall x, y \in A, \|x \times y\| \leq \|x\| \|y\|$

Proposition : Produit de suites dans une algèbre normée

Avec $\mathcal{A}$ algèbre normée, soient $(u_n), (v_n) \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ qui tendent vers x et y. Alors $(u_n v_n) \to xy$

Preuve

Soit $n \in \mathbb{N}$: $\|u_n v_n - xy\| = \|u_n v_n - u_n y + u_n y - xy$
$\leq \|u_n(v_n - y)\| + \|(u_n - x)y\|$
$\leq \|u_n\|\|v_n - y\| + \|u_n - x\|\|y\|$ (propriété de la norme d'algèbre)
$\leq \sup \|u_n\|\|v_n - y\| + \|u_n - x\|\|y\|$

Théorème : Convergence dans un produit cartésien fini

Soient $E_1, ..., E_p$ p $\mathbb{K}$-ev normés. Avec $E = E_1 \times ... \times E_p$, $(u_n) \in E^{\mathbb{N}}$ s'écrivant $(u_n^1, ..., u_n^p)$.
Alors (u_n) tend vers $l = (l_1, ... l_p)$ si, et seulement si, $\forall i \in \{1, ..., p\}, u_n^i \to l_i$

Preuve

$\forall i \in \{1, ..., p\}, \|u_n^i - l_i\| \leq \|u_n - l\|$ Donc si (u_n) tend vers l, alors $\forall i \in \{1, ..., p\}, u_n^i \to l_i$
Réciproquement, supposons que $\forall i \in \{1, ..., p\}, u_n^i \to l_i$.
Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$.
Pour $i \in \{1, ..., p\}$, comme $u_n^i \to l_i$ on peut trouver $n_i \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_i, \|u_n^i - l_i\| < \varepsilon$
Donc pour $n \geq \max\limits_{i \in \{1,...,p\}} n_i, \|u_n - l\| < \varepsilon$

Remarque II.3. *Ce théorème s'applique notamment à $\mathbb{K}^n$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ et donc à tout $\mathbb{K}$-ev de dimension finie. Et comme en dimension finie, toutes les normes sont équivalentes, on a la propriété pour les normes qui ne sont pas la norme infinie.*

On a la propriété : Si E est un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie p et $B = (e_1, ..., e_p)$ base de de E. Alors à toute suite de E $(u_n) = (\sum\limits_{i=1}^{p} u_n^i e_i)$ on peut associer ses suites coordonnées (u_n^i) dans la base B.

Donc $(u_n) \to l = \sum\limits_{i=1}^{p} l_i e_i$ si, et seulement si, $\forall i \in \{1, ..., p\}, u_n^i \to l_i$.

Exemple II.1. $\left(\begin{pmatrix} \frac{1}{n} & \frac{2+n}{1+n} \\ \sin\left(\frac{1}{n}\right) & \exp\left(\frac{n}{n+1}\right) \end{pmatrix}\right)_{n \in \mathbb{N}} \to \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & e \end{pmatrix}$

$\left(\begin{pmatrix} \frac{1}{n} & \frac{2+n}{1+n} \\ \sin\left(\frac{1}{n}\right) & (-1)^n \end{pmatrix}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ *diverge.*

II.1 Séries d'un EVN

Définition : Série d'un EVN

Soit E un $\mathbb{K}$-ev normé. Avec $(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, on dit que $\sum u_n$ converge si $\left(\sum\limits_{k=0}^{n} u_k\right)$ converge.

On a les mêmes propriétés sur le fait que la suite des termes généraux tende vers 0.

Proposition : Absolue convergence en dimension finie

Si E est de dimension finie, alors toute série absolument convergente est convergente.

Preuve

Si on fixe une base $B = (e_1, ..., e_p)$ de E de dimension finie p.
Soit $(u_n) \in E^{\mathbb{N}}$. Pour $n \in \mathbb{N}, u_n = \sum\limits_{i=1}^{p} u_n^i e_i$.
La série $\sum u_n$ converge si, et seulement si, $\forall i \in \{1, ..., p\}, \sum u_n^i$ converge.
Si $\sum \|u_n\|$ converge, alors $\sum \|u_n\|_\infty$ converge (car on est en dimension finie)
Or $\forall i \in \{1, ..., p\}, |u_n^i \leq \|u_n\|_\infty$
Donc par critère de majoration positif, $\sum u_n^i$ converge absolument, donc converge.
Donc $\sum u_n$ converge.

II.2 Application dans une algèbre normée

Proposition : Série exponentielle

Soit $\mathcal{A}$ une algèbre normée de dimension finie. On peut définir pour $u \in \mathcal{A}$: $\exp(u) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} u^n$

Preuve

Prouvons la convergence de $\sum \frac{1}{n!} u^n$: $\frac{1}{n!}\|u^n\| \leq \frac{\|u\|^n}{n!}$ qui est le terme général d'une série convergente. La série exponentielle converge absolument, et comme on est en dimension finie, elle converge aussi dans $\mathcal{A}$.

Exemple II.2. *Dans $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ qui est une algèbre de dimension p^2, on peut définir pour $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$:* $\exp(A) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{1}{n!} A^n$

Proposition : Série géométrique

Avec $\mathcal{A}$ algèbre normée, on peut définir pour $u \in \mathcal{A}$ tel que $\|u\| < 1$, la somme géométrique $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u^n$.

Et si $\|u\| < 1$, alors $1 - u$ est inversible et $(1-u)^{-1} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u^n$

Preuve

Pour $n \in \mathbb{N}, (1-u) \sum\limits_{k=0}^{n} u^k = 1 - u^{n+1}$ et donc par passage à la limite quand $n \to +\infty$, on a $(1-u) \sum\limits_{k=0}^{+\infty} u^n = 1$. Donc $(1-u)$ possède un inverse à droite.

De même : $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} (1-u) = 1$, d'où le résultat.

Exemple II.3. *Exemple d'anneau où un inverse à droite n'est pas u n inverse à gauche aussi :*

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] & \to & \mathbb{R}[X] \\ X^p & \mapsto & X^{p+1} \end{array} \right. \quad et\ g : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] & \to & \mathbb{R}[X] \\ X^p & \mapsto & \left\{ \begin{array}{ll} X^{p-1} & si\ p \geq 1 \\ 0 & sinon \end{array} \right. \end{array} \right.$$

On peut alors composer les deux applications, mais selon l'ordre dans lequel on les compose, on n'aura pas nécessairement l'identité.

II.3 Familles sommables d'un K-ev

Définition : Familles sommables d'un K-ev de dimension finie

Avec E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie muni d'une base $B = (e_1, ..., e_p)$, avec I dénombrable et avec $(u_i)_{i\in I} \in E^I$, on dit que $(u_i)_{i\in I}$ est sommable si $\|u_i\|_{i\in I}$ est sommable.

Proposition : Sommabilité des familles coordonnées

Une famille $(u_i)_{i\in I}$ s'écrivant : $\forall i \in I, u_i = \sum\limits_{k=1}^{p} u_i^k$ est sommable si, et seulement si, $\forall k \in \{1, ..., p\}, (u_i^k)_{i\in I}$ est sommable.

Tous les théorèmes comme la sommations par paquets ou l'indiçage en identifiant I à $\mathbb{N}$ par une bijection sont valides pour toutes les familles sommables de E.

Exemple II.4. *Si $\mathcal{A}$ est une algèbre de dimension finie, alors avec $u, v \in \mathcal{A}, uv = vu$ (u et v commutants), on a que* $\exp(u+v) = \exp(u) + \exp(v)$ *(la commutativité est utilisée lors du binôme de Newton)*
$\sum\limits_{i\in\mathbb{N}} \frac{1}{i!}u^i \sum\limits_{j\in\mathbb{N}} \frac{1}{j!}u^j = \sum\limits_{(i,j)\in\mathbb{N}^2} \frac{1}{i!}u^i \frac{1}{j!}u^j = \sum\limits_{s\in\mathbb{N}} \frac{1}{s!} \sum\limits_{i+j=s} \frac{s!}{i!j!}u^i v^j = \sum\limits_{s\in\mathbb{N}} \frac{1}{s!}(u+v)^s$

II.4 Suites extraites

Définition : Suites extraites

Soit E un $\mathbb{K}$-EVN, avec $(u_n) \in E^{\mathbb{N}}$. On extrait une suite de (u_n) en se donnant une fonction $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante. $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ est alors une suite extraite de (u_n).

Théorème : Convergence des suites extraites

Si une suite $(u_n) \in E^{\mathbb{N}}$ converge l alors toute suite extraite de (u_n) converge vers l.

Théorème : Union d'applications d'extraction

Si φ, ψ sont deux applications de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ strictement croissantes vérifiant $\varphi(\mathbb{N}) \cup \varphi(\mathbb{N}) = \mathbb{N}$, si $(u_{\varphi(n)})$ et $(u_{\psi(n)})$ convergent vers l, alors u_n est convergente de limite l.

Théorème : Bolzano-Weierstrass

De toute suite bornée dans un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie on peut extraite une suite convergente.

Preuve

Soit E un $\mathbb{R}$-ev de dimension finie, avec $B = (e_1, ..., e_p)$ une base et $(u_n) \in E^{\mathbb{N}}$ bornée.
Pour $n \in \mathbb{N}, u_n = \sum\limits_{i=1}^{p} u_n^i e_i$, donc $(u_n^1) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est bornée, donc on peut en extraire une suite convergente $(u_{\varphi_1(n)}^1)$ de (u_n^1).
Pour (u_n^2), on a encore une suite bornée réelle, on peut en extraire une suite convergente $(u_{\varphi_1\circ\varphi_2(n)}^2)$.
On itère ce résultat jusqu'à $(u_{\varphi_1\circ...\circ\varphi_{p-1}(n)}^p)$ qui est une suite bornée de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, donc on peut en extraire la suite $(u_{\varphi_1\circ...\circ\varphi_p(n)}^p)$ convergente.
On a donc que $\forall i \in \{1, ..., p\}, (u_{\varphi_1\circ...\circ\varphi_p(n)}^i)$ est convergente, donc $(u_{\varphi_1\circ...\varphi_p(n)})$ est convergente.
Le cas dans un $\mathbb{C}$-ev en découle par le fait que les $\mathbb{C}$-ev de dimension p soient isomorphes aux $\mathbb{R}$-ev de dimensions $2p$.

III Topologie

Dans toute cette section, E sera un $\mathbb{K}$-EVN de dimension quelconque

III.1 Ouverts

Définition : Point intérieur

Soit $A \subset E$ et $a \in A$, on dit que a est intérieur à A si $\exists \alpha \in \mathbb{R}_+^*, \mathcal{B}(a, \alpha) \subset A$

Définition : Intérieur

Soit $A \subset E$, on appelle intérieur de A l'ensemble des points intérieurs de A, noté $\mathring{A}$; on a donc $\mathring{A} \subset A$

Exemple III.1. *Soient $x \in E, r \in \mathbb{R}_+^*$, alors $\mathcal{B}_f\mathring{(x, r)} = \mathcal{B}(x, r)$.*

Soit $y \in \mathcal{B}(x, r)$.
Considérons $r' = r - \|y - x\|$.
Soit $z \in E$, tel que $\|z - y\| \leq r'$, alors on a que $\|z - x\| \leq \|z - y\| + \|y - x\| \leq r$
Donc $\mathcal{B}(y, r) \subset \mathcal{B}_f(x, r)$ donc $y \in \mathcal{B}_f(x, r)$
Pour l'intre inclusion : soit $y \in E$ tel que $\|y - x\| = r$. Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$.
Considérons $z = y + \frac{\alpha}{2\|y-x\|}(y - x)$
alors $z \in \mathcal{B}(y, \alpha)$
$\|z - x\| = (1 + \frac{\alpha}{2\|y-x\|})\|y - x\| = r + \frac{\alpha}{2} > r$
Donc $z \notin \mathcal{B}_f(x, r)$
donc : $\forall \alpha \in \mathbb{R}_+^*, \mathcal{B}(y, \alpha) \cap \mathcal{C}\mathcal{B}_f(x, r) \neq \emptyset$
Donc $\mathcal{B}_f\mathring{(x, r)} = \mathcal{B}(x, r)$

Définition : Ouvert

Soit $A \subset E$, on dit que A est ouvert si tous les points de A sont intérieurs (ou si A contient un voisinage de chacun de ses points), ce qui signifie $A \subset \mathring{A}$

Proposition : Ouverture de la boule

Une boule ouverte d'un EVN est un ouvert

Preuve

Soient $x \in E, r \in \mathbb{R}_+^*$
Soit $y \in \mathcal{B}(x, r)$; on pose $r' = 1 - \|x - y\|$
Soit $z \in \mathcal{B}(y, r')$: $\|z - x\| \leq \|z - y\| + \|y - x\| < r - \|y - x\| + \|y - x\| < r$
Donc $\mathcal{B}(y, r') \subset \mathcal{B}(x, r)$
Donc $\mathcal{B}(x, r)$ est un ouvert.

Proposition : Plus grand ouvert

$\mathring{A}$ est le plus grand ouvert inclus dans A (au sens de l'inclusion)

Preuve

Montrons que $\overset{\circ}{A}$ est un ouvert :
Soit $x \in \overset{\circ}{A}$: par définition de $\overset{\circ}{A}$, on peut fixer $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\mathcal{B}(x,\alpha) \subset A$
Soit $y \in \mathcal{B}(x,\alpha)$
$\exists \alpha' \in \mathbb{R}_+^*, \mathcal{B}(y,\alpha') \subset \mathcal{B}(x,\alpha) \subset A$ puisque que $\mathcal{B}(x,\alpha)$ est un ouvert
Donc $y \in \overset{\circ}{A}$
Donc $\mathcal{B}(x,\alpha) \subset \overset{\circ}{A}$
$\overset{\circ}{A}$ est donc un ouvert inclus dans A
Pour la maximalité : Soit B un ouvert, $B \subset A$.
Soit $b \in B$
Comme B ouvert $\exists \alpha \in \mathbb{R}_+^*, \mathcal{B}(b\alpha) \subset A$
$b \in \overset{\circ}{A}$
Donc $B \subset \overset{\circ}{A}$

Proposition : Réunion et intersection d'ouverts

Avec E un EVN, $(O_i)_{i \in I}$ une famille d'ouverts de E, on a que :
- $\cup_{i \in I} O_i$ est un ouvert
- $\cap_{i \in I} O_i$ est un ouvert à condition que I soit fini

III.2 Adhérence

Définition : Point adhérent

Soit $A \subset E$ et $x \in E$, on dit que x est adhérent à A si : $\forall \alpha \in \mathbb{R}_+^*, \mathcal{B}(x,\alpha) \cap A \neq \emptyset$

Définition : Adhérence

Soit $A \subset E$, on appelle adhérence de A l'ensemble des points adhérents à A, noté $\bar{A}$. On notera que $A \subset \bar{A}$

Exemple III.2. *On a que $\overset{\circ}{\mathbb{Q}} = \emptyset$ par densité des irrationnels dans les réels, et, symétriquement, $\bar{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$*

Théorème : Caractérisation séquentielle de l'adhérence

Soient $A \subset E, x \in E$, alors x est adhérent à A si, et seulement si, $\exists (a_n) \in A^{\mathbb{N}}, (a_n) \to x$

Preuve

Procédons par double-implication.
Supposons que x soit adhérent à A : alors on peut choisir (axiome du choix) pour $n \in \mathbb{N}$, $a_n \in A \cap \mathcal{B}(x, \frac{1}{n+1})$
La suite ainsi construite converge vers x et $(a_n) \in A^{\mathbb{N}}$
Réciproquement : on suppose l'existence de $(a_n) \in A^{\mathbb{N}}, (a_n) \to x$.
soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$
comme $(a_n) \to x, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \Rightarrow a_n \in \mathcal{B}(x,\alpha)$
Donc $\mathcal{B}(x,\alpha) \cap A \neq \emptyset$
D'où l'équivalence.

Définition : Fermé

Si $A \subset E$, A est fermé si $\bar{A} = A$ (donc que $\bar{A} \subset A$), donc que A contient tous les points qui lui sont adhérents.

Théorème : Caractérisation séquentielle des fermés

Soit $A \subset E$, A est fermé si, et seulement si, pour toute suite d'éléments de A convergente vers l, $l \in A$. ie $\forall (a_n) \in A^{\mathbb{N}}, (a_n) \to l \Rightarrow l \in A$

Preuve

Découle de la caractérisation séquentielle de l'adhérence.

Exemple III.3. *Soit* $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^3 | x + 2y \geq 0\}$, *montrons que* A *est feré. Soit* $((\alpha_n, \beta_n)) \in A^{\mathbb{N}}$.
On soppose que $((\alpha_n, \beta_n)) \to (a, b) \in \mathbb{R}^2$
Or $\forall n \in \mathbb{N}, \alpha + 2\beta \geq 0$ *et on a que* $(\alpha_n) \to a$ *et* $(\beta_n) \to b$
donc par passage à la limite : $a + 2b \geq 0$
donc $(a, b) \in A$
$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ *et* $0 \leq z \leq x^2 + y^2\}$ *est un fermé*
$\mathcal{S}_p(\mathbb{R}) = \{M \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R}) | M^T = M\}$, *montrons que* $\mathcal{S}_p(\mathbb{R})$ *est un fermé de* $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$.
Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{S}_p(\mathbb{R})$. *On suppose que* $(A_n) \to M \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$
$(A_n^T) \to M^T$ *donc que* $\forall i, j \in [\![1, p]\!], [A_n^t]_{i,j} \to [M]_{i,j}$
et $\forall n \in \mathbb{N}, A_n^T = A_n$
Donc par passage à la limite : $M^T = M$
Donc $M \in \mathcal{S}_p(\mathbb{R})$
Donc $\mathcal{S}_p(\mathbb{R})$ *est un fermé.*
La sphère $S(x, r) = \{y \in E | \|y - x\| = r\}$ *est un fermé.*

Proposition : Fermeture de la boule

Une boule fermée est un fermé

Preuve

Soit $x \in E$
Soit $r \in \mathbb{R}_+^*$
Soit $(u_n) \in \mathcal{B}_f(x, r)^{\mathbb{N}}$ qui tend vers $y \in E$.
Or $\forall n \in \mathbb{N}, \|u_n - x\| \leq r$
et comme $(u_n) \to y$, on a $(u_n - x) \to y - x$
On a que la limite de la norme d'une suite est la norme de sa limite par la deuxième inégalité triangulaire : $|\|v_n\| - \|m\|| \leq \|v_n - m\|$
Donc $\|u_n - x\| \to \|y - x\|$
Et donc par passage à la limite : $\|y - x\| \leq r$
donc $y \in \mathcal{B}_f(x, r)$

Proposition : Produit de fermés

Tout produit cartésien fini de fermés est un fermé

Exemple III.4. *Soit* $(u_n) \in E^{\mathbb{N}}$. *On dit que* $x \in E$ *est une valeur d'adhérence de* u *si* x *est limite d'une suite extraite de* E. *Par exemple, les valeurs d'adhérence de* $(-1)^n$ *sont* 1 *et* (-1) *et les valeurs d'adhérence* *de* $\sin(n)$ *sont l'ensemble des réels entre* -1 *et* 1. *Attention à ne pas confondre les valeurs d'adhérence d'une suite et l'adhérence d'une suite, qui est l'ensemble des points de la suite.*

On peut reformuler Bolzano-Weierstrass : Toute suite bornée admet au moins une valeur d'adhérence.

Exercice : *Montrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence d'une suite est fermé.*

Théorème : Complémentarité d'un ouvert

Soit E un EVN et $A \subset E$, alors A est fermé si, et seulement si, $\mathcal{C}_E A$ est ouvert.

Preuve

La proposition est équivalente à : A est ouvert si, et seulement si, $\mathcal{C}_E A$ est fermé. On montrera la contraposée des deux implications.
Soit $A \subset E$
On suppose A non-ouvert. On peut donc prendre $a \in A$ tel que $\forall \alpha \in \mathbb{R}_+^*, \mathcal{B}(a, \alpha) \cap \mathcal{C}_E A \neq \emptyset$
Donc a est adhérent à $\mathcal{C}_E A$ et $a \notin \mathcal{C}_E A$
Donc le complémentaire de A dans E n'est pas fermé.
On suppose A non-fermé. On a donc l'existence de $x \in \bar{A} \backslash A$.
Et donc $\forall \alpha \in \mathbb{R}_+^*, \mathcal{B}(x, \alpha) \in A \neq \emptyset$
Donc $x \in \mathcal{C}_E A$ et $x \notin \overset{\circ}{\mathcal{C}_E A}$
Donc $\mathcal{C}_E A$ n'est pas ouvert.

