吉安一中 2024 届高三“九省联考”考后适应性测试数学试题一

本套试卷根据九省联考题型命制，题型为 8+3+3+5 模式

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1．（本题 5 分）某校高一年级 15 个班参加朗诵比赛的得分如下：

85　87　88　89　89　90　91　91　92　93　93　93　94　96　98

则这组数据的 40%分位数为（　）

A．90　　B．91　　C．90.5　　D．92

2．（本题 5 分）已知圆 C：$x^2+y^2-4x-14y+45=0$ 及点 $Q(-2,3)$，则下列说法正确的是（　）

A．直线 $kx-y-2k+1=0$ 与圆 C 始终有两个交点

B．若 M 是圆 C 上任一点，则 $|MQ|$ 的取值范围为 $\left[2\sqrt{2},6\sqrt{2}\right]$

C．若点 $P(m,m+1)$ 在圆 C 上，则直线 PQ 的斜率为 $\frac{1}{4}$

D．圆 C 与 x 轴相切

3．（本题 5 分）已知向量 $\vec{a},\vec{b}$ 满足 $|\vec{a}|=1,\vec{b}=(t,2-t),\vec{a}-\vec{b}$ 与 a 垂直，则 $\left|\vec{a}-\vec{b}\right|$ 的最小值为（　）

A．$\sqrt{2}$　　B．$\frac{\sqrt{2}}{2}$　　C．1　　D．3

4．（本题 5 分）高一（1）班有 8 名身高都不相同的同学去参加红歌合唱，他们站成前后对齐的 2 排，每排 4 人，则前排的同学都比后排对应的同学矮的概率为（　）

A．$\frac{1}{384}$　　B．$\frac{3}{4}$　　C．$\frac{3}{8}$　　D．$\frac{1}{16}$

5．（本题 5 分）已知数列 $\{a_n\}$、$\{b_n\}$ 的前 n 项和分别为 A_n、B_n，记 $c_n=a_n\cdot B_n+b_n\cdot A_n-a_n\cdot b_n$，则数列 $\{c_n\}$ 的前 2021 项和为（　　）

A．$A_{2021}+B_{2021}$　　B．$\frac{A_{2021}+B_{2021}}{2}$　　C．$A_{2021}\cdot B_{2021}$　　D．$\sqrt{A_{2021}\cdot B_{2021}}$

6．（本题 5 分）已知球 O 的直径 $\left|PQ\right|=4$，A，B，C 是球 O 球面上的三点，$\triangle ABC$ 是等边三角形，且 $\angle APQ=\angle BPQ=\angle CPQ=30°$，则三棱锥 $P-ABC$ 的体积为（　）．

A．$\frac{9\sqrt{3}}{4}$　　B．$\frac{27\sqrt{3}}{4}$　　C．$\frac{3\sqrt{3}}{2}$　　D．$\frac{3\sqrt{3}}{4}$

7．（本题 5 分）已知 $\alpha\in(0,\pi)$，且 $3\tan\alpha=10\cos 2\alpha$，则 $\cos\alpha$ 可能为（　）

A．$-\frac{\sqrt{10}}{10}$　　B．$-\frac{\sqrt{5}}{5}$　　C．$\frac{\sqrt{10}}{10}$　　D．$\frac{\sqrt{5}}{5}$

8．（本题 5 分）已知$f(x)$为奇函数，当$x\in[0,1]$时，$f(x)=1-2|x-\frac{1}{2}|$，当$x\in(-\infty,-1]$，$f(x)=1-e^{-1-x}$，若关于 x 的不等式$f(x+m)>f(x)$恒成立，则实数 m 的取值范围为（　）

A．$(-1,0)\cup(0,+\infty)$　　　　B．$\left(\frac{1}{2}+ln2,+\infty\right)$

C．$(-\frac{1}{2}-\ln2,-1)\cup(\frac{1}{2}+ln2,+\infty)$　　　　D．$(2,+\infty)$

二、选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分．在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分．

9．（本题 6 分）下列选项中的两个集合相等的有（　）

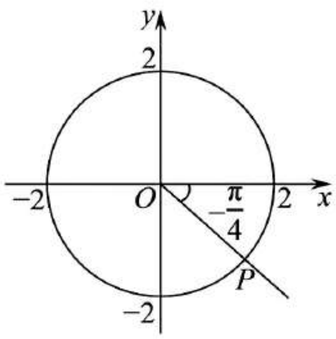
A．$P=\{x|\ x=2n,n\in\mathbf{Z}\},Q=\{x|\ x=2(n+1),n\in\mathbf{Z}\}$

B．$P=\{x|\ x=2n-1,n\in\mathbf{N}_+\},Q=\{x|\ x=2n+1,n\in\mathbf{N}_+\}$

C．$P=\{x|\ x^2-x=0\},Q=\left\{x|\ x=\frac{1+(-1)^n}{2},n\in\mathbf{Z}\right\}$

D．$P=\{x|\ y=x+1\},Q=\{(x,y)|\ y=x+1\}$

10．（本题 6 分）如图，一个质点在半径为 2 的圆O上以点P为起始点，沿逆时针方向运动，每3s 转一圈．则该质点到x轴的距离y是关于运动时间t的函数，则下列说法正确的是（　）



A．函数y的最小正周期是$\frac{3}{2}$

B．函数y的最小正周期是3π

C．$y=\left|2\cos\left(\frac{2\pi}{3}t-\frac{\pi}{4}\right)\right|$

D．$y=\left|2\sin\left(\frac{2\pi}{3}t-\frac{\pi}{4}\right)\right|$

11．（本题 6 分）定义：对于定义在区间I上的函数$f(x)$和正数$\alpha(0<\alpha\le1)$，若存在正数M，使得不等式

$\left|f\left(x_1\right)-f\left(x_2\right)\right| \le M\left|x_1-x_2\right|^{\alpha}$ 对任意 $x_1,x_2\in I$ 恒成立，则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上满足 α 阶李普希兹条件，则下列说法正确的有（　）

A．函数 $f(x)=\sqrt{x}$ 在 $[1,+\infty)$ 上满足 $\dfrac{1}{2}$ 阶李普希兹条件

B．若函数 $f(x)=x\ln x$ 在 $[1,\mathrm{e}]$ 上满足一阶李普希兹条件，则 M 的最小值为 e

C．若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上满足 $M=k(0<k<1)$ 的一阶李普希兹条件，且方程 $f(x)=x$ 在区间 $[a,b]$ 上有解 x_0，则 x_0 是方程 $f(x)=x$ 在区间 $[a,b]$ 上的唯一解

D．若函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上满足 $M=1$ 的一阶李普希兹条件，且 $f(0)=f(1)$，则对任意函数 $f(x)$，$\forall x_1,x_2\in[0,1]$，恒有 $\left|f\left(x_1\right)-f\left(x_2\right)\right|\le\dfrac{1}{2}$

三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分.

