

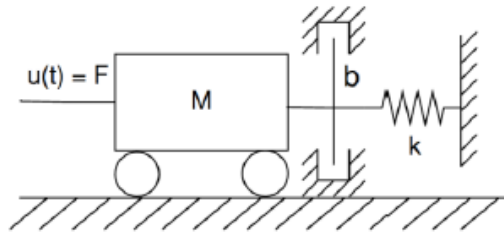
# Sprawozdanie - projekt

**Autorzy:**

**Jakub Piotrowicz, 197760**

**Albert Piątkowski, 197691**

Projekt 11. Dany jest układ wózka na sprężynie z tłumikiem i wejściem w postaci siły:



Należy wyprowadzić model układu oraz zaimplementować go w symulacji. Symulator powinien umożliwiać pobudzenie układu przynajmniej trzema rodzajami sygnałów wejściowych (prostokątny o skończonym czasie trwania, trójkątny, harmoniczny). Symulator powinien umożliwiać zmianę wszystkich parametrów układu oraz sygnałów wejściowych. Należy użyć metody Rungego-Kutty 4-go rzędu oraz metody Eulera oraz na wspólnym wykresie pokazać wyniki symulacji (położenia i prędkości wózka) z obu tych metod.

## Użyte biblioteki

- numpy
- matplotlib

Na podstawie polecenia stworzyliśmy równanie ruchu:

$$u(t) = F = M * \frac{d^2x}{dt^2} + b * \frac{dx}{dt} + kx$$

F – sygnał wejściowy

M – masa wózka

b – współczynnik tłumienia

k – współczynnik sprężystości

x - położenie wózka

## Metoda Eulere'a

Kroki:

1. Przekształcamy pierwsze równanie ruchu na:

$$a = \frac{F - b * v - k * x}{M}$$

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} - \text{przyspieszenie}$$

$$v = \frac{dx}{dt} - \text{prędkość}$$

Początkowe wartości  $v$  i  $x$  przyjmujemy jako 0.

2. Aktualizujemy wartości prędkości i położenia wózka

$$v_{nowe} = v_{poprz} + a * dt$$

$$x_{nowe} = x_{poprz} + v * dt$$

$dt$  - krok czasowy

3. Powtarzamy kroki do momentu przeliczenia całej długości trwania sygnału wejściowego

### Metoda Rungego-Kutty 4-go rzędu

Kroki:

1. Przekształcamy pierwsze równanie ruchu na:

$$a(x, v, t) = \frac{F - b * v - k * x}{M}$$

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} - \text{przyspieszenie}$$

$$v = \frac{dx}{dt} - \text{prędkość}$$

Początkowe wartości  $v$  i  $x$  przyjmujemy jako 0.

2. Obliczamy współczynniki  $k_1, k_2, k_3, k_4$  zarówno dla prędkości ( $v$ ), jak i położenia ( $x$ )

$$k_1v = a(x, v, t) * dt$$

$$k_1x = v * dt$$

$$k_2v = a\left(x + \frac{k_1x}{2}, v + \frac{k_1v}{2}, t + \frac{dt}{2}\right) * dt$$

$$k_2x = \left(v + \frac{k_1v}{2}\right) * dt$$

$$k_3v = a\left(x + \frac{k_2x}{2}, v + \frac{k_2v}{2}, t + \frac{dt}{2}\right) * dt$$

$$k_3x = \left(v + \frac{k_2v}{2}\right) * dt$$

$$k_4v = a(x + k_3x, v + k_3v, t + dt) * dt$$

$$k_4x = (v + k_3v) * dt$$

$dt$  - krok czasowy

### 3. Aktualizujemy wartości prędkości i położenia

$$v_{nowe} = v_{poprz} + \frac{k1v + 2 * k2v + 2 * k3v + k4v}{6}$$
$$x_{nowe} = x_{poprz} + \frac{k1x + 2 * k2x + 2 * k3x + k4x}{6}$$

### 4. Powtarzamy kroki do momentu przeliczenia całej długości trwania sygnału wejściowego

#### Wyświetlanie wyników

Wyniki są wykreślane na 2 wykresach: położenia i prędkości, za pomocą biblioteki matplotlib. Wyświetlany jest także sygnał wejściowy. Parametry układu są zmieniane przez suwaki. Możliwy jest wybór między 5 typami sygnałów wejściowych.

