ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

Курс «Информатика», семестр 1, семинары

Постановка задачи

Задана линейная функция L от переменных (*x*1, *x*2,…, *xn*).
L(*x*1, *x*2,…, *xn*) называется **целевой функцией**.

Задача:
найти экстремум (максимум или минимум) целевой функции при условии, что переменные удовлетворяют системе линейных равенств и/или неравенств.

$$L = x_1c_1 + x_2c_2 + \dots + x_nc_n \rightarrow max/min$$

при условии:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}x_j \leq b_i, i = 1, 2, \dots, k$$

$c_i, b_i, a_{i,j}$ – заданные константы

Типовые задачи

Задача о диете

Составить план производства кормов для животных при условии, что:

- существуют n различных рецептур $g_1, g_2, \dots, g_n$;
- используются m видов компонентов $r_1, r_2, \dots r_m$;
- известны цены реализации товаров $c_1, c_2, \dots, c