"Plutôt que de me prendre l'oreille gauche avec la main droite, je prends A" - Sami Chakroun, tranquillement, 2022

Proposition : Réunion et intersection de fermés

Avec E un EVN, $(F_i)_{i \in I}$ une famille de fermés de E, on a que :
- $\cap_{i \in I} F_i$ est un fermé
- $\cup_{i \in I} F_i$ est un fermé à condition que I soit fini

Preuve

Si $(F_i)_{i \in I}$ est une famille de fermés, alors $\mathcal{C}_E \cap_{i \in I} F_i = \cup_{i \in I} \mathcal{C}_E F_i$ qui est ouvert
$\mathcal{C}_E \cup_{i \in I} F_i = \cap_{i \in I} \mathcal{C}_C F_i$

Exemple III.5. $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y < 0$ *et* $x + 3y > 0\}$ *est un ouvert comme son complémentaire est une réunion de fermés.*

$\cup_{n \in \mathbb{N}^*} \left[\frac{1}{n}, 1\right] =]0, 1]$ *est une réunion infinie de fermés qui est ouverte.*

Définition : Densité

Soit $A \subset E$. On dit que A est dense dans E si $\bar{A} = E$
i.e. $\forall x \in E, \exists (a_n) \in A^{\mathbb{N}}, (a_n) \to x$
i.e. Tout élément de E est limite d'une suite d'éléments de E

Exemple III.6. $\mathbb{Q}$ *est dense dans* $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}^2$ *est dense dans* $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{Q} \times (\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q})$ *est dense dans* $\mathbb{R}^2$...

Définition : Frontière

Soit $A \subset E$, on appelle frontière de A : $F_r(A) = \bar{A} \backslash \overset{\circ}{A}$

Exemple III.7. *Avec* $x \in E, r \in \mathbb{R}_+^*$, *et donc* $F_r(B(x,r)) = S(x,r)$

On a que $F_r(\mathbb{Q}) = \mathbb{R}$

Remarque III.1. *Toutes les notions topologiques évoquées dans ce chapitre sont invariantes par changement de normes équivalentes. En particulier en dimension finie, ces notions sont indépendantes de la norme.*

III.3 Relativité vaguement générale quand même

Définition : Ouvert relatif

Soit E un EVN, $A \subset E$. Soit $B \subset A$. On dit que B est ou ouvert relatif de A si $\forall x \in B, \exists \alpha \in \mathbb{R}_+^*, \mathcal{B}(x,\alpha) \cap A \subset B$

Proposition : Ouvert induit

Soit E un EVN, $A \subset E$. Avec $B \subset A$, B est un ouvert relatif de A si, et seulement si, il existe un ouvert O de E tel que $B = O \cap A$

Preuve

Supposons O ouvert de E et $B = O \cap A$.
Soit $x \in B$. Comme O est ouvert, on peut fixer $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ tel que
$\mathcal{B}(x,\alpha) \subset O$
Donc $\mathcal{B}(x,\alpha) \cap A \subset B$
Réciproquement, si B est un ouvert relatif de A, pour $b \in B$, on peut choisir $\alpha_b \in \mathbb{R}_+^*, \mathcal{B}(b,\alpha_b) \cap A \subset B$
Donc $B = \cup_{b\in B}(\mathcal{B}(b,\alpha_b) \cap A) = (\cup_{b\in B}(\mathcal{B}(b,\alpha_b))) \cap A$
Donc il existe un ouvert (réunion d'ouverts) dont l'intersection avec A donne B.

Exemple III.8. *Avec* $E = \mathbb{R}$ *et* $A =]0,1]$. $B = \left]\frac{1}{2}, 1\right]$ *n'est pas un ouvert de* E *car* $1 \in B$ *et* 1 *n'est pas intérieur à* B. *Mais c'est un ouvert relatif de* A *car* $B = \left]\frac{1}{2}, 2\right[\cap A$.

Définition : Fermé relatif

Soit E un EVN, $A \subset E$. Soit $B \subset A$. On dit que B est un fermé relatif de A s'il vérifie l'une des propriétés équivalentes suivantes :

1. $\mathcal{C}_A B$ est un ouvert relatif de A ($\mathcal{C}_A B = A \backslash B = A \cap \mathcal{C}_E B$) ;
2. $\exists F$ fermé de E tel que $B = F \cap A$;
3. Caractérisation séquentielle : pour toute suite $(b_n) \in B^{\mathbb{N}}$ convergente de limite $l \in A$, alors $l \in B$.

III.4 Compacts

Définition : Compact

Soit E un EVN, soit $A \subset E$. On dit que A est compact si de toute suite de A, on peut extraire une suite convergente dans A.

Exemple III.9. *Les segments sont des compacts de* $\mathbb{R}$, *les réunions de segments sont des compacts, les intervalles semi-ouverts ne sont pas des compacts.*

Pour $a, b \in \mathbb{R}, a < b$, $[a, b]$ est un compact de $\mathbb{R}$ mais $[a, b[$ n'est pas compact. $[a, b]$ est bornée, donc Bolzano-Weierstrass pour l'existence d'une suite convergente, qui a bien une limite dans le segment $[a, b]$ par passage à la limite et inégalités larges. Cependant, cette inégalité large mène à ce que b soit une limite possible, alors que b n'est pas dans l'ensemble.

Proposition : Fermeture du compact

Tout compact est fermé et borné.

Preuve

Soit K un compact.
Soit $(k_n) \in K^{\mathbb{N}}$ une suite convergent vers $l \in E$.
Comme K est compact, on peut extraire de de (k_n) une suite $(k_{\varphi(n)})$ de limite dans K.
Or comme (k_n) est convergente de limite l, alors $(k_{\varphi(n)}) \to l$ donc $l \in K$.
Donc K est fermé.
Supposons K non-borné.
On peut construire une suite (k_n) de K telle que $\|k_n\| \to +\infty$ (comme K est non-borné, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on peut choisir $k_n \in K$ tel que $\|k_n\| \geq n$)
Pour toute suite extraite de (k_n) $(k_{\varphi(n)})$, la suite $\|k_{\varphi(n)}\| \to +\infty$ donc $(k_{\varphi(n)})$ diverge.
Donc K est non-compact.

Proposition : Produit cartésien de compacts

Avec $E_1, ..., E_p$ des EVN, $E = E_1 \times E_2 \times ... \times E_p$ et $K_1, ..., K_p$ des compacts, alors $K_1 \times K_2 \times ... \times K_p$ est un compact.

Preuve

Soit $(x_n) \in (K_1 \times K_2 \times ... \times K_p)^{\mathbb{N}}$ (ie $(x_n) = (x_n^1, x_n^2, ..., x_n^p)$), et on refait la démonstration de BW.
La seule différence c'est qu'au lieu d'avoir des suites scalaires, on a des suites de vecteurs.
K_1 est compact, donc on peut extraire de (x_n^1) une suite $(x_{\varphi_1(n)^1})$ convergente dans K_1. Ensuite $(x^2_{\varphi_2(n)}) \in K_2^{\mathbb{N}}$, qui est compact, donc on peut extraire de $(x^2_{\varphi_1(n)})$ une suite $(x^2_{\varphi_1 \circ \varphi_2(n)})$ convergente dans K^2.
Au final on aura une suite extraite $(x_{\varphi_1 \circ ... \circ \varphi_p})$ qui converge.

Proposition : Fermé d'un compact

Un fermé dans un compact est compact (ou un fermé relatif d'un compact, même si tout fermé relatif d'un compact serait un fermé)

Preuve

Soit K un compact et $B \subset K$ fermé.
Soit $(x_n) \in B^{\mathbb{N}}$, alors $(x_n) \in K^{\mathbb{N}}$.
Alors on peut extraire $(x_{\varphi(n)})$ de (x_n) convergente vers $l \in K$.
Comme B est fermé, $l \in B$.
Donc B est compact.

Théorème : Compacts

Dans un espace de dimension finie E, les compacts sont les fermés bornés.

Preuve

On a déjà vu que tout compact est fermé borné. Réciproquement :
Soit A un fermé borné. Soit $(x_n) \in A^{\mathbb{N}}$
A est bornée, donc par Bolzano-Weierstrass en dimension finie, on peut trouver une suite extraite $(x_{\varphi(n)})$ qui converge vers $l \in E$.
Comme A est fermé, $l \in A$.
Donc A est compact.

Exemple III.10. *Une boule fermée en dimension finie est compacte. En dimension infinie, il est possible de démontrer qu'une boule fermée n'est jamais compacte.*

Une sphère est compacte en dimension finie.

On prend E un $\mathbb{K}$-ev et $A \subset E, A \neq \emptyset$. Pour $x \in E$, on définit $d(x, A) = \inf_{a \in A} \|x - a\|$.

1) Montrer que si A est compact, $d(x, A)$ est atteinte.
2) Montrer que si E est de dimension finie et A est fermée, alors $d(x, A)$ est atteinte.
3) Pour $A, B \subset E$ on définit $d(A, B) = inf\{\|a - b\|, a \in A, b \in B\}$.
a) Montrer que si A et B sont compactes, $d(A, B)$ est atteinte.
Si E de dim finie, A compact et B fermé, $d(A, B)$ atteinte.
c) Si A et B sont fermés, $d(A, B)$ est-elle atteinte ?

1. *Dans $\mathbb{R}$, $\sup A \in \bar{A}$ et $\inf A \in \bar{A}$. Ici, $d(x, A) = \inf\{\|x - a\| | a \in A\}$ donc on peut trouver $(a_n) \in A^{\mathbb{N}}$ telle que $d(x, A) = \lim_{n \to +\infty} \|x - a_n\|$.*

   A est un compact, et comme (a_n) est à valeurs dans un compact, on peut extraire de (a_n) une suite convergente $(a_{\varphi(n)})$ de limite $\alpha \in A$.

   $(\|x - a_{\varphi(n)}\|) \to d(x, A)$

   Et $\|x - a_{\varphi(n)}\| \to \|x - \alpha\|$

   Donc la distance est atteinte.

2. *Avec E de dimension finie et A fermé, $d(x, A) = \lim_{n \to +\infty} \|x_n - a_n\|$ avec $(a_n) \in A^{\mathbb{N}}$ qu'on prend.*

   $\forall n \in \mathbb{N}, \|a_n\| \leq \|x\| + \|x - a_n\|$

   $(\|x - a_n\|)$ est convergente donc bornée

   Donc (a_n) est bornée.

   Donc par Bolzano-Weierstrass, on peut extraire de (a_n) une suite $(a_{\varphi(n)})$ convergente vers $l \in E$. Comme A est fermée et que (a_n) est une suite convergente de A, $l \in A$.

   Donc $d(x, A) = \|x - l\|$

3. — *On a A et B deux compacts, donc on prend $(a_n) \in A^{\mathbb{N}}, (b_n) \in B^{\mathbb{N}}$ telle que $d(A, B) = \lim_{n \to +\infty} \|a_n - b_n\|$*
   Comme A est borné, on peut prendre $(a_{\varphi(n)})$ convergente vers $l \in A$.
   De $(b_{\varphi(n)})$ bornée, on peut extraire la suite convergente $(b_{\varphi \circ \psi(n)})$ qui tend vers $l' \in B$
   Donc $\left(\|a_{\varphi \circ \psi(n)} - b_{\varphi \circ \psi(n)}\right) \to \|l - l'\| = d(A, B)$
   Donc la distance est atteinte.

   — *Avec E de dimension finie, A compact et B fermé. On a que $d(A, B) = \lim_{n \to +\infty} \|a_n - b_n\|$ en ayant pris $(a_n) \in A^{\mathbb{N}}$ et $b_n \in B^{\mathbb{N}}$.*
   A est compact, donc on extrait de (a_n) la suite $(a_{\varphi(n)})$ convergente vers $l \in A$.
   Donc $d(A, B) = \lim_{n \to +\infty} \|a_{\varphi(n)} - b_{\varphi(n)}$

Et comme $\forall n \in \mathbb{N}, \|b_{\varphi(n)}\| \leq \|a_{\varphi(n)}\| + \|b_{\varphi(n)} - a_{\varphi(n)}\|$, *alors* $b_{\varphi(n)}$ *est bornée.*
Donc par BW (car la dimension est finie), on peut extraire de $(b_{\varphi(n)})$ *une suite extraite* $(b_{\varphi\circ\psi(n)})$ *convergent vers* l'*.*
Comme B *est fermé,* $l' \in B$*. Donc* $d(A, B) = \|l - l'\|$

— *Prenons un contre-exemple en dimension infinie, dans l'espace vectoriel des courbes de fonctions. Avec* $A = \{(x, e^x)|x \in \mathbb{R}\}$ *et* $B = \{(x, -e^x)|x \in \mathbb{R}\}$ *on a une distance de* 0*, bien que les deux courbes ne se rencontrent jamais.* $O_n(\mathbb{R})$ *(groupe orthogonal) n'est plus du tout au programme mais permettrait d'avoir un exemple d'un compact.*

Proposition : Convergence d'une suite compacte

Une suite d'un compact est convergente si, et seulement si, elle admet une unique valeur d'adhérence

Preuve

Soit A un compact.
Montrons la première implication : soit $(u_n) \in A^{\mathbb{N}}$ convergente.
Alors elle admet une unique valeur d'adhérence.
Réciproquement, montrons la contraposée : toute suite divergente dans un compact admet au moins deux valeurs d'adhérence.
Soit $(u_n) \in A^{\mathbb{N}}$ divergente.
A est compact, donc (u_n) possède une valeur d'adhérence λ.
Mais (u_n) ne tend pas vers λ, on a donc : $\exists \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \forall n_0 \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \Rightarrow \|u_n - \lambda\| > \varepsilon$
Donc $\{n \in \mathbb{N} | \|u_n - \lambda\| > \varepsilon\}$ est infini.
Donc on peut extraite de (u_n) une suite $(u_{\varphi(n)})$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}, \|u_{\varphi(n)} - \lambda\| > \varepsilon$
Mais $(u_{\varphi(n)})$ est une suite de A, donc elle possède une valeur d'adhérence $\lambda' \neq \lambda$, avec $\lambda' \in A$.

IV Limites de fonctions

IV.1 Définitions

Définition : Limite

Soient E, F deux EVN, et $A \subset E$. Soit $f \in \mathcal{F}(A, F)$, $x_0 \in \bar{A}$. Soit $l \in F$. On dit que f converge vers l en x_0 si :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists \alpha \in \mathbb{R}_+^*, \forall x \in \mathcal{B}(x_0, \alpha) \cap A, f(x) \in \mathcal{B}(l, \varepsilon)$$

On notera $f \rightarrow_{x_0} l$ ou $f(x) \rightarrow_{x \rightarrow x_0} l$ (notation plus abusive) ou $\lim f = l$ (notation plus adaptée à une conclusion) et $\lim\limits_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$ (le combo que Chakroun aime pas).

Définition : Vocabulaire du voisinage

Avec E un EVN et $b \in E$, on appelle voisinage de b un ensemble contenant une boule ouverte centrée en b.
Avec ce vocabulaire, $f \rightarrow_{x_0} l$ si, pour tout voisinage de l $\mathcal{V}_l$, il existe un voisinage relatif de x_0 $\mathcal{V}_{x_0}$ tel que $f(\mathcal{V}_{x_0}) \subset \mathcal{V}_l$
On étend la définition de voisinage à $+\infty$:
Dans E un EVN quelconque, $\mathcal{V}$ est un voisinage de $+\infty$ est si $\exists A \in \mathbb{R}_+^*, \{x \in E, \|x\| > A\} \subset \mathcal{V}$.
Dans $\mathbb{R}$ on définit des voisinages de $\pm\infty$
$\mathcal{V}$ est un voisinage de $+\infty$ si $\exists A \in \mathbb{R}_+^*,]A, +\infty[\subset \mathcal{V}$
$\mathcal{V}$ est un voisinage de $-\infty$ si $\exists B \in \mathbb{R}_-^*,]-\infty, B[\subset \mathcal{V}$
On peut aussi étendre la notion de convergence en $+\infty$ (ou $-\infty$)

Exemple IV.1. $f \rightarrow_{+\infty} l$ *donne que* $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists M \in \mathbb{R}_+^*, \forall x \in A, \|x\| \geq M \Rightarrow \|f(x) - l\| < \varepsilon$

Proposition : Caractérisation séquentielle de la limite

Avec $f \in \mathcal{F}(A, F)$ avec $A \subset E$ et E, F deux EVN. Avec $x_0 \in \bar{A}$ et $l \in F$, alors :

$$f \rightarrow_{x_0} l \Leftrightarrow \forall (u_n) \in A^{\mathbb{N}}, (u_n) \rightarrow x_0, (f(x_0)) \rightarrow l$$

Preuve

On suppose que f tend vers l en x_0 :
Soit $(u_n) \in A^{\mathbb{N}}$ tel que $(u_n) \rightarrow x_0$
Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$
$f \rightarrow_{x_0} l$, on peut trouver $\alpha \in \mathbb{R}_+^*, \forall x \in A \cap \mathcal{B}(x_0, \alpha), \|f(x) - \alpha\| < \varepsilon$
Or $(u_n) \rightarrow x_0$ donc on peut trouver $n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \Rightarrow \|u_n - x_0\| < \alpha$
Donc pour $n \geq n_0$: $\|f(u_n) - l\| < \varepsilon$ On suppose que $\forall (u_n) \in A^{\mathbb{N}}, (u_n) \rightarrow x_0, (f(x_0)) \rightarrow l$: on prouve la contraposée :
f ne tend pas vers l en x_0 donc on peut construire une suite (u_n) tendant vers x_0 telle que $(f(u_n))$ ne tend pas vers l.
On peut donc prendre un $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\forall \alpha \in \mathbb{R}_+^*, \exists x \in A \cap \mathcal{B}(x_0, \alpha)$ et $\|f(x) - l\| > \varepsilon$
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on peut donc choisir $u_n \in A \cap \mathcal{B}(x_0, \frac{1}{n})$ et $\|f(u_n) - l\| > \varepsilon$
On a donc construit $(u_n) \in A^{\mathbb{N}}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, \|u_n - x_0\| < \varepsilon\frac{1}{n}$ et $\|f(u_n) - l\| > \varepsilon$

Exemple IV.2. $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & \frac{xy}{|x|+|y|} \end{array} \right.$

f a-t-elle une limite en $(0,0)$ *?*
Soient $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$, *alors* $|f(x,y)| \leq \frac{(|x|+|y|)^2}{|x|+|y|} \leq |x| + |y|$
Donc $f \rightarrow_{(0,0)} 0$
$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & \frac{x^\alpha y^\beta}{\|(x,y)\|^\gamma} \end{array} \right.$
f a-t-elle une limite en $(0,0)$ *?*
On a l'équivalence des normes en dimension finie, donc $\exists K_1, K_2 > 0, \frac{K_1|x^\alpha y^\beta|}{\|(x,y)\|_\infty^\gamma} \leq |f(x,y) \leq \frac{K_2|x^\alpha y^\beta|}{\|(x,y)\|_\infty^\gamma}$
Dans un premier cas, où $\alpha + \beta > \gamma$: $\frac{|x^\alpha||y^\beta|}{\|(x,y)\|_\infty^\gamma} \leq \|(x,y)\|_\infty^{\alpha+\beta-\gamma}$
et donc $f \rightarrow_{(0,0)} 0$
Dans un second cas, $\alpha + \beta = \gamma$ *: Soit* $\lambda \in \mathbb{R}$,
considérons la suite $(u_n) = ((\frac{1}{n}, \frac{\lambda}{n}))_{n \in \mathbb{N}}$

Alors $f(u_n) = \dfrac{(\frac{1}{n})^{\alpha+\beta}\lambda^\beta}{|\frac{1}{n}|^\gamma \|(1,\lambda)\|^\gamma} = \dfrac{\lambda^\beta}{\|(1,\lambda)\|^\gamma}$, *une constante qui dépend de* λ *en général.*

Donc on n'a pas de limite en $(0,0)$

Dans un troisième cas, $\alpha+\beta<\gamma$ *:*

Prenons la suite, pour $n \in \mathbb{N}$: $f\left(\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)\right) = \dfrac{(\frac{1}{n})^{\alpha+\beta-\gamma}}{\|(1,1)\|^\gamma} \to +\infty$

Donc f *n'a pas de limite en* $(0,0)$.

Attention, on n'a pas nécessairement $f \to_{(0,0)} +\infty$ *:*

prenons le cas particulier de $f : \begin{cases} \mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\} & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & \frac{x^2y}{(|x|+|y|)^4} \end{cases}$

On a alors, pour $n \in \mathbb{N}^*$ *:* $f\left(\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n^2}\right)\right) = \dfrac{\frac{1}{n^4}}{2^4\frac{1}{n^4}} \to \frac{1}{2^4}$ *qui tend bien vers* 0.

