Table des matières

Chapitre I

Mécanique

I M1 : Référentiels non-galiléens

I.1 Application 1.2

1. Le référentiel de Copernic $\mathcal{R}_C$ est défini par rapport au centre de masse du système solaire, $\mathcal{R}_T$ par rapport au centre de masse de la Terre.
2. Non.
3. o
4. Copernic.

I.2 1.3

$$\vec{A} = a(t)\vec{u}_{x'} + b(t)\vec{u}_{y'} + c(t)\vec{u}_{z'}$$
$$\left.\frac{d\vec{A}}{dt}\right)_{\mathcal{R}'} = \mathring{a}(t)u'_x + \mathring{b}(t)u_{y'} + \mathring{c}(t)u_{z'}$$
$$\left.\frac{d\vec{A}}{dt}\right)_{\mathcal{R}} = \mathring{a}(t)u_x + \mathring{b}(t)u_y + \mathring{c}(t)u_z + \mathring{a}\left.\frac{du'_x}{dt}\right)_{\mathcal{R}} + \mathring{b}\left.\frac{du'_y}{dt}\right)_{\mathcal{R}} + \mathring{c}\left.\frac{du'_z}{dt}\right)_{\mathcal{R}}$$ (cette dernière partie vaut 0 si $\mathcal{R}'$ en translation par rapport à $\mathcal{R}$)
$\vec{u}_{x'} = cos\theta\vec{u}_x + sin\theta\vec{u}_y$ et $\vec{u}_{y'} = -sin\theta u_x + cos\theta u_y$
$$\Rightarrow \left.\frac{d\vec{u}_{x'}}{dt}\right)_{\mathcal{R}} = -\mathring{\theta}sin\theta\vec{u}_x + \mathring{\theta}cos\theta\vec{u}_y = \mathring{\theta}\vec{u}_{y'} = \mathring{\theta}\vec{u}_z \wedge \vec{u}_{x'} = \vec{\omega}(\mathcal{R}'/\mathcal{R}) \wedge \vec{u}_{x'}$$
$$-\mathring{\theta}\vec{u}_{x'} = -\mathring{\theta}(-\vec{u}_z \wedge \vec{u}_{y'}) = \vec{\omega} \wedge \vec{u}_{y'}$$
Si R' en rotation par rapport à R : $a\vec{\omega}\wedge\vec{u}_{x'} + b\vec{\omega}\wedge\vec{u}_{y'} + \vec{0} = \vec{\omega}\wedge[a\vec{u}_{x'} + b\vec{u}_{y'} + c\vec{u}_{z'}]$, cette dernière parenthèse correspondant à $\vec{A}$

I.3 1.4

$$\vec{v}_{\mathcal{R}'}(M) = \left.\frac{dO\vec{M}}{dt}\right)_{\mathcal{R}'}$$
$$\vec{v}_{\mathcal{R}}(M) = \left.\frac{dO\vec{M}}{dt}\right)_{\mathcal{R}} = \left.\frac{dO\vec{O}'}{dt}\right)_{\mathcal{R}} + \left.\frac{dO'\vec{M}}{dt}\right)_{\mathcal{R}} = \vec{v}_e + \vec{v}_{\mathcal{R}'}(M) = \vec{v}_r(O') + \vec{v}_r + \vec{0}$$
(e signifie d'entraînement, r signifie relative)
$$\vec{a}_{\mathcal{R}'}(M) = \left.\frac{d^2O'\vec{M}}{dt}\right)_{\mathcal{R}'} = \left.\frac{d}{dt}[\vec{v}_{\mathcal{R}'}(M)]\right)_{\mathcal{R}}$$

$\vec{a}_{\mathcal{R}}(M) = \frac{d}{dt}\left[\vec{v}_{\mathcal{R}}(O') + \vec{v}_{\mathcal{R}'}(M)\right])_{\mathbb{R}} = \vec{a}_{\mathcal{R}}(O') + \frac{d}{dt}(\vec{v}_{\mathbb{R}'}(M)) + \vec{0} = \vec{a}_e + \vec{a}_r$
$\vec{a}_a$ est l'accélération absolue

I.4 Application 4

On définit $\mathcal{R}_T$ comme le référentiel terrestre et le référentiel lié $\mathcal{R}_A$ comme celui de l'ascenseur

1. Son accélération est $\vec{g}$ dans le référentiel galiléen $\mathcal{R}$: en appliquant le PFD au livre en chute libre on écrit que $m\vec{a}_{\mathcal{R}_T} = mg$ d'où $a_{mathcalR_T} = g$.
2. $\vec{a}_{acc} = \vec{a}_e = \vec{a}_{\mathcal{R}_T}(O')$ d'où $\vec{a}_{\mathcal{R}_a}(M) = \vec{a}_r = \vec{a}_a - \vec{a}_e = \vec{a}_{\mathcal{R}_T}(M) - \vec{a}_{\mathcal{R}_T}(O') = -g\vec{u}_z - a_{acc}\vec{u}_z = -(g + a_{acc})\vec{u}_z$ Pendant la phase d'accélération et $-gu$ à vitesse constante.
3. $\vec{v}_{\mathcal{R}_T}(M) = \vec{v}_{\mathcal{R}_a}(M) + \vec{v}_{\mathcal{R}_T}(O')$ et $\mathring{z}u_z = \mathring{z}'\vec{u}_z + v_{mon}\vec{u}_z$ avec $\mathring{z}' = \mathring{z} - v_{mon}$ donc $|\mathring{z}'| > |\mathring{z}|$
4. Si $\vec{a}_{\mathcal{R}_T}(O') = \vec{a}_e = g$ alors $\vec{a}_{\mathcal{R}_a}(M) = \vec{a}_{\mathcal{R}_T}(M) - \vec{a}_{\mathcal{R}_T}(O') = \vec{g} - \vec{g} = \vec{0}$ et le livre semble flotter.

I.5 1.5.1

$\vec{v}_{\mathcal{R}'}(M) = \left.\frac{d\vec{O'M}}{dt}\right)_{\mathcal{R}'}$
$\vec{v}_{\mathcal{R}}(M) = \left.\frac{d\vec{OM}}{dt}\right)_R = \left.\frac{d\vec{O'M}}{dt}\right)_{\mathcal{R}'} + \vec{\omega}(R'/R) \wedge \vec{OM} = \vec{v}_{R'}(M) + \vec{v}_e$ où $\vec{\omega}\vec{u}_z \wedge r\vec{u}_r = r\omega\vec{u}_\theta = v_e$

I.6 1.5.2

$\vec{a}_{\mathcal{R}'} = \left.\frac{d^2\vec{O'M}}{dt}\right)_{\mathcal{R}'} = \left.\frac{d\vec{v}_{\mathcal{R}'}(M)}{dt}\right)_{\mathcal{R}'}$
$\vec{a}_{\mathcal{R}}(M) = \left.\frac{d}{dt}(v_{\mathcal{R}}(M))\right)_{\mathcal{R}} = \left.\frac{d}{dt}\left[\_\vec{R}'(M) + \vec{\omega} \wedge \vec{OM}\right]\right)_{\mathcal{R}} + \vec{\omega} \wedge \left[\vec{v}_{\mathcal{R}'}(M) + \vec{\omega} \wedge \vec{OM}\right] = \left.\frac{d\vec{v}_{R'}(M)}{dt}\right)_{R'} + \vec{\omega} \wedge \left.\frac{d\vec{OM}}{dt}\right)_{\mathcal{R}'} + \vec{\omega} \wedge \vec{v}_{\mathcal{R}'}(M) + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{OM}) = \left.\frac{d\vec{v}_{\mathcal{R}'}(M)}{dt}\right)_{\mathcal{R}'} + \vec{\omega} \wedge \vec{v}_{\mathcal{R}'}(M) + \vec{\omega} \wedge \vec{v}_{\mathcal{R}'}(M) + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{OM})$
$\Rightarrow \vec{a}_R(M) = \vec{a}_{R'}(M) + 2\vec{\omega} \wedge \vec{v}_{R'}(M) + \vec{\omega} \wedge (\omega \wedge \vec{OM}) = \vec{a}_r + \vec{a}_c + \vec{\omega} \wedge (r\omega\vec{u}_\theta) = \vec{a}_r + \vec{a}_c - r\omega^2\vec{u}_r = \vec{a}_r + \vec{a}_c + \vec{a}_e$
où $\vec{a}_c$ est l'accélération de Coriolis. On écrit souvent $\vec{a}_e = -\omega^2\vec{HM}$ avec $\vec{HM}$ le projeté orthogonal de M sur l'axe de rotation.

I.7 Application 5

1. $\vec{v}_{\mathcal{R}_T}(M) = \vec{v}_{R'}(M) + \vec{v}_e = \vec{v}_r + \vec{v}_e = \vec{v}_0\vec{u}_{x'} + \omega\vec{u}_z \wedge \vec{OM} = v_0\vec{u}_{x'} + \omega v_0 t\vec{u}_{y'}$

I.8 2.1

$\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a}_{\mathcal{R}_G}(M) = m\vec{a}_{\mathcal{R}'}(M) + m\vec{a}_e + m\vec{a}_c$
$m\vec{a}_{\mathcal{R}'} = \sum \vec{F}_{ext} - m\vec{a}_e - m\vec{a}_c = \sum \vec{F}_{ext} + \vec{f}_{ie} + \vec{f}_{ic}$

I.9 Application 6

1. Non, il est en rotation, pas en translation rectiligne uniforme autour de $\mathcal{R}_T$ supposé galiléen.
2. $\vec{v}_{\mathcal{R}}(M) = \dot{x}\vec{u}_x, \vec{a}_{\mathcal{R}}(M) = \ddot{x}\vec{u}_x$ 1 seul degré de liberté de mouvement, translation selon (Ox)

3. BdF : Poids $\vec{P}$ et réaction du support $\vec{R}_N$ qui ne travaillent pas ; force d'inertie d'entraînement $\vec{f}_{ie} = +m\omega^2 \vec{OM} = m\omega^2 x\vec{u}_x$ et la force d'inertie de Coriolis $\vec{f}_{ic} = -2m\vec{\omega} \wedge \vec{v}_r = -2m\omega\dot{x}\vec{u}_r$ qui ne travaille pas.
4. $m\vec{a}_{\mathcal{R}} = \vec{P} + \vec{R}_N + \vec{f}_{ie} + \vec{f}_{ic}$ et en projetant sur $\vec{u}_x$: $m\ddot{x} = m\omega^2 x \Rightarrow \ddot{x} - \omega^2 x = 0$. De solutions $x(t) = Ae^{\omega t} + Be^{-\omega t}$; en réintroduisant les CI : $x(0) = d = A + B, \dot{x}(0) = 0 = \omega(A + B)$ d'où $A = B = \dfrac{d}{2}$. D'où $x(t) = d\text{ch}(\omega t)$
5. Partie énergétique : Les travaux élémentaires du poids, de la réaction normale et de la force d'inertie de Coriolis sont nuls, puisque les forces sont perpendiculaires au mouvement. Alors pour la force d'inertie d'entraînement : $\delta W_{ie} = m\omega^2 x\vec{u}_x \cdot dx\vec{u}_x = m\omega^2 xdx$
6. L'énergie potentielle de la force inertielle d'entraînement sera : $\dfrac{E_p^{ie}}{dx} = -m\omega^2 x \Rightarrow E_p^{ie} = \dfrac{1}{2}m\omega^2 x^2$. Donc l'énergie mécanique est $E_m^{tot} = \dfrac{1}{2}m\dot{x}^2 - m\omega^2 x^2 = cste$ dans $\mathcal{R}$ non-galiléen.
7. On a donc $0 = \dfrac{d}{dt}\left[\dfrac{1}{2}m\dot{x}^2 - \dfrac{1}{2}m\omega^2 x^2\right] = m\dot{x}\ddot{x} - m\omega^2 \dot{x}x = \ddot{x} - \omega^2 x$

I.10 3.1

Le mouvement de la Terre est constitué de deux parties : elle a sa rotation propre d'une durée de 24 heures et il y a sa translation quasi-circulaire autour du Soleil, qui se manifeste sur des temps bien plus longs. L'aspect rotation propre entraîne deux conséquences selon la force d'inertie d'entraînement et la force d'inertie de Coriolis. Donc le poids est en fait la résulante de la force de gravitation et de la force d'inertie d'entraînement : $\vec{P} = -G\dfrac{mM_T}{r_T^2}u_{OM} + m\omega_p^2 \vec{HM}$. Pour un dynamomètre, on aura un équilibre dans $\mathcal{R}_T$ si $\vec{F}_el + \vec{f}_{grav} + \vec{f}_{ie} = \vec{0}$. Donc $\vec{g} = \vec{g}_0 + \omega_p^2 \vec{HM}$.
Comparons les ordres de grandeur : $\dfrac{\|\vec{f}_{grav}\|}{\|\vec{f}_{ie}\|} \sim \dfrac{g_0}{\omega_p 2R_T} = \dfrac{10}{\left(\dfrac{2\pi}{8,6.10^4}\right)6,4.10^6} \sim 3.10^2$: il y a environ un facteur 300 entre le poids et la force d'inertie d'entraînement.
En équateur, l'inertie d'entraînement est maximale, et elle est minimale aux pôles.