12.（本题 5 分）已知复数 $z=(1-a)+\left(a^2-1\right)\mathrm{i}(a>1)$，则 z 在复平面内对应的点所在的象限为_____象限.

13.（本题 5 分）已知函数 $f\left(x\right)=mx+\ln x, g\left(x\right)=x^2-mx$，若曲线 $y=f\left(x\right)$ 与曲线 $y=g\left(x\right)$ 存在公切线，则实数 m 的最大值为________.

14.（本题 5 分）地球仪是地理教学中的常用教具.如图 1 所示，地球仪的赤道面(与转轴垂直)与黄道面(与水平面平行)存在一个夹角，即黄赤交角，大小约为 23.5°.为锻炼动手能力，某同学制作了一个半径为 4cm 的地球仪(不含支架)，并将其放入竖直放置的正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中(姿态保持不变)，使地球仪与该三棱柱的三个侧面相切，如图 2 所示.此时平面 AB_1C 恰与地球仪的赤道面平行，则三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的外接球体积为________.(参考数据：$\tan 23.5°\approx 0.43$)

图1

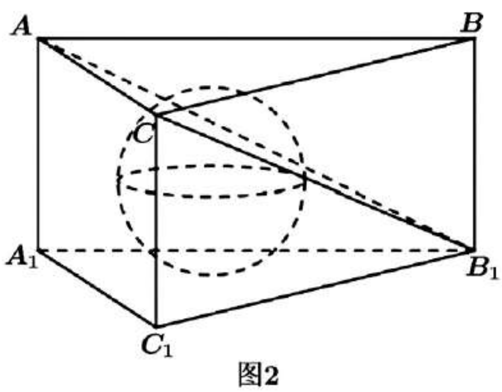


图2

四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15.（本题 13 分）为落实中央“坚持五育并举，全面发展素质教育，强化体育锻炼”的精神，某高中学校鼓励

学生自发组织各项体育比赛活动，甲、乙两名同学利用课余时间进行乒乓球比赛，规定：每一局比赛中获胜方记1分，失败方记0分，没有平局，首先获得5分者获胜，比赛结束.假设每局比赛甲获胜的概率都是$\frac{3}{5}$.

（1）求比赛结束时恰好打了6局的概率；

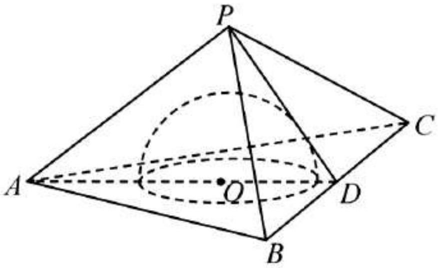
（2）若甲以3：1的比分领先时，记X表示到结束比赛时还需要比赛的局数，求X的分布列及期望.

16.（本题15分）已知函数$f(x)=x\ln x-ax^2+a(a\in R)$.

（1）若函数$f(x)$在$x=1$处的切线与直线$2x-y+1=0$垂直，求实数a的值.

（2）若函数$f(x)$存在两个极值点，求实数a的取值范围.

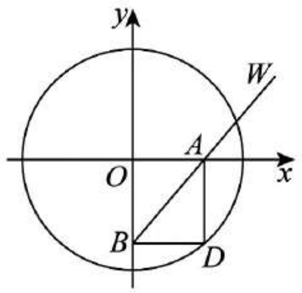
17.（本题15分）如图，在正三棱锥$P-ABC$中，有一半径为1的半球，其底面圆O与正三棱锥的底面贴合，正三棱锥的三个侧面都和半球相切．设点D为BC的中点，$\angle ADP=\alpha$．



(1)用α分别表示线段BC和PD长度；

(2)当$\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$时，求三棱锥的侧面积$S$的最小值.

18.（本题 17 分）如图，D 为圆 O：$x^2+y^2=1$ 上一动点，过点 D 分别作 x 轴，y 轴的垂线，垂足分别为 A，B，连接 BA 并延长至点 W，使得 $|WA|=1$，点 W 的轨迹记为曲线 C．



(1)求曲线 C 的方程；

(2)若过点 $K\left(-2,0\right)$ 的两条直线 l_1，l_2 分别交曲线 C 于 M，N 两点，且 $l_1\perp l_2$，求证：直线 MN 过定点；

(3)若曲线 C 交 y 轴正半轴于点 S，直线 $x=x_0$ 与曲线 C 交于不同的两点 G,H，直线 SH,SG 分别交 x 轴于 P，Q 两点．请探究：y 轴上是否存在点 R，使得 $\angle ORP+\angle ORQ=\dfrac{\pi}{2}$？若存在，求出点 R 坐标；若不存在，请说明理由．

19.（本题 17 分）对于无穷数列 $\{a_n\}$，“若存在 $a_m-a_k=t\left(m,k\in N^*,m>k\right)$，必有 $a_{m+1}-a_{k+1}=t$”，则称数列 $\{a_n\}$ 具有 $P(t)$ 性质．

（1）若数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_n=\begin{cases}2n & (n=1,2)\\ 2n-5 & \left(n\geq 3,n\in N^*\right)\end{cases}$，判断数列 $\{a_n\}$ 是否具有 $P(1)$ 性质？是否具有 $P(4)$ 性质？

（2）对于无穷数列 $\{a_n\}$，设 $T=\{x\,|\,x=a_j-a_i,i<j\}$，求证：若数列 $\{a_n\}$ 具有 $P(0)$ 性质，则 T 必为有限集；

（3）已知 $\{a_n\}$ 是各项均为正整数的数列，且 $\{a_n\}$ 既具有 $P(2)$ 性质，又具有 $P(3)$ 性质，是否存在正整数 N，k，使得 a_N，a_{N+1}，a_{N+2}，…，a_{N+k}，…成等差数列.若存在，请加以证明；若不存在，说明理由.