Avec $f : \begin{cases} \mathbb{R}^2\backslash D & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & \frac{x^{12}y^{15}}{x+y} \end{cases}$ *et avec* $D = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 | x+y=0\}$. *Est-ce que* f *admet une limite en* $(0,0)$ *?*

On prend la suite $|f\left(\frac{-1}{n},\frac{1}{n}+\frac{1}{n^{100}}\right)| \sim \dfrac{\frac{1}{n^{27}}}{\frac{1}{n^{100}}} \to +\infty$

IV.2 Opérations sur les limites

Proposition : Limite d'une fonction à valeurs dans un produit cartésien

Soit $f : A \to F_1 \times F_2 \times ... \times F_p$ avec (F_i) famille d'EVN et $A \subset E$ une partie d'un EVN. On a alors $f : x \mapsto (f_1(x), f_2(x), ...f_p(x))$ et on peut caractériser f par ses fonctions composantes $f_i : A \to F_i$
Soit $x_0 \in \bar{A}$ et $l = (l_1, ..., l_p) \in F_1 \times ... \times F_p$, alors $f \to_{x_0} l$ si, et seulement si, $\forall i \in \{1, ..., p\}, f_i \to_{x_0} l_i$.
En particulier, si F est un EVN de dimension finie ramené à une base $B = (u_1, u_2, ..., u_p)$, F est isomorphe à $\mathbb{K}^p$ par la bijection $\sum\limits_{i=1}^{p} x_i u_i \mapsto (x_1, ..., x_p)$. Si $f \in \mathcal{F}(A, F) : x \mapsto f(x) = \sum\limits_{i=1}^{p} f_i(x)u_i$, on appelle les f_i les applications coordonénes et f a une limite si, et seulement si, les applications coordonnées ont des limites.

Proposition : Opérations sur les fonctions convergentes

- Avec $f, g \in \mathcal{F}(A,E)$, on a que f converge et g converge $\Rightarrow f+g$ converge et $\lim(f+g) = \lim f + \lim g$
- Avec $\lambda \in \mathcal{F}(A,\mathbb{K}), f \in \mathcal{F}(A,F)$, λ converge et f converge $\Rightarrow \lambda f$ converge et $\lim(\lambda f) = (\lim\lambda)(\lim f)$
- Si F est une algèbre munie d'une norme d'algèbre : Si $f, g \in \mathcal{F}(A,F)$, g converge et f converge $\Rightarrow fg$ converge et $\lim(f \times g) = (lim f) \times (\lim g)$
- Si $F = \mathbb{K}$, alors avec $f \in \mathcal{F}(A,F)$, si f est convergente de limite $l \neq 0$, alors $\frac{1}{f}$ converge et $lim\frac{1}{f} = \frac{1}{l}$
- Avec E, F, G des EVN, avec $A \subset E$ et $B \subset F$, $f \in \mathcal{A}, \mathcal{F}, g \in \mathcal{F}(B,G)$, $x_0 \in \bar{A}, y_0 \in \bar{G}, f \to_{x_0} y_0, g \to_{y_0} l$, alors on peut affirmer que $g \circ f \to_{x_0} l$

Preuve

Pour la composition : soit $\mathcal{V}_l$ un voisinage de l, comme $g \to_{y_0} l$, on peut trouver un voisinage relatif à B de y_0 $\mathcal{V}_{y_0}$ tel que $g(\mathcal{V}_{y_0}) \subset \mathcal{V}_l$.
Comme $f \to_{x_0} y_0$, on peut trouver un voisinage relatif à A de x_0 $\mathcal{V}_{x_0}$ tel que $f(\mathcal{V}_{x_0}) \subset \mathcal{V}_{y_0}$
Donc $(g \circ f)(\mathcal{V}_{x_0}) \subset \mathcal{V}_l$

Remarque IV.1. *Cette démonstration s'étend au cas* $\|x_0\| = +\infty, \|y_0\| = +\infty$

IV.3 Continuité de fonctions

Définition : Continuité

Soit $f \in \mathcal{F}(A, F)$ avec $A \subset E$ et E, F deux EVN. Soit $a \in A$, on dit que f est continue en a si $f \to_a f(a)$.

Remarque IV.2. *C'est une notion locale ; deux fonctions coïncidant sur un voisinage ont les mêmes propriétés de continuité.*

Proposition : Opérations

Localement, la somme de deux fonctions continues est continue, le produit par un scalaire d'une fonction continue est continue, le produit d'une fonction continue et d'une fonction scalaire continue est continu, dans un algèbre le produit de deux fonctions continues est continu, la composition de deux fonctions continues est continue.

Remarque IV.3. *Toutes les notions vues sur les limites de fonctions s'étendent sur les fonctions continues en a, notamment sur les fonctions coordonnées.*

Proposition :

Si E est de dimension finie associé à une vase $B = (e_1, ..., e_p)$, alors :

$$P_j : \left\{ \begin{array}{rcl} E & \to & \mathbb{K} \\ x = \sum\limits_{i=1}^{p} x_i e_i & \mapsto & x_j \end{array} \right.$$

Alors : $\forall x, y \in E, x = \sum x_i e_i, y = \sum y_i e_i, |p_j(x) - p_j(y)| \leq \|x - y\|_\infty$ et l'application projection est une application continue en tous points. (1-lipschitzienne donc absolument continue)

Exemple IV.3. $f : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x, y) & \mapsto & \left(\frac{\arctan(xy^2 sin(x+y))}{\sqrt{x^2+y^2+1}}, \frac{\log(1+x^2y^4)}{\cosh(x+3y)}, x + y \right) \end{array} \right.$

Cette fonction est continue car toutes ses coordonnées sont continues, en tant que produits, sommes et compositions de fonctions continues. En effet, x et y, en tant que projecteurs, sont nécessairement continus.

$f : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \to & \mathbb{R} \\ A & \mapsto & \det(A) \end{array} \right.$

est une application continue en tant que polynôme avec comme coefficients des coordonnées.

$f : \left\{ \begin{array}{rcl} E & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \|x\| \end{array} \right.$

est continue car par seconde inégalité triangulaire ($\forall x, y \in E, |\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|$), elle est lipschitzienne.

Avec E un espace préhilbertien réel :
$f : \begin{cases} E \times E & \to \mathbb{R} \\ (u,v) & \mapsto \langle u,v\rangle \end{cases}$
est continue, montrons-le, même quand E n'est pas de dimension finie :

En $(0,0)$: Montrons que $\langle h,k\rangle \to_{(0,0)} 0$: $|\langle h,k\rangle| \leq \|h\|\|k\|$ par Cauchy-Schwarz donc f est continue en $(0,0)$

En (u_0,v_0) quelconques : $|\langle u_0+h, v_0+k\rangle - \langle u_0,v_0\rangle| = |\langle h,v_0\rangle + \langle k,u_0\rangle + \langle h,k\rangle| \leq \|u_0\|\|h\| + \|v_0\|\|k\| + \|h\|\|k\|$

Donc f est continue en (u_0,v_0) et est donc continue sur $E \times E$.

IV.4 Propriétés globales des fonctions continues

Proposition : Images réciproques

Soit $f \in \mathcal{F}(A,F)$ continue, alors l'image réciproque d'un ouvert de F par f est un ouvert relatif de A
L'image réciproque d'un fermé de F par f est un fermé relatif de A.

Preuve

Pour les fermés :
Soit B un fermé de F, on veut démontrer que $f^{-1}(B)$ est un fermé relatif de A.
Soit $(x_n) \in (f^{-1}(B))^{\mathbb{N}}$, on suppose que $(x_n) \to l \in A$.
Alors pour $n \in \mathbb{N}, f(x_n) \in B$ et f est continue en l donc $f(x_n) \to f(l)$
Donc $(f(x_n))$ est une suite convergente du fermé B, donc sa limite est dans B
Donc $f(l) \in B$, donc $l \in f^{-1}(B)$
Donc $f^{-1}(B)$ est bien un fermé relatif de A.
Pour les ouverts :
Soit O un ouvert de F, $\mathcal{C}_F O$ est un fermé de F, donc $f^{-1}(\mathcal{C}_F O)$ est un fermé relatif de A.
Donc $\mathcal{C}_A f^{-1}(O)$ est un fermé relatif de A
Donc $f^{-1}(O)$ est un ouvert relatif de A.

Exemple IV.4. *$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | \sin(x) + 2y < 0$ et $x + 3y > 0$ et $\arctan(\frac{x}{x^2+y^2+1}) > 0\}$ est l'image réciproque par $f : (x,y) \mapsto \left(\sin(x) + 2y, x+3y, \frac{x}{x^2+y^2+1}\right)$ de $(\mathbb{R}_-^*, \mathbb{R}_+^*, \mathbb{R}_+^*)$, qui est un ouvert. Or f est continue, donc A est ouvert.*

Proposition : Continuité coïncidante

Deux applications continues qui coïncident sur une partie dense sont égales

Preuve

Soient $f, g \in \mathcal{C}(A,F)$ avec $A \subset E$, E, F des EVN, B une partie dense dans A, et $\forall x \in B, f(x) = g(x)$
Soit $x \in A$, alors on prend $(x_n) \in B^{\mathbb{N}}, (x_n) \to x$ qui existe par densité de B
$\forall n \in \mathbb{N}, f(u_n) = g(u_n)$ et par passage à la limite (comme f et g sont continues) : $f(u_n) \to f(x)$ et $g(u_n) \to g(x)$
Et donc par unicité de la limite, $f(x) = g(x)$

Exemple IV.5. *On recherche la partie de $\mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telles que : $\forall x,y \in \mathbb{R}, f(x+y) = f(x) + f(y)$.*

On prouve d'abord que $f(0) = 0$ et que $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, f(x) = nf(x)$, puis on l'étend à $\mathbb{Z}$ et enfin à $\mathbb{Q}$. Et ensuite on se sert du théorème pour conclure

Définition : Uniforme continuité

Soit $f \in \mathcal{F}(A, F)$ où $A \subset E$ avec E, F deux EVN. On dit que f est uniformément continue si :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists \eta \in \mathbb{R}_+^*, \forall x, y \in A, \|x - y\| < \eta \Rightarrow \|f(x) - f(y) < \varepsilon$$

Remarque IV.4. *La continuité uniforme implique la continuité.*

On peut trouver un contre-exemple à la réciproque, comme $f : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & e^x \end{cases}$

La négation de la continuité uniforme, c'est que : $\exists \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \forall \eta \in \mathbb{R}_+^*, \exists x, y \in A, (\|x - y\| < \eta)$ *et* $(\|f(x) - f(y)\| \geq \varepsilon)$

C'est peu exploitable, donc on fait une caractérisation séquentielle de la non-continuité uniforme : $\exists \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists (x_n), (y_n) \in A^{\mathbb{N}}, (\|x_n - y_n\|) \rightarrow 0$ *et* $\|f(x_n) - f(y_n) \geq \varepsilon$

On note P1 la négation et P2 la caractérisation séquentielle. Prouvons leur équivalence.

Supposons P1, et prenons $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ *vérifiant la propriété.*

Soit $(\eta_n) = (\frac{1}{n+1})$*, prenons* $(x_n), (y_n) \in A^{\mathbb{N}}$ *telles que :*

$\|x_n - y_n\| < \eta_n$ *et* $\|f(x_n) - f(y_n)\| \geq \varepsilon$

On a ainsi défini $(x_n), (y_n)$ *avec* $(\|x_n - y_n) \rightarrow 0$ *et* $\|f(x_n) - f(y_n)\| \geq \varepsilon$

L'autre implication est immédiate.

On reprend f *telle que définie plus haut, on note* $(x_n) = (n), (y_n) = (n + \frac{1}{n})$.

On a $(x_n - y_n) \rightarrow 0$

Alors $e^{x_n} - e^{y_n} = e^n - e^{n+\frac{1}{n}} = e^n(1 - e^{\frac{1}{n}}) = e^n(\frac{1}{n} + o(\frac{1}{n})) = \frac{e^n}{n} + o(\frac{e^n}{n})$

Or ça tend vers $+\infty$*, donc on a bien une fonction non-uniformément continue.*

"L'exponentielle ça amplifie à mort, donc on s'en fout." - Chakroun, 2022

IV.5 Fonctions lipschitziennes

Définition : Fonctions lipschitziennes

Soit $f \in \mathcal{F}(A, F)$, où $A \subset E$ avec E, F EVN. Soit $k \in \mathbb{R}_+^*$. On dit que f est $k-$*lipschitzienne* si :

$$\forall x, y \in A, \|f(x) - f(y)\| \leq k\|x - y\|$$

Proposition : Uniforme continuité des fonctions lipschitziennes

Toute fonction lipschitzienne est uniformément continue

Preuve

Le η qu'on prend est le k.

Remarque IV.5. *Dans* $\mathbb{R}$*, si* f *est dérivable sur un intervalle* I*,* f *est lipschitzienne si, et seulement si, sa dérivée est bornée.*

Si f' *est bornée, on conclut par inégalité des accroissements finis.*

Si f *est déribale, on passe à la limite de l'expression de la dérivée.*

Exemple IV.6. *Donnons un exemple de fonction uniformément continue non-lipschitzienne.*

Prenons $f : \begin{cases} [0,1] & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sqrt{r} \end{cases}$

Alors f *est uniformément continue mais non lipschitzienne (elle est dérivable de dérivée non-bornée)*

Proposition : Distance lipschitzienne

Avec E un EVN, $A \subset E$, l'application $\begin{array}{ccc} E & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & d(x, A) \end{array}$ est $1-$*lipschitzienne*.

Preuve

Soient $x, y \in E$.
Soit $a \in A$
$\|y-a\| \geq \|x-a\| - \|y-x\| \geq d(x, A) - \|x-y\|$ qui est constante
donc : $d(y, A) \geq d(x, A) - \|x-y\|$
La fonction est donc lipschitzienne

Théorème : Théorème de Heine

Toute fonction continue sur un compact est uniformément continue.

Preuve

Avec E, F deux EVN, A un compact de E, $f \in \{(A, F)$ non-uniformément continue.
On peut donc fixer $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ et prendre deux suites $(x_n), (y_n) \in A^{\mathbb{N}}$, avec $(\|x_n - y_n\|) \to 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \|f(x_n) - f(y_n)\| > \varepsilon$
Comme A est compact, on peut extraire de (x_n) une suite $(x_{\varphi(n)})$ convergente vers $a \in A$. Comme $(\|x_n - y_n\|) \to 0$, alors $(y_{\varphi(n)}) \to a$ et $(f(x_{\varphi(n)}) - f(y_{\varphi(n)})$ ne tend pas vers 0.
Donc f n'est pas continue en a.

Théorème : Bornes atteintes le retour

L'image d'un compact par une application continue est un compact.

Preuve

Soit $f \in \mathcal{F}(A, F)$ avec $A \subset E$ un compact. Montrons que $f(A)$ est compact.
Soit $(y_n) \in f(A)^{\mathbb{N}}$
Alors pour $n \in \mathbb{N}$, on peut prendre $x_n \in A, f(x_n) = y_n$.
Donc $(x_n) \in A^{\mathbb{N}}$
A est compact donc on peut extraire de (x_n) une suite $(x_{\varphi(n)})$ convergente vers $a \in A$.
Comme f est continue, la suite $\left(f(x_{\varphi(n)})\right) \to f(a)$
Donc $(y_{\varphi(n)}) \to f(a)$ et par compacité de A, $f(a) \in f(A)$.
Donc $f(A)$ est compact.

Proposition : Corollaire

Le théorème des bornes atteintes : si $f \in \mathcal{C}(A, \mathbb{R})$ avec A compact, alors f est borné et "atteint ses bornes". ie f est bornée ($f(A)$ est compact donc bornée).
$\exists a \in A, \sup f = f(a)$
$\exists b \in A, \sup f = f(b)$

Exemple IV.7. *Soit* $f : \left\{ \begin{array}{ccc} [0,1]^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x, y) & \to & e^{x^2 \sin(3y) \arctan(x+y)} \end{array} \right.$

Montrer que $\exists d \in \mathbb{R}_+^*, \forall (x, y) \in [0,1]^2, f(x, y) \geq d$.

Par compacité comme $[0,1]^2$ compact, la borne inférieure de f est atteinte et est supérieure à 0,, d'om l'existence de $]0, f(x,y)]$

Proposition : Corollaire

Si $f \in \mathcal{C}(A, F)$, avec A compact de F, l'application $\|f\| : \left\{ \begin{array}{ccc} A & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \|f(x)\| \end{array} \right.$ atteint ses bornes.

Exemple IV.8. *Soit* $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & (2x^4+3y^2+1)e^{-(x^2+3y^2)} \end{array} \right.$

$\forall x, y \in \mathbb{R}^2, f(x,y) \geq 0$, donc f est minorée et admet une borne inférieure.

Avec $x \in \mathbb{R}$, $f(x,0) = (2x^4+1)e^{-x^2}$ et alors $(f(x,0)) \to 0$ donc $\inf f = 0$

IV.6 Continuité des applications linéaires

Théorème : Critère de continuité des applications linéaires

Soit E, F des $\mathbb{K}$-EVN et $f \in \mathcal{L}(E,F)$. f est continue si, et seulement si, elle vérifie l'une des propriétés équivalentes suivantes :

1. f est continue en 0 ;
2. $\exists k \in \mathbb{R}_+^*, \forall x \in E, \|f(x)\|_F \leq k\|x\|_E$;
3. f est lipschitzienne.

Preuve

f continue implique 1 de manière immédiate.
Pour $1 \Rightarrow 2$: supposons f continue en 0.
Donc on peut prendre $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, $\forall x \in E, \|x\| < \alpha \Rightarrow \|f(x)\| < 37$
Soit $x \in E, x \neq 0$, prenons $u = \frac{\alpha}{2\|x\|}x$
On a bien $\|u\| < \alpha$
Donc $\|f(u)\| < 37$
Donc par linéarité de f et homogénéité de $\|.\|$: $\|f(x)\| \leq \frac{37}{2} < \|x\|$
$2 \Rightarrow 3$: On suppose $\exists k \in \mathbb{R}_+^*, \forall x \in E, \|f(x)\| \leq k\|x\|$
Donc $\forall x, y \in E, \|f(x) - f(y)\| \leq \|f(x-y)\| \leq k\|x-y\|$

Exemple IV.9. *Soit $E = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$, qu'on munit de $\|.\|_\infty$ et $\|.\|_1$.*

On cherche à connaître la continuité de l'application linéaire :

$\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \to & \mathbb{R} \\ f & \mapsto & f(0) \end{array} \right.$

On peut avoir la continuité si le rapport $\dfrac{|\varphi(f)|}{\|f\|}$ pour $f \neq 0$ est borné.

Soit $f \in E$

Alors $|f(0)| \leq \|f\|_\infty$ donc φ est continue pour la norme infinie.

Pour la norme 1, considérons $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telle que : $f_n : t \mapsto e^{-nt}$

$\forall n \in \mathbb{N}^*, \varphi(f_n) = 1$ et $\|f_n\| = \frac{1}{n}(1-e^{-n})$

Et donc $\frac{|\varphi(f_n)|}{\|f_n\|} \to +\infty$ et donc si E est muni de $\|.\|_1$, alors φ n'est pas continue.

Remarque IV.6. *En dimension finie, toute application linéaire est continue, par continuité des projecteurs (les applications linéaires sont des polynômes de degré au plus 1 sur les coordonnées).*

Si φ est linéaire et injective en dimension finie, on a que $\|\varphi\|$ est une norme, qu'on appelle la norme φ.

Proposition : Fermeture des sev

Tout sous-espace de dimension finie d'un $\mathbb{K}$-ev est fermé.

Preuve

Soit F un sev de E, F de dimension finie.
Si E est de dimension finie, on peut considérer G un supplémentaire de F. Alors la projection p_G sur G parallèlement à F est continue puisqu'on est en dimension finie.
Et comme $F = \ker p_G = p_g^{-1}(\{0_E\})$ donc F est fermé.
Le résultat reste vrai si E n'est pas de dimension finie :
Soit f_n une suite de F convergente vers $l \in E$.
(f_n) est convergente donc bornée, donc il existe une boule fermée B contenant l'ensemble des f_n pour $n \in \mathbb{N}$
$\forall n \in \mathbb{N}, f_n \in B \cap F$
$B \cap F$ est une boule fermée de F pour la restriction de $\|.\|$ à F, et comme F est de dimension finie, $B \cap F$ est un compact.
Donc on peut extraire de (f_n) une suite convergent vers $l' \in B \cap F$
Et par unicité de la limite, $l = l'$ donc $l \in F$.

Remarque IV.7. *Si F, G deux sev de E, tels que $F \oplus G = E$, notons : p_F la projection sur F parallèlement à G et p_G la projection sur G parallèlement à F.*

Si p_F et p_G sont continues, alors F et G sont fermés.

Exemple IV.10. *Prenons $E = \mathcal{C}([0,1], \|1\|)$ et $\varphi : f \mapsto f(0)$*

Alors $F = \{f \in E, \varphi(f) = 0\}$ est un hyperplan, mais F n'est pas fermé.

Proposition : Norme triple

Soit E, F deux EVN, on appelle $\mathcal{L}_C(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires continues de E dans F. Alors $\mathcal{L}_C(E, F)$ est un espace vectoriel normé pour la norme $\varphi \mapsto |||\varphi||| = \sup\limits_{x \in E, x \neq 0} \frac{\|\varphi(x)\|_F}{\|x\|_E} = \sup\limits_{x \in E, \|x\| = 1} \|\varphi(x)\|$

Preuve

soit $\varphi \in \mathcal{L}_C(E, F)$
On suppose $|||\varphi||| = 0$ alors $\forall x \in E, x \neq 0, \|\varphi(x)\| \leq 0$ donc $\varphi(x) = 0$
Et comme φ est linéaire, $\varphi(0) = 0$ donc $\varphi = 0$
L'inégalité triangulaire et l'homogénéité sont immédiates.