I.11 Application 7

On a dans ce cas que $\vec{f}_{ic} = -2m\vec{\omega}_p \wedge \vec{v}_r$. Alors $\dfrac{\|\vec{P}\|}{\|\vec{f}_{ic}\|} \sim \dfrac{g}{2\omega_p\|\vec{v}_r\|} \sim 3.10^2$
La force de Coriolis est responsable du sens des vents dans des ouragans.

I.12 4.1

$\mathcal{P}(\vec{f}_{ic}) = \vec{f}_{ic} \cdot \vec{v} = (-2m\vec{\omega} \wedge \vec{v}_r) \cdot \vec{v}_r = \vec{0}$ donc la force d'inertie de Coriolis ne travaille pas.

I.13 4.3

$\delta W_{ie} = \vec{f}_{ie} \cdot d\vec{OM} = m\omega^2 \vec{HM} \cdot d\vec{OM} = m\omega^2 r\vec{u}_r \cdot (dr\vec{u}_r + ...) = m\omega^2 rdr$.
On peut écrire $\delta W_{ie} = -dE_p^{ie} \Leftrightarrow \dfrac{dE_p^{ie}}{dr} = -m\omega^2 r \Leftrightarrow E_p^{ie} = -\dfrac{1}{2}m\omega^2 r^2$

II M2 : Frottements

II.1 Application 1

1. Système : palet. Référentiel terrestre $\mathcal{R}_T$ supposé galiléen. Bilan des forces : Poids $\vec{P} = m\vec{g}$; réaction normale $\vec{N}$; réaction tangentielle $\vec{T}$.

   Mouvement plan selon Ox. On en tire les équations : $\begin{cases} \vec{P} + \vec{T} + \vec{N} &= \vec{0} \\ \vec{T} &< f_s\|\vec{N}\| \end{cases}$

   On projette : $\begin{cases} \vec{u}_x : & mg\sin\alpha - T = 0 \\ \vec{u}_y : & -mg\cos\alpha + N = 0 \end{cases}$. De là on déduit que $N = mg\cos\alpha$ et $T = mg\sin\alpha$.
   Donc $mg\sin\alpha < f_s mg\cos\alpha$, d'où $\tan\alpha < f_s$

2. RFD sur $(\vec{u}_x, \vec{u}_y)$: $m\ddot{x} = mg\sin\alpha - Y, 0 = -mg\cos\alpha + N$ et donc $\ddot{x} = g(\sin\alpha - f_d\cos\alpha)$ comme on a que pendant le mouvement, $T = f_d N$

3. On peut faire une mesure de l'angle limite α_{lim} de mise en mouvement, ce qui permet d'avoir accès à f_s.

   On peut faire la mesure du temps de parcours d'une distance l avec $\alpha_{lim} < \alpha$, ce qui donne accès à f_d.

II.2 3 : puissance de la force de réaction

$\mathcal{P}(\vec{R}) = \vec{R}\cdot\vec{v} = (\vec{T} + \vec{N})\cdot\vec{v} = \begin{cases} 0 & \text{si pas de glisssement, si la vitesse est nulle} \\ -\|\vec{T}\|\|\vec{v}\| < 0 & \text{si glissement non constant} \end{cases}$

On applique le TEC : $\Delta E_c = W_{cons} + W_{non-cons}$ et donc $\Delta E_m = W_{non-cons} < 0$, ce qui implique que l'énergie mécanique décroît.

II.3 Application 2

On applique le TEC : $\begin{cases} \Delta E_c = 0 - \dfrac{1}{2}mv^2 \\ W_{tot} = W_{\vec{P}} + W_{\vec{N}} + W_{\vec{T}} \end{cases}$ mais les forces normales et le poids ne travaillent pas.

D'où $W_{tot} = W_{\vec{T}} = \int_0^d \vec{T}\cdot d\vec{OM} = \int_0^d -T dx = \int_0^d -(f_d mg)dx = -f_d mgd$

Donc $\Delta E_m = W_{tot}$, d'où $\dfrac{1}{2}mv_0^2 = f_d mgd$, dont on tire enfin $d = \dfrac{v_0^2}{2gf}$.

Chapitre II

EM

I EM1

I.1 Application 1

— Si on a $dQ = \rho(M)d\tau$, alors il faut intégrer sur le volume : $\iiint dQ = \iiint \rho(x,y,z)d\tau$
$= \int_{x=0}^{a} \int_{y=0}^{a} \int_{z=0}^{z} \rho_0 e^{-z/\delta} dxdydz$
$= a^2 \int_0^z \rho_0 e^{-z/\delta} dz = -\rho_0 a^2 \delta \left[e^{-z/\delta} - 1\right]$ donc $Q(z) = \rho_0 a^2 \delta \left[1 - e^{-z/\delta}\right]$

— $Q = \rho_0 a^2 \delta \left[1 - e^{-z/\delta}\right] \simeq \rho_0 a^2 \delta$ comme $e^{-z/\delta}$ tend vers 0.

— On a $\dfrac{Q}{a^2} = \rho_0 \delta$ la densité surfacique de charge (par définition pour le premier), qui a la dimensiomn d'une charge surfacique. Dans tous les problèmes avec deux dimensions et une dernière négligeable devant elles, on voudra plutôt définir la densité surfacique de charge σ par $dQ = \sigma(M)dS$.

I.2 2.2

De tout ça, on tire une expression pour la charge totale portée par la surface : $Q = \iint_{ab} \sigma(M)dS$.
De cela, on tire une expression pour la charge totale portée par un fil : $Q = \int_a \lambda(M)dl$

I.3 Application 1 bis

Il y a des plans de symétrie et d'antisymétrie. Elle admet un plan de symétrie si, en prenant deux points symétriques par rapport à un plan, la densité volumique de distribution sont les mêmes pour les deux points.

Sur le schéma, il y a des plans de symétrie : tous les plans qui continennent l'axe (Ox) sont des plans de symétries pour les distributions de charge. Il y en a donc une infinité.

I.4 Application 1 ter

Le plan d'antisymétrie est unique, et est perpendiculaire à l'axe x et passant par le point au milieu de la distance entre les deux charges.

I.5 Application 2

1. Il y a des invariances par translation selon les axes (Ox) et (Oy).
2. $\vec{E}(M) = \vec{E}(x,y,z) = \vec{E}(z)$
3. On a comme plans de symétrie tout plan contenant l'axe (Oz), comme $\Pi_1 \equiv (xOz)$ ou $\Pi_2 \equiv (yOz)$. On a un dernier plan, qui est le plan (xOy) qui partage toute la plaque infinie.

4. $M \in \text{plan}(M, \vec{e}_x, \vec{e}_y) \equiv \Pi_1$, ce qui implique que
   $\vec{E}(M) = E_x\vec{e}_x + E_z\vec{e}_z$ et comme $M \in \text{plan}(M, \vec{e}_y, \vec{e}_z) \equiv \Pi_2$
   alors $M = E_y\vec{e}_y + E_z\vec{e}_z$. Et donc nécessairement $\vec{E}(M) = E_z(z)\vec{e}_z$. Il est nécessaire que la fonction $E_z(z)$ soit impaire.

I.6 Application 3

1. Dans ce cylindre infini, on a une invariance de la distribution de charges par translation selon l'axe (Oz) et une invariance par rotation selon θ autour de l'axe (Oz). On se place donc en coordonnées polaires.
2. On en déduit que $\|\vec{E}\|(r, \theta, z) = \|\vec{E}\|(r)$.
3. Une infinité : l'ensemble des plans contenant l'axe (Oz) et le plan $(M, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$.
4. On a que $\vec{E}(M) = E_r\vec{e}_r$ et que $\vec{E}(M) \in \Pi_1 \cap \Pi_2$ (plans de symétrie). Donc $\vec{E}(M) = E_r(r)\vec{e}_r$.

I.7 4.2

$\iint \vec{E}.d\vec{S} = \int_\theta \int_\varphi \vec{E}(p) R^2 \sin\theta d\theta d\varphi \vec{e}_r$

$= \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\vec{e}_r R^2 \sin\theta d\theta d\varphi \vec{e}_r = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0} 2\pi \left[-\cos\theta\right]_0^\pi$

Donc : $\iint \vec{E} d\vec{S} = \dfrac{Q}{\varepsilon_0}$ puisque l'intégrale de $-\cos$ entre 0 et π vaut 2.

I.8 5.2

1. On a une invariance de distribution par rotation d'angle θ et une invariance par rotation d'angle φ des coordonnées sphériques. Donc $\|\vec{G}\|(M) = \|\vec{G}\|(r)$
2. On a des symétries de plan $(M, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta) = \Pi_1$ et $(M, \vec{e}_r, \vec{e}_\varphi) = \Pi_2$. Tous les plans passant par M et contenant le vecteur $\vec{e}_r$ sont des plans de symétrie. Donc $\vec{G}(M) = G_r(M)\vec{e}_r$.
3. Pour la surface de Gauss : On prend la sphère de rayon r centrée en O. (On aura donc à traiter un cas où M appartient à la sphère gravitationnelle et le cas où M est en-dehors.)
4. Calcul de $M_{int} = \begin{cases} \text{si } r < R & M_{int} = & \mu\frac{4}{3}\pi r^3 \\ \text{si } r \geq R & M_{int} = & \mu\frac{4}{3}\pi R^3 = M_{tot} \end{cases}$

   Calcul du flux : $\iint \vec{G} d\vec{S} = \int_\theta \int_\varphi = G_r(r)\vec{e}_r dS \vec{e}_r = G_r(r) S_{sphere} = G_r(r) 4\pi r^2$
5. On applique le théorème de Gauss gravitationnel : $\iint \vec{G} d\vec{S} = -4\pi\mathcal{G}M_{int}$ et donc

   $G_r(r)4\pi r^2 = \begin{cases} -4\pi\mathcal{G}M_{tot}\frac{r^3}{R^3} & \text{si } r < R \\ -4\pi\mathcal{G}M_{tot} & \text{si } r \geq R \end{cases}$

   D'où, finalement $\vec{G}(M) = \begin{cases} -\dfrac{\mathcal{G}M_{tot}}{R^3} r\vec{e}_r & \text{si } r < R \\ -\dfrac{\mathcal{G}M_{tot}}{r^2}\vec{e}_r & \text{si } r \geq R \end{cases}$

I.9 5.3

1. Dans ce cylindre infini, on a une invariance de la distribution de charges par translation selon l'axe (Oz) et une invariance par rotation selon θ autour de l'axe (Oz). On se place donc en coordonnées polaires. On en déduit que $\|\vec{E}\|(r, \theta, z) = \|\vec{E}\|(r)$.
2. On a une infinité de plans de symétrie, ceux qui contiennent l'axe (Oz).

3. On prend comme surface de Gauss un cylindre de rayon r et de hauteur h quelconque passant par M. C'est un objet en trois parties : un bord cylindrique et deux disques.