参考答案：

1．C

【详解】由题意，$15\times0.4=6$，故这组数据的40%分位数为从小到大第6，7位数据的平均数，即$\frac{90+91}{2}=90.5$.

故选：C

2．B

【详解】依题意，圆C：$(x-2)^2+(y-7)^2=8$，圆心$C(2,7)$，半径$r=2\sqrt{2}$，

对于A，直线$kx-y-2k+1=0$恒过定点$(2,1)$，而点$(2,1)$在圆C外，则过点$(2,1)$的直线与圆C可能相离，A不正确；

对于B，$|CQ|=4\sqrt{2}$，点Q在圆C外，由$|CQ|-r\le|MQ|\le|CQ|+r$得：$2\sqrt{2}\le|MQ|\le6\sqrt{2}$，B正确.

对于C，点$P(m,m+1)$在圆C上，则$(m-2)^2+(m-6)^2=8$，解得$m=4$，而点$Q(-2,3)$，

则直线PQ的斜率为$\frac{m-2}{m+2}=\frac{1}{3}$，C不正确；

对于D，点$C(2,7)$到x轴距离为7，大于圆C的半径，则圆C与x轴相离，即圆C与x轴不相切，D不正确；

故选：B

3．C

【详解】由$\vec{a}-\vec{b}$与$\vec{a}$垂直，得$\left(\vec{a}-\vec{b}\right)\cdot\vec{a}=0$，则$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{a}^2=1$，

所以$\left|\vec{a}-\vec{b}\right|=\sqrt{\vec{a}^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}^2}=\sqrt{1^2-2\times1+t^2+(2-t)^2}=\sqrt{2(t-1)^2+1}\geqslant1$，

所以当$t=1$时，$\left|\vec{a}-\vec{b}\right|$的最小值为1.

故选：C

4．D

【详解】8名身高都不相同的同学站在8个不同的位置有A_8^8种站法，将8名同学分为4组，每组2人，则有$\frac{C_8^2C_6^2C_4^2C_2^2}{A_4^4}$种分法，4组人有$A_4^4$种站法，故所求概率$P=\frac{\frac{C_8^2C_6^2C_4^2C_2^2}{A_4^4}\cdot A_4^4}{A_8^8}=\frac{1}{16}$.

故选：D.

5．C

【详解】当$n=1$时，$c_1=a_1b_1+b_1a_1-a_1b_1=a_1b_1=A_1B_1$，

当$n\ge2$时，$c_n=a_n\cdot B_n+b_n\cdot A_n-a_n\cdot b_n$

$=\left(A_n-A_{n-1}\right)B_n+\left(B_n-B_{n-1}\right)A_n-\left(A_n-A_{n-1}\right)\left(B_n-B_{n-1}\right)=A_nB_n-A_{n-1}B_{n-1}$，

所以$c_1+c_2+\cdots+c_n=A_1B_1+\left(A_2B_2-A_1B_1\right)+\cdots+\left(A_{2021}B_{2021}-A_{2020}B_{2020}\right)$

$=A_{2021}B_{2021}$.

故选：C

6．A

【详解】设球心为M，等边三角形ABC截面小圆的圆心为O（也是等边三角形ABC的中心）.

由于□ABC是等边三角形，$\angle APQ=\angle BPQ=\angle CPQ=30^\circ$，

所以$PQ\perp$平面ABC，P在面ABC的投影即O，也即等边三角形ABC的中心，且$PO\perp$平面ABC，则$PO\perp OC$.

因为PQ是直径，所以$\angle PCQ=90^\circ$.

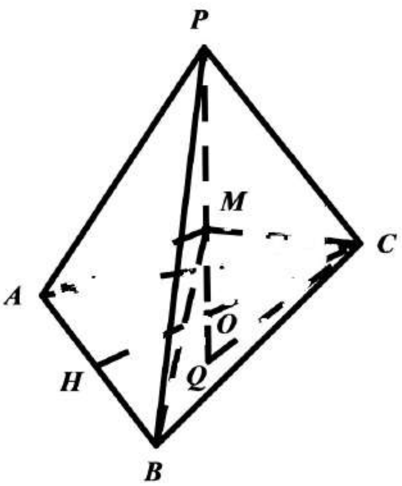
所以$PC=4\cos30^\circ=2\sqrt{3},PO=2\sqrt{3}\cos30^\circ=3$，$OC=2\sqrt{3}\sin30^\circ=\sqrt{3}$.

由于O是等边三角形ABC的中心，所以$OC=\dfrac{2}{3}CH$，

所以等边三角形ABC的高$CH=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$，$AC=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\div\sin60^\circ=3$.

所以三棱锥$P-ABC$的体积为$V=\dfrac{1}{3}\times PO\times S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{3}\times3\times\left(\dfrac{1}{2}\times3\times3\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)=\dfrac{9\sqrt{3}}{4}$.