Remarque IV.8. *Dans le cas où E et F sont de dimensions finies : $\mathcal{L}_C(E, F) = \mathcal{L}(E, F)$*

et $\mathcal{L}_C(E, F)$ est isomorphe à $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

Si on fixe une norme dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et une norme dans $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$, il est naturel de parler de la norme $|||.|||$ associée pour $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

$A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), |||A||| = \sup\limits_{\|X\| = 1, X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})} \|AX\|_n = \sup\limits_{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}), X \neq 0} \frac{\|AX\|_n}{\|X\|_p}$

Exemple IV.11. *$\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ muni de la norme $\|.\|_\infty$, déterminons la norme triple sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$*

$|||A||| = \sup\limits_{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}), x \neq 0} \frac{\|AX\|_\infty}{\|X\|_\infty}$

$\|AX\|_\infty = \max\limits_{1 \leq i \leq n} |\sum\limits_{j=1}^{n} A_{i,j} X_j|$

$|\sum_{j=1}^{n} A_{i,j}X_j| \leq \sum_{j=1}^{n} |A_{i,j}X_j| \leq \left(\sum_{j=1}^{n} |A_{i,j}|\right) \|X\|_\infty \leq \max_{1\leq i\leq n} \left(\sum_{j=1}^{n} |A_{i,j}|\right) \|X\|_\infty$

Pour prouver qu'on a bien la meilleure majoration possible, on doit trouver un exemple de vecteur X pour que l'inégalité soit une égalité.

Prenons i_0 tel que $\sum_{j=1}^{n} |A_{i_0},j| = \max_i \sum_{j=1}^{n} |A_{i,j}|$

Prenons $X = (e^{i\theta_1}, ..., e^{i\theta_n})$ avec $\theta_1, ..., \theta_n \in \mathbb{R}$ tel que $\theta_j = -\arg(A_{i_0,j})$

Alors pour tout $j \in [\![1, n]\!]$: $A_{i_0,j}e^{i\theta_j} = |A_{i_0,j}|$

Donc $\|AX\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n} \left(\sum_{j=1}^{n} |A_{i,j}X_j|\right) \|X\|_\infty$

Donc $|||A||| = \max_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^{n} |A_{i,j}|$

Faisons de même pour $\|.\|_1$: soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$

$\|AX\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |\sum_{j=1}^{n} A_{i,j}X_j| \leq \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} |A_{i,j}X_j| \leq \sum_{j=1}^{n} |X_j| \sum_{i=1}^{n} \sum |A_{i,j}| \leq \left(\max_{1\leq i\leq n} \sum_{i=1}^{n} |A_{i,j}|\right) \sum_{k=1}^{n} X_k$

Donc $|||A||| \leq \left(\max_{1\leq i\leq n} \sum_{i=1}^{n} |A_{i,j}|\right) \sum_{k=1}^{n} X_k$

Pour la majoration atteinte, on prend le $j_0 \in [\![1, n]\!]$ tel que $\sum_{i=1}^{n} |A_{i,j_0}| = \max_j \sum_{i=1}^{n} |A_{i,j}|$

Soit $X = (0_1, ..., 0, 1, 0, ..., 0)$ avec le 1 en position j_0

$\|AX\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |A_{i,j_0}|$ *donc* $|||A||| = \max_{1\leq j\leq n} \sum_{i=1}^{n} |A_{i,j}|$

Théorème : Sous-multiplicativité

Soit E, F, G des EVN, soit $f \in \mathcal{L}_C(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}_C(F, G)$, alors $\|g \circ f\| \leq \|g\|\|f\|$

Preuve

Soit $x \in E$, tel que $\|x\| = 1$
Alors $\|g \circ f(x)\| = \|g(f(x))\| \leq \|g\|\|f(x)\|$ par définition de $\|.\|$ dans $\mathcal{L}_C(E, F)$
Et $\|g\|\|f(x)\| \leq \|g\|\|f\|\|x\| \leq \|g\|\|f\|$
Donc $\sup_{\|x\|=1} \|g \circ f(x)\| \leq \|g\|\|f\|$

Proposition : Corollaire

$\mathcal{L}_C(E)$ est munie naturellement d'une norme d'algèbre.

IV.7 Continuité des applications p-linéaires

Définition : Application p-linéaire

Soit $f \in \mathcal{F}(E_1 \times ... \times E_p, F)$ est dite p-linéaire si :
$\forall x_1, ..., x_p \in E_1 \times ... \times E_p, \forall j \in [\![1, p]\!], x_j \mapsto f(x_1, ..., x_j, ..., x_p)$ est linéaire.

Exemple IV.12. *Le déterminant est une application n-linéaire de $(\mathbb{K}^n)^n$*

Le produit scalaire dans une espace préhilbertien est bilinéaire.

Proposition : Critère de continuité des applications multilinéaires

Soit $E_1, ..., E_p, F$ des EVN, soit f p-linaire de $E_1 \times ... \times E_p$ dans F.
f est continue si, et seulement si, $\exists k \in \mathbb{R}_+^*, \forall x_1, ..., x_p \in E_1 \times ... \times E_p, \|f(x_1, ..., x_p)\| \leq k\|x_1\|...\|x_p\| \leq k\|x\|^p$

Preuve

Supposons f continue, donc f est continue en 0.
Donc on peut prendre $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\forall x \in E_1 \times ... \times E_p, \|x\| \leq \alpha \Rightarrow \|f(x)\| \leq 1$
Soit $x = (x_1, ..., x_p) \in E_1 \times ... \times E_p$, on suppose pour tout $i \in [\![1, p]\!] x_i \neq 0$
Posons $u = (\frac{\alpha}{\|x_1\|}x_1, \frac{\alpha}{\|x_2\|}x_2, ..., \frac{\alpha}{\|x_p\|})$, alors $\|u\| \leq \alpha$
Donc $\|f(u)\| \leq 1$
Par p-linéarité de f, on a $\|f(x)\| \leq \frac{1}{\alpha^p}\|x_1\|...\|x_p\| \leq \frac{1}{\alpha^p}\|x\|^p$
L'inégalité reste vraie si $x_1 = 0$ ou $x_2 = 0$ ou... ou $x_p = 0$.
Réciproquement, on suppose que : $\exists k \in \mathbb{R}_+^*, \forall x_1, ..., x_p \in E_1 \times ... \times E_p, \|f(x_1, ..., x_p) \leq k\|x_1\|...\|x_p\|$
Soit $x = (x_1, ..., x_p) \in E_1 \times ... \times E_p$
Soit $h = (h_1, ..., h_p) \in E_1 \times ... \times E_p$ tel que $\|h\| \leq \|x\|$
$f(x + h) - f(x) = f(x_1 + h_1, ..., x_p + h_p) - f(x_1, ..., x_p)$
$= \sum\limits_{y_1 \in [x_1, h_1], y_p \in [x_p, h_p]} f(y_1, ..., y_p) - f(x_1, ..., x_p)$
On obtient une somme de 2^{p-1} termes, chaque terme de la forme $f(y_1, ..., y_p)$ où au moins un des y_i est égale à h_i
Pour un tel terme : $\|f(y_1, ..., y_p)\| \leq k\|y_1\|...\|y_p\| \leq k\|h\|\|x\|^{p-1}$
Donc $\|f(x + h) - f(x)\| \leq K(2^p - 1)|x\|^{p-1}\|h\|$
Donc $f(x + h) - f(x) \to_{h \to 0} 0$
Donc f est continu en x.

Attention, ça ne veut pas dire que toute fonction multilinéaire continue est lipschitzienne, elle l'est juste sur des voisinages.

Proposition : Application

Si E est un espace préhilbertien réel, alors $\begin{array}{ccc} E \times E & \to & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & \langle x, y \rangle \end{array}$ est continue $(\forall x, y \in E, \langle x, y \rangle \leq \|x\|\|y\|)$

V Connexité par arcs

Définition : Chemin

Soit E un EVN, $x, y \in E$, on appelle chemin de x à y une application continue φ de $[0, 1]$ dans E telle que $\varphi(0) = x$ et $\varphi(1) = y$

Remarque V.1. *Dans la définition, 0 et 1 n'ont pas d'importance. Si on a $\varphi : [a, b] \to E$ continue telle que $\varphi(a) = x$ et $\varphi(b) = y$*

On a $\psi : \left\{ \begin{array}{ccc} [0, 1] & \to & [a, b] \\ t & \mapsto & a + t(b - a) \end{array} \right.$

Alors $\varphi \circ \psi$ est continue, $\varphi \circ \psi(0) = x$ et $\varphi \circ \psi(1) = y$

Définition : Chemin dans une partie

Si $A \subset E$, si $x, y \in A$ un chemin φ est un chemin dans A si $\forall t \in [0,1], \varphi(t) \in A$

Proposition : Relation d'équivalence

Avec E un EVN, $A \subset E$, on définit sur A la relation $x\mathcal{R}_A y \Leftrightarrow$ il existe un chemin dans A joignant x à y.
$\mathcal{R}_A$ est une relation d'équivalence.

Définition : Connexes

On appelle composantes connexes les classes d'équivalences par la relation précédente
Un ensemble est connexe par arc si $\mathcal{R}_A$ a une seule classe d'équivalence.

Exemple V.1. *Les convexes sont tous connexes par arcs. La réciproque est en générale fausse, sauf sur $\mathbb{R}$.*

Les parties étoilées (A est étoilée s'il existe $c \in A$ tel que $\forall x \in A, [x,c] \subset A$) sont connexes par arcs.

Les connexes par arcs de $\mathbb{R}$ sont les intervalles. $\mathbb{R}\backslash\{a\}$ n'est pas connexe. $\mathbb{R}^2\backslash D$ avec D une droite n'est pas connexe. $\mathbb{R}^2\backslash\{a\}$ est connexe par arcs.

Théorème : Valeurs intermédiaires

L'image d'un connexe par arcs par une application continue est connexe par arcs.

Preuve

Soient E, F EVN, $A \subset E$ et $f \in \mathcal{C}(A, F)$, et $B \subset A$ connexe par arcs.
Soit $y_1, y_2 \in f(B)$ on prend donc $x_1, x_2 \in B$ tels que $f(x_1) = y_1$ et $f(x_2) = y_2$
Comme B est connexe par arcs on a $\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} [0,1] & \rightarrow & B \\ t & \mapsto & \varphi(t) \end{array} \right.$ continue avec $\varphi(0) = x_1$ et $\varphi(1) = x_2$
Alors $f \circ \varphi$ est un chemin dans $f(B)$ joignant y_1 à y_2
Donc $f(B)$ est connexe par arc.

Exemple V.2. *$\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ n'est pas connexe par arcs :* $\det(\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})) = \mathbb{R}^*$

Il n'existe aucune application injective continue de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$:

Supposons par l'absurde $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ continue et injective.

L'image de $\mathbb{R}^2$ par f est alors connexe par arcs, donc un intervalle I.

Notons $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $f(x,y) \in \mathring{I}$. Alors $f(\mathbb{R}^2\backslash\{(x,y)\})$ est privé de $f(x,y)$ par injectivité et n'est donc pas l'intervalle I, d'où la contradiction comme $\mathbb{R}^2\backslash\{(x,y)\}$ est connexe par arc.

Montrons que $\mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$ est connexe par arc.

Soit $M \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$, on prend $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $\exp(A) = M$

Notons : $P : \left\{ \begin{array}{ccc} [0,1] & \rightarrow & \mathcal{GL}_n(\mathbb{C}) \\ t & \mapsto & \exp(tA) \end{array} \right.$

Alors $P(0) = I$ et $P(1) = M$, donc $\mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$ est connexe par arc.

Pour $\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$, il y a au moins deux composantes connexes : celles avec un déterminant positif et celles avec un déterminant négatif.

VI Théorème d'équivalence des normes

Théorème : L'équivalence des normes

Toutes les normes sont équivalentes en dimension finie

Preuve

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie, avec $B = (e_1, ..., e_p)$ une base de E.

Soit $\|.\|_\infty \begin{cases} E & \to & \mathbb{K} \\ x = \sum\limits_{i=1}^{p} x_i e_i & \mapsto & \max\limits_{1 \leq i \leq p} |x_i| \end{cases}$

Soit N un e norme sur E

Pour $x \in E$, en notant $x = \sum\limits_{i=1}^{p} x_i e_i$:

$N(x) \leq \sum\limits_{i=1}^{p} |x_i| N(e_i) \leq \|x\|_\infty \sum\limits_{i=1}^{p} N(e_i)$

Or, par la seconde inégalité triangulaire :

$\forall x, y \in E, |N(x) - N(y)| \leq N(x-y) \leq K\|x-y\|_\infty$, où K est une constante.

Si on considère $(E, \|.\|_\infty)$, on a donc que N est lipschitzienne, et donc continue.

On a que $\mathcal{S}_\infty(0,1) = \{x \in E | \|x\|_\infty = 1\}$ est compact.

Donc N étant continue, elle atteint ses bornes supérieures et inférieures sur $\mathcal{S}_\infty(0,1)$.

Donc $m = \inf\limits_{x \in \mathcal{S}(0,1)} N(x) > 0$

Et donc $\forall x \in E, x \neq 0 \Rightarrow N\left(\frac{1}{\|x\|_\infty} x\right) \leq m \Rightarrow N(x) \geq m\|x\|_\infty$

D'où l'équivalence entre N quelconque et $\|.\|_\infty$. Par transitivité de la relation d'équivalence des normes, on a donc que toutes les normes en dimension finie sont équivalentes.

Chapitre IV

Réduction des endomorphismes

I Généralités

Définition : Valeur propre

Soit E un $\mathbb{K}$-ev et $f \in \mathcal{L}(E)$. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$.
On dit que λ est une valeur propre de f si : $f - \lambda id$ n'est pas injective.
Ce qui correspond à $\ker(f - \lambda id) \neq \{0\}$
Ce qui correspond à $\exists x \in E, x \neq 0, (f - \lambda id)(x) = 0$
Ce qui correspond à $\exists x \in E, x \neq 0, f(x) - \lambda x = 0$

Remarque I.1. *On étend la notion de valeurs propres à l'ensemble des matrices $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$: pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, λ est une valeur propre de A si λ est une valeur propre de l'endomorphisme canoniquement associé.*

Ce qui correspond à $\ker(A - \lambda I_n) \neq \{0\}$
Ce qui correspond à $\exists X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}), X \neq 0, (A - \lambda I_n)(X) = 0$
Ce qui correspond à $\exists X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}), X \neq 0, AX = \lambda X$

Définition : Spectre d'un endomorphisme

Soit E un $\mathbb{K}$-ev et $f \in \mathcal{L}(E)$. On appelle spectre de f l'ensemble des valeurs propres de f, noté $S_p(f)$.
On peut étendre la notion aux matrices.

Proposition :

Deux matrices semblables ont même spectre.

Exemple I.1. *Si A est triangulaire supérieure avec une diagonale $\lambda_1, ..., \lambda_n$, alors $S_p(A) = \{\lambda_1, ..., \lambda_n\}$. Attention, un spectre n'est pas forcément de cardinal n.*

Soit $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ et $\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \rightarrow & E \\ f & \mapsto & f' \end{array} \right.$
Déterminons les valeurs propres de φ
Supposons $\lambda \in S_p(\varphi) \Leftrightarrow \exists f \in E, f \neq 0, \varphi(f) = \lambda f$
$\Leftrightarrow$ l'équation $\varphi(f) = \lambda f$ admet au moins une solution non-nulle.
Soit $\lambda \in \mathbb{C}$, soit $f \in E$. Alors :
$\varphi(f) = \lambda f \Leftrightarrow f' = \lambda f \Leftrightarrow f \in Vect(t \mapsto e^{\lambda t})$
Donc $\lambda \in S_p(\varphi)$
Donc $S_p(\varphi) = \mathbb{C}$

Soit $E = \mathbb{R}[X]$, *et* $\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ P & \mapsto & P' \end{array} \right.$
Déterminons les valeurs propres de φ. *Soit* $\lambda \in \mathbb{K}$, *soit* $P \in E$ *:*
Si $\lambda = 0$ *:*
$\varphi(P) = \lambda P \Leftrightarrow P' = \lambda P \Leftrightarrow P \in Vect(1)$
Donc 0 *est valeur propre.*
Si $\lambda \neq 0$ *:*
$P' = \lambda P \Rightarrow \deg P' = \deg P \Rightarrow P = 0$
Donc si $\lambda = 0$, *alors* $\lambda \notin S_p(\varphi)$
Donc $S_p(\varphi) = \{0\}$

Définition : Espace propre

Soit E un $\mathbb{K}$-ev, $f \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda \in S_p(f)$. On appelle espace propre associé à λ l'ensemble $\ker(f - \lambda id)$, qu'on note $E_\lambda(f)$
C'est un sev de E non-réduit à 0.
On étend la notion aux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in S_p(A)$, alors $E_\lambda(A) = \ker(A - \lambda I_n)$ est un sev de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

Remarque I.2. *Attention, deux matrices semblables n'ont pas les mêmes espaces propres. Ils sont simmplement isomorphes :* $E_\lambda(A') = P(E_\lambda(A))$ *avec* P *la matrice de passage entre* A *et* A'.

Définition : Vecteur propre

Soit E un $\mathbb{K}$-ev, $f \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda \in S_p(f)$. Soit $x \in E$, on dit que x est un vecteur propre de f relativement à λ si x est un vecteur non-nul de $E_\lambda(f)$.

Théorème :

Une somme finie de sous-espaces propres d'un endomorphisme associés à des valeurs propres distinctes est directe.
Ce qui correspond à : si $\lambda_1, ..., \lambda_p$ sont des valeurs propres distinctes de $f \in \mathcal{L}(E)$, alors $E_1 + ... + E_p$ est une somme directe.

Preuve

Par récurrence sur le nombre d'espaces propres : Soit, pour $p \in \mathbb{N}^*$, H_p : Pour tout $\mathbb{K}$-ev E et toute application $f \in \mathcal{L}(E)$, la somme de p espaces propres de f associés à des valeurs propres distinctes est directe.
H_1 est vérifiée.
Soit $p \in \mathbb{N}^*$, on suppose H_p. Soit E un $\mathbb{K}$-ev, soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda_1, ..., \lambda_{p+1}$ $p+1$ valeurs propres de f.
Soit $(u_1, ..., u_{p+1}) \in E_{\lambda_1} \times ... \times E_{\lambda_{p+1}}$, et on suppose $u_1 + ... + u_{p+1} = 0$ (1).
On a donc $f(u_1) + ... + f(u_{p+1}) = 0$ ie $\lambda_1 u_1 + ... + \lambda_{p+1} u_{p+1} = 0$ (2)
On fait $\lambda_1(1) - (2)$:
$(\lambda_1 - \lambda_1)u_2 + ... + (\lambda_{p+1} - \lambda_1)u_{p+1} = 0$
Or par H_p, on a que $E_{\lambda_2} + ... + E_{\lambda_{p+1}}$ est directe, donc $\forall i \in [\![2, p+1]\!], (\lambda_i - \lambda_1)u_i = 0$ donc $u_i = 0$
Donc d'après (1), on a aussi $u_1 = 0$
Donc $E_{\lambda_1}(f) + ... + E_{\lambda_{p+1}}(f)$ est directe.
D'où la récurrence.

Proposition : Corollaire

Si $\dim E$ est finie : $f \in \mathcal{L}(E), n = \dim E$:

- $S_p(f)$ est fini et $cardS_p(f) \leq n$ ($\lambda \in S_p(f) \Rightarrow \dim E_\lambda(f) \geq 1$) ;
- f est diagonalisable (ie il existe une base de E dans laquelle $Mat_B(f)$ est diagonale) si, et seulement si, $\sum_{\lambda \in S_p(f)} \dim E_\lambda(f) = \dim E$
- Si f admet n valeurs propres distinctes, alors f est diagonalisables.

Preuve

Si $\sum_{\lambda \in S_p(f)} \dim E_\lambda(f) = \dim E$:
$S_p(f) = \{\lambda_1, ..., \lambda_p\}$, on prend $B_1, ..., B_p$ bases respectivement de $E_{\lambda_1}(f), ..., E_{\lambda_p}(f)$
On considère $B = (B_1, ..., B_p)$
B est une famille libre (la somme des espaces propres est directe) et $\dim E_{\lambda_1}(f) + ... \dim E_{\lambda_p}(f) = \dim E$ vecteurs de E
Donc B est une base. Et alors la matrice de f dans cette base est diagonale de coefficients les éléments du spectre selon leurs dimensions.
On suppose qu'il existe $B = (e_1, ..., e_n)$ telle qu'il existe $(\lambda_1, ..., \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ telle que la matrice de f dans B soit diagonale de coefficients les λ_i.
On a donc $\forall i \in [\![1, n]\!], e_i \in E_{\lambda_i}(f)$
Donc $E \subset E_{\lambda_1}(f) + ... + E_{\lambda_n}(f) \subset \bigoplus_{\lambda \in S_p(f)} E_\lambda(f)$
Donc $\dim E \leq \sum_{\lambda \in S_p(f)} \dim E_\lambda(f)$, l'égalité étant assurée par le fait que les espaces propres sont des sev de E.