4. Calcul de $Q_{int} = \begin{cases} \text{si } r < R & \rho_0 h\pi r^2 \\ \text{si } r \geq R & \rho_0 h\pi R^2 \end{cases}$

   Calcul de Φ_2 : $\iint \vec{E} d\vec{S} = \iint_{bordcylindrique} E_r(r)\vec{e}_r dS\vec{e}_r + \iint_{disquehaut} E_r(r)\vec{e}_r dS\vec{e}_z + \iint_{disquebas} E_r(r)\vec{e}_r dS\vec{e}_y$
   $= \iint_{bordcylindrique} E_r(r) dS$
   $= E_r(r) \iint_{cylindre} = E_r(r) 2\pi rh$

5. On applique le théorème de Gauss : $\iint \vec{E} d\vec{S} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$

   $$\text{Donc } E_r(r)2\pi rh = \begin{array}{cc} \dfrac{\rho_0 h\pi r^2}{\varepsilon_0} & \text{si } r < R \\ \dfrac{\rho_0 h\pi R^2}{\varepsilon_0} & \text{si } r \geq r \end{array}$$

   $$\text{Donc } \vec{E}(M) = \begin{cases} \dfrac{\rho_0}{2\varepsilon_0} r\vec{e}_r & \text{si } r < R \\ \dfrac{\rho_0 R^2}{2\varepsilon_0 r}\vec{e}_r & \text{si } r \geq r \end{cases}$$

I.10 5.4

1. On a des invariances de translation selon les axes (Ox) et (Oy), donc $\vec{E}(M) = \vec{E}(z)$

2. On a des symétries de plan selon $(M, \vec{e}_x, \vec{e}_z) = \Pi_1, (M, \vec{e}_y, \vec{e}_z) = \pi_2$ et (xOy) plan de symétrie. De ça, on déduit que $\vec{E}(-z) = -\vec{E}(z)$ et donc $E_z(-z) = -E_z(z)$

3. On prend comme surface de Gauss un parallélipidère de hauteur $2z$ et de surface a selon x et b selon y. (Reformulation : on prend le parallélipipède rectangle de base ab et de hauteur h.)

4. Calcul de $Q_{int} = \sigma_0 ab$
   Calcul du flux : $\iint \vec{E} d\vec{S} = \iint_{bords} E_z\vec{e}_z dydz + \iint_{haut} E_z(z)\vec{e}_z dS\vec{e}_z + \iint_{bas} E_z(-z)\vec{e}_z dS(-\vec{e}_z)$
   $= ab\left[E_z(z) - E_z(-z)\right] = 2abE_z(z)$

5. On applique le théorème de Gauss : $\iint \vec{E} d\vec{S} = \dfrac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$

   Donc $2abE_z(z) = \dfrac{\sigma_0 ab}{\varepsilon_0}$

   Donc $E_z(z) = \dfrac{\sigma_0}{2\varepsilon_0}$ avec $z > 0$ et donc :

   $$\begin{cases} \vec{E} = +\dfrac{\sigma_0}{2\varepsilon_0}\vec{e}_z & \text{si } z > 0 \\ \vec{E} = -\dfrac{\sigma_0}{2\varepsilon_0}\vec{e}_z & \text{si } z < 0 \end{cases}$$

II EM2

II.1 1.1

$W_{A\to B}(\vec{f}_{Coulomb}) = \int_A^B \vec{f}_{Coulomb} d\vec{l} = \int_A^B \frac{qQ}{1\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{e}_r(dr\vec{e}_r + ...) = \int_A^B \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0 r^2} dr = \left[-\frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0 r}\right]_A^B = [-qV(r)]_A^B = q(V_A - V_B)$

Avec $V(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$ le potentiel créé par la charge Q placée en O.

$\Rightarrow \mathcal{E}_p^{elec} + qW(\vec{f}_{Coulomb}) = -\Delta\mathcal{E}_p^{elec} \Leftrightarrow \mathcal{E}_p^{elec} = qV(+cste)$

II.2 Application 1

On a que $V(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum\limits_{i=1}^{N}\frac{Q_i}{P_iM}$

II.3 1.2

Et comme $\int_A^B \vec{F}_L d\vec{l} = -\Delta\mathcal{E}_P \Rightarrow \int_A^B q\vec{E}d\vec{l} = -q\Delta V$ lors le potentiel V est relié au champ électrostatique $\vec{E}$ par :
$\int \vec{E}d\vec{l} = -\Delta V \Leftrightarrow \vec{E}d\vec{l} = E_x dx + E_y dy + E_z dz = -\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial V}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial z} = -dV$
Donc $\vec{E} = -gr\vec{a}d(V)$ (Aussi important que $u = Ri$)

II.4 Application 2

Comme on a une invariance par rotation d'angles θ et φ autour de O, on a que $\|\vec{E}\|(M) = \|\vec{E}\|(r)$
Si $r \geq R$: $\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{e}_r = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r^2}\vec{e}_r$
Si $r \leq R$: $\vec{E} = \frac{\rho(\frac{4}{3}\pi r^3)}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{e}_r = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0}\vec{e}_r$
$\vec{E}(r) = -gr\vec{a}d(V)(r) = -\dfrac{dV}{dr}\vec{e}_r$
Et donc, si $r \geq R$, $\dfrac{dV}{dr} = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \Leftrightarrow V(r) = -\int \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}(+cste) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} + cste$ et on considère la constante comme nulle de manière à ce que $V \to 0$
Et si $r \leq R$, $\dfrac{dV}{dr} = -\frac{\rho r}{3\varepsilon_0} \Leftrightarrow V(r) = -\int \frac{\rho r}{3\varepsilon_0}dr(+C) = -\frac{\rho r^2}{6\varepsilon_0} + C$
Donc V est continue à la traversée de la surface de la sphère (chargée en volume), donc il est nécessaire que $V(R^-) = V(R^+)$
$C - \frac{\rho R^2}{6\varepsilon_0} = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 R} \Rightarrow C = \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0}$

II.5 2.1

Soient M, M' deux points voisins d'une surface équipotentielle. On a que :
$$\begin{cases} V(M') & = & V(M) \\ V(M') - V(M) & = & dV \end{cases}$$
Et $dV = gr\vec{a}dVd\vec{l} = -\vec{E}\cdot M\vec{M}'$
Mais $V(M') - V(M) = 0$ donc $\vec{E}$ est perpendiculaire à la surface.

II.6 2.2

Soient M, M' deux points voisins d'une même ligne de champ.
Alors $V(M') - V(M) = dV = gr\vec{a}dV \cdot M\vec{M}' = -\vec{E}\cdot M\vec{M}$
Donc si $V(M') > V(M)$, alors $\vec{E}\cdot M\vec{M}' < 0$
ce qui équivaut à $\vec{E}$ de sens opposé à $M\vec{M}'$ (et inversement)

II.7 Application 3

1. Voir schéma, les équipotentielles sont soit le plan entre les deux charges, soient des patatoïdes qui sont toujours perpendiculaires au ligne de champ. Plus une surface est petite et centrée sur une des charges, plus la valeur absolue de sa charge sera grande.
2. Baragouinage
3. Mensonge

II.8 2.3

$\iint_{\text{tube du champ et 2 sections}} \vec{E}d\vec{S} = \iint_{\text{section S1}} \vec{E_1}d\vec{S_2} + \iint_{\text{section S2}} \vec{E_2}d\vec{S_2} + \iint_{tube} \vec{E}d\vec{S}$
Et ici $\vec{E}d\vec{S} = \vec{0}$
Donc $\iint_{sections} \vec{E}d\vec{S} = -E_1S_1 + E_2S_2$ or $\iint \vec{E}d\vec{S} = 0$ s'il n'y a pas de charge intérieure. Donc $E_1S_1 = E_2S_2$

II.9 Application 2 bis

Les surfaces sont les sphères de même centre que la sphère chargée, plus leur rayon est grand, moins leur potentiel est élevé.

II.10 Application 4

1. On a des invariances par translation selon z et par rotation d'angle θ, donc $\|\vec{E}\|(M) = E_r$ et donc que $V(M) = V(r)$, et donc $\vec{E} = -\overrightarrow{grad}V = -\frac{dV}{dr}\vec{e_r}$
   On écrit le théorème de Gauss : $\iint \vec{E}d\vec{S} = 2\pi rhE_r(r)$
   On a que $\vec{E} = \frac{\rho r}{2\varepsilon_0}\vec{e_r}$ et si $r \leq R$ et $\vec{E} = \dfrac{\rho R^2}{2\varepsilon_0 r}\vec{e_r}$ si $r \geq R$.
   Si $r \leq R$, alors : $V = -\dfrac{\rho r^2}{4\varepsilon_0} + D$
   Si $r \geq R$, alors : $V = -\dfrac{\rho R^2}{2\varepsilon_0}\ln(r) + C$
   Avec, comme le champ est continu : $V(R^-) = V(R^+) \Leftrightarrow -\frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0}ln(R) + C = -\frac{\rho R^2}{4\varepsilon_0} + D$
   Donc $C = -\frac{\rho R^2}{4\varepsilon_0} + \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0}ln(R) + D$ avec $D = V(0)$
   Et donc, finalement : $V(r) = -\frac{\rho R^2}{4\varepsilon_0} + D$ si $r \leq R$ et $V(r) = \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0}ln\left(\frac{R}{r}\right) - \frac{\rho R^2}{4\varepsilon_0} + D$ si $r \geq R$
2. NON. Les lignes de champ sont radiales et les équipotentielles sont des sphères de même centre que la sphère.

II.11 3.2

$\vec{E}_{tot} = \vec{E}_+ + \vec{E}_-$ par théorème de superposition.
$\vec{E}_+ = \begin{cases} +\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{e}_z & \text{si } z > \frac{e}{2} \\ -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{e}_z & \text{si } z < \frac{e}{2} \end{cases}$
$\vec{E}_- = \begin{cases} -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{e}_z & \text{si } z > -\frac{e}{2} \\ -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{e}_z & \text{si } z < -\frac{e}{2} \end{cases}$
Donc $\vec{E} = \begin{cases} \vec{0} & \text{Si } z > \frac{e}{2} \\ -\frac{\sigma}{\varepsilon_0} & \text{si } -\frac{e}{2} < z < \frac{e}{2} \\ \vec{0} & \text{Si } z > -\frac{e}{2} \end{cases}$

II.12 3.3

Calcul de V : On a invariance par translation sur les axes x et y. z est le seul paramètre, donc $V = -\int E_z dz$
Donc : $V(z) = \begin{cases} V_+ = cste & \text{Si } z > \frac{e}{2} \\ \frac{\sigma}{\varepsilon_0}z & \text{si } -\frac{e}{2} < z < \frac{e}{2} \\ V_- = cste & \text{Si } z > -\frac{e}{2} \end{cases}$
Donc il existe une tension $U = V(z = \frac{e}{2}) - V(z = -\frac{e}{2}) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}e = \frac{Q}{S\varepsilon_0}e$
On revient à $Q = Cu = \frac{S\varepsilon_0}{e}U$

Comme on n'a en fait pas de vide entre les deux armatures, on doit multiplier C par ε_r, permittivité électronique entre les deux armatures. Mais c'est négligé.