故选：A



7．B

【详解】由$3\tan\alpha=10\cos2\alpha$，得$3\tan\alpha=10(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)$，

所以$3\tan\alpha=10\times\dfrac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}$，

所以$3\tan\alpha=10\times\dfrac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha}$，

整理得$3\tan^3\alpha+10\tan^2\alpha+3\tan\alpha-10=0$，

$(\tan\alpha+2)(3\tan^2\alpha+4\tan\alpha-5)=0$，

所以$\tan\alpha+2=0$或$3\tan^2\alpha+4\tan\alpha-5=0$，

所以$\tan\alpha=-2$或$\tan\alpha=\dfrac{-2\pm\sqrt{19}}{3}$，

①当$\tan\alpha=-2$时，$\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=-2$，$\alpha\in\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$，

因为$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$，所以$5\cos^2\alpha=1$，

所以$\cos\alpha=\pm\dfrac{\sqrt{5}}{5}$，

因为$\alpha\in\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$，所以$\cos\alpha=-\dfrac{\sqrt{5}}{5}$，

②当$\tan\alpha=\dfrac{-2+\sqrt{19}}{3}$时，$\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\dfrac{-2+\sqrt{19}}{3},\alpha\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，

因为$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$，所以$\left(\dfrac{\sqrt{19}-2}{3}\cos\alpha\right)^2+\cos^2\alpha=1$，

由于$\alpha\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，所以解得$\cos\alpha=\sqrt{\dfrac{9}{32-4\sqrt{19}}}$，

③当$\tan\alpha=\dfrac{-2-\sqrt{19}}{3}$时，$\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\dfrac{-2-\sqrt{19}}{3},\alpha\in\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$，

因为$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$，所以$\left(\dfrac{-\sqrt{19}-2}{3}\cos\alpha\right)^2+\cos^2\alpha=1$，

由于$\alpha\in\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$，所以解得$\cos\alpha=-\sqrt{\dfrac{9}{32+4\sqrt{19}}}$，

综上，$\cos\alpha=-\dfrac{\sqrt{5}}{5}$，或$\cos\alpha=\sqrt{\dfrac{9}{32-4\sqrt{19}}}$，或$\cos\alpha=-\sqrt{\dfrac{9}{32+4\sqrt{19}}}$，

故选：B

8．B

【详解】若$x\in[-1，0]$，则$-x\in[0，1]$，

则 $f(-x)=1-2|-x-\frac{1}{2}|=1-2|x+\frac{1}{2}|$，

$\because f(x)$ 是奇函数，

$\therefore f(-x)=1-2|x+\frac{1}{2}|=-f(x)$，

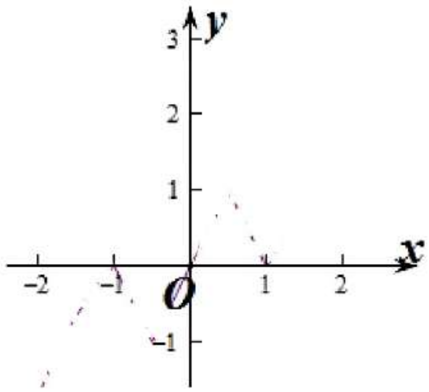
则 $f(x)=2|x+\frac{1}{2}|-1$，$x\in[-1，0]$，

若 $x\in[1，+\infty)$，则 $-x\in(-\infty，-1]$，

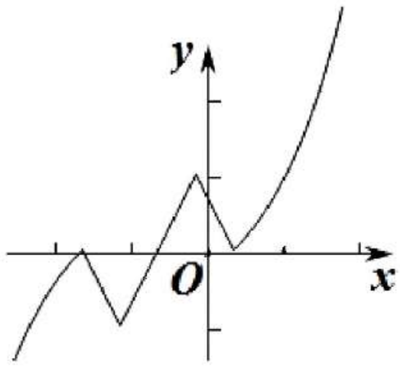
则 $f(-x)=1-e^{-1+x}=-f(x)$，

则 $f(x)=e^{-1+x}-1$，$x\in[1，+\infty)$，

作出函数 $f(x)$ 的图象如图：



当 $m>0$ 时，$f(x+m)$ 的图象向左平移，如图，



当 $f(x+m_0)$ 的图象与 $f(x)$ 在 $x\le\frac{1}{2}$ 相切时，$f'(x+m_0)=e^{x-1+m}$，此时对应直线斜率 $k=2$，

由 $e^{x-1+m_0}=2$，即 $x-1+m_0=ln2$，得 $x=ln2+1-m_0$．

此时 $y=e^{ln2+1-m_0-1+m_0}-1=e^{\ln 2}-1=2-1=1$，

又切点在直线 $y=2x$ 上，

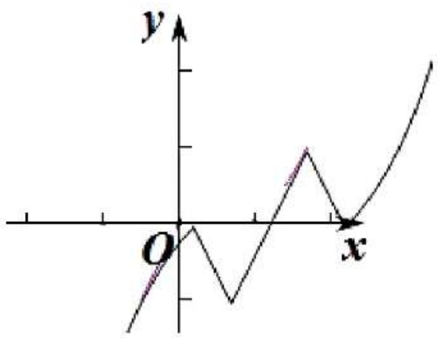
所以切点坐标为 $(\frac{1}{2},1)$，

即 $x=ln2+1-m_0=\frac{1}{2}$，

解得$m_0=\frac{1}{2}+\ln 2$，

所以当$m\ge m_0=\frac{1}{2}+\ln 2$时，不等式$f(x+m)>f(x)$恒成立.

当$m<0$时，$f(x+m)$的图象向右平移，如图，



显然不等式$f(x+m)>f(x)$不恒成立.

综上m的取值范围是$\left(\frac{1}{2}+ln2,+\infty\right)$，

故选：B.