Exemple I.2. *Soit $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ et $(e_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{C}}$ telle que :* $e_\lambda : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & e^{\lambda t} \end{array} \right.$

Pour montrer que (e_λ) est libre, on considère l'application φ qui à tout élément de E associe sa dérivée.

Alors $S_p(\varphi) = \mathbb{C}$

Prenons $\lambda_1, ..., \lambda_p \in \mathbb{C}$ deux-à-deux distincts : alors $(e_{\lambda_1}, ..., e_{\lambda_p})$ est une famille de p vecteurs non-nuls des espaces propres de φ $E_{\lambda_1}(\varphi), ..., E_{\lambda_p}(f)$

Donc $(e_{\lambda_1}, ..., e_{\lambda_p})$ est libre.

Proposition :

Soit E un $\mathbb{K}$-ev. Soient $u, v \in \mathcal{L}(E)$ tels que $u \circ v = v \circ u$. Alors :

- Imv et $\ker v$ sont stables par u
- $\forall \lambda \in S_p(v), E_\lambda(v)$ est stable par u

Preuve

Soit $y \in Imv$
Donc on peut prendre $x \in E, y = v(x)$
donc $u(y) = u(v(x)) = v(u(x))$ donc $u(x) \in Imv$
Soit $\lambda \in S_p(f)$
Soit $x \in E_\lambda(v)$
alors $v(u(x)) = u(v(x)) = u(\lambda x) = \lambda u(x)$
Et donc $u(x) \in Ker(v - \lambda id)$
Donc $E_\lambda(v)$ est stable.

II Polynôme caractéristique

Dans la suite du chapitre, E est de dimension finie Avec $f \in \mathcal{L}(E), \lambda \in \mathbb{K}$ on a :
$\lambda \in S_p(f) \Leftrightarrow (f - \lambda id)$ est non injective
$\Leftrightarrow (f - \lambda id)$ est non inversible dans $\mathcal{L}(E)$ en dim finie
$\Leftrightarrow \det(f - \lambda id) = 0$

Proposition : Polynôme caractéristique

Avec $f \in \mathcal{L}(E)$, on a que $\begin{array}{ccc} \mathbb{K} & \rightarrow & \mathbb{K} \\ \lambda & \mapsto & \det(f - \lambda id) \end{array}$ est polynomiale. Le polynôme associé est de degré n unitaire.
On appelle ce polynôme le polynôme caractéristique de f, noté χ_f

Preuve

Soit A la matrice de f dans une base quelconque fixée.
$\det(\lambda id - f) = \det(\lambda I - A) = \sum\limits_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod\limits_{k=1}^{n} (\lambda I - A)_{\sigma(k),k}$
Cette fonction est polynomiale, associée au polynôme :
$\det(XI - A) = \sum\limits_{\sigma \in \mathfrak{S}(n)} \varepsilon(\sigma) \prod\limits_{K=1}^{n} [XI - A]_{\sigma(k),k}$
Or $[XI - A]_{\sigma(k),k}$ est un polynôme de degré inférieur ou égal à 1 (qui vaut 1 si, et seulement si, $\sigma(k) = k$)
Donc $\det(XI - A)$ est une somme de polynômes de degré $\leq n$, donc un polynôme de degré $\leq n$
On remarque que $\prod\limits_{k=1}^{n} [XI - A_{\sigma(k),k}$ est de degré n si, et seulement si, $\sigma = id$
donc $\det(XI - A) = \prod\limits_{i=1}^{n} (X - A_{i,i}) + Q$ avec $Q \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$
Donc $\deg(\det(XI - A)) = n$ est le coefficient le degré n de ce polynôme et celui de $\sum\limits_{i=1}^{n} (X - A_{i,i}$ c'est-à-dire 1

Proposition : Valeurs propres

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie.
λ est une valeur propre de f si, et seulement si, λ est une racine de χ_f

Remarque II.1. *On retrouve le fait qu'un endomorphisme en dimension finie n possède au plus n valeurs propres réelles.*

II.1 Coefficients du polynôme caractéristique

Avec $f \in \mathcal{L}(E)$, $A = Mat_B(f)$ dans une base B fixée.
$\chi_f = \sum\limits_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod\limits_{k=1}^{n} [XI - A]_{\sigma(k),k}$
Pour $j \in \{1, n\}$, calculsons le coefficient devant X^{n-j} de χ_f : α_{n-j}
Pour le coefficient de degré $n-1$: soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, si $\sigma \neq id$, alors σ a au plus $n-2$ points fixes
Donc $\forall \sigma \in \mathfrak{S}_n, \sigma \neq id, \deg(\prod\limits_{k=1}^{n} [XI - A]_{\sigma(k),k}) \leq n-2$
Donc $\chi_f = \prod\limits_{i=1}^{n} [X - A_{i,i}] + Q$ avec $\deg Q \leq n-2$
Donc le coefficient de degré $n-1$ de χ_f est : $-\sum\limits_{i=1}^{n} A_{i,i} = -tr(A)$

Le coefficient constant de χ_f est la valeur en 0 du polynôme caractéristique, donc c'est $\chi_f(0) = \det(-A) = (-1)^n \det(A)$

Donc $\chi_f = X^n - tr(f)X^{n-1} + ... + (-1)^n \det(A)$

Exemple II.1. *Application : si χ_f est scindé, alors $\chi_f = \prod_{k=1}^{n}(X - \lambda_i)$ où les λ_i sont les racines de χ_f, non nécessairement distinctes.*

Alors $\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i & = & tr(f) \\ \prod_{i=1}^{n} \lambda_i & = & \det(f) \end{cases}$

Définition : Ordre d'une valeur propre

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$.
On dit que λ est une valeur propre d'ordre α si λ est une racine de χ_f d'ordre α
Ce qui correspond à $(X - \lambda)^\alpha | \chi_f$ et $(X - \lambda)^{\alpha+1}$ ne divise pas χ_f
Ce qui correspond à $\chi_f = (X - \lambda)^\alpha Q$ pour $Q \in \mathbb{K}[X], Q(\lambda) \neq 0$

Théorème :

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Soit λ une valeur propre de f d'ordre α
Alors $\dim E_\lambda(f) \leq \alpha$

Preuve

Dans le cadre de l'énoncé, on note $p = \dim E_\lambda(f)$.
On peut prendre $(e_1, ..., e_p)$ une base de $E_\lambda(f)$
On complète cette famille libre de e par $e_{p+1}, ..., e_n$ en une base B de E.
Alors $Mat_B(A) = \begin{pmatrix} \lambda I_p & C \\ 0 & D \end{pmatrix}$ avec $C \in \mathcal{M}_{p,n-p}(\mathbb{K})$ et $D \in \mathcal{M}_{n-p,n-p}(\mathbb{K})$
Donc $\chi_f = \det \begin{pmatrix} (X - \lambda)I_p & -C \\ 0 & XI - D \end{pmatrix} = (X - \lambda)^p \det(XI - D)$
Donc $(X - \lambda)^p$ divise χ_f
Donc $p \leq \alpha$

Proposition : Corollaire

Si E de dimension finie, $f \in \mathcal{L}(E)$, alors f est diagonalisable si, et seulement si : $\begin{cases} \chi_f \text{ est scindé} \\ \text{Pour tout } \lambda \in S_p(f) \text{, la dimension de } E_\lambda(f) \text{ est égale à l'ordre de } \lambda \end{cases}$

Preuve

On note α_λ l'ordre de λ pour $\lambda \in S_p(f)$
Par contraposée : si χ_f est non-scindé.
On a alors $\sum\limits_{\lambda \in S_p(f)} \alpha_\lambda$
On sait que $\dim \bigoplus_{\lambda \in S_p(f)} E_\lambda(f) = \sum\limits_{\lambda \in S_p(f)} \dim E_\lambda(f)$
Donc $\dim \bigoplus_{\lambda \in S_p(f)} E_\lambda(f) \leq \sum\limits_{\lambda \in S_p(f)} \alpha_\lambda < n$
Donc $\bigoplus E_\lambda(f) \neq E$
f n'est pas diagonalisable.
On suppose maintenant χ_f scindé.
Pour $\lambda \in S_p(f)$, on note n_λ la dimension de $E_\lambda(f)$
f est diagonalisable si, et suelement si $\bigoplus\limits_{\lambda \in S_p(f)} E_\lambda(f) = E$
$\Leftrightarrow \sum\limits_{\lambda \in S_p(f)} n_i = n$
$\Leftrightarrow \sum\limits_{\lambda \in S_p(f)} (\alpha_\lambda - n\lambda) = 0$
$\forall \lambda \in S_p(f), \alpha_\lambda = n_\lambda$

Exemple II.2. *Avec* $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

On a immédiatement $rg(A - 3I_3) = 1$ *et donc* $\dim \ker(A - 3I_3) = 2$
Donc 3 *est une valeur propre de* A *d'ordre au moins* 2.
Donc les valeurs propres de A *comptées avec ordre de multiplicité sont* $3, 3, X$ *telles que* $3+3+X = tr(A)$
Donc $X = 6$ *et donc* $\chi_A = (X - A)^2(X - 6)$

III Trigonalisation

Définition : Trigonalisation

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie, on dit que $f \in \mathcal{L}(E)$ esat trigonalisable si il existe une base B telle que $Mat_B(f)$ est triangulaire.

Remarque III.1. *Si* $Mat_B(f) \in T_n^+(\mathbb{K})$ *:* $f(e_1) \in Vect(e_1), f(e_2) \in Vect(e_1, e_2), ..., f(e_n) \in Vect(e_1, ..., e_n)$ *et donc* $\forall i \in [\![1, n]\!], f(F_i) \subset F_i$.

Posons $B'(e_n, ..., e_1)$. *Alors :* $f(e_n) \in Vect(e_n, ..., e_1), f(e_{n-1}) \in Vect(e_{n-1}, ..., e_1), ..., f(e_1) \in Vect(e_1)$
Et alors $Mat_{B'}(f) \in T_n^+(\mathbb{K})$
Donc quand une matrice est trigonalisable, elle l'est de manière inférieure et supérieure.

Une matrice est dite trigonalisable si son endomorphisme canoniquement associé est trigonalisable. ie elle est semblable à une matrice triangulaire.

Théorème :

Un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-ev E de dimension finie est trigonalisable si, et seulement si, son polynôme caractéristique est scindé.

Preuve

On suppose f trigonalisable. On a donc B une base de E telle que : $Mat_B(f) = T$ est triangulaire, de coefficients diagonaux $\alpha_1, ..., \alpha_n$.
Et donc $\chi_f = \chi_T = (X - \alpha_1)...(X - \alpha_n)$
Donc χ_f est scindé.
Réciproquement, raisonnons par récurrence sur la dimension de l'espace.
Montrons que $\forall n \in \mathbb{N}^*, H_n$: pour tout $\mathbb{K}$-ev E de dimension n, pour tout endomorphisme f de E de polynôme caractéristique scindé, f est trigonalisable.
H_1 : En dimension 1, les endomorphismes sont uniquement $x \mapsto \lambda x$, on a donc une matrice à un seul coefficient λ.
Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose H_n. Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension $(n + 1)$.
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que χ_f est scindé.
Donc χ_f a au moins une racine dans $\mathbb{K}$, notée λ. Donc $\lambda \in S_p(f)$.
On considère $e_1 \in E$ un vecteur propre (non nul) associé à λ et on complète e_1 par $(e_2, ..., e_{n+1})$ en une base B de E.
Alors $Mat_B(f) = \begin{pmatrix} \lambda & L \\ 0 & A \end{pmatrix}$ avec $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), L \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{K})$
On note $F = Vect(e_2, ..., e_{n+1})$.
On note p la projection sur F parallèlement à $Vect(e_1)$. On appelle g l'application g : $\begin{cases} F & \to & F \\ x & \mapsto & p \circ f(x) \end{cases}$.
Et alors $A = Mat_{(e_2,...,e_{n+1})}(g)$
On a que $\dim F = n$ et donc $g \in \mathcal{L}(F)$
On a que $\chi_f = (X - \lambda)\chi_A = (X - \lambda)\chi_g$ or χ_f est scindé, donc χ_g est scindé.
Donc par H_n, on peut trouver une base B'_f de F dans laquelle $Mat_{B'_f}(g) = T \in T_n^+(\mathbb{K})$
Donc $B' = (e_1, e'_2, ..., e'_n)$ est une base de E
Donc $Mat_{B'}(f) = \begin{pmatrix} \lambda & L' \\ 0 & T \end{pmatrix}$ qui est triangulaire supérieure.
Ce qui conclut la récurrence.

Exemple III.1. *Soit E un $\mathbb{C}$-ev de dimension n et $f \in \mathcal{L}(E)$*

Notons $\chi_f = \prod_{i=1}^{n} (X - \lambda_i)$

Déterminer χ_{f^p} *pour* $p \in \mathcal{N}$ *et* χ_{f^p} *pour* $p \in \mathbb{Z}$ *si* $f \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$

Comme $\chi_f \in \mathbb{C}[X]$, *il est scindé : on fixe* B *une base de* E *dans laquelle* $Mat_B(f)$ *est triangulaire supérieure de coefficients diagonaux* $\alpha_1, ..., \alpha_2$

Comme un produit de matrices triangulaires supérieures est triangulaire supérieur avec les coefficients diagonaux qui sont les produits des éléments des deux diagonales, et donc $Mat_B(f^2)$ *est une matrice triangulaire supérieure avec comme coefficients diagonaux les* $\lambda_1^2, ..., \lambda_n^2$

Donc $\chi_{f^2} = \prod_{i=1}^{n} (X - \lambda_i^2)$

Par récurrence immédiate, on a $\chi_{f^p} = \prod_{i=1}^{n} (X - \lambda_i^p)$

Si $f \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$, *alors tous ses coefficients diagonaux dans* B *sont non-nuls et son inverse a comme coefficients diagonaux les* $\frac{1}{\lambda_1}, ..., \frac{1}{\lambda_n}$. *On peut alors étendre* $\chi_{f^p}(X - \lambda_i^p)$ *pour* $n \in \mathbb{Z}$

Exemple III.2. *Est-ce qu'il y a un lien entre* f *diagonalisable et* f^2 *diagonalisable ?*

Si f *est diagonalisable, alors* f^2 *l'est pour les mêmes matrices de passage. On peut trouver* $B = (e_1, ...e_n)$ *une base de vecteurs propres de* f *tels que* $f(e_i) = \lambda_i e_i$

On a alors $f^2(e_i) = f(\lambda_i e_i) = \lambda_i^2 e_i$ *et par récurrence immédiate* $f^p(e_i) = \lambda_i^p e_i$

On a cependant des exemples de réciproque fausse, avec la valeur propre 0. Par exemple, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ *n'est pas diagonalisable mais son carré est la matrice nulle, qui est diagonale.*

Remarque III.2. *Avec la trigonalisation, on retrouve le fait que :*
$\forall A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K}), tr(A)$ *est la somme des vp de* A *comptées avec leur ordre de multiplicité.*
$\det(A)$ *est le produit des vp de* A *comptées avec leur ordre de multiplicité.*

IV Endomorphismes nilpotents

Définition : Nilpotence

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie et f un endomorphisme de E. f est nilpotent si il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $f^k = 0$. On appelle ordre de nilpotence de f le plus petit entier p tel que $f^p = 0$

Théorème :

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie n, $f \in \mathcal{L}(E)$. Alors f est nilpotente si, et seulement si, $\chi_f = X^n$ et $\chi_f = X^n$ si, et seulement si, il existe une base B de E dans laquelle $Mat_B(f)$ est triangulaire avec des 0 sur la diagonale.

Preuve

Supposons $\chi_f = X^n$. Alors χ_f est scindé, et f est trigonalisable.
Mais comme ses valeurs propres sont $0, ..., 0$, il existe donc une base B de E telle que $Mat_b(f)$ est triangulaire avec des zéros sur la diagonale.
On suppose qu'il existe B base de E telle que $Mat_B(f)$ est triangulaire avec une diagonale nulle.
On note pour $i \in [\![1, n]\!]$: $F_i = Vect(e_1, ..., e_i)$.
Pour $i \in [\![1, n]\!], f(F_i) \subset F_{i-1}$ avec $F_0 = \{0\}$
Et donc par récurrence : $\forall p \in \mathbb{N}^*, p \leq i, f^p(F_i) \subset F_{i-p}$
Et en particulier, $f^n(F_n) \subset F_0$
Et donc f est nilpotente.
Supposons f nilpotente. On considère une base B de E et $A = Mat_f(B)$
Donc $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
Donc on sait que $\chi_A = \chi_f$
Montrons que la seule valeur propre de A dans $\mathbb{C}$ est 0, donc on a besoin d'une complexification de l'espace.
Donc on prend $\lambda \in S_{p,\mathbb{C}}(A)$
On peut donc prendre $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C}), X \neq 0$ tel que $AX = \lambda X$
Par récurrence, $\forall k \in \mathbb{N}, A^k X = \lambda^k X$
f est nilpotente d'ordre $\leq n$, donc A aussi.
Donc $\lambda^n X = 0$
Mais $X \neq 0$ donc $\lambda^n = 0$ donc $\lambda = 0$
Et donc 0 est valeur propre d'ordre n
Donc $\chi_f = \chi_A = X^n$

V Polynômes d'endomorphismes

Un projecteur, défini polynomialement, est un endomorphisme vérifiant $p^2 - p = 0$. Une symétrie est un endomorphisme qui vérifie $s^2 - id = 0$.

On parle dans les deux cas de polynômes annulateurs. Dans les deux cas, les endomorphismes sont diagonalisables.

Dans toute cette partie, E est un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie.

Définition : Polynôme d'endomorphismes

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On note $\mathbb{K}[f]$ la sous-algèbre de $\mathcal{L}(E)$ engendrée par f.

Donc $\mathbb{K}[f] = Vect((f^n)_{n\in\mathbb{N}}) = \{\sum_{k=0}^{n} a_k f^k | n \in \mathbb{N}, (a_0, ..., a_n) \in \mathbb{K}^{n+1}\}$

On peut donc considérer l'application $\left\{\begin{array}{rcl} \mathbb{K}[X] & \to & \mathbb{K}[f] \\ P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k & \mapsto & \sum_{k=0}^{n} a_k f^k = P(f) \end{array}\right.$

Proposition : Opérations sur les polynômes d'endomorphismes

Pour $P, Q \in \mathbb{K}[X]$, $\lambda \in \mathbb{K}$ et $f \in \mathcal{L}(E)$, on a :

- $(P + Q)(f) = P(f) + Q(f)$
- $(\lambda \cdot P)(f) = \lambda P(f)$
- $(P \times Q)(f) = P(f) \circ Q(f) = Q(f) \circ P(f)$
- $(P \circ Q)(f) = P(Q(f))$

Preuve

Les deux premières sont immédiates.

Pour le produit, si $P = \sum_{k=0} a_k X^k, Q = \sum_{k=0}^{n} b_k X^k$ alors :

$PQ = \sum_{0\leq i\leq n, 0\leq j\leq n} a_i b_j x^{i+j}$

Et donc $(PQ)(f) = \sum_{0\leq i\leq n, 0\leq j\leq n} a_i b_j f^{i+j} = \left(\sum_{i=0}^{n} a_i f^i\right) \circ \left(\sum_{j=0}^{n} b_j f^j\right)$

Pour la composée, on montre par récurrence que $(X^n \circ Q)(f) = Q^n(f) = Q(f)^n$

Et ensuite on a que pour $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$: $P \circ Q(f) = \sum_{k=0}^{n} a_k Q^k(f) = \sum_{k=0}^{n} a_k Q(f)^k = P(Q(f))$

Remarque V.1. *Si E est de dimension finie, alors $\mathbb{K}[f]$ est un sev de $\mathcal{L}(E)$, donc $\mathbb{K}[f]$ est de dimension finie. Donc l'application* $\varphi : \left\{\begin{array}{rcl} \mathbb{K}[X] & \to & \mathbb{K}[f] \\ P & \mapsto & P(f) \end{array}\right.$ *n'est pas injective.*

$\ker \varphi$ *n'est pas réduit à* $\{0\}$

Définition : Polynôme annulateur

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et $f \in \mathcal{L}(E)$. On dit que P est un polynôme annulateur de f si $P(f) = 0$

Définition : Polynôme minimal

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On appelle polynôme minimal de f un polynôme non-nul unitaire annulateur de f de degré minimal, qu'on note π_f ou μ_f (cette notation existe mais elle est très rare).