II.13 3.4

$\mathcal{P}_{elec} = u \cdot i = u\frac{dQ}{dt} = uC\dfrac{du}{dt} = \dfrac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}Cu^2\right]$ ou $\dfrac{d}{dt}\left[\frac{1}{2C}Q^2\right]$

D'où la variation d'énergie électrique : $\Delta E_{elec} = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{P}_{elec}dt = \left[\frac{1}{2}Cu^2\right]_{t_1}^{t_2} = \left[\frac{1}{2C}Q^2\right]$

Donc $\mathcal{E}_{elec} = \frac{1}{2C}Q^2 = \frac{1}{2\frac{\varepsilon_0 S}{e}}(S\varepsilon_0 E)^2 = \frac{Se}{2}\varepsilon_0 E^2 \Rightarrow w_{elec} = \frac{\mathcal{E}_{elec}}{V} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$

III Compléments EM2

III.1 1.1

Appliquons le théorème de Gauss à un petit volume mésoscopique, de forme cubique et de volume $d\tau = dxdydz$:

$\iint \vec{E}d\vec{S} = \vec{E}(x+dx)d\vec{S_1} + \vec{E}(x)d\vec{S_2} + \vec{E}(y+dy)d\vec{S_3} + \vec{E}(y)d\vec{S_4} + \vec{E}(z+dz)d\vec{S_5} + \vec{E}(x)d\vec{S_6}$

$= E_x(x+dx)dydz + E_x(x)(-dydz) + E_y(y+dy)dxdz + E_y(y)(-dxdz) + E_z(z+dz)dxdy + E_z(z)dxdy$

$= dydz(E_x(x+dx) + E_x(x)) + dxdz(E_y(y+dy) - E_y(y)) + dxdy(E_z(z+dz) - E_z(z))$

$= dydz\dfrac{\partial E_x}{\partial x}dx + dxdz\dfrac{\partial E_y}{\partial y}dy + dxdy\dfrac{\partial E_z}{\partial z}dz$

$\Rightarrow \iint \vec{E}d\vec{S} = dxdydz\left[\dfrac{\partial E_x}{\partial x} + \dfrac{\partial E_y}{\partial y} + \dfrac{\partial E_z}{\partial z}\right] = \frac{dQ}{\varepsilon_0} = \frac{dxdydz\rho}{\varepsilon_0}$

$\Rightarrow \dfrac{\partial E_x}{\partial x}\dfrac{\partial E_x}{\partial x} + \dfrac{\partial E_y}{\partial y} + \dfrac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$

D'où l'équation de Maxwell-Gauss : $\mathrm{div}\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$

III.2 Application 1

1. On se place en coordonnées cylindriques : dedans, on a des invariances de translation selon z et de rotation selon θ, avec des symétries qui font que $\vec{E}(M) = E_r(r)\vec{e_r}$, et on néglige les effets de bord car on suppose le fil infini.
2. On place M à l'extérieur, à distance r. On a que $\mathrm{div}\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$ par Maxwell-Gauss.

   Et donc $\frac{\rho}{\varepsilon_0} = \frac{1}{r}\dfrac{\partial(rE_r)}{\partial r}$

   Mais comme M à l'extérieur du fil, $\rho(M) = 0$, et donc $\dfrac{\partial(rE_r)}{\partial r} = 0$

   Et finalement $E_r(r) = \frac{B}{r}$ en extérieur
3. En M à l'extérieur du fil : $\frac{1}{r}\dfrac{\partial(rE_r)}{\partial r} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$ comme la charge est uniforme. Donc : $rE_r = \int \frac{\rho}{\varepsilon_0}rdr = \frac{\rho}{2\varepsilon_0}r^2 + C$

   Et donc $E_r = \frac{\rho}{2\varepsilon_0}r + \frac{C}{r}$

   Mais $C = 0$ par symétries au centre du fil.
4. Par continuité en $r = R$, on a que $\frac{\rho}{2\varepsilon_0}R = \frac{B}{R}$

   Et donc $B = \frac{\rho}{2\varepsilon_0}R^2$

   Dans une distribution linéique, avec $\lambda = \pi R^2\rho$ on aurait $\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\vec{e_r}$

III.3 1.2

On a vu qu'en régime stationnaire, le potentiel scalaire V dépendait de E par la relation : $\vec{E} = -gr\vec{a}d(V)$
En injectant cette égalité dans Maxwell-Gauss, on obtient : $d\text{div}\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$
$\Rightarrow \text{div}(-gr\vec{a}d(V)) = -\left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial V}{\partial z}\right)$
$= -\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}\right) = -\Delta V = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$
D'où l'équation de Laplace : $\Delta V = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$

III.4 Application 2

D'après les applications dans EM2, on a que $\vec{E}(M) = E_z(z)\vec{e}_z$
On a que $\Delta V = -\frac{\rho(z)}{\varepsilon_0} = 0$
$\Rightarrow V(z) = Az + B$
On pose ensuite ces conditions limites : $\begin{cases} V_2 &= A\frac{e}{2} + B \\ V_1 &= -A\frac{e}{2} + B \end{cases}$
On en déduit $B = \frac{V_1+V_2}{2}$ et $A = \frac{V_2-V_1}{e}$

III.5 Application 3

On peut utiliser Laplace parce qu'on a une charge nulle entre les deux armatures. On a alors $\Delta V(r)$.
Donc $\frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left(r\frac{dV(r)}{dr}\right)$
$\Rightarrow r\frac{dV(r)}{dt} = C_1 \Rightarrow \frac{dV(r)}{dr} = \frac{C_1}{r}$
$\Rightarrow V(r) = C_1 ln(r) + C_2$
Prenons ensuite les conditions aux limites : $\begin{cases} V_1 &= V(R_1) &= C_1\ln(R_1) + C_2 \\ V_2 &= V(R_2) &= C_1\ln(R_2) + C_2 \end{cases}$
$\Rightarrow C_1 = \frac{V_2-V_1}{\ln(R_2/R_1)}$
$\Rightarrow C_2 =$
D'où l'expression de $V(r) =$

IV EM3

IV.1 1.3

On a n électrons de charge q_0 qui se déplacent à vitesse v. On a que $i = \frac{dQ}{dt}$, les charges qui passent à travers de la section S pendant dt.

On a que $dQ = n[Svdt]q_0$ et donc $i = nSvq_0$

On pose alors $\vec{j} = nq_0\vec{v}$, le vecteur densité volumique de courant.

IV.2 Application 1

On a $I = \iint \alpha r^2 r dr d\theta = 2\pi\alpha\frac{R^4}{4}$ et donc $\alpha = \frac{2I}{\pi R^4}$

IV.3 Application 3

1. On a une invariance par translation selon l'axe (Oz) et par rotation d'angle θ autour de l'axe (Oz)
2. On se place ensuite en coordonnées cylindriques, alors la norme du champ ne dépendra que de r
3. Le plan $(M, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ est un plan d'antisymétrie de $\mathcal{D}$ et que $(M, \vec{e}_r, \vec{e}_z)$ est un plan de symétrie de $\mathcal{D}$. Alors on a que $\vec{B}$ sera seulement selon $\vec{e}_r$ et $\vec{e}_\theta$ et aussi que $\vec{B}$ est perpendiculaire au plan de symétrie.
4. Donc $\vec{B} = B_\theta(r)\vec{e}_\theta$
5. La même expression que précédemment.

IV.4 Application 4

1. On a $d\Phi_1 = \vec{B}(M_1)d\vec{S}_1 = B(M_1)\vec{e}_\theta dS_1(-\vec{e}_\theta) = -B(M_1)DS_1 = -B(r)dS$
   Et de même $d\Phi_2 = \vec{B}(M_2)d\vec{S}_2 = B(M_2)\vec{e}_\theta dS_2\vec{e}_\theta = B(r)dS$
2. Selon la surface du bord du tore, $d\vec{S} \perp \vec{B} \Rightarrow d\Phi_b = 0$
   $\Rightarrow \Phi_{tot} = -B(r)dS + B(r)dS + 0 = 0$

IV.5 Application 5

1. $\vec{B} = B(r)\vec{e}_\theta$
2. $\oint \vec{B}d\vec{l} = \int_{\theta=0}^{2\pi} B(r)\vec{e}_\theta \cdot rd\theta\vec{e}_\theta = 2\pi rB(r)$ qui à priori n'est pas nulle.
3. Alors : $\vec{B}(M) = B(r)\vec{e}_\theta = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\vec{e}_\theta$

IV.6 Application 6

$I_{enl} = -I_1 - I_2 + I_3$
Le courant passe dans l'autre sens, donc I_1 et I_2 sont négatifs et les autres sont positifs.

IV.7 Application de cours 1

1. On a $I = \iint \vec{j}d\vec{S} = \int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{R} \vec{j}drrd\theta\vec{e}_z = \vec{j} = \frac{I}{\pi R^2}\vec{e}_z$ avec $\vec{j} = j\vec{e}_z$
2. Sur les symétries et les invariances : on a des invariances par translation selon l'axe Oz et par rotation d'angle θ donc la norme dépend uniquement de r
   $\Pi = (M, \vec{e}_r, \vec{e}_z)$ est un plan de symétrie de $\mathcal{D}$, donc $\vec{B} \perp \Pi$ donc $\vec{B}(M) = B(M)\vec{e}_\theta$
   Donc $\vec{B} = B(r)\vec{e}_r$
   Comme pour l'électrostat, il va falloir choisir une forme géométrique. Cette fois, c'est plus une surface de Gauss mais un contour d'Ampère, le cercle de rayon r centré sur Oz qui passe par M.
   On a donc la circulation : $\oint \vec{B}d\vec{l} = 2\pi rB(r)$
   On calcule le courant enlacé : $I_{enl} = \begin{cases} \int_{\theta=0}^{2\pi}\int_0^r \vec{j}d\vec{S} = j\pi r^2 = \frac{Ir^2}{R^2} & \text{si } r \leq R \\ I & \text{sinon} \end{cases}$
   Donc par théorème d'Ampère : $\oint \vec{B}d\vec{l} = \mu_0 I_{enl} \Rightarrow \vec{B}(M) \begin{cases} \frac{\mu_0 j}{2}r\vec{e}_\theta = \frac{\mu_0 I}{2\pi R^2}r\vec{e}_\theta & \text{si } r \leq R \\ \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\vec{e}_\theta & \text{sinon} \end{cases}$

IV.8 Application de cours 2

1. Symétries de $\mathcal{D}$: on a $(M, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ un plan de symétrie, donc $\vec{B} \perp (M, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ et donc $\vec{B}(M) = B(M)\vec{e}_z$
   On a une invariance par translation selon Oz et une invariance par rotation selon θ, le système de coordonnées adapté est cylindrique. Et donc $\|\vec{B}(M)\| = B(r)$
2. On choisira un contour d'Ampère rectangulaire dont une partie est selon l'axe Oz. Ce rectangle ACDE aura deux côtés parallèles à l'axe Oz
   Sur le contour intérieur : comme on peut l'orienter selon $\vec{e}_\theta$, on le fait. Le champ est alors à priori porté par Oz :
   $\oint \vec{B}\vec{dl} = \int_A^C B(0)\vec{e}_z dz\vec{e}_z + \int_C^D B\vec{e}_z dr\vec{e}_r + \int_D^C B(r)\vec{e}_e(-dz\vec{e}_z) + \int_D^A B\vec{e}_z(-dr\vec{e}_r)$
   $= B(0)a - B(r)a = \mu_0 I_{enl} = 0$
   Donc $B(0) = B(r) = B_{int}$
   Sur le contour extérieur : on aura la même chose, et on obtiendra aussi un champ uniforme en tout r_1 et r_2.
3. Prenons un dernier contour qui enjambe : $\oint \vec{B}\vec{dl} = \int_A^C B_{int}\vec{e}_z dz\vec{e}_z + 0 + 0 + \int_E^A B_{ext}\vec{e}_z(-dz\vec{e}_z)$
   $= [B_{int} - B_{ext}]\, a = B_{int}a$ en faisant l'hypothèse que le champ extérieur est nul.
   $= \mu_0 I_{enl} = \mu_0 naI$ par théorème d'Ampère
   $\Rightarrow \vec{B}_{int} = \mu_0 nI\vec{e}_z$

IV.9 Application 7

Le champ dans le centre sera forcément nul.

V EM4 : distributions dipôlaires

V.1 1.2

Considérons une distribution de charges q_i (placées aux points OP_i) portant une charge totale nulle $\sum\limits_i q_i = 0$

On appelle moment dipôlaire le vecteur $\vec{p} = \sum\limits_i q_i\vec{OP}_i = \sum\limits_{jcharge<0} q_j\vec{OP}_j + \sum\limits_{kcharge>0} q_k\vec{OP}_k$

Où $\sum\limits_j q_j = -q$ (charge totale négative) et $\sum\limits_k q_k = +q$ (charge totale positive)

$\sum\limits_{kcharge>0} q_k\vec{OP}_k$ correspond au barycentre d'un ensemble de points (M_i) affectés de coefficients (m_i) : le point G tel que $\sum\limits_i m_i\vec{GM}_i = \vec{0}$

Pour le trouver, si $\sum m_i \neq 0$: $\sum m_i(\vec{GO} + \vec{OM}_i) = \vec{0}$

Ce qui permet de faire $\vec{GO}\sum m_i + \sum m_i\vec{OM}_i = \vec{0}$

Et donc $\vec{OG} = \frac{1}{\sum m_i}\sum m_i\vec{OM}_i$

Alors : $\vec{p} = \sum_j q_j\vec{ON} + \sum_k q_k\vec{OP} = -q\vec{ON} + q\vec{OP} = q(\vec{NO} + \vec{OP}) = q\vec{NP}$

V.2 1.3

Symétries et invariances : à cause de la séparation de charge entre N chargé $-q$ et P chargé $+q$.