9．AC

【详解】解：对于A：集合$P=\{x|\ x=2n,n\in\mathbf{Z}\}$表示偶数集，集合$Q=\{x|\ x=2(n+1),n\in\mathbf{Z}\}$也表示偶数集，

所以$P=Q$，故A正确；

对于B：$P=\{x|\ x=2n-1,n\in\mathbf{N}_+\}=\{1,3,5,7,\cdots\}$，

$Q=\{x|\ x=2n+1,n\in\mathbf{N}_+\}=\{3,5,7,9,\cdots\}$，所以$P\ne Q$，故B错误；

对于C：$P=\{x|\ x^2-x=0\}=\{0,1\}$，又$(-1)^n=\begin{cases}1,n\text{为偶数}\\-1,n\text{为奇数}\end{cases}$，

所以$x=\frac{1+(-1)^n}{2}=\begin{cases}1,n\text{为偶数}\\0,n\text{为奇数}\end{cases}$，即$Q=\left\{x\middle|\ x=\frac{1+(-1)^n}{2},n\in\mathbf{Z}\right\}=\{0,1\}$，所以$P=Q$，故C正确；

对于D：集合$P=\{x|\ y=x+1\}=\mathrm{R}$为数集，集合$Q=\{(x,y)|\ y=x+1\}$为点集，所以$P\ne Q$，故D错误；

故选：AC

10．AD

【详解】由题可知，该质点的角速度为$\frac{2\pi}{3}$ rad/s，

由于起始位置为点P，沿逆时针方向运动，

设经过时间 t s 之后所成的角为 φ，则 $\varphi=\frac{2\pi}{3}t-\frac{\pi}{4}$，

根据三角函数定义可知点 P 的纵坐标为 $y_p=2\sin\left(\frac{2\pi}{3}t-\frac{\pi}{4}\right)$，

所以该质点到 x 轴的距离 $y=\left|2\sin\left(\frac{2\pi}{3}t-\frac{\pi}{4}\right)\right|$，可得 D 正确，C 错误；

由解析式 $y=\left|2\sin\left(\frac{2\pi}{3}t-\frac{\pi}{4}\right)\right|$ 可知其最小正周期为 $\frac{\pi}{\frac{2\pi}{3}}=\frac{3}{2}$，即 A 正确，B 错误；

故选：AD

11．ACD

【详解】A 选项：不妨设 $x_1>x_2$，$\therefore\left|f\left(x_1\right)-f\left(x_2\right)\right|=\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2}$，即

$\therefore\frac{\left|f\left(x_1\right)-f\left(x_2\right)\right|}{\left(x_1-x_2\right)^{\frac{1}{2}}}=\frac{\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2}}{\left(x_1-x_2\right)^{\frac{1}{2}}}=\sqrt{\frac{\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2}}{\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}}}<1$，故 $\exists M\geq1$，对 $\forall x_1,x_2\in[1,+\infty)$，均有

$\left|f\left(x_1\right)-f\left(x_2\right)\right|\leq M\left(x_1-x_2\right)^{\frac{1}{2}}$，A 选项正确；

B 选项：不妨设 $x_1>x_2$，$\because f(x)=x\ln x$ 在 $[1,\mathrm{e}]$ 单调递增，$\therefore\left|f\left(x_1\right)-f\left(x_2\right)\right|=f\left(x_1\right)-f\left(x_2\right)$，

$\therefore\left|f\left(x_1\right)-f\left(x_2\right)\right|\leq M\left|x_1-x_2\right|$，即 $f\left(x_1\right)-f\left(x_2\right)\leq M\left(x_1-x_2\right)$，即 $f\left(x_1\right)-Mx_1\leq f\left(x_2\right)-Mx_2$ 对 $\forall x_1>x_2$，

$x_1,x_2\in[1,\mathrm{e}]$ 恒成立，即 $f(x)-Mx$ 在 $[1,\mathrm{e}]$ 上单调递减，$\therefore f'(x)-M\leq0$ 对 $\forall x\in[1,\mathrm{e}]$ 恒成立，所以 $M\geq1+\ln x$

对 $\forall x\in[1,\mathrm{e}]$ 恒成立，即 $M\geq2$，即 M 的最小值为 2，B 选项错误；

C 选项：假设方程 $f(x)=x$ 在区间 $[a,b]$ 上有两个解 x_0，t，则 $\left|f\left(x_0\right)-f(t)\right|\leq k\left|x_0-t\right|<\left|x_0-t\right|$，这与

$\left|f\left(x_0\right)-f(t)\right|=\left|x_0-t\right|$ 矛盾，故只有唯一解，C 选项正确；

D 选项：不妨设 $x_1>x_2$，当 $x_1-x_2\leq\frac{1}{2}$ 时，$\left|f\left(x_1\right)-f\left(x_2\right)\right|\leq\left|x_1-x_2\right|\leq\frac{1}{2}$，当 $x_1-x_2>\frac{1}{2}$ 时，

$\left|f\left(x_1\right)-f\left(x_2\right)\right|=\left|f\left(x_1\right)-f(1)+f(0)-f\left(x_2\right)\right|\leq\left|f\left(x_1\right)-f(1)\right|+\left|f\left(x_2\right)-f(0)\right|$

$\leq1-x_1+x_2-0=1-\left(x_1-x_2\right)<\frac{1}{2}$，故对 $\forall x_1,x_2\in[0,1]$，$\left|f\left(x_1\right)-f\left(x_2\right)\right|\leq\frac{1}{2}$，故 D 选项正确；

故选：ACD

12．第二

【详解】由 $a>1$，可知 $1-a<0$，$a^2-1>0$，

故 z 在复平面内对应的点所在的象限为第二象限.

故答案为：第二.

13．$\frac{1}{2}$

【详解】$f'(x)=m+\frac{1}{x},g'(x)=2x-m$，

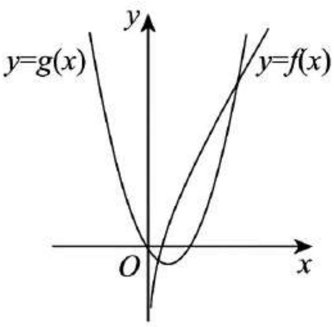
假设两曲线在同一点(x_0,y_0)处相切，

则$\begin{cases}m+\frac{1}{x_0}=2x_0-m\\ mx_0+\ln x_0=x_0^2-mx_0\end{cases}$，可得$1-\ln x_0=x_0^2$，即$x_0^2+\ln x_0-1=0$，

因为函数$y=x^2+\ln x-1$单调递增，且$x=1$时$y=0$，

所以$x_0=1$，则$m=\frac{1}{2}$，此时两曲线在$\left(1,\frac{1}{2}\right)$处相切，

根据曲线的变化趋势，若$m>\frac{1}{2}$，则两曲线相交于两点，不存在公切线，如图，



所以m的最大值为$\frac{1}{2}$.