Proposition :

Avec E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$:

1. $\mathbb{K}[f]$ est de dimension $\deg(\pi_f)$ et $(id, f, ..., f^{\deg(\pi_f)-1})$ est une base de $\mathbb{K}[f]$
2. P est annulateur de f si, et seulement si, $\pi_f|P$
3. Si P est annulateur de f, alors toute valeur propre de f est une racine de P.
4. Les valeurs propres de f sont les racines de π_f

Preuve

Montrons le 1 : On note $p = \deg \pi_f$. Soit $(a_0, ..., a_{p-1}) \in \mathbb{K}^p$.
On suppose $a_0 id + a_1 f + ... + a_{p-1} f^{p-1} = 0$
Par l'absurde, si $(a_0, ..., a_{p-1}) \neq (0, ..., 0)$, alors le polynôme $Q = \sum_{k=0}^{p-1} a_k X^k$ est non-nul, annulateur de f et de degré strictement inférieur à $\deg \pi_f$. D'où la contradiction.
Donc la famille $(id, f, ..., f^{p-1})$ est libre.
Soit $g \in \mathbb{K}[X]$. on a donc $P \in \mathbb{K}[X], g = P(f)$.
Par division euclidienne, $P = \pi_f Q + R$ avec $\deg R < \deg \pi_f$.
ALors $P(f) = (\pi_f Q + R)(f) = \pi_f(f) \circ Q(f) + R(f) = R(f)$
Donc $g \in Vect(id, f, ..., f^{p-1})$
D'où le résultat.
Montrons le 2 : Tout multiple de π_f est annulatgeur (immédiat)
Réciproquement, soit P un polynôme annulateur de f. Par division euclidienne, soit $P = \pi_f Q + R$ avec $\deg R < \deg \pi_f$
Alors $P(f) = 0 = R(f)$
Donc R est annulateur de degré strictement inférieur à $\deg \pi_f$, donc $R = 0$.
De là, on a peut assurer l'unicité du polynôme minimal : s'il y en avait deux, ils se diviseraient l'un l'autre et seraient associés. Mais puisqu'ils sont unitaires, ils sont égaux.
Montrons le 3 : Soit $\lambda \in S_p(f)$
On peut donc prendre $x \in E$ non-nul tel que $f(x) = \lambda(x)$
Par récurrence, $\forall i \in \mathbb{N}, f^i(x) = \lambda^i x$
Et donc, $\forall P \in \mathbb{K}[X], P(f)(x) = \P(\lambda)x$
Et si P est annulateur de f, $P(\lambda)x = 0$, et comme $x \neq 0$, $P(\lambda) = 0$
Donc λ est une racine de P.
Montrons le 4 : π_f est annulateur de f, donc toute valeur propre de f est racine de π_f.
Réciproquement, soit λ une racine de π_f
On a donc $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $\pi_f = (X - \lambda)Q$
$\pi_f(f) = 0$, ce qui s'écrit $(f - \lambda id) \circ Q(f) = 0$
Par l'absurde, si $\lambda \notin S_p(f)$, alors $(f - \lambda id)$ est bijective.
Donc $(f - \lambda id)^{-1} \circ (f - \lambda) \circ Q(f) = Q(f) = 0$
Donc Q est annulateur de f, mais $Q \neq 0$ alors que $\deg Q < \deg \pi_f$, d'où la contradiction.
Donc $\lambda \in S_p(f)$

Remarque V.2. *On étend toutes ces notions aux racines de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ par passage à l'endomorphisme canoniquement assotions. On note avec les notations $\mathbb{K}[A]$ et π_f pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et au passage si A et B sont semblables, alors $\pi_A = \pi_B$.*

Exemple V.1. *À refaire pendant la toussaint.*

Théorème :

Avec E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie, $f \in \mathcal{L}(E)$. f est diagonalisable si, et seulement si, π_f est scindé à racines simples
Ce qui correspond à ce qu'il existe un polynôme annulateur non-nul scindé à racines simples de f.

Preuve

Supposons f diagonalisable.
$S_p(f) = \{\lambda_1, ..., \lambda_p\}$ et donc $\chi_f = (X - \lambda_1)^{\alpha_1}...(X - \lambda_p)^{\alpha_p}$
Donc il existe une base dans laquelle la matrice de l'endomorphisme est une diagonale avec α_1 fois λ_1, α_2 fois λ_2...
Et alors $\pi_f = \pi_A = (X - \lambda_1)...(X - \lambda_p)$
Réciproquement, on suppose qu'il existe $\lambda_1, ..., \lambda_p$ distincts tels que $pi_f = (X - \lambda_1)...(X - \lambda_p)$. On considère L_i les polynômes de Lagrange associés à $\lambda_1, ..., \lambda_p$ (on rappelle que $Li = \prod\limits_{j=1, j\neq i}^{p} \dfrac{X - \lambda_j}{\lambda_i - \lambda_j}$ et que $\forall i, j \in [\![1, p]\!], L_i(\lambda_j) = \delta_{i,j})$
Donc $(L_1, ..., L_p)$ est une base de $\mathbb{K}_{p-1}[X]$ où on peut écrire $P = \sum\limits_{k=1}^{p} P(\lambda_k)L_k$. En particulier, le polynôme constant de valeur 1 est $1| = \sum\limits_{k=1}^{p} L_k$.
Alors $1|(f) = \sum\limits_{i=1}^{p} L_i(f)$ ce qui correspond à $id = \sum\limits_{i=1}^{p} L_i(f)$
Donc $\forall x \in E, x = \sum\limits_{i=1}^{p} L_i(f)(x)$ avec $L_i(f)(x) \in \ker(f - \lambda_i id)$
Donc E est la somme des espaces propres
Donc f est diagonalisable.
En effet, $(f - \lambda_i id)(L_i(f)(x)) = ((f - \lambda_i id) \circ Li(f))(x) = ((X - \lambda_i)L_i)(f)(x) = (\mu\pi_f)(f)(x)$ avec $\mu = \prod\limits_{j=1, j\neq i}^{p} \frac{1}{\lambda_i - \lambda_j}$
Donc $E \subset \bigoplus\limits_{i=1}^{p} E_{\lambda_i}(f)$

Théorème : Cayley-Hamilton

Avec E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie, $f \in \mathcal{L}(E)$, alors χ_f est un polynôme annulateur de f.

Preuve

On se place d'abord dans le cas où $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.
On sait que les valeurs propres sont les racines de π_f et de χ_f.
$\pi_f = \prod_{\lambda \in S_p(f)} (X-\lambda)^{\alpha_\lambda}$ et $\chi_f = \prod_{\lambda \in S_p(f)} (X-\lambda)^{\beta_\lambda}$
On va montrer que $\forall \lambda \in S_p(f), \alpha_\lambda \leq \beta_\lambda$
Soit $\lambda \in S_p(f)$. On considère $F = Ker(f - \lambda id)^{\alpha_\lambda}$
F est stable par F, donc on peut considérer f_λ l'endomorphisme induit par f sur F
Donc $(X-\lambda)^{\alpha_\lambda}$ est annulateur de f_λ
Donc $\pi_{f_\lambda} = (X-\lambda)^\gamma$ où $\gamma \leq \alpha_\lambda$
Supposons par l'absurde $\gamma < \alpha_\lambda$:
Rappel : $\pi_f = (X-\lambda)^{\alpha_\lambda} Q$ avec $Q(\lambda) \neq 0$
$\forall x \in E, ((X-\lambda)^\gamma Q)(f)(x) = (f - \lambda id)^\gamma (Q(f)(x))$
Or $(f - \lambda id)^{\alpha_\lambda} Q(f)(x) = 0$
Donc $Q(f)(x) \in F$
Donc $(f - \lambda id)^\gamma (Q(f)(x)) = (f_\lambda - \lambda id)^\gamma (Q(f)(x)) = 0$
Donc $(X-\lambda)^\gamma Q$ est un polynôme annulateur de f de degré strictement inférieur à $\deg \pi_f$
D'où la contradiction. Donc $\gamma = \alpha_\lambda$
Donc $(f_\lambda - \lambda id)$ est donc nilpotent d'ordre α_λ, donc $\dim F \geq \alpha_\lambda$
On prend une base de F $(e_1, ..., e_p)$ qu'on complète en une base de E. La matrice de f dans cette base est une matrice par blocs triangulaire supérieure. $\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$
Donc $\chi_f = \chi_A \chi_B = (X-\lambda)^p \chi_B$
Donc $\alpha_\lambda \leq p \leq \beta_\lambda$
Donc le polynôme minimal divise le polynôme caractéristique.
Avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, avec B une base de E. On considère $M = Mat_B(f) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$
On a que $\pi_f = \pi_M$ et $\chi_f = \chi_M$
$M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$
Donc $\pi_{M,\mathbb{C}} | \chi_{M,\mathbb{C}}$
$\chi_M = \det(XI - M)$ ne dépend pas du corps considéré. Donc $\chi_{M,\mathbb{C}} = \chi_{M,\mathbb{R}}$
$\pi_{M,\mathbb{C}} | \pi_{M,\mathbb{R}}$
Rappelons que pour $P \in \mathbb{C}[X]$: $P(M) = 0 \Rightarrow \bar{P}(\bar{M})$
Mais si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, alors $\bar{P}(M) = 0$ aussi.
$\bar{\pi}_{M,C}$ est annulateur de M et de même degré que $\pi_{M,\mathbb{C}}$, donc $\pi_{M,\mathbb{C}} = \bar{\pi}_{M,\mathbb{C}}$
Donc $\pi_{M,\mathbb{C}} \in \mathbb{R}[X]$
Donc $\pi_{M,\mathbb{R}} | \pi_{M,\mathbb{C}}$

Chapitre V

Suites et sérties de fonctions

I Suites de fonctions

Définition : Convergence simple

Soit E, F, 2 $\mathbb{K}$-ev de dimension finie. Soit $A \subset E$. Soit $(f_n) \in \mathcal{F}(A, F)^{\mathbb{N}}$.
On dit que (f_n) converge simplement vers $g \in \mathcal{F}(A, F)$ si $\forall t \in A, (f_n(t)) \to g(t)$

Définition : Convergence uniforme

Soit E, F, 2 $\mathbb{K}$-ev de dimension finie. Soit $A \subset E$. Soit $(f_n) \in \mathcal{F}(A, F)^{\mathbb{N}}$.
On dit que (f_n) converge uniformément vers $g \in \mathcal{F}(A, F)$ si $\sup\limits_A \|f_n - g\| \to_{n\to\infty} 0$

Remarque I.1. *(f_n) converge simplement (CVS) vers g si, et seulement si,* $\forall t \in A, \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \Rightarrow \|f_n(t) - g(t)\| \leq \varepsilon$

(f_n) converge uniformément (CVU) vers g si, et seulement si, $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall t \in A, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \Rightarrow \|f_n(t) - g(t)\| \leq \varepsilon$

Exemple I.1. $f_n : \left\{ \begin{array}{ccl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{array}{ll} 0 & si\ x \leq n \\ 1 & si\ x > n \end{array} \end{array} \right.$ *converge simplement vers 0, mais ne converge pas uniformément vers 0 :* $\sup\limits_A \|f_n(t) - g(t)\| = 1$

Exemple I.2. $f_n : \left\{ \begin{array}{ccl}]0,1[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{array}{ll} 0 & si\ x \leq 1 - \frac{2}{n} \\ n & si\ 1 - \frac{2}{n} < x < \frac{1}{n} - \frac{2}{n} \\ 0 & sinon \end{array} \end{array} \right.$ *converge simplement vers 0, mais ne converge pas uniformément vers 0 :* $\sup\limits_A \|f_n(t) - g(t)\| \to_{n\to+\infty} +\infty$

Remarque I.2.
- *Si f_n converge uniformément vers g alors f_n converge simplement vers g.*
- *La notion de convergence simple n'est pas une notion de convergence dans un EVN (suites non-bornées convergentes)*
- *Sur $\mathcal{B}(A, F)$ (fonctions bornées) la notion de convergence uniforme est celle de convergence pour la norme infinie* ($\sup\limits_A \|f\|$)

Exemple I.3. *Prenons un exemple de fonction qui converge uniformément sans notion de norme infinie :*
$f_n : \left\{ \begin{array}{ccl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x + \frac{1}{n} \end{array} \right.$ *qui converge uniformément vers $x \mapsto x$ car,* $\forall x \in \mathbb{R}, |f_n(x) - x| \leq \frac{1}{n}$ *et donc* $\sup |f_n - id| \leq \frac{1}{n}$

Exemple I.4. *Etudier la convergence simple et uniforme de* $f_n : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{n^\alpha}{1+nx} \end{array}\right.$

À $x \in \mathbb{R}_+^*$ *fixé :* $f_n \sim \frac{n^\alpha}{nx} \sim \frac{n^{\alpha-1}}{x}$ *qui converge simplement si* $\alpha \leq 1$.
— *si* $\alpha < 1$, $f_n(x)$ *tend vers 0.*
— *si* $\alpha = 1$, $f_n(x)$ *tend vers* $\frac{1}{x}$
— *si* $\alpha > 1$, $f_n(x)$ *diverge.*
Donc :
— *si* $\alpha < 1$, (f_n) *converge simplement vers 0.*
— *si* $\alpha = 1$, (f_n) *converge simplement vers* $\frac{1}{x}$
— *si* $\alpha > 1$, (f_n) *ne converge pas simplement.*
Si $\alpha = 1$, *pour la convergence uniforme, il y a deux candidats,* $x \mapsto \frac{1}{x}$ *et* $x \mapsto 0$.
Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$ *:* $f_n(x) - \frac{1}{x} = \frac{n}{1+nx} - \frac{1}{x} = \frac{-1}{x(1+nx)} = g_n(x)$
Alors $\forall n \in \mathbb{N}^*, |g(\frac{1}{n})| = \frac{n}{2}$ *et donc* (f_n) *ne converge pas uniformément vers* $x \mapsto \frac{1}{x}$
Si $\alpha < 1$, *étudions* f_n *pour* $n \in \mathbb{N}^*$. f_n *est dérivable et* $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f_n'(x) = -n^\alpha n \frac{1}{(1+nx)^2} = \frac{-n^{\alpha+1}}{(1+nx)^2}$ *et donc* f_n *est décroissante positive donc* $\sup |f_n| = n^\alpha$
Et donc (f_n) *converge uniformément vers la fonction nulle si, et seulement si,* $\alpha < 0$

II Séries de fonctions

Dans la suite du chapitre, on aura E, F deux $\mathbb{K}$-ev de dimension finie, et $A \subset E$

Définition : Convergences

Soit $(u_n) \in \mathcal{F}(A, F)^{\mathbb{N}}$, on dit que la série de fonction $(\sum u_n)$ converge simplement si la suite des sommes partielles $\left(\sum\limits_{k=0}^{n} u_k\right)$ converge simplement.

On dit que $(\sum u_n)$ converge uniformémemnt si la suite des sommes partielles $\left(\sum\limits_{k=0}^{n} u_k\right)$ converge uniformément.

Remarque II.1. *Si* $(\sum u_n)$ *converge simplement sur* A, *on peut définir la fonction "somme" de* $\sum u_n$ *sur* A *: c'est l'application* $\begin{array}{ccc} A & \to & F \\ t & \mapsto & \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n(t) \end{array}$

Exemple II.1. $(\sum(z \mapsto z^n))$ *(on notera le plus souvent* $(u_n) \in \mathcal{C}, \mathcal{C}^{\mathbb{N}}$ *définie par* $u_n(z) = z^n$ *pour* $z \in \mathbb{C}$*). Pour quelle valeur de* z $(\sum u_n)$ *est-elle définie ?* $(\sum u_n)$ *converge simplement sur* $\mathbb{D}(0,1)$ *(disque ouvert de centre 0 de rayon 1) et* $\forall z \in \mathbb{D}(0,1)$; $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n = \frac{1}{1-z}$
$(\sum u_n)$ *converge simplement vers* $z \mapsto \frac{1}{1-z}$
Pour la convergence uniforme : soit $z \in \mathbb{D}(0,1)$, $n \in \mathbb{N}$
$|\sum\limits_{k=0}^{n} z^k - \frac{1}{1-z}| = |\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} z^k| = \frac{|z^{n+1}}{1-z}$
On trouver une suite de $z \in \mathbb{D}(0,1)$ *telle que le reste diverge :* $|R_n(1-\frac{1}{n})| = (n+1)(1+\frac{1}{n+1})^{n+1} \sim ne^{-1}$
Et donc il n'y a pas convergence uniforme sur $\mathbb{D}(0,1)$.
Par contre, avec $R \in [0,1[$ *:* $\forall n \in \mathbb{N}, \forall z \in \mathbb{D}(0,R), |R_n(z)| \leq \frac{R^{n+1}}{1-R}$ *(on minore le dénominateur et on majore le numérateur)*
Donc $\sup\limits_{z \in \mathbb{D}(0,R)} |R_n(z)| \leq \frac{R^{n+1}}{1-R}$
Donc $\sum z \mapsto z^n$ *converge uniformémement sur* $\mathbb{D}(0,R)$ *pour tout* $R \in [0,1[$

Remarque II.2. $\cup_{R\in[0,1[}\mathbb{D}(0,R) = \mathbb{D}(0,1)$. *Il y a convergence uniforme sur* $\mathbb{D}(0,R)$ *pour tout* R *mais pas convergence uniforme sur* $\mathbb{D}(0,1)$. *Cependant, si on avait une réunion finie, il y aurait convergence uniforme (en prenant le maximum des deux majorants).*

La convergence uniforme n'est pas une notion locale.

Proposition :

Soit $(u_n) \in \mathcal{F}(A,F)^{\mathbb{N}}$, alors $(\sum u_n)$ converge uniformément si, et seulement si, $\sum u_n$ converge simplement et $(R_n) = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} u_k$ converge uniformément vers 0.

Exemple II.2. $f : \begin{array}{rcl}]-1,1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n} \end{array}$

Montrer que f *est bien définie. La série de fonctions* $\sum(-1)^n\frac{x^n}{n}$ *converge-t-elle uniformémemnt vers* f *? Trouver des domaines sur lesquels* $(\sum(-1)^n\frac{x^n}{n})$ *converge uniformément.*

Soit $n\in\mathbb{N}^*$, *alors* $|\frac{(-1)^n x^n}{n}| \leq |\frac{x^n}{n}| \leq |x|^n$

Or $\sum|x|^n$ *converge pour* $|x|<1$

Donc $\sum\frac{(-1)^n x^n}{n}$ *converge absolument.*

D'autre part, $\left(\frac{1}{n}\right)$ *est positive, décroissante et de limite nulle, donc* $\sum\frac{(-1)^n}{n}$ *converge pour* $x\in]-1,1]$

Et donc on a bien la convergence simple.

Soit $x\in]-1,1]$, *alors* $|R_n(x)| = |\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty}(-1)^k\frac{x^k}{k}|$

$|R_n(-1+\frac{1}{n+1})| = |\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty}(-1)^n\frac{(-1+\frac{1}{n+1})^k}{k}| = |(-1+\frac{1}{n+1}^{n+1}||\sum\limits_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1+\frac{1}{n+1})^k}{n+k+1}|$

$\forall k\in\mathbb{N}^*, (-1+\frac{1}{n+1})^k$ *est du signe de* $(-1)^k$

Donc $|B_n| = |\sum\limits_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1+k}(-1+\frac{1}{n+1})^k}{n+k+1}| = \sum\limits_{k=0}^{+\infty}\frac{(1-\frac{1}{n+1})^k}{n+k+1}$

$\geq \sum\limits_{k=0}^{+\infty}\frac{(1-\frac{1}{n+1})^k}{n} \geq \sum\limits_{k=0}^{N}\frac{(1-\frac{1}{n+1})^k}{n+k+1}$ *pour* $N\in\mathbb{N}$ *quelconque*

$\geq \sum\limits_{k=0}^{N}\frac{(\frac{n}{n+1})^k}{n+N+1} \geq \frac{1-(\frac{n}{n+1})^{N+1}}{(1-\frac{n}{n+1})(n+N+1)} \geq (n+1)\frac{(1-(\frac{n}{n+1})^{N+1})}{n+N+1}$

ceci est vrai en particulier pour $N=n$ *et alors* $|B_n| \geq \frac{(n+1)(1-(\frac{n}{n+1})^{n+1})}{2n+1} \sim \frac{1}{2}e^{-1}$

Donc $|R_n(1-\frac{1}{n+1})| \geq (1-\frac{1}{n+1})^{n+1}|B_n|$ *qui ne tend pas vers 0 : la série de fonctions ne converge pas uniformément sur* $]-1,1]$.