On a invariance par rotation d'angle φ autour de l'axe du dipôle. Donc $V(M) = V(r, \theta)$ en coordonnées sphériques.

On a comme symétries de D : tout plan contenant N et P est plan de symétrie. Le plan $(M, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ est plan de symétrie donc $\vec{E} \in (O, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$. Le plan médian qui passe par O est un plan d'antisymétrie, auquel le champ est toujours orthogonal.

Expression du potentiel : par superposition, on aura :
$V(r,\theta) = V_+(r,\theta) + V_-(r,\theta) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 PM} + \frac{-q}{4\pi\varepsilon_0 NM}$
On a $PM = \sqrt{PM^2} = \sqrt{\vec{PM}\cdot\vec{PM}} = \sqrt{(\vec{PO}+\vec{OM})(\vec{PO}+\vec{OM})}$
$= \sqrt{r^2 - ar\vec{e_z}\vec{e_r} + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = r\sqrt{1 - \frac{a}{r}\cos\theta + \left(\frac{a}{2r}\right)^2}$
Et on a $NM = r\sqrt{1 + \frac{a}{r}\cos\theta + \left(\frac{a}{2r}\right)^2}$
D'où $V(r,\theta) = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r\sqrt{1 - \frac{a}{r}\cos\theta + \left(\frac{a}{2r}\right)^2}} + \dfrac{-q}{4\pi\varepsilon_0 r\sqrt{1 + \frac{a}{r}\cos\theta + \left(\frac{a}{2r}\right)^2}}$
Donc $V(r,\theta) \simeq \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}\left[\left(1 + \frac{a}{2r}\cos\theta\right) - \left(1 - \frac{a}{2r}\cos\theta\right)\right]$
$V(r,\theta) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}\left[2\frac{a}{2r}\cos\theta\right] = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$
En trichant un peu, on peut réécrire de manière intrinsèque : $V(r,\theta) = \frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$

V.3 1.4

Expression du champ de $\vec{E}$: $\vec{E} = -\vec{grad}(V)$

$$= \begin{vmatrix} -\dfrac{\partial V}{\partial r} \\ -\frac{1}{r}\dfrac{\partial V}{\partial \theta} \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{2p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3} \\ \dfrac{p\sin\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3} \\ 0 \end{vmatrix} = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\begin{vmatrix} 2\cos\theta \\ \sin\theta \\ 0 \end{vmatrix}$$

Pour les équipotentielles : $V(r,\theta) = \frac{p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = V_0 \Rightarrow r^2 = \frac{p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 V_0} \Rightarrow r = \sqrt{\left|\frac{p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 V_0}\right|}$
Pour les lignes de champ, on cherche les courbes telles que $\vec{dl} \wedge \vec{E} = \vec{0}$

V.4 2.1

Moment du couple : $\vec{\Gamma} = \vec{OP}\wedge\vec{F_+} + \vec{ON}\wedge\vec{F_-} = \left(\frac{a}{2}\vec{u}\wedge q\vec{E_0}\right) + \left(-\frac{a}{2}\vec{u}(-q\vec{E_0})\right) = qa\vec{u}\wedge\vec{E_0} = \vec{p}\wedge\vec{E_0}$
Le champ extérieur tend à faire tourner le dipôle pour l'aligner dans son sens.

V.5 2.2

On reprend l'exemple d'une charge $-q$ au point N et la charge q au point P.
On rappelle : $\mathcal{E}_p = +qV(P) - qV(N)$
où $\begin{cases} V(P) & \simeq & V(O) + \vec{grad}(V(O))\vec{OP} \\ V(N) & \simeq & V(O) + \vec{grad}(V(O))\vec{ON} \end{cases}$
Et donc $\mathcal{E}_p \simeq q\vec{grad}(V)\cdot(\vec{NP}) = -\vec{p}\vec{E}$
Et donc $\mathcal{E}_p \simeq -pE_0\cos\theta$ dans ce cas
On rappelle qu'en dimension 3, les DL sont : $f(x+dx, y+dy, z+dz) = f(x,y,z) + \vec{grad}(f)\vec{dl}$

V.6 2.3

On a que $F_x = qE_x(P) - qE_x(N) = q\left[E(O) + \vec{grad}(E_x)\cdot\vec{OP}\right] - q\left[E(O) + \vec{grad}(E_x)\cdot\vec{ON}\right]$
$= q\vec{grad}(E_x)\cdot(\vec{OP} - \vec{ON}) = q\vec{grad}\cdot\vec{NP} = \vec{p}(\vec{grad}(E_x))$
$= (\vec{p}\cdot\vec{grad})E_x = \left[p_x\dfrac{\partial}{\partial x} + p_y\dfrac{\partial}{\partial y} + p_z\dfrac{\partial}{\partial z}\right]E_x = \vec{grad}(\vec{p}E_x\vec{e_x})$
Conséquence : la force qui apparaît dans un champ non-uniforme tend à attirer le dipôle vers les zones de champ fort.

V.7 3.2

Invariances de la distribution par rotation autour de l'axe autour du vecteur $\vec{m}$ donc de rotation selon l'angle φ. On se place en coordonnées sphériques.

Symétries de la distribution : le plan $(xOy) = \Pi$ perpendiculaire à $\vec{m}$ contenant le dipôle. Π est un plan de symétrie de la distribution, donc c'est un plan d'antisymétrie du champ $\vec{B}$

Le plan $(M, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta) = \Pi^*$ est un plan d'antisymétrie de la distribution, donc un plan de symétrie du champ $\vec{B}$: on en déduit que $\vec{B}$ est dans ce plan.

V.8 Application 2

1. Elle adopte la direction du champ magnétique terrestre : son vecteur $\vec{m}$ est aligné avec le champ magnétique terrestre $\vec{B}_{T_H}$ en sa position.

   On le justifie par l'énergie potentielle : $\mathcal{E}_p = -\vec{m}\vec{B}_{T_H} = -mB_{T_H}\cos\theta$ qui a une position d'équilibre stable en $\theta = 0$ donc $\vec{m}$ est parallèle à $\vec{B}_T$ et de même sens.
2. On mesure $\theta = 45°$ quand $\vec{m}$ a atteint sa nouvelle position d'équilibre, càd que $\vec{B}_{tot}$ est de même sens.

   Et donc $\vec{B}_{tot} = \vec{B}_{T_H} + \vec{B}_S = \begin{vmatrix} B_{tot}\cos\theta \\ B_{tot}\sin\theta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{B_{tot}}{\sqrt{2}} \\ \frac{B_{tot}}{\sqrt{2}} \end{vmatrix}$

   Donc $B_{T_H} = B_S$

   On peut donc mesurer le champ de la terre avec cette expérience.
3. On a donc $\vec{B}_{T_H} = \mu_0 \frac{N}{L} I$

VI EM5 LESGOOOOOOOOOOOOOOOOO

VI.1 1.1

On va choisir un système fermé qui contient le système ouvert et le faire se déplacer dans l'espace et le temps.

Soit $\Sigma^\star$ un système fermé entre deux sections. Soit $\Sigma^\star(t + dt)$. La largeur de la tranche de $\Sigma^\star$

$\Sigma^\star$ est un système fermé, donc par conservation de la charge, $q_{\Sigma^\star}(t + dt) - q_{\Sigma^\star} = 0$

Et donc $[dq_s + q_\sigma(t + dt)] - [dq_s + q_\sigma(t)] = 0$

$Sdx[\rho(t + dt) - rho(t)] - j(x)Sdt + j(x + dx)Sdt = 0$

$\dfrac{\partial\rho}{\partial t}dtdx + \dfrac{\partial j}{\partial x}dxdt = 0$

et Donc $\dfrac{\partial\rho}{\partial t} + \dfrac{\partial j}{\partial x} = 0$

Donnons un exemple de grandeur qui n'est pas conservative. L'entropie n'est pas conservative, elle est créé !

VI.2 2

Ce que montrent les équations de Maxwell, c'est que si on connait $div\vec{A}$ et $\vec{rot}(\vec{A})$, alors on peut connaître $\vec{A}$ tout entier. Et c'est beau.

VI.3 2.2

On veut retrouver $\dfrac{\partial\rho}{\partial t} + div\vec{j} = 0$ avec les équations de Maxwell-Ampère et de Maxwell-Gauss.

$div(\vec{rot}(\vec{B})) = \vec{\nabla} \cdot \left(\vec{\nabla} \wedge \vec{B}\right) = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial B_z}{\partial y} - \dfrac{\partial B_y}{\partial z}\right) + \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial B_x}{\partial z} - \dfrac{\partial B_z}{\partial x}\right) + \dfrac{\partial}{\partial z}\left(\dfrac{\partial B_y}{\partial x} - \dfrac{\partial B_x}{\partial y}\right)$

Or la dérivation commute. Donc $div(\vec{rot}(\vec{B})) = 0$ pour tout champ $\vec{B}$

Donc en faisant le *div* de l'équation de Maxwell-Ampère, on obtient :

$div(\vec{rot}(\vec{B})) = 0 = div\left(\mu_0\vec{j} + \mu_0\varepsilon_0\dfrac{\partial E}{\partial t}\right)$

Or $div\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$ par Maxwell-Gauss.

Donc $0 = \mu_0 div\vec{j} + \mu_0\dfrac{\partial\rho}{\partial t}$

VI.4 3.1

On a que $div\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$ et donc : $\iiint div\vec{E}d\tau = \oint\int \vec{E}d\vec{S}$ avec M dans le volume V délimité par une surface fermée S par Green-Ostrogradsky.

Or $\iiint div\vec{E}d\tau = \iiint \frac{\rho(M)}{\varepsilon_0}d\tau = \oint\int \vec{E}d\vec{S}$

D'où le théorème de Gauss.

VI.5 3.2

Flux conservatif veut dire que le flux entrant dans une surface fermée est égal au flux sortant de dccette surface

On a que $div\vec{B} = 0$ et donc : $\iiint div\vec{B}d\tau = \oint\int \vec{B}d\vec{S}$ avec M dans le volume V délimité par une surface fermée S par Green-Ostrogradsky.

Or $\iiint div\vec{B}d\tau = \iiint 0d\tau = \oint\int \vec{E}d\vec{S}$

Le champ $\vec{B}$ ne diverge pas à partir de ses sources (différent de $\vec{E}$)

Maxwell-Flux reste valable aussi en dynamique (en régime non-stationnaire).

VI.6 3.3

$\iint\limits_{(S)} \vec{rot}(\vec{B}).d\vec{S} = \oint\limits_{(C)} \vec{B}d\vec{l}$ avec (C) le contour fermé sur lequel s'appuie (S)

$= \iint_{(S)} \mu_0\vec{j}d\vec{S} + \iint_{(S)} \mu_0\varepsilon_0\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t}d\vec{S} = \mu_0 I_{(S)} + \mu_0 I_{depl}$ avec $I_{depl} = \iint_S \varepsilon_0\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t}d\vec{S}$

On obtient le théorème d'Ampère généralisé : $\oint_{(C)} \vec{B}d\vec{l} = \mu_0 I_{(S)} + \mu_0 I_{depl}$

VI.7 3.4

On intègre l'équation de Maxwell-Faraday sur une surface (S) : $\iint_{(S)} \vec{rot}(\vec{E})d\vec{S} = \oint \vec{E}d\vec{l} = \iint -\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t}d\vec{S} = -\dfrac{\partial}{\partial t}\iint \vec{B}d\vec{S} = -\dfrac{\partial\phi_b}{\partial t}$

Quand le champ $\vec{B}(t)$ varie, il apparaît une circulation non-nulle du champ $\vec{E}$ le long d'un contour fermé. (En statique, on aurait $\vec{E} = -\vec{grad}(V) \Leftrightarrow \oint \vec{E}d\vec{l} = \oint -\vec{grad}(V)d\vec{l} = -[V]_A^A = 0$)

On retrouve hors statique la loi de Faraday qui correspond au phénomène d'induction : $\oint \vec{E}d\vec{l} = e_{ind} = -\frac{d\phi_B}{dt}$

VI.8 Application 1

1. On utilisera l'équation de Maxwell-Ampère : $\vec{rot}(\vec{B}) = \mu_0\vec{j} + \mu_0\varepsilon_0\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t}$. Il n'y a pas de courant entre les armatures, donc $\vec{rot}\vec{B} = \mu_0\varepsilon_0\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t}$

2. On a des invariances de translation selon r (tant qu'il est grandement inférieur à R pour négliger l'effet de bord, on le considérera donc comme un paramètre) et rotation selon θ. Donc $\|\vec{B}\|(M) = \|\vec{B}\|(r,z)$. On se placera alors en coordonnées cylindriques.