故答案为：$\frac{1}{2}$.

14．790π

【详解】由题设可知平面AB_1C与面$A_1B_1C_1$的夹角为$23.5°$，取AC中点M，A_1C_1中点N，连接MN

由二面角的定义可知$\angle MB_1N$为平面AB_1C与面$A_1B_1C_1$的夹角，即$\angle MB_1N=23.5°$

设正三棱柱的底面边长为$2a$，高为h，则$B_1N=\sqrt{3}a$

所以$\tan\angle MB_1N=\tan 23.5°=\frac{h}{\sqrt{3}a}\approx 0.43$，则$h\approx 0.43\sqrt{3}a$

又地球仪与该三棱柱的三个侧面相切，即地球仪的最大圆与底面正三角形内切，

所以内切圆的半径$r=\frac{2S}{C}=\frac{2\times\frac{1}{2}\times 2a\times 2a\times\frac{\sqrt{3}}{2}}{3\times 2a}=4$，解得$a=4\sqrt{3}$

所以三棱柱的高 $h \approx 0.43\sqrt{3} \times 4\sqrt{3} = 5.16$，底面边长为 $8\sqrt{3}$

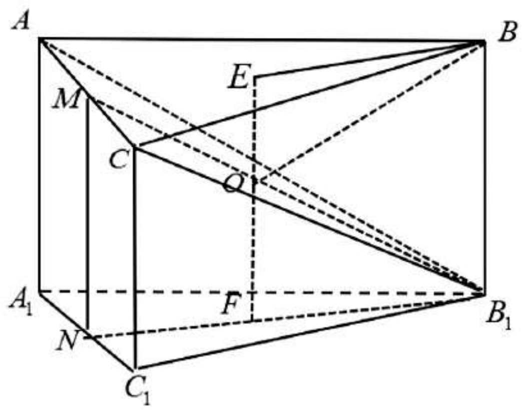
设三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 上、下底面中心 E, F，连线的中点 O 为球心，

在直角□OEB，$OE = \frac{h}{2} = 2.58$，$EB = \frac{2}{3}\sqrt{3}a = \frac{2}{3}\sqrt{3} \times 4\sqrt{3} = 8$

所以三棱柱外接球的半径 $R = \sqrt{8^2 + 2.58^2} = \sqrt{70.6564} \approx 8.4$

所以体积 $V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi \times 8.4^3 \approx 790\pi$

故答案为：790π



15.（1）$\frac{582}{3125}$；（2）分布列答案见解析，数学期望：$\frac{1966}{625}$.

【详解】解：（1）比赛结束时恰好打了 6 局，甲获胜的概率为 $P_1 = C_5^4 \times \left(\frac{3}{5}\right)^4 \times \left(\frac{2}{5}\right) \times \frac{3}{5} = \frac{486}{3125}$，

恰好打了 6 局，乙获胜的概率为 $P_2 = C_5^1 \times \left(\frac{3}{5}\right)^1 \times \left(\frac{2}{5}\right)^4 \times \frac{2}{5} = \frac{96}{3125}$，

所以比赛结束时恰好打了 6 局的概率为 $P = P_1 + P_2 = \frac{486}{3125} + \frac{96}{3125} = \frac{582}{3125}$.

（2）X 的可能取值为 2，3，4，5，

$P(X=2) = \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{9}{25}$，

$P(X=3) = C_2^1 \times \frac{2}{5} \times \frac{3}{5} \times \frac{3}{5} = \frac{36}{125}$，

$P(X=4) = C_3^1 \times \frac{3}{5} \times \left(\frac{2}{5}\right)^2 \times \frac{3}{5} + \left(\frac{2}{5}\right)^4 = \frac{124}{625}$，

$P(X=5) = C_4^1 \times \frac{3}{5} \times \left(\frac{2}{5}\right)^3 \times \frac{3}{5} + C_4^3 \times \left(\frac{2}{5}\right)^3 \times \frac{3}{5} \times \frac{2}{5} = \frac{96}{625}$.

所以X的分布列如下：

X	2	3	4	5
P	$\frac{9}{25}$	$\frac{36}{125}$	$\frac{124}{625}$	$\frac{96}{625}$

故$E\left(X\right)=2\times\frac{9}{25}+3\times\frac{36}{125}+4\times\frac{124}{625}+5\times\frac{96}{625}=\frac{1966}{625}$.

16.（1）$a=\frac{3}{4}$；（2）$\left(0,\frac{1}{2}\right)$.

【详解】（1）$f'(x)=\ln x+1-2ax$，

$f'(1)=1-2a$，

则$(1-2a)\times 2=-1$，解得$a=\frac{3}{4}$.

（2）$f'(x)=\ln x+1-2ax$，

由题设可知$f'(x)=0$有两个不同的零点，且$f'\left(x\right)$在零点的附近$f'\left(x\right)$的符号发生变化.

令$g(x)=\ln x+1-2ax$，则$g'(x)=\frac{1}{x}-2a$，

若$a\le 0$，则$g'(x)>0$，则$g(x)$为$\left(0,+\infty\right)$上为增函数，

$g(x)$在$\left(0,+\infty\right)$上至多有一个零点.

当$a>0$时，若$0<x<\frac{1}{2a}$，则$g'(x)>0$，故$g(x)$在$\left(0,\frac{1}{2a}\right)$上为增函数，

若$x>\frac{1}{2a}$，则$g'(x)<0$，故$g(x)$在$\left(\frac{1}{2a},+\infty\right)$上为减函数，

故$g(x)_{\max}=g\left(\frac{1}{2a}\right)=\ln\frac{1}{2a}>0$，故$0<a<\frac{1}{2}$.

又$\frac{1}{e}<\frac{1}{2a}$且$g(\frac{1}{e})=-\frac{2a}{e}<0$，故$g(x)$在$\left(0,\frac{1}{2a}\right)$上存在一个零点；

下证当$t>2$时，总有$2\ln t<t$.