Soit $a\in]0,1[$, $\forall x\in[-a,a]$, $\forall n\in\mathbb{N}, |\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty}(-1)^l\frac{x^k}{k}| \leq \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty}\frac{|x|^k}{k} \leq \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty}\frac{a^k}{k}$ *qui tend vers 0 et est indépendant de* x, *d'où la convergence uniforme. Donc* $\sup\limits_{x\in[-a,a]}|R_n(x)| \to_{n\to+\infty} 0$ *donc la série converge uniformément sur* $[-a,a]$ *pour* $a\in]0,1[$

Soit $x\in[0,1]$, *soit* $n\in\mathbb{N}$

$(\frac{x^k}{k}$ *est positive, décroissante et de limite nulle.*

Donc $|\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty}(-1)^k\frac{x^k}{k}| \leq \frac{x^{n+1}}{n+1}\frac{1}{n+1}$

Donc $\sup\limits_{x\in[0,1]} R_n(x) \leq \frac{1}{n+1}$ *et tend donc vers 0*

Donc la série converge uniformément sur $[0,1]$

Donc $\left(\sum\frac{(-1)^n x^n}{n}\right)$ *converge uniformément sur* $[-a,1]$ *pour tout* $a\in]0,1[$

Définition : Convergence normale

Soit $(u_n) \in \mathcal{F}(A,F)^{\mathbb{N}}$. On dit que $\sum u_n$ converge normalement si $\sum \sup\limits_A \|u_n\|$ converge.

Exemple II.3. $\sum (-1)^n \frac{x^n}{n}$ *converge normalement sur* $\left[-\frac{3}{4}, \frac{3}{4}\right]$ *: soit* $x \in \left[-\frac{3}{4}, \frac{3}{4}\right], \forall n \in \mathbb{N}, |(-1)^n \frac{x^n}{n}| \leq \frac{1}{n}\left(\frac{3}{4}\right)^n$ *et* $\sum \frac{\left(\frac{3}{4}\right)^n}{n}$ *converge*

Donc $\sup\limits_{x \in \left[-\frac{3}{4}, \frac{3}{4}\right]} |(-1)^n \frac{x^n}{n}| \leq \frac{1}{n}\left(\frac{3}{4}\right)^n$ *donc* $\sum \sup \left|\frac{(-1)^n x^n}{n}\right|$ *converge par critère de majoration positif.*

Proposition :

Tout série de fonction qui converge normalement converge uniformément

Preuve

Si $\sum u_n$ converge normalement :
$\forall x \in A, \sum u_(x)$ converge absolument

Par critère de majoration positif et $\forall x \in A, \|R_n(x)\| = \|\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x)\| \leq \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \|u_k(x)\| \leq \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \sup\limits_A \|u_k\|$.

Donc $\sup\limits_A \|R_n(x)\| \leq \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \sup\limits_A \|u_n\|$
Donc $\sup\limits_A \|R_n(x)\| \to 0$

Remarque II.3. *Résumé :*

- *Pour les suites de fonctions, on a deux notions, et la convergence uniforme entraîne la convergence simple.*
- *Pour les séries de fonctions, on a trois notions : la convergence normale, la convergence uniforme, la convergence simple et on peut rajouter la convergence absolue en tout point. On a que la convergence normale entraîne la convergence uniforme. La convergence uniforme entraîne la convergence simple. La convergence absolue en tout point entraîne la convergence simple. Par définition, la convergence normale entraîne la la convergence absolue en tous points. Par transitivité, la convergence normale entraîne la convergence simple.*

III Continuité d'une limite uniforme

Théorème : Continuité uniforme

Soit $(f_n) \in \mathcal{F}(A,F)^{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions.
Si $\forall n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur A et que (f_n) converge uniformémement vers g, alors g est continue.
Ce qui correspond à : une limite uniforme de fonctions continues est continue.

Preuve

Soit $x \in A$
Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$
f_n converge uniformément vers g, on fixe donc $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\sup\limits_{x\in A} \|g(x) - f_{n_0}(x)\| < \frac{\varepsilon}{3}$
f_{n_0} est continue en x, on peut donc prendre $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ tel que :
$\forall h \in E, \|h\| < \alpha$ et $x + h \in A \Rightarrow \|f_{n_0}(x+h) - f_{n_0}(x)\| < \frac{\varepsilon}{3}$
Pour $h \in E$ tel que $\|h\| < \alpha$ et $x + h \in A$, on a :
$\|g(x+h) - g(x)\| \leq \|g(x+h) - f_{n_0}(x+h)\| + \|f_{n_0}(x+h) - f_{n_0}(x)\| + \|f_{n_0}(x) - g(x)\| \leq \varepsilon$
Et donc $g(x+h) \rightarrow_{h\to 0} g(x)$
Donc g est continue sur A

Théorème : Application aux séries de fonctions

Soit $(u_n) \in \mathcal{C}(A, F)^{\mathbb{N}}$, si $\sum u_n$ converge uniformément sur A, alors $x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$ est continue.

Preuve

On a que la suite des sommes partielles est une suite de sommes finies de fonctions continues, donc de fonctions continues. Et donc par le théorème précédent, on a que $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$ est continue.

Exemple III.1. *Notons* $f : \begin{cases} \mathbb{R}_+ & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n\sqrt{n+x}} \end{cases}$

Montrer que f est bien définie et continue.
Soit $x \in \mathbb{R}_+$, on a donc que $\frac{1}{n\sqrt{n+x}} > 0$ et que $\frac{1}{n\sqrt{n+x}} \sim \frac{1}{n^{3/2}}$. Or $\sum \frac{1}{n^{3/2}}$ est convergente
Donc $\sum \frac{1}{n\sqrt{n+x}}$ converge simplement vers f par critère d'équivalent positif.
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a que $x \mapsto \frac{1}{n\sqrt{n+x}}$ est continue.
Montrons la convergence uniforme.
Soient $n \in \mathbb{N}^*, x \in \mathbb{R}_+$.
Alors on a que $|\frac{1}{n\sqrt{n+x}} \leq \frac{1}{n^{3/2}}$
Or $\sum \frac{1}{n^{3/2}}$ converge donc $\left(\sum x \mapsto \frac{1}{n\sqrt{n+x}}\right)$ converge normalement sur $\mathbb{R}_+$ donc converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$
Donc f est continue par théorème de continuité uniforme

Exemple III.2. *Notons* $f : \begin{cases} \mathbb{R}_+ & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{x^2+n}}{n(n+2)} \end{cases}$

Montrer que f est bien définie et continue.
Soit $x \in \mathbb{R}_+$, on a donc que $\frac{\sqrt{x^2+n}}{n(n+2)} > 0$ et que $\frac{\sqrt{x^2+n}}{n(n+2)} \sim \frac{1}{n^{3/2}}$. Or $\sum \frac{1}{n^{3/2}}$ est convergente
Donc $\sum \frac{\sqrt{x^2+n}}{n(n+2)}$ converge simplement vers f par critère d'équivalent positif.
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a que $x \mapsto \frac{1}{n\sqrt{n+x}}$ est continue.
Montrons la convergence uniforme.
On a que $u_n(n) \sim \frac{1}{2n}$, et donc $\sup\limits_{\mathbb{R}_+} \|u_n\| > \frac{1}{2n}$, donc $\sum \frac{\sqrt{x^2+n}}{n(n+2)}$ ne converge pas normalement sur $\mathbb{R}_+$.
Soit $A \in \mathbb{R}_+$, soit $x \in [0, A]$
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, alors $|\frac{\sqrt{x^2+n}}{n(n+2)}| \leq |\frac{\sqrt{A^2+n}}{n^2} \sim \frac{1}{n^{3/2}}$
Par critère d'équivalent positif, on a que $\sum u_n$ converge normalement sur $[0, A]$ pour tout $A \in \mathbb{R}_+$

Donc pour tout $A \in \mathbb{R}_+$, $(\sum u_n)$ converge uniformément sur $[0, A]$

Par théorème de continuité uniforme : Pour $A \in \mathbb{R}_+$, $(\sum_{n=1}^{+\infty} u_n)$ est continue sur $[0, A]$.

Donc $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ est continue sur $\mathbb{R}_+$: en effet, la continuité est une notion locale, l'intersection infinie conserve la propriété.

Exemple III.3. *Notons* $f : \begin{cases} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1+n^2x} \end{cases}$

Montrer que f est bien définie et continue.

Soit $x \in \mathbb{R}_+$, on a donc que $\frac{1}{1+n^2x} > 0$ et que $\frac{1}{1+n^2x} \sim \frac{1}{n^2x}$. Or $\sum \frac{1}{n^2x}$ est convergente

Donc $\frac{1}{1+n^2x}$ converge simplement vers f par critère d'équivalent positif.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a que $x \mapsto \frac{1}{1+n^2x}$ est continue.

Montrons la convergence uniforme.

Soit $A \in \mathbb{R}_+$, soit $x \in [0, A]$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, alors $|\frac{1}{1+n^2x}| \leq |\frac{1}{1+n^2A} \sim \frac{1}{n^2A}$

Par critère d'équivalent positif, on a que $\sum u_n$ converge normalement sur $[0, A]$ pour tout $A \in \mathbb{R}_+$

Donc pour tout $A \in \mathbb{R}_+$, $(\sum u_n)$ converge uniformément sur $[0, A]$

Par théorème de continuité uniforme : Pour $A \in \mathbb{R}_+$, $(\sum_{n=1}^{+\infty} u_n)$ est continue sur $[0, A]$.

Donc $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ est continue sur $\mathbb{R}_+$.

Exemple III.4. *Notons* $\exp : \begin{cases} \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \to & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ A & \mapsto & \exp(A) \end{cases}$

Montrer que f est bien définie et continue.

Soit N une norme d'algèbre sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

Par récurrence on prouve que $N(A^n) \leq N(A)^n$

Et donc $\frac{1}{n!}N(A^n) \leq \frac{1}{n!}N(A)^n$ et donc $\sum \frac{1}{n!}A^n$ converge simplement dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

$\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{n!}A^n$ est continue

Montrons la convergence normale :

Si $R \in \mathbb{R}_+^*$, $A \in \mathcal{B}(0, R)$ alors $\frac{1}{n!}N(A^n) \leq \frac{R^n}{n!}$ et comme $\sum \frac{R^n}{n!}$ converge, alors on a que $\exp$ converge normalement (et donc uniformément) dans $\mathcal{B}(0, R)$.

Donc par théorème de continuité uniforme, $A \mapsto \exp(A)$ est continue sur $\mathcal{B}(0, R)$ pour tout $R \in \mathbb{R}_+$

Et donc $A \mapsto \exp(A)$ est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

Théorème : Extension de limite uniforme

Soit $(f_n) \in \mathcal{F}(A, F)^{\mathbb{N}}$, soit $a \in \bar{A}$.
Si $\forall n \in \mathbb{N}, f_n(x) \to_{x\to a} l_n$ et f_n converge uniformement vers g
Alors (l_n) est convergente et $g(x) \to_{x\to a} \lim_{n\to+\infty} l_n$
ie : g a une limite finie en a et $\lim_{x\to a} \lim_{n\to+\infty} l_n = \lim_{n\to+\infty} \lim_{x\to a} f_n$
Ce théorème s'étend lorsque $E = \mathbb{R}$ et que $a = \pm\infty$

Preuve

Sous les hypothèses du théorème : si on admet que (l_n) est convergente, on a une démonstration identique à celle de la continuité.
Pour $x \in A$, on a : $\|g(x) - \lim l_n\| \leq \|g(x) - f_n(x)\| + \|f_n(x) - l_n\| + \|l_n - \lim l_n\|$
Ces trois termes sont plus petit qu'un ε donné pour n suffisamment grand pour le premier et troisième terme et pour $\|x - a\| < \alpha$ pour le deuxième terme.

Théorème : échange de limites de séries

Avec $(u_n) \in \mathcal{F}(A, F)^{\mathbb{N}}$ et $a \in \bar{A}$

Si $\forall n \in \mathbb{N}, u_n(x) \to_{x \to a} v_n$ et que $(\sum u_n)$ converge uniformément, alors $\left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n\right)$ a une limite ene a et $\lim\limits_{x \to a} \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} v_n$

Exemple III.5. *Reprenons* $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n\sqrt{n+x}} \end{array} \right.$

On rappelle que f *converge normalement sur* $\mathbb{R}_+$ *puisque* $\forall n \in \mathbb{N}*, \forall x \in \mathbb{R}_+, |u_n(x)| \leq \frac{1}{n^{3/2}}$, *terme général d'une série convergente.*

Pour déterminer la limite de f *en l'infini, on note que* $\forall n \in \mathbb{N}, u_n(x) \to_{x \to +\infty} 0$

$\sum u_n$ *converge normalement donc uniformément sur* $\mathbb{R}_+$, *donc* $\lim\limits_{x \to +\infty} f_x$ *existe et* $f(x) \to \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \lim\limits_{x \to +\infty} u_n(x) = 0$

Exemple III.6. *Soit* $\zeta : x \mapsto \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$ *sur* $\mathbb{R}$. *Donner son domaine de définition, sa continuité et sa limite en* $+\infty$.

Soit $x \in \mathbb{R}$, *alors* $\sum \frac{1}{n^x}$ *converge si, et seulement si,* $x > 1$

Donc le domaine de définition de ζ *est* $D =]1, +\infty[$

Soit $a \in D, n \in \mathbb{N}^*, x \in [a, +\infty[$, *on a* $0 < \frac{1}{x} \leq \frac{1}{n^a}$

$\sum \frac{1}{n^a}$ *converge et donc* $\sum \left(x \mapsto \frac{1}{n^x}\right)$ *converge normalement sur* $[a, +\infty[$

De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, *on a que* $x \mapsto \frac{1}{n^x}$ *est uniforme*

Donc par théorème de continuité uniforme, ζ *est continue sur* $[a, +\infty[$ *pour tout* $a > 1$ *donc sur* $]1, +\infty[$

Pour la limite en l'infini : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{n^x} \to_{x \to \infty} \left\{ \begin{array}{ll} 1 & n = 1 \\ 0 & n > 1 \end{array} \right.$

$\sum x \mapsto \frac{1}{n^x}$ *converge normalement donc uniformément sur* $[2022, +\infty[$

Donc par théorème d'échange de limites de séries, $\zeta(x) \to_{x \to +\infty} 1$

Pour la "limite" en 1 *de* ζ. *Soit* $A > 0$

$\sum \frac{1}{n}$ *diverge comme* $\frac{1}{n} > 0$ *et* $\left(\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right) \to +\infty$

On peut donc trouver N *tel que* $\sum\limits_{k=1}^{N} \frac{1}{k} > A + 1$

$\sum\limits_{k=1}^{N} \frac{1}{k^x} \to_{x \to 1} \sum\limits_{k=1}^{N} \frac{1}{k}$

On peut donc fixer α *tel que* $1 < x < \alpha \Rightarrow \left| \sum\limits_{k=1}^{N} \frac{1}{k^x} - \sum\limits_{k=1}^{N} \frac{1}{k} \right| < 1$

Pour $x \in]1, \alpha[$, *alors* $\zeta(x) \geq \sum\limits_{k=1}^{N} \frac{1}{k^x} \geq \left| -|\sum\limits_{k=1}^{N} \frac{1}{k^x} - \sum\limits_{k=1}^{N} \frac{1}{k}| + \sum\limits_{k=1}^{N} \frac{1}{k} \right| \geq A$

Donc $\lim\limits_{x \to 1} \zeta(x) = +\infty$

IV Intégration et dérivation

On s'intéresse aux fonctions de $I \subset \mathbb{R}$ à valeurs dans F où I est un intervalle.

Théorème : Intégration uniforme ou théorème d'échange limite-intégrale uniforme

Soit a, b un segment, $(f_n) \in \mathcal{C}_0([a,b],F)^{\mathbb{N}}$
si (f_n) converge uniformément vers g sur $[a,b]$, alors $\int_a^b f_n \to \int_a^b g$
Ce qui correspond à $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_a^b f_n = \int_a^b \lim\limits_{n\to+\infty} f_n$

Preuve

$\left\| \int\limits_{[a,b]} f_n - \int\limits_{[a,b]} g \right\| \leq \int\limits_{[a,b]} \|f_n - g\| \leq |b-a| \|f_n - g\|_\infty$
Comme f_n converge uniformément vers g, alors $\|f_n - g\|_\infty \to 0$
Donc $\int\limits_{[a,b]} f_n \to \int\limits_{[a,b]} g$

Exemple IV.1. $\int_0^1 n^2 t^n (1-t)dt = n^2(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+1}) = \frac{n^2}{(n+1)(n+2)}$

Et $\dfrac{n^2}{(n+1)(n+2)} \to_{n\to+\infty} 1$

La fonction $f_n : \begin{cases} [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & n^2 t^n (1-t) \end{cases}$ *converge simplement vers 0.*

Donc si elle converge uniformément, ça sera vers 0, cependant son intégrale ne tend pas vers 0*, donc il n'y a pas de convergence uniforme.*

Remarque IV.1. *Pour une série de fonctions, le théorème devient : si* $(u_n) \in \mathcal{C}_0([a,b],F)^{\mathbb{N}}$ *et si* $\sum u_n$ *converge uniformément sur* $[a,b]$ *alors* $\int_a^b \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n(t)dt = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \int_a^b u_n(t)dt$

Théorème :

Soit (f_n) une suite de fonctions continues d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans F convergeant uniformément vers g sur tout segment de I
Soit $a \in I$, on a alors : $F_n : \begin{matrix} I & \to & F \\ x & \mapsto & \int_a^b f_n(t)dt \end{matrix}$ et $G : F_n : \begin{matrix} I & \to & F \\ x & \mapsto & \int_a^b g(t)dt \end{matrix}$
Alors F_n converge uniformément vers G sur tout segment de I.

Preuve

La définition de G est correcte car f_n converge uniformément sur vers g sur tout segment de I donc g est continue
À x fixé, comme f_n converge uniformément vers g sur le segment $[a,x]$, d'après le théorème précédent $\int\limits_{[a,x]} f_n \to \int\limits_{[a,x]} g$ donc F_n converge simplement vers G sur I
Soit S un segment inclu dans I, soit b un point de S, alors $\forall x \in S, \|F_n(x) - G(x)\| = \|\int_b^x f_n(t) - g(t)dt\|$
$\leq \int_b^x \|f_n(t) - g(t)\|dt \leq |x-b| \sup\limits_{t\in[b,x]} \|f_(t) - g(t)\| \leq diam(S) \sup\limits_{S} \|f_n - g\|$
Qui tend vers 0 quand n tend vers l'infini
Ce qui conclut

Théorème : Dérivation uniforme des suites de fonctions

Avec I un intervalle, si :
- $(f_n) \in \mathcal{C}^1(I, F)^{\mathbb{N}}$
- (f_n) converge simplement vers g_0
- (f'_n) converge uniformément vers g_1 sur tout segment de I

alors g_0 est $\mathcal{C}^1$ tel que $g'_0 = g_1$ et (f_n) converge uniformément sur tout segment de I.
Ce qui correspond à $g'_0 = g_1 \Rightarrow (\lim f_n) = \lim(f'_n)$

Preuve

Pour $n \in \mathbb{N}$, (f_n) est $\mathcal{C}^1$, donc (f'_n) est continue.
Donc par théorème de continuité uniforme, g_1 est continue.
D'autre part, si on fixe $a \in I, \forall x \in I, f_n(x) = f_n(a) + \int_a^x f'_n(t)dt$
Donc par théorème d'intégration uniforme, $g_0 = \lim\limits_{n \to +\infty} f_n = g_0(a) + \int_a^x g_1(t)dt$
Et donc g_0 est $\mathcal{C}^1$ et $g'_0 = g_1$
La suite (f_n) converge uniformément sur tout segment vers g_0.

Théorème : Théorème de dérivation des suites à l'ordre k

Avec I un intervalle, si :
- $(f_n) \in \mathcal{C}^k(I, F)^{\mathbb{N}}$
- $\forall j \in [\![0, k-1]\!], (f_n^{(j)})$ converge simplement vers g_j
- $(f_n^{(k)})$ converge uniformément vers g_k sur tout segment de I

alors g_0 est $\mathcal{C}^l$ tel que $\forall j \in [\![0, k]\!], g_0^{(j)} = g_j$ et $(f_n^{(j)})$ converge uniformément sur tout segment de I.

Théorème : Théorème de dérivation terme à terme à l'ordre k

Avec I un intervalle, si :
- $(u_n) \in \mathcal{C}^1(I, F)^{\mathbb{N}}$
- $(\sum u_n)$ converge simplement
- $(\sum u_n)$ converge uniformément vers sur tout segment de I

alors $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$ est $\mathcal{C}^k$ tel que $\forall j \in [\![0, k]\!], \left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n\right)^{(j)} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n^{(j)}$ et la somme converge uniformément sur tout segment de I.