Sur les symétries : le plan $(M, \vec{e}_r, \vec{e}_z)$ est un plan de symétrie de D et de $\vec{E}$ donc le champ magnéfique sera selon $\vec{e}_\theta$

3. On va donc avoir $\mu_0\varepsilon_0\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t} = -\mu_0\varepsilon_0 E_0\omega\sin(\omega t)\vec{e}_z$ qui est égal à $r\vec{o}t\vec{B}\cdot\vec{e}_z = \frac{1}{r}\dfrac{\partial rB_\theta}{\partial r} - \frac{1}{r}\dfrac{\partial B_r}{\partial\theta}$

Et donc $\frac{1}{r}\dfrac{d}{dr}(rB_\theta) = -\mu_0\varepsilon_0 E_0\omega\sin(\omega t)$

$\dfrac{d}{dr}(rB_\theta) = -\mu_0\varepsilon_0 E_0 r\omega\sin(\omega t)$

en primitivant : $rB_\theta(r) = -\mu_0\varepsilon_0 E_0\frac{r^2}{2}\omega\sin(\omega t)$ sans constante d'intégration car sinon le champ divergerait en 0, ce qui est incohérent.

Donc $\vec{B} = -\mu_0\varepsilon_0 E_0\omega\frac{r}{2}\sin(\omega t)\vec{e}_\theta$

VI.9 4.1

Maxwell-Gauss et Maxwell-Thomson ne changent pas en stationnaire, n'ayant pas de dépendance temporelle.

Pour Maxwell-Faraday : $r\vec{o}t(\vec{E}) = \vec{0}$ qui donne que $E = -gr\vec{a}d(V)$

Pour Maxwell-Ampère : $r\vec{o}t(\vec{B}) = \mu_0\vec{j}$ qui permet de retrouver le théorème d'Ampère

VI.10 5.1

On peut se placer dans l'ARQS quand on peut négliger le temps de retard τ à la propagation du signal dans le circuit par rapport au temps caractéristique de variation des signaux T_{signal}.

Avec un circuit de longueur L : $\tau = \frac{L}{c}$ (enfin, $\frac{2}{3}c$ plus rigoureusement.)

On veut donc $\frac{L}{C} \ll T_{signal} = \frac{1}{f_{signal}} \Leftrightarrow f_{signal} \ll \frac{c}{L}$ ou si on peut négliger la taille du circuit devant la longueur d'onde du signal : $L \ll \lambda_{signal} = \frac{c}{f_{signal}}$

VI.11 5.2

On a $\epsilon_0\mu_0 = \frac{1}{c^2}$

On a en termes d'ordres de grandeur $\left[\mu_0\varepsilon_0\dfrac{\partial E}{\partial t}\right] \sim \frac{|E|}{c^2T}$ or $\left[r\vec{o}t\vec{E}\right] \sim \frac{E}{L}$

On a $\left[|r\vec{o}t\vec{B}\right] \sim \frac{|B|}{L}$ or $\left[| -\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t}\right] \sim \frac{B}{T}$

Donc $\left[|r\vec{o}t\vec{B}\right] \sim \frac{|B}{L}$

Le terme de déplacement est négligé dans l'ARQS, on retrouve donc dans l'ARQS et donc Maxwell-Ampère stationnaire.

VII EM6 : Energie du champ électromagnétique, cours intégral en ces lieux

Energies associées à la présence de champs $(\vec{E}, \vec{B})$ dans certains systèmes :

On a déjà vu l'énergie emmagasinée dans une bobine : $\mathcal{E}_{mag} = \frac{1}{2}Li^2$

On a déjà vu l'énergie emmagasinée dans un condensateur : $\mathcal{E}_{elec} = \frac{1}{2}Cu^2$

On veut savoir si on peut obtenir des expressions pareilles ailleurs, en faisant les liens avec les champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$.

VII.1 Bilan d'énergie électromagnétique

Puissance cédée ou fournie par le champ à une charge (un porteur de charge)

Si on a une particule chargée q_i avec une vitesse $\vec{v}_i$ dans un référentiel $\mathcal{R}$ donné, dans une zone de l'espace où existe un champ $(\vec{E}, \vec{B})$ (pas forcément créé par la charge q_i).

Si on veut étudier les forces s'appliquant mécaniquement sur la charge, on doit écrire la force de Lorentz et surtout sa puissance :

$\mathcal{P}_{L_i} = \vec{F}_{L_i} \cdot \vec{v}_i = \left[q_i(\vec{E} + \vec{v}_i \wedge \vec{B})\right] \cdot \vec{v}_i = q_i \vec{v}_i \cdot \vec{E}$

Donc seul $\vec{E}$ fournit de la puissance aux charges.

Puissance volumique cédée par le champ aux porteurs de charges

Soit un volume de l'espace $d\tau$ avec des charges de type q_i, q_j de vitesses repectives $\vec{v}_i$, $\vec{v}_j$, chaque type étant distinct. Dans un élément de volume $d\tau$, on note n_i la densité volumique de porteurs de charges de type i

Il y a un nombre $dN_i = n_i d\tau$ de porteurs de charges de type i dans $d\tau$

Donc la puissance totale cédée par le champ $\vec{E}$ à tousles porteurs de charge de $d\tau$ est :

$d\mathcal{P} = \sum\limits_i dN_i \mathcal{P}_{L_i} = \sum\limits_i q_i \vec{v}_i \cdot \vec{E} d\tau = \vec{j} \cdot \vec{E} d\tau$

En effet, $\vec{j} = \sum\limits_i q_i \vec{v}_i$ est la densité volumique de courant

Si on veut la puissance volumique cédée par le champ aux charges :

$\frac{d\mathcal{P}}{d\tau} = \vec{j} \cdot \vec{E}$

Quelques remarques

1. Seules les charges mobiles reçoivent de l'énergie du champ électromagnétique.
2. Le signe de $\frac{d\mathcal{P}}{d\tau}$ est le signe de $\vec{j} \cdot \vec{E}$:
   — Si $\vec{j} \cdot \vec{E} > 0$: le champ fait "bouger les charges", il leur fournit de l'énergie
   — Si $\vec{j} \cdot \vec{E} < 0$: ce sont les charges qui fournissent de l'énergie au champ

Equation locale de Poynting

Normalement, on devrait nous la fournir, mais c'est quand même bien de la retenir par coeur parce que c'est pas totalement sûr que ça soit donné. Elle se démontre à partir des équations de Maxwell, mais la démonstration est hors-programme.

Considérons une distribution de charge et de courant $(\rho, \vec{j})$ créant un champ $(\vec{E}, \vec{B})$ dans une zone de l'espace.

$(\rho, \vec{E}, \vec{j}, \vec{B})$ sont reliés par les équations de Maxwell.

Si on utilise Maxwell-Ampère : $\vec{j} \cdot \vec{E} = \left[\dfrac{1}{\mu_0} \vec{rot}\vec{B} - \varepsilon_0 \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right] \cdot \vec{E} = -\varepsilon_0 \dfrac{\partial E^2}{\partial t} + \frac{1}{\mu_0} \vec{rot}\vec{B} \cdot \vec{E}$

$\text{div}(\vec{E} \wedge \vec{B}) = \vec{B} \cdot \vec{rot}\vec{E} - \vec{E} \cdot \vec{rot}\vec{B}$

Et donc $\vec{j} \cdot \vec{E} = -\varepsilon_0 \vec{E} \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{1}{\mu_0}\left[\vec{B} \cdot \vec{rot}\vec{E} - div(\vec{E} \wedge \vec{B})\right]$

$= -\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\varepsilon_0}{2}\vec{E}^2 + \frac{1}{2\mu_0}\vec{B}^2\right] - div\left(\frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}\right)$

D'où l'équation locale de Poynting :

$\text{div}\left(\frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}\right) + \dfrac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\varepsilon_0}{2}\vec{E}^2 + \frac{1}{2\mu_0}\vec{B}^2\right] = -\vec{j} \cdot \vec{E}$

On note $\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}$ le vecteur de Poynting, $u_{em} = \frac{\varepsilon_0}{2}\vec{E}^2 + \frac{1}{2\mu_0}\vec{B}^2$ la densité volumique d'énergie électromagnétique

On peut faire une analogie avec l'équation de conservation de la charge $\mathrm{div}(\vec{j}) + \dfrac{\partial \rho}{\partial t} = 0$, la somme du div d'un vecteur dont le flux cause une variation de ρ et d'une dérivée temporalle d'une grandeur dont on sait l'évolution temporelle locale, somme qui donne le terme source nul pour la charge.

VII.2 Grandeurs énergétiques associées à un champ

Version intégrale de l'équation de Poynting

En intégrant l'équation sur un volume (V), de surface extérieure (S), on aura :

$\iiint_V div\vec{\Pi}d\tau = \oint\int_S \vec{\Pi}d\vec{S}$ = flux sortant du vecteur de Poynting (au travers de la surface (S))

$\iiint_V \dfrac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\varepsilon_0}{2}E^2 + \frac{1}{2\mu_0}B^2\right]d\tau = \dfrac{\partial}{\partial t}\iiint_V \frac{\varepsilon_0}{2}E^2 + \frac{1}{2\mu_0}B^2 d\tau$ = variation temporelle de l'énergie électromagnétique contenue dans le volume (V), à cause de la présence de $(\vec{E}, \vec{B})$

$\iiint_V -\vec{j}\cdot\vec{E}d\tau = \iiint_V -\frac{d\mathcal{P}}{d\tau}d\tau = -\mathcal{P}$ = opposé de la puissance cédée par le champ aux charges présentes dans le volume (V)

Multiplions par dt : $\Phi_S(\vec{\Pi})dt + du_{em} = -\mathcal{P}dt$

$du_{em} = -\Phi_S(\vec{\Pi})dt - \mathcal{P}dt$ où du_{em} est la variation d'énergie électromagnétique, $\varphi_S(\vec{\Pi})dt$ est la quantité d'énergie sortante par flux de $\vec{\Pi}$, donc par rayonnement et $\mathcal{P}dt$ est la quantité d'énergie fournie par le champ aux charges.

Densité volumique d'énergie

$u_{em} = \frac{\varepsilon_0}{2}E^2 + \frac{1}{2\mu_0}B^2$

Faisons la vérification dimensionnelle : $\left[\frac{\varepsilon_0}{2}E^2\right] = [\varepsilon_0 E][E] = \left[\frac{Q}{L^2}\right][E]$, par la force de Lorentz, $[QE]$ est une force et $[E]L^2 = \frac{[Q]}{[\varepsilon_0]}$ par le théorème de Gauss

Donc $\left[\frac{\varepsilon_0}{2}E^2\right] = \frac{M.L.T^{-2}L}{L^3}$ et donc une énergie sur un volume.

$\left[\frac{1}{2\mu_0}B^2\right]$: d'après la force de Lorentz, on a que $[F] = [Q][B]LT^{-1}$ et on a par théorème d'Ampère que $[B]L = [\mu_0][I] = [\mu_0]\frac{[Q]}{T}$

Donc $\left[\frac{1}{2\mu_0}B^2\right] = \frac{[Q][B]}{TL} = \frac{[F]}{TLLT^{-1}} = \frac{[F]L}{L^3}$ qui est aussi une énergie sur un volume.