令$h\left(t\right)=2\ln t-t$，则$h'\left(t\right)=\frac{2}{t}-1=\frac{2-t}{t}$，

当$t>2$时，$h'\left(t\right)=\frac{2}{t}-1=\frac{2-t}{t}<0$，故$h\left(t\right)$为$\left(2,+\infty\right)$上的减函数，

故$h\left(t\right)<h(2)=2\ln 2-2<0$，故$2\ln t<t$成立.

令$t=\sqrt{x},x>4$，则$\ln x<\sqrt{x}$，

故当$x>4$时，有$g(x)<\sqrt{x}+1-2ax$，

取 $M=\max\left\{4,\dfrac{\left(1+\sqrt{1+8a}\right)^2}{16a^2}\right\}$，则当 $x>M$ 时，

有 $\sqrt{x}+1-2ax=-2a\left(\sqrt{x}-\dfrac{1+\sqrt{1+8a}}{4a}\right)\left(\sqrt{x}-\dfrac{1-\sqrt{1+8a}}{4a}\right)<0$，

故 $g(x)<0$，故在 $\left(\dfrac{1}{2a},+\infty\right)$ 上，存在实数 x，使得 $g(x)<0$，

由零点存在定理及 $g(x)$ 的单调性可知可得 $g(x)$ 在 $\left(\dfrac{1}{2a},+\infty\right)$ 上存在一个零点.

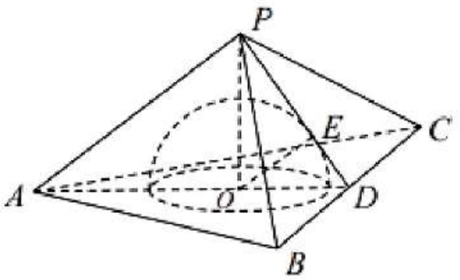
综上可知，实数 a 的取值范围是 $\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$.

17．(1) $|BC|=\dfrac{2\sqrt{3}}{\sin\alpha}$；$|PD|=\dfrac{1}{\sin\alpha\cos\alpha}$

(2) $\dfrac{27}{2}$

【详解】（1）连接 OP，由题意 O 为□ABC 的中心，

且 $PO\perp$ 面 ABC，又 $AD\subset$ 面 ABC，所以 $PO\perp AD$，所以□POD 为直角三角形.



设半球与面 PBC 的切点为 E，则 $|OE|=1$ 且 $OE\perp PD$.

在 $Rt\triangle ODE$ 中，$\dfrac{|OE|}{\sin\alpha}=|OD|=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}|BC|$，所以 $|BC|=\dfrac{2\sqrt{3}}{\sin\alpha}$.

在 Rt□POD 中，$|PD|=\dfrac{|OD|}{\cos\alpha}=\dfrac{1}{\sin\alpha\cos\alpha}$.

（2）由题知，$S=3S_{\triangle PBC}=3\times\dfrac{1}{2}\times|BC|\times|PD|=\dfrac{3}{2}\times\dfrac{2\sqrt{3}}{\sin\alpha}\times\dfrac{1}{\sin\alpha\cos\alpha}$，

化简得 $S=\dfrac{3\sqrt{3}}{\sin^2\alpha\cos\alpha}$，$\alpha\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，

令 $\cos\alpha=t$，则上述函数变形为 $S(t)=\dfrac{3\sqrt{3}}{t-t^3}$，$t\in(0,1)$，

所以 $S'(t)=\dfrac{3\sqrt{3}\left(3t^2-1\right)}{\left(t-t^3\right)^2}$，令 $S'(t)=0$，得 $t=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. 当 $t\in\left(0,\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$ 时，

$S'(t)<0$，$S(t)$单调递减，当$t\in\left(\frac{\sqrt{3}}{3},1\right)$时，

$S'(t)>0$，$S(t)$单调递增，所以当$t=\frac{\sqrt{3}}{3}$时，

三棱锥的侧面积S的最小值为$S\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=\frac{27}{2}$.

18．(1)$\frac{x^2}{4}+y^2=1$

(2)证明见解析，$\left(-\frac{6}{5},0\right)$

(3)存在，$R(0,\pm 2)$

【详解】（1）设$W(x,y)$，$D(x_0,y_0)$，则$A(x_0,0),B(0,y_0)$，

由题意知$|AB|=1$，所以$\overrightarrow{WA}=\overrightarrow{AB}$，得$(x_0-x,-y)=(-x_0,y_0)$，所以$\begin{cases}x_0=\frac{x}{2}\\ y_0=-y\end{cases}$，

因为$x_0^2+y_0^2=1$，得$\frac{x^2}{4}+y^2=1$，故曲线C的方程为$\frac{x^2}{4}+y^2=1$.

（2）由题意可知，直线l_1,l_2不平行坐标轴，

则可设l_1的方程为：$x=my-2$，此时直线l_2的方程为$x=-\frac{1}{m}y-2$.

由$\begin{cases}x=my-2\\ \frac{x^2}{4}+y^2=1\end{cases}$，消去$x$得：$(m^2+4)y^2-4my=0$，

解得：$y=\frac{4m}{m^2+4}$或$y=0$(舍去)，所以$x=m\cdot\frac{4m}{m^2+4}-2=\frac{2m^2-8}{m^2+4}$，

所以$M(\frac{2m^2-8}{m^2+4},\frac{4m}{m^2+4})$，同理可得：$N(\frac{2-8m^2}{4m^2+1},-\frac{4m}{4m^2+1})$.

当$m\neq\pm 1$时，直线MN的斜率存在，

$$k_{MN}=\frac{\frac{4m}{m^2+4}+\frac{4m}{4m^2+1}}{\frac{2m^2-8}{m^2+4}-\frac{2-8m^2}{4m^2+1}}=\frac{4m(5m^2+5)}{16m^4-16}=\frac{5m}{4m^2-4},$$

则直线MN的方程为$y=\frac{5m}{4m^2-4}\left(x+\frac{6}{5}\right)$，

所以直线MN过定点$\left(-\frac{6}{5},0\right)$.