#### Różnice między metodami

Metoda Rungego-Kutty rzędu 4 jest bardziej dokładna niż metoda Eulera. Jednak widoczność tych różnic jest zależna od wielkości kroku czasowego (dt). Dla większego kroku (od ok. 0.1s) różnice stają się widoczne. Zaś dla mniejszych kroków (ok. 0.001s), różnice w wynikach są minimalne, niemal niewidoczne na wykresie.

#### Wpływ parametrów układu na prędkość i położenie wózka, w zależności od sygnału wejściowego

- Sygnał skokowy

Wykres położenia wózka na początku sygnału rośnie. Następnie, po okresie coraz mniejszych oscylacji, osiąga stałą wartość. W przypadku prędkości, po nastaniu sygnału wejściowego, następują malejące oscylacje, po czym sygnał stabilizuje się na 0.

Zwiększenie masy wózka powoduje wydłużenie okresu oscylacji na obu wykresach.

Zwiększenie współczynnika sprężystości zmniejsza okresy poszczególnych oscylacji oraz ich wychylenia. Wzrost tłumienia zmniejsza wychylenia oscylacji i czas ustalania.

- Sygnał trójkątny

Po pojawieniu się sygnału wejściowego, nastąpią zniekształcone oscylacje. Jednak po zakończeniu trwania oscylacji, na wyjściu otrzymamy sygnał harmoniczny, zarówno na wykresie prędkości, jak i położenia. Oscylacje prędkości wózka są bardziej zniekształcone.

Większa masa wózka oznacza dłuższe: okresy oscylacji i czas ustalania. Zwiększenie sprężystości powoduje zmniejszenie okresu i wychyleń poszczególnych oscylacji. Zwiększenie tłumienia powoduje redukcję drgań. Zwiększenie częstotliwości sprawia, że oba wykresy bardziej przypominają kształtem odpowiedź skokową. Zmiana wypełnienia powoduje nachylenie" końcowego sygnału harmonicznego w przypadku położenia. W przypadku prędkości, powoduje zaokrąglenie/wyostrzenie wychyleń.

- Sygnał harmoniczny

Po początkowych, malejących z czasem oscylacjach prędkości i położenia, otrzymujemy ostatecznie sygnał harmoniczny dla obu wykresów. W odróżnieniu od pozostałych sygnałów wejściowych, w tym przypadku wykres położenia będzie oscylował w okolicach 0, podobnie do prędkości.

Zwiększenie masy wózka powoduje wydłużenie okresów początkowych oscylacji. Większe tłumienie redukuje amplitudy oscylacji na obu sygnałach wyjściowych. Zwiększenie częstotliwości, zmniejsza amplitudy drgań na obu wykresach, a także wpływ pozostałych atrybutów na sygnały wyjściowe.

- Sygnał prostokątny

Po początkowych, malejących z czasem oscylacjach prędkości i położenia, otrzymujemy ostatecznie: sygnał harmoniczny w przypadku położenia wózka i podobny do trójkątnego dla prędkości. Wykres prędkości oscyluje w okolicach 0.

Zwiększenie masy powoduje wydłużenie okresów i wzrost wychyleń początkowych oscylacji i czasu ustalania. Tłumienie redukuje amplitudy wszystkich oscylacji. Wzrost częstotliwości także zmniejsza te amplitudy oraz wpływ pozostałych atrybutów. Wzrost wypełnienia zwiększa maksymalne przeregulowanie sygnału oraz uczyni górne fragmenty stanu ustalonego położenia bardziej zaostrozonymi. Dla prędkości fragmenty te będą zaokrąglone. Zmniejszenie wypełnienia odwróci tę zależność.

- Sygnał prostokątny o skończonym czasie trwania

Sygnał ma dowolny czas rozpoczęcia i trwania. Wykresy wyjściowe będą przypominać wykresy dla sygnału skokowego, w czasie trwania impulsu. Po zakończeniu impulsu następują oscylacje przeciwne do początkowych, które maleją aż do ustabilizowania na 0. Zwiększenie masy powoduje wydłużenie okresów oscylacji i czasu stabilizacji. Wzrost sprężystości zmniejsza okresy wszystkich drgań oraz ich amplitudy. Duży współczynnik tłumienia redukuje wszystkie drgania. Ma on większy wpływ na wykres położenia niż prędkości.