Donc on a bien que u_{em} est une énergie volumique liée à la présence des champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$

Energies électromagnétiques macroscopiques reliées à u_{em} :

- énergie magnétique "emmagasinée" dans une bobine : $U_{mg} = \frac{1}{2}Li^2$: voir l'exercice 1 du TD
- énergie électrique "emmagasinée" dans un condensateur : $U_[elec] = \frac{1}{2}Cu^2$
  Prenons un condensateur plan infini, avec des armatures de surface $S \gg e^2$. Le champ à l'intérieur est $\vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{e}_z = \frac{Q}{S\varepsilon_0}\vec{e}_z$
  Lien avec la tension $U = \Delta V = E.e = \frac{Qe}{S\varepsilon_0}$
  Donc si on écrit l'énergie électrique dans tout le folume intérieur au condensateur : $u_{em}Se = \frac{\varepsilon_0 E^2 Se}{2} = \frac{\varepsilon_0}{2}\left(\frac{Q}{S\varepsilon_0}\right)^2 Se = \frac{\varepsilon_0}{2e}\left(\frac{Qe}{S\varepsilon_0}\right)^2 S = \frac{1}{2}Cu^2$

Dans ces deux modèles simples, on obtient que la formule de u_{em} est compatible.

Vecteur de Poynting et puissance rayonnée

Le vecteur de Poynting représente à quel point il y a un rayonnement du champ électromagnétique au travers d'une surface, donc la densité surfacique de puissance rayonnée par le champ électromagnétique :

$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E}\wedge\vec{B}}{\mu_0}$

Donc la puissance rayonnée au travers d'une surface (S) orientée s'écrit $\Phi = \iint_S \vec{\Pi}\cdot d\vec{S} = \iint_s \frac{\vec{E}\wedge\vec{B}}{\mu_0}\cdot d\vec{S}$ (en W)

Donc la puissance rayonée est nulle si $\vec{E}$ ou $\vec{B}$ est nul.

Applications : Prenons un LASER, qui a une puissance de $1mW$, sur une section avec un diamètre de $2mm$. Calculer la norme de $\vec{\Pi}$

$\|\vec{\Pi}\| \simeq \frac{\mathcal{P}}{S} \simeq \frac{\mathcal{P}}{\pi\frac{D^2}{4}} \sim \frac{10^{-3}}{\pi 10^{-6}} \sim 0.3 \times 10^3 \sim 300W.m^{-2}$

VIII Bilan énergétique dans un conducteur dit ohmique

Loi d'Ohm locale

Dans un milieu possédant des porteurs de charge mobile (en densité volumqiue n), le champ $\vec{E}$ appliqué met les charges en mouvement. C'est un milieu "conducteur", qui permet aux charges de se déplacer.

Expérimentalement, on constate que la densité volumique de courant $\vec{j}$ est proportionnelle à $\vec{E}$: $\vec{j} = \gamma\vec{E}$ avec γ la conductivité du matériau

(L'unité de γ est : $A.m^{-2}.V^{-1}.m = A.V^{-1}.m^{-1} = \Omega^{-1}.m^{-1} = S.m^{-1}$)

Lien avec la loi d'Ohm intégrale : Prenons un cylindre de longueur l, de section S. Ses extrémités sont A et B. $\vec{E}$ et donc $\vec{j}$ sont de A vers B selon l'axe x.

Pour un conducteur rectiligne (axe Ox, section S, longueur l) de conductivité γ soumis à un champ appliqué $\vec{E}$ uniforme.

$I = \iint_S \vec{j}d\vec{S} = jS = \gamma ES$ où $\vec{E} = -\vec{grad}(V) = E\vec{e}_x = -\dfrac{dV}{dx}$

Donc $E[x_b - x_a] = -[V(x)]_A^B = V_a - V_b = U$

Donc $I = \gamma S\frac{U}{l}$ et donc $U = \frac{l}{\gamma S}I$

Donc la résistance de la portion de section S de longueur l est $R = \frac{1}{\gamma}\frac{l}{S}$, de plus la conductance de la portion sera $G = \gamma\frac{S}{l}$

Puissance transférée aux porteurs de charges

Densité volumique de puissance cédée par $\vec{E}$ aux charges : $\dfrac{\mathcal{P}}{dt} = \vec{j}\cdot\vec{E} = \gamma E^2 > 0$

Donc dans un matériau conducteur, les charges reçoivent de la puissance du champ

Dans tout le volume du conducter (l, S) : $\mathcal{P} = \gamma E^2 Sl$

et comme $E = \frac{U}{l}$, on a : $\mathcal{P} = \gamma\frac{U^2}{l^2}Sl = \gamma\frac{S}{l}U^2 = \frac{1}{R}U^2 = RI^2$

Donc $\mathcal{P} = RI^2 \equiv \frac{U^2}{R}$ qui la puissance "dissipée par effet joule", la puissance cédée par $\vec{E}$ aux charges.

Puissance rayonnée (au travers des parois du conducteur)

Pour un conducteur cylindrique d'axe de symétrie Oz, de section S et de longueur l. On a un champ $\vec{E} = E\vec{e}_z$ uniforme, un vecteur $\vec{j} = \gamma E\vec{e}_z$ uniforme selon le même axe. Déterminons le champ magnétique engendré par le courant :

On a des invariances par translation selon z et par rotation selon θ. Donc $\|\vec{B}\| = B(r)$

On a que $(M, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ est plan de symétrie du courant, donc $\vec{B} = B\vec{e}_\theta$

Appliquons le théorème d'Ampère à un contour circulaire centré sur Oz :

$\oint \vec{B}d\vec{l} = \mu_0 I_{enl} \Rightarrow \int_0^{2\pi} B(r)rd\theta = \mu_0 \iint \vec{j}d\vec{S}$

$\Rightarrow 2\pi rB(r) = \mu_0 j\pi r^2$

Et donc $\vec{B}(r) = \frac{\mu_0}{2}jr\vec{e}_\theta$

Donc $\vec{\Pi}$ sera en surface du conducteur.

$\vec{\Pi} = \frac{E\vec{e}_z \wedge \mu_0 ja\vec{e}_\theta}{2\mu_0} = -\frac{Eja}{2}\vec{e}_r = -\frac{j^2a}{2\gamma}$ en se servant de $E = \frac{j}{\gamma}$. On aurait pu utiliser $I = \pi aj^2$.

$\vec{\Pi}$ est bien selon $-\vec{e}_r$.

Donc la puissance rayonnée au travers de toute la surface du conducteur est :

$\Phi = \iint_{paroi} \vec{\Pi}d\vec{S} + \iint_{extremite} \vec{\Pi}d\vec{S} + \iint_{extremite} \vec{\Pi}d\vec{S}$

$\Phi = \iint_{paroi} -\frac{j^2 a}{2\gamma}\vec{e}_r \cdot (ad\theta dz\vec{e}_r) = -\frac{j^2 a}{2\gamma}a2\pi l = -\frac{j^2\pi a^2 l}{\gamma} = -\frac{I^2 l}{\pi a^2\gamma} = -RI^2 = -\mathcal{P}_{joule}$

En régime stationnaire, la puissance électromagnétique entrant dans le conducteur (par rayonnement) est égale à la puissance dissipée par effet Joule.

Chapitre III

TS

I TS1

I.1 Application 1

1. Ce signal n'admet pas de composante continue (rien dans la fréquence 0Hz) ; sa valeur moyenne est $0 = \langle V_0 + \sum V_k cos(k\omega t + \varphi_k)\rangle$.
2. On peut l'obtenir en regardant la période entre les différents pics. On trouve alors une fréquence de 50Hz. On a trois harmoniques autres. Ainsi : $u_e(t) = 0 + V_1 \cos(2\pi ft + \varphi_1) + V_2 \cos(4\pi ft + \varphi_2) + V_3 \cos(6\pi ft + \varphi_3) + V_5 \cos(10\pi ft + \varphi_5)$, sans qu'on ait de connaissances sur les phases.
3. Ce signal est pair, donc toutes ses phases sont nulles : $u_e(t) = 0 + V_1 \cos(2\pi ft) + V_2 \cos(4\pi ft) + V_3 \cos(6\pi ft) + V_5 \cos(10\pi ft)$
4. On trouve $\dfrac{169}{2}$

I.2 Application 2

1. On voit que la fonction en dents de scie est impaire, donc sa décomposition en série de Fourier n'a que des termes en sin.
2. Un voltmètre en mode DC (Direct Current, contre Alternative Current) donc en courant continu, mesure alors la valeur moyenne. Donc dans ce cas, il mesurera 0. En mode AC, il mesurera la valeur efficace, donc la moyenne du signal au carré.
3. Celle dont les composantes décroissent le plus rapidement est la fonction en triangles, qui a donc le moins de discontinuités.

I.3 Application 3

1. On a $H(w) = \frac{R}{R+jL\omega} = \frac{1}{1+j\omega\frac{L}{R}}$, et on pose $\omega_c = \frac{L}{R}$. On a donc une fonction de transfert de la forme : $H(\omega) = \frac{1}{1+\frac{\omega}{\omega_c}}$. On fait l'application numérique et on obtient $f_c = 10kHz$
2. On reconnaît la fonction de transfert d'un filtre passe-bas d'ordre 1.
3. On obtient un module de $|H(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1+(\frac{\omega}{\omega_c})^2}}$ et un déphasage de $\varphi = -\arg(1+j\frac{\omega}{\omega_c}) = -Arctan(\frac{\omega}{\omega_c})$

   On les évalue dans les trois cas proposés : $\begin{cases} |H(\omega_1)| &= \frac{1}{1+\frac{1}{100}} & \simeq 1 \\ \varphi_1 &= -\arctan(0,1) & \simeq -0,1 \end{cases}$

   $\begin{cases} |H(\omega_2)| &= \frac{1}{1+\frac{1}{1}} = \frac{1}{\sqrt{2}} & \simeq 0,72 \\ \varphi_2 &= -\arctan(1) & \simeq -\frac{\pi}{4} \end{cases}$

$$\begin{cases} |H(\omega_3)| & = & \frac{1}{1+100} & \simeq \frac{1}{10} \\ \varphi_3 & = & -\arctan(10) & \simeq -\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

4.
5.
6.
7.
8.
9.
10. Temporellement, on aura un début de charge et de décharge sur chaque demi-période, on aura donc un signal quasi-triangulaire.
11. À hautes fréquences, on aura que $H(\omega) \sim \frac{\omega_c}{\omega}$ qui est un pseudo-intégrateur (puisqu'il ne l'est qu'à hautes fréquences). Un demi-créneau va donner un signal affine.
12. On a dans cette autre filtre que $H(\omega) = \dfrac{1}{1 - j\frac{\omega_c}{\omega}} = \dfrac{1}{1 - j\frac{f_c}{f}}$. On a donc un diagramme de Bode avec un dérivateur, et donc un signal à 50 kHz serait transmis presque à 100 pourcents et les harmoniques suivants seront vraiment très bien transmis. On récupérera le même signal en entrée et en sortie. Cependant, il ne sera plus centré en $\frac{V_0}{2}$, il sera centré en 0, sans composante continue.
13. Le condensateur à hautes fréquences se comporte comme un fil, et donc on aura bien une sortie qui est globalement l'entrée. Cela ne fonctionne pas pour la composante continue, qui est à trop basse fréquence.
14. Si $f \ll f_c$, alors $H \sim \frac{1}{\sqrt{1+\frac{f_c}{f}}} \sim \frac{1}{\sqrt{20^2}} = \ll 1$ et on a un signal atténué de dérivateur en basses fréquences.

I.4 Application 4

1. On fait un diviseur de tension dans la maille 1 : $u_s = \frac{Z_L}{2Z_L} u_1 = \dfrac{1}{2} u_1$

   On fait ensuite un diviseur de tension dans la maille globale (où la maille 1 a une impédance équivalente) : $u_1 = \frac{Z_{eq}}{Z_{eq}+R} u_e = \frac{1}{1+\frac{R}{Z_{eq}}} u_e$.

   Or $Z_{eq} = Y_c + 2Y_L = jC\omega + \frac{2}{jL\omega}$

   Donc : $u_1 = \frac{1}{1+R(jC\omega+\dfrac{2}{jC\omega})} u_e$. On en tire : $u_s = \frac{\frac{1}{2}}{1+j\sqrt{\frac{C}{2L}}(\sqrt{2LC}\omega - \frac{1}{\sqrt{2LC}\omega})} u_e$

   On pose alors le facteur de qualité $Q = R\sqrt{\frac{C}{2L}}$ et la pulsation propre $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{2LC}}$ et on a $H_0 = \frac{1}{2}$
2. À haute fréquence, on a que : $H \sim \dfrac{H_0}{jQ\frac{\omega}{\omega_0}} \sim \frac{\omega_0 H_0}{jQ\omega} \sim \frac{\omega_0 H_0}{Q} \times \frac{1}{j\omega}$ qui est un comportement intégrateur.

   À basse fréquence, on a que : $H \sim -\dfrac{H_0}{jQ\frac{\omega_0}{\omega}} \sim \frac{j\omega H_0}{Q\omega_0} \sim \frac{H_0}{Q\omega_0} \times j\omega$ qui est un comportement dérivateur.

   On a donc un filtre passe-bande d'ordre 2, dont le point maximal est H_0.
3. La définition de la bande passante à -3dB est : $[\omega_1, \omega_2]$ telles que $|H(\omega_{1,2})| = \frac{H_0}{\sqrt{2}}$. On rappelle la formule $\Delta\omega = \dfrac{\omega_0}{Q}$ pour la longueur de la bande passante.

   On les trouve en résolvant $|H(\omega)| = \frac{H_0}{\sqrt{2}}$. On en tire rapidement l'équation $Q^2(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}) = 1 \Leftrightarrow Q(X - \frac{1}{X}) = \pm 1 \Leftrightarrow X^2 \pm \frac{1}{Q} X - 1 = 0$

   On a ces racines : $\pm\frac{1}{2Q} \pm \frac{1}{2}\sqrt{4 + \frac{1}{Q^2}}$

On élimine les solutions incompatibles avec le problème et on obtient : $\begin{cases} \omega_1 & = & \frac{\omega_0}{2Q} + \frac{\omega_0}{2}\sqrt{4+\frac{1}{Q^2}} \\ \omega_2 & = & -\frac{\omega_0}{2Q} + \frac{\omega_0}{2}\sqrt{4+\frac{1}{Q^2}} \end{cases}$

On a $\Delta f = \frac{f_0}{Q} = \frac{500}{50} = 10Hz$

4. On a que $s(t) \simeq |H(f_0)|\dfrac{2E}{\pi}\cos(2\pi f_0 t)$

   On multiplie d'un gros facteur la première harmonique. La sortie temporelle est un cosinus (on n'a plus que la première composante). On a extrait un des pics, mais ça aurait pu le faire sur n'importe quel harmonique.

II TS2

II.1 Application 1

1. On a un pic unique en f_0.
2. On a que $p(t) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} p_k\cos(2\pi k f_0 t + \varphi k) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} a_k\cos(2\pi k f_0 t) + \sum\limits_{k=1}^{+\infty} b_k\sin(2\pi k f_0 t)$ Or la fonction est paire donc $p(t) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} a_k\cos(2\pi k f_0 t)$ et on a que tous les a_k sont égaux à 1 d'après l'énoncé, donc, en rappelant que la valeur moyenne vaut $\dfrac{1}{2}$, on a que $p(t) = \frac{1}{2} + \cos(2\pi f_0 t) + \cos(4\pi f_0 t) + ...$
3. On a que $s_{ech}(t) = s(t)p(t) = s_0\cos(2\pi f_0 t)\left[\frac{1}{2} + \cos(2\pi f_0 t) + ...\right]$
   $= \frac{s_0}{2}\cos(2\pi f_0 t) + \frac{s_0}{2}[cos(2\pi(f_e - f_0)t) + \cos(2\pi(f_e + f_0)t)] + \frac{s_0}{2}[\cos(2\pi(2f_e - f_0)t) + \cos(2\pi(2f_E + f_0)t)] + ...$

Chapitre IV

Thermodynamique chimique

I TC1

I.1 Application 1

1. $\Delta H = nC_{pm}\Delta T \simeq 7,2kJ$
2. $\Delta T = \dfrac{\Delta H}{nC_{pm}} = \dfrac{Q_p}{nC_{pm}} \simeq 34°C$
3. $C_{pm} = \frac{7}{2}R \simeq 19J.K^{-1}.mol^{-1}$ puisque $U = \frac{3}{2}nRT$ pour un GP monoatomique, $U = \frac{5}{2}nRT$ pour un GP diatomique, or $H = U + nRT$ pour un GP, et comme on est dans le cas du diazote, $H = \frac{7}{2}nRT$

I.2 Application 2

1. Si on a $\frac{1}{2}O_{2(g)} + H_{2(g)} \to H_2O_{(g)}$, et qu'on a $\Delta n_{H_2O} = \xi = 1mol$
   Donc $\Delta H(T) = \xi\Delta_r H^0(T) = \Delta_r H^0(T) = -285kJ$
2. $O_2 + 2H_{2(g)} \to 2H_2O_{(g)}$, alors $\Delta_r H_2^0 = 2\Delta_r H^0$ et $\xi_2 = \dfrac{\Delta n_{H_2O}}{2}$ et donc $\xi_2 = \frac{1}{2}mol$ et enfin $\Delta H_2 = \xi_2\Delta_r H_2^0 = \Delta_r H^0 = -285kJ$

I.3 Application 3

On part de $\frac{1}{2}O_{2(g)} + H_{2(g)} \to H_2O_{(g)}$. On a à l'état final que $\xi = 1mol$ par un tableau d'avancement. On a alors $Q = \Delta H = \xi\Delta_r H^0 = -285kJ$ et donc que la transformation est exothermique.

I.4 3.2

En partant d'un état initial EI donné, avec un ΔH global vers l'état final EI.

EI est constitué de réactifs, peut-être d'espèces spectatrices et de produits. Tout est à la température T_1.

EF est constitué de produits, peut-être de réactifs et d'espèces spectatrices. Le tout à la température T_2.

On décompose la transformation en deux parties : d'abord la réaction chimique vers Eint, où toutes les espèces sont dans le même état qu'en EF, mais la température n'a pas varié. On a cette enthalpie : $\Delta H_1 = \xi\Delta_r h^0$.

Ensuite, on a la seconde transformation, sans réaction chimique mais avec toutes les espèces présentes et avec un changement de températures :

$$\Delta H_2 = \left[\sum_{ireactifswrestants} n_i C_{pmi}^0 + \sum_{jproduits} n_j C_{pmj}^0 + \sum_{kspectatrices} n_k C_{pmk}^0\right]\Delta T = C_{ptot}\Delta T$$

$\xi\Delta_r H^0 + C_{ptot}\Delta T = 0$ dans cette réaction.

I.5 Application 4

1. En proportions stoechiométriques, on a deux fois plus de H_2 que de O_2. On fait la même décomposition que précédemment, en deux transformations, une chimique et une thermique.
   À l'état intermédiaire, on n'a plus que $n = n(H_2)$ moles de H_2O, et c'est tout. Et donc $\Delta_r H^0(T_1)\xi$ et $\Delta_2 = nC^0_{pm}(H_2O)\Delta T$.
   Mais comme le cycle est adiabatique, $n\Delta_r H^0(T_1) + nC^0_{pm}(H_2O)(T_2 - T_1) = 0$
   Et donc $T_2 = T_1 + \dfrac{-\Delta_r H^0(T_1)}{C^0_{pm}(H_2O)} \simeq 7500°K$
2. On a nécessairement que $n(O_2) = \frac{0.8}{0.2}n(N_2) = \frac{1}{4}N_2$.
   Donc l'équation devient $n\Delta_r H^0(T_1) + (nC_{pm}(H_2O) + 2nC_{pm}(N_2))\,\Delta T = 0$, d'où $T_2 = 2900°K$

Tu sais comment Aladin gazeux va à Bagdad liquide ? En thalpie d echangement d'état.

I.6 Application 5

$CO_{2(g)}$ a une enthalpie de formation non-nulle puisqu'il ne s'agit pas d'un corps simple. Pour Cu_g, on a besoin de l'enthalpie massique de sublimation, multipliée par la la masse molaire du cuivre.

Pour le cuivre solide, l'enthalpie pour qu'il devienne solide à $298K$ est nulle. Pareil pour que H_2 devienne gazeux à cette température.

I.7 Démonstration de la Hess

$CH_{4(g)} + 2O_{2(g)} \leftrightarrow CO_{2(g)} + 2H_2O_{(g)}$ est réagencée en $C_{(gr)} + 2H_{2(g)} + 2O_{2(g)} \to C_{(gr)} + 2H_{2(g)} + O_{2(l)}$
(A) est la réaction de formation standard de de $CH_{4(g)}$
(C) est la réaction de formation standard de de $CH_{4(g)}$
(D) est la réaction de formation standard de de $H_2O_{(g)}$
Donc $\Delta_r H^0 = \Delta_r H^0(A) + \Delta_r H^0(B) + \Delta_r H^0(B) + \Delta_r H^0(C) + \Delta_r H^0(D) = -\Delta_f H^0(CH_{4(g)}) + 0 + \Delta_f H^0(CO_{2(g)}) + 2\Delta_f H^0(H_2O_{(g)})$

I.8 4.3 Influence de la température

Principe : Approximation d'Ellingham : connaissant une enthalpie standard de réaction à une température T_0 donnée, on considèrera que l'enthalpie standard à une autre température T est identique, en l'absence de changement d'état des réactifs et produits entre T_0 et T : $\Delta_r H^0(T) \simeq \Delta_r H^0(T_0)$

$\Delta_r H^0(T) = \Delta_r H^0(T_0) + \dfrac{\Delta_r H^0}{dT}|_{T_0}(T - T_0)$
avec $\dfrac{\Delta_r H^0}{dT} = \dfrac{\partial}{\partial T}\left(\dfrac{\partial H^0}{\partial \xi}\right) = \dfrac{\partial}{\partial \xi}\left(\dfrac{\partial H^0}{\partial T}\right) = \dfrac{\partial}{\partial \xi}C^0_p = \Delta_r C^0_p = \sum v_i C^0_p$
Et on néglige cette dernière partie le plus souvent.
Attention, en présence de changement d'état d'un des réactifs ou produits A_j : $A_{j(1)\to j(2)}$
$\Delta H = m\Delta_{1\to 2}h = Mn\Delta_{1\to 2} = \xi\,[M\Delta_{1\to 2}h] = \xi\Delta_{1\to 2}H^0$
$\Delta_r H^0$ par la réaction dans laquelle A_j change d'état (à T') :
$\Delta_r H^0(T') = \Delta_r H^0(T) + v_j M_j \Delta_{1\to 2}h$

Principe : Au passage d'une phase à l'autre, l'enthalpie de l'espèce j subit une discontinuité : l'enthalpie massique h_j subit une discontinuité de $\Delta h_{jj1\to 2}$ (définition de l'enthalpie massique de changement d'état), l'enthalpie molaire $H^0_{im}(T)$ une discontinuité de $\Delta_{r1\to 2}H^0_j$

Donc pour une réaction donnée $\sum v_i A_i = 0$, si une des espèces A_i change d'état entre T_0 et T on aura :
$\Delta_r H^0(T) = \Delta_r H^0(T_0) + v_j\Delta_{r1\to 2}H^0(j) = \Delta_r H^0(T_0) + v_j M_j \Delta h_{j1\to 2}$

I.9 Application 6 changement d'état de l'eau

1. $\Delta_r H^0(T = 100°C) = \Delta_r H^0(T = 25°C) + \Delta_{vap} H^0(H_2O)(+C_p^0(H_2O)_{(l)}(100 - 25))$
   $= \Delta_f H^0(H2O, T = 25°C) + M(H_2O)\Delta_{vap} h$
   $= -285.10^3 + 2260 \times 18 = -244.3 kJ.mol^{-1}$ et $-242 kJ.mol^{-1}$ en utilisant $\Delta_r C_p^0 \Delta T$