当$m=\pm 1$时，直线MN斜率不存在，此时直线MN方程为：$x=-\frac{6}{5}$，也过定点$\left(-\frac{6}{5},0\right)$，

综上所述：直线MN过定点$\left(-\frac{6}{5},0\right)$.

（3）假设存在点R使得$\angle ORP+\angle ORQ=\frac{\pi}{2}$，设$R(0,t)$，

因为$\angle ORP+\angle ORQ=\frac{\pi}{2}$，所以$\angle ORQ=\angle OPR$，即$\tan\angle ORQ=\tan\angle OPR$，

所以$\frac{|OQ|}{|OR|}=\frac{|OR|}{|OP|}$，所以$|OR|^2=|OP|\cdot|OQ|$，

直线$x=x_0$与曲线C交于不同的两点G、H，易知G、H关于x轴对称，

设$G(x_0,y_0),H(x_0,-y_0)(y_0\neq\pm1,y_0\neq0)$，

易知点$S(0,1)$，直线SG方程是$y=\frac{y_0-1}{x_0}x+1$，

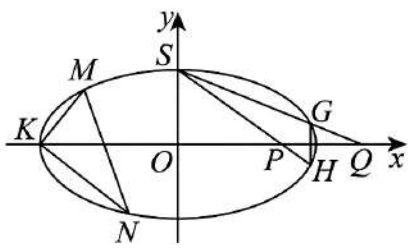
令$y=0$得点P横坐标$x_P=-\frac{x_0}{y_0-1}$，

直线SH方程是$y=\frac{y_0+1}{-x_0}x+1$，令$y=0$得点Q横坐标$x_Q=\frac{x_0}{y_0+1}$，

由$|OR|^2=|OP|\cdot|OQ|$，得$t^2=\frac{x_0^2}{|y_0^2-1|}$，又$G(x_0,y_0)$在椭圆上，

所以$\frac{x_0^2}{4}+y_0^2=1$，所以$t^2=4$，解得$t=\pm2$，

所以存在点$R(0,\pm2)$，使得$\angle ORP+\angle ORQ=\frac{\pi}{2}$成立.



19.（1）见解析；

（2）见解析；

（3）见解析.

可证得存在整数N，使得$a_N,a_{N+1},a_{N+2},\cdots,a_{N+k},\cdots$是等差数列.

【详解】（1）因为$a_n=\begin{cases}2n & (n=1,2)\\ 2n-5 & \left(n\geq3,n\in N^*\right)\end{cases}$，

$a_5-a_2=5-4=1$，但$a_6-a_3=7-1=6\neq1$，所以数列$\{a_n\}$不具有性质$P(1)$，

同理可得数列$\{a_n\}$具有性质$P(4)$；

（2）因为数列$\{a_n\}$具有性质$P(0)$，

所以一定存在一组最小的且$m>k$，满足$a_m-a_k=0$，即$a_m=a_k$，

由性质$P(0)$的含义可得$a_{m+1}=a_{k+1}$，$a_{m+2}=a_{k+2}$，…，$a_{2m-k-1}=a_{m-1},a_{2m-k}=a_m$，

所以数列$\{a_n\}$中，从第k项开始的各项呈现周期性规律：

$a_k,a_{k+1},\cdots,a_{m-1}$为一个周期中的各项，

所以数列$\{a_n\}$中最多有$m-1$个不同的项，

所以T最多有C_{m-1}^2个元素，即T为有限集；

（3）因为数列$\{a_n\}$具有$P(2)$性质，又具有$P(3)$性质，

所以存在M',N'，使得$a_{M'+P}-a_{M'}=2,a_{N'+q}-a_{N'}=3$，

其中p,q分别是满足上述关系式的最小的正整数，

由性质$P(2),P(3)$的含义可得$a_{M'+p+k}-a_{M'+k}=2,a_{N'+q+k}-a_{N'+k}=3$，

若$M'<N'$，则取$k=N'-M'$，可得$a_{N'+P}-a_{N'}=2$，

若$M'>N'$，则取$k=M'-N'$，可得$a_{M'+q}-a_{M'}=3$，

记$M=\max\{M',N'\}$，则对于a_M，

有$a_{M+p}-a_M=2,a_{M+q}-a_M=3$，显然$p\neq q$，

由性质$P(2),P(3)$的含义可得：$a_{M+p+k}-a_{M+k}=2,a_{N+q+k}-a_{N+k}=3$，

所以$a_{M+pq}-a_M=(a_{M+pq}-a_{M+(q-1)p})+(a_{M+(q-1)p}-a_{M+(q-2)p})+\cdots+(a_{M+p}-a_M)$

$=2qa_{M+pq}-a_M=(a_{M+pq}-a_{M+(p-1)q})+(a_{M+(p-1)q}-a_{M+(p-2)q})+\cdots+(a_{M+q}-a_M)=3p$，

所以$2q=3p$，

又p,q满足$a_{M+p}-a_M=2,a_{M+q}-a_M=3$的最小的正整数，

所以$q=3,p=2$，$a_{M+2}-a_M=2,a_{M+3}-a_M=3$，

所以$a_{M+2+k}-a_{M+k}=2,a_{M+3+k}-a_{M+k}=3$，

所以 $a_{M+2k}=a_{M+2(k-1)+2}=a_M+2k,a_{M+3k}=a_{M+3(k-1)+3}=a_M+3k$ ，

取 $N=M+3$ ，所以，若 k 是偶数，则 $a_{N+k}=a_N+k$ ，

若 k 是奇数，

则 $a_{N+k}=a_{N+3+(k-3)}=a_{N+3}+(k-3)=a_N+3+(k-3)=a_N+k$ ，

所以， $a_{N+k}=a_N+k$ ，

所以 $a_N,a_{N+1},a_{N+2},\cdots,a_{N+k},\cdots$ 是公差为 1 的等差数列.