Exemple IV.2. $f : \left\{ \begin{array}{lcl} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sum\limits_{n=0}^{+\infty} e^{-n^2 x} \end{array} \right.$ *en notant* $u_n = e^{n^2 x}$

Pour $n \in \mathbb{N}$, u_n *est* $\mathcal{C}^\infty$, $u'_n : x \mapsto -n^2 e^{n^2 x}$ *et* $u''_n : x \mapsto n^4 e^{n^2 x}$
Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$, *alors* $|u_n(x)| = o(\frac{1}{n^2}), |u'_n(x)| = o(\frac{1}{n^2})$
$\sum u_n$ *et* $\sum u'_n$ *convergent simplement sur* $\mathbb{R}_+^*$
Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$, *soit* $n \in \mathbb{N}$, *soit* $x \in [a, +\infty[$
$|n^4 e^{-n^2 x}| \leq n^4 e^{-an^2}$
Or $\sum n^4 e^{-an^2}$ *est convergente*
Donc la série $\sum x \mapsto n^4 e^{-n^2 x}$ *converge normalement donc uniformément sur* $[a, +\infty[$ *pour tout* a
Donc par théorème de dérivation terme à terme d'ordre 2, f *est* $\mathcal{C}^2$ *et* $f' : x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} -n^2 e^{-n^2 x}$ *et* $f'' : x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} n^4 e^{-n^2 x}$

V Résultats de densité

Théorème : Stone-Weierstrass (admis)

Toute fonction continue sur un segment à valeurs dans $\mathbb{K}$ est limite uniforme d'une suite de fonctions polynomiales.
Ce qui correspond à : l'ensemble des fonctions polynomiales est dense dans $(\mathcal{C}([a,b],\mathbb{K}),\|.\|_\infty)$

Exemple V.1. *Soit $E=\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ un espace préhilbertien réel pour le produit scalaire $\langle f,g\rangle=\int\limits_{[a,b]} fg$*

On a que $\mathbb{R}[X]\subset E$, déterminer $\mathbb{R}[X]^\perp$
Soit $f\in\mathbb{R}[X]^\perp$. Alors f vérifie : $\forall P\in\mathbb{R}[X],\langle f,P\rangle=0$
Par théorème de Stone-Weierstrass, on peut prendre $(P_n)\in\mathbb{R}[X]^\mathbb{N}$ qui converge uniformémemnt vers f
Donc P_nf converge uniformément vers f^2 (comme P_n borné sur $[a,b]$, avec $x\in[a,b],\|P_n(x)g(x)-f(x)g(x)\|_\infty=\|g(x)\|_\infty\|P_n(x)-f(x)\|_\infty\leq\|g(x)\|\sup\|f-P_n\|$)
Donc $\left(\int_a^b P_n(t)f(t)dt\right)\to\int_a^b f^2(t)dt$
Or $\forall n\in\mathbb{N},\langle P_n,f\rangle=0$
Donc $\langle f,f\rangle=0$ donc $f=0$
Donc $\mathbb{R}[X]^\perp=\{0\}$

Remarque V.1. *Dans le théorème de Stone-Weierstrass, l'hypothèse du segment est fondametale.*

Exemple V.2. *Il n'existe aucune suite de polynôme réels qui converge uniformément vers $\exp$ sur $\mathbb{R}$.*
Supposons par l'absurde que $(P_n)\in\mathbb{R}[X]^\mathbb{N}$ converge uniformément vers $\exp$ sur $\mathbb{R}_+$
On a que $\frac{1}{\exp}$ est bornée sur $\mathbb{R}_+$, donc $t\mapsto P_n(t)e^{-t}$ converge uniformément vers la fonction constante de valeur 1.
Poru $n\in\mathbb{N}$ fixé, $P_n(t)e^{-t}\to_{t\to+\infty}0$ par croissance comparée. Comme $t\mapsto P_n(t)e^{-t}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$, on peut appliquer le théorème d'échange des limites
Donc $\lim\limits_{t\to+\infty}\lim\limits_{n\to+\infty}P_n(t)e^{-t}=\lim\limits_{n\to+\infty}\lim\limits_{t\to+\infty}P_n(t)e^{-t}$
Et donc $1=0$, ce qui est absurde. D'où le résultat.

Théorème : Approximmation uniforme par des fonctions en escalier

Toute fonction continue sur un segment à valeurs dans F est limite uniforme d'une suite de fonctions en escaliers
Ce théorème est encore valable pour les fonctions continues par morceaux sur un segment.

Preuve

Soit $f\in\mathcal{C}([a,b],F)$. Par théorème de Heine, f est uniformément continue.
Soit $n\in\mathbb{N}^*$, par uniforme continuité de f on peut trouver $\alpha\in\mathbb{R}_+^*$ tel que $\forall x,y\in[a,b],|x-y|<\alpha\Rightarrow\|f(x)-f(y)\|<\frac{1}{n}$
On fixe $p\in\mathbb{N}^*$ tel que $\frac{b-a}{p}<\alpha$ (qui existe comme $\mathbb{R}$ est archimédien)
On considère la subdivision $(x_i)_{0\leq i\leq p}=\left(a+i\frac{b-a}{p}\right)_{0\leq i\leq p}$
On définit la fonction en excalier φ_n par $\forall t\in[a,b],(\exists i\in[\![0,p]\!]$ tel que $t=x_i)\Rightarrow\varphi(t)=f(t)$ et $\forall i\in[\![0,n-1]\!],\forall t\in]x_i,x_{i+1}[,\varphi(t)=f\left(\frac{x_i+x_{i+1}}{2}\right))$
Alors $\forall t\in[a,b],\|\varphi_n(t)-f(t)\|\leq\frac{1}{n}$ car $\forall t\in[a,b],\exists i\in[\![0,p-1]\!],t\in]x_i,x_{i+1}[,|t-\frac{x_i+i_{i+1}}{2}|\leq|x_{i+1}-x_i|\leq\frac{b-a}{p}<\alpha$
Donc $\|f(t)-f\left(\frac{x_i+x_{i+1}}{2}\right)\|<\frac{1}{n}$
Donc $\sup\limits_{t\in[a,b]}\|\varphi_n(t)-f(t)\|\leq\frac{1}{n}$

Remarque V.2. *Ce résultat s'étend sans difficulté aux fonctions continues par morceaux. Il suffit de prendre une subdivision plus fine qu'une subdivision adaptée sur chaque intervalle continu.*

Chapitre VI

Séries entières

I Généralités

Définition :

Soit $(a_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. On appelle série entière associée à (a_n) (de variable complexe) la série de fonctions $(\sum(z \mapsto a_n z^n))$ qu'on notera en général $(\sum a_n z^n)$

$z \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ est la somme de cette série entière.

On va étudier en général le domaine de définition, les paramètres de continuité, de dérivabilité de la restriction à $\mathbb{R}$ se ces fonctions.

Exemple I.1. $\exp z = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$ *est définie sur* $\mathbb{C}$

$\sum\limits_{n=0}^{+\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$ *est définie pour* $z \in \mathbb{C}, |z| < 1$

Proposition : Lemme d'Abel

Soit $(\sum a_n z^n)$ une série entière. Soit $z_0 \in \mathbb{C}^*$. Si $(a_n z_0^n)$ est bornée, alors la série $\sum a_n z^n$ converge absolument pour $z \in \mathbb{C}, |z| < |z_0|$

Preuve

Dans les conditons de l'énoncé :
soit $n \in \mathbb{N}$, soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < |z_0|$
Alors $|a_n z^n| = |a_n z_0^n \frac{z^n}{z_0^n}| \leq |a_n z_0^n| \left|\frac{z}{z_0}^n\right| \leq \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} |a_n z_0^n| \left|\frac{z}{z_0}^n\right|$
$|\frac{z}{z_0}| < 1$ donc $\sum(\frac{z}{z_0})^n$ est une série géométrique convergente
Donc par critère de majoration positif, $\sum a_n z^n$ converge absolument.

Définition : Rayon de convergence

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière. On appelle rayon de cette série $R = \sup\{|z| | z \in \mathbb{C}, (a_n z^n) \text{ est bornée}\}$
Par convention, $R = +\infty$ si cet ensemble n'est pas majoré.

Proposition :

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon $R \in \bar{\mathbb{R}}$

- $\forall z \in \mathcal{D}(0, R), \sum a_n z^n$ converge absolument
- $\forall z \in \mathbb{C}, |z| > R, a_n z^n$ est non-bornée.

Preuve

Soit $z \in \mathbb{C}, |z| < R$

Par caractérisation de la borne supérieure, on peut trouver $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que $(a_n z_0^z)$ est bornée et $|z| < |z_0| \leq R$

Par lemme d'Abel, $\sum a_n z^n$ converge.

Soit $z \in \mathbb{C}, |z| > R$, alors $(a_n z^n)$ n'est pas bornée par définition de la borne supérieure, R étant un majorant de l'ensemble des z tels que $(a_n z^n)$ bornée.

Exemple I.2. *Pour $\sum \frac{z^n}{n!}$, on a $R = +\infty$*

Pour $\sum z^n$ on a $R = 1$ et son domaine de définition n'inclut pas le bord, donc $\mathcal{D}(0, 1)$

Pour $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{z^n}{n^2}$, on a $R = 1$ aussi, parce que l'ordre de grandeur de n^2 est négligeable face à une exponentielle. Le domaine de convergence inclut le bord du disque, et est donc $\mathcal{D}_f(0, 1)$

$\sum\limits_{n\geq 1} \frac{z^n}{n}$ a un rayon $R = 1$. La série converge pour $z = -1$ et diverge pour $z = 1$, les deux appartenant au bord du disque.

II Calculs de rayon de convergence

Proposition :

Le rayon de $\sum a_n z^n$ est le rayon de $\sum |a_n z^n$

Remarque II.1. *Les déterminations de rayon d'une série entière ne font intervenir que des critères de séries numériques positives.*

Proposition : Relations de comparaison

Soient $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ des séries entières de rayons R_a et R_b :

- Si $a_n = o(b_n)$ alors $R_a \leq R_b$
- Si $a_n = \mathcal{O}(b_n)$ alors $R_a \leq R_b$
- Si $a_n \sim b_n$ alors $R_a = R_b$

Preuve

Soit $z \in \mathcal{D}(0, R_b)$, on a donc que $\sum |b_n z^n|$ converge, or $|a_n z^n| = \mathcal{O}(|b_n z^n|)$

Donc par critère de domination positive, $\sum |a_n z^n|$ converge

Donc $z \in \mathcal{D}_f(0, R_a)$

Donc $\mathcal{D}(O, R_b) \subset \mathcal{D}_f(0, R_a)$

Donc $R_a \geq R_b$

On a donc prouvé la propriété pour les $\mathcal{O}$, et elle en découle pour les o. Comme un équivalent est aussi un $\mathcal{O}$ symétrique, on a l'égalité.

Théorème : Critère de D'Alembert

Si (a_n) ne s'annule pas à partir d'un certain rang :
si $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \to l$ avec $l \in \bar{\mathbb{R}}$, alors $R_a = \frac{1}{l}$
On prend la convention de $\frac{1}{+\infty} = 0$ et que $\frac{1}{0} = +\infty$

Preuve

On suppose que $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ tend vers $l \in \bar{\mathbb{R}}$
Soit $z \in \mathbb{C}^*$, alors $\left|\frac{a_{n+1}z^{n+1}}{a_n z^n}\right| \to lz$
Par critère de D'Alembert appliqué aux séries numériques, si $|lz| < 1$ alors $\sum a_n z^n$ ocnverge et si $|lz| > 1$ alors $\sum a_n z^n$ diverge.
Donc $R_a = \frac{1}{l}$.

Remarque II.2. *Il faut faire attention aux séries lacunaires pour utiliser d'Alembert.*

Exemple II.1. *Déterminer le rayon de* $\sum \frac{(-1)^n(e^n+n)}{3^n+n^2} z^{2n}$

La suite associée à la série entière est équivalente à $\left(\frac{e}{3}\right)^n$*, qu'on note* $u_n(z)$
Soit $z \in \mathbb{C}^*$ *:*
$\frac{\left|(\frac{e}{3})^{n+1} Z^{2n+2}\right|}{\left|(\frac{e}{3})^n z^{2n}\right|} = \left|\frac{e}{3}z^2\right| \to \frac{e}{3}z^2$
Donc $R = \sqrt{\frac{3}{e}}$
Donc si $|z| < \sqrt{\frac{3}{e}}$, $\sum |u_n(z)|$ *converge et diverge sinon.*

Exemple II.2. *Pour la série entière associée à la suite* $a_n = \begin{cases} a_{n^2} & = & n! \\ a_p & = & 0 \text{ si } p \text{ n'est pas un carré} \end{cases}$

Exemple II.3. *Pour la série entière* $\sum \sin(n) z^n$

III Opérations sur les séries entières

Proposition : Combinaisons linéaires

Si $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières de rayons respectifs R_a et R_b, alors :
$\sum(a_n + b_n)z^n$ converge de rayon R avec $R = \min(R_a, R_b)$
Si $R_a \neq R_b$, on peut affirmer que $R = \min(R_a, R_b)$
De plus, pour $z \in \mathcal{D}(0, R)$, on a $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(a_n + b_n)z^n = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n z^n + \sum\limits_{n=0}^{+\infty} b_n z^n$

Preuve

Avec les notations de l'énoncé :
Supposons que $R_a = R_b$:
Alors
Supposons que $R_a \neq R_b$, supposons sans perte de généralité que $R_a < R_b$:
Si $z \in \mathcal{D}(0, R_a)$, alors $\sum(a_n + b_n)z^n$ est bien définie, sinon non.

Théorème : Produit de Cauchy

Pour $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières de rayons respectifs R_a et R_b
On pose pour $n \in \mathbb{N}$, $c_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$
La série entière $\sum c_n z^n$ est de rayon de convergence $R \geq \min(R_a, R_b)$ et $\forall z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < \min(R_a, R_b)$, $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} c_n z^n = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \sum\limits_{n=0}^{+\infty} b_n z^n$

Preuve

Par application du produit de Cauchy à deux séries absolument convergentes sur un domaine.

IV Développements en séries entières

IV.1 Généralités

Définition : Développement en série entière

Soit I un intervalle tel que $0 \in \mathring{I}$. Soit $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{C})$.
On dit que f est développable en série entière au voisinage de 0 (ou en 0) si :
$\exists \alpha \in \mathbb{R}_+^*, \exists (a_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}, \forall x \in]-\alpha, \alpha[, f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$

Proposition :

- Si f est développable en série entière (DSE) en 0, alors f est $\mathcal{C}^\infty$ sur un voisinage de 0.
- Si f est développable en série entière, son développement est unique, et donc par unicité du DL on a :
  $\exists \alpha \in \mathbb{R}_+^*, \forall x \in]-\alpha, \alpha[, f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$
- Si f est $\mathcal{C}^\infty$ sur I : on peut écrire que $\forall x \in I, \forall n \in \mathbb{N}, f(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + R_n(x)$
- f est développable en série entière en 0 s'il existe $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ tel que R_n converge simplement vers 0 sur $]-\alpha, \alpha[$

IV.2 Rappels sur Taylor

Théorème : Taylor-Reste-Intégral

Si f est $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $[a, b]$, alors :

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + R_n(b)$$

Où $R_n(b) = \int_a^b \frac{(t-a)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt$

Théorème : Taylor-Lagrange

En posant $t = a+(b-a)u$, on transforme l'expression du reste en $\int_0^1 \frac{(b-a)^{n+1}(1-u)^n}{n!} f^{(n+1)}(a+(b-a)u)du$
On a donc : $R_n(b) = \frac{(b-a)^{n+1}}{n!} \int_0^1 (1-u)^n f^{(n+1)}(a+(b-a)u)du$
De là on déduit la majoration de Lagrange, en posant $M_{n+1} = \sup\limits_{[a,b]} |f^{(n+1)}|$
$|R_n(b)| \leq \frac{|b-a|^{n+1}}{n!} \int_0^1 |1-u|^n |f^{(n+1)}(a+(b-a)u)|du \leq \frac{|b-a|^{n+1}}{n!} M_{n+1} \int_0^1 (1-u)^n du \leq \frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!} M_{n+1}$

IV.3 Développements en série entière découlant de l'exponentielle sur $\mathbb{R}$

$\forall x \in \mathbb{R}, \exp(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$

Preuve

Pour $x \in \mathbb{R}$, on a que $\exp(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + R_n(x)$ par Taylor-Reste-Intégral.
Alors $|R_n(x)| \leq \frac{|x|^{n+1}}{n!} e^{|x|}$
Or $\left(\frac{|x|^{n+1}}{n!} e^{|x|}\right) \to 0$
Et donc $R_n(x) \to 0$

Et donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a les développemetns suivants :

- $\cosh(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$
- $\sinh(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$
- $\cos(x) = \Re(e^{ix}) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$
- $\sin(x) = \Im(e^{ix}) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$

IV.4 Développements en série entière découlant de la série géométrique

On a, $\forall x \in]-1,1[$:

- $\frac{1}{1-x} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} x^n$
- $\frac{1}{1+x} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n$
- $-\ln(1-x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}$ par primitivation d'un DL. Cette égalité peut être prolongée en -1 par théorème de convergence radiale.
- $\ln(1+x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$. Cette égalité peut être prolongée en 1 par théorème de convergence radiale.

Cette année est aussi au programme le développement d'Arctan :

$\forall x \in]-1,1[, \arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{2n}$

Et donc : $\arctan(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$

IV.5 Développement de $(1+x)^\alpha$

En notant $f_\alpha : x \mapsto (1+x)^\alpha$, on a :

$$f_\alpha(x) = 1 + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!} x^k$$

"Je vais pas me taper le citron à sortir de $]-1,1[$

Preuve

f_α est $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1,1[$. De plus, $\forall x \in]-1,1[, f'_\alpha(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1}$
Donc f_α est solution de l'équation différentielle $(1+x)y' = \alpha y$: (E)
C'est une équation différentielle linéaire d'ordre 1 résoluble, il y a donc unicité de la solution de cette équation vérifiant une condition initiale.
Et donc f_α est l'unique solution de cette équation vérifiant $f_\alpha(0) = 1$
Déterminons la suite de al décomposition en série entière de f_α par analyse-synthèse.
Analyse : Soit $(a_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, et on suppose que $\sum a_n x^n$ est une série entière de rayon $R > 0$. On pose pour $x \in]-R,R[$, on pose $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$
On a alors que f est $\mathcal{C}^\infty$ sur $)-R,R[$ et que $\forall x \in]-R,R[, f'(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$
Soit $x \in]-R,R[$:
$(1-x)f'(x) - \alpha f(x) = (1+x)\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(n+1)a_{n+1}x^n - \alpha \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$
$= \sum\limits_{n=0}^{+\infty}(n+1)a_{n+1}x^{n+1} + \sum\limits_{n=0}^{+\infty}(n+1)a_{n+1}x^n - \alpha \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$
$= \sum\limits_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n + \sum\limits_{n=0}^{+\infty}(n+1)a_{n+1}x^n - \alpha \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ (on peut mettre 0 comme indice de départ du premier terme puisque $na_n = 0$ si $n = 0$)
$= \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \left[(n+1)a_{n+1} + (n-\alpha)a_n\right] x^n$
Et donc f est solution de (E) si, et suelement si :
$\forall x \in]-R,R[, \sum\limits_{n=0}^{+\infty}[(n+1)a_{n+1} + (n-\alpha)a_n]x^n = 0$
Et par unicité du développement, comme 0 a comme développement la suite nulle, on déduit que f est solution de (E) si, et seulement si :
$\forall n \in \mathbb{N}, (n+1)a_{n+1} + (n-\alpha)a_n = 0$
Synthèse : considérons (a_n) définie par $\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_{n+1} = \frac{\alpha-n}{n+1} a_n \end{cases}$
Si $\alpha \in \mathbb{N}$: alors $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq \alpha \Rightarrow a_n = 0$ et donc $\sum a_n x^n$ est de rayon infini
Si $\alpha \notin \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, a_n \neq 0$ et $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{\alpha-n}{n+1}\right| \to 1$
Et dans tous les cas, on a bien que pour $x \in]-1,1[, f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$
Les calculs précédents sotn valides sur $]-1,1[$, f est solution de (E) sur $]-1,1[$ et $f(0) = 1$
Donc par unicité de la solution aux problème de Cauchy :
$\forall x \in]-1,1[, f_\alpha(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$
Et par récurrence, $\begin{cases} a_n &= \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} \\ a_0 &= 1 \end{cases}$

Il y a certains cas particuliers à savoir refaire facilement, même si pas à savoir par coeur.
Pour $(1-x)^{\frac{1}{2}}$, on a :
$(1-x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}-1\right)\dots\left(-\frac{1}{2}-n+1\right)}{n!}(-x)^n$
$= 1 + \sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right)\dots\left(\frac{1}{2}+n-1\right)}{n!}(-1)^n x^n$

$= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1\times 3\times 5\times \ldots\times (2n+1)}{2^n (n!)} x^n$
$= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} x^n = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4^n}\binom{2n}{n} x^n$
$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{4^n}\binom{2n}{n} x^n$
Et on en déduit, pour $x \in]-1, 1[$:
— $\arcsin'(x) = \frac{1}{1-x^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4^n}\binom{2n}{n} x^{2n}$
— $\arcsin(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{4^n}\binom{2n}{n} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$
— $\arccos(x) = \frac{\pi}{2} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{4^n}\binom{2n}{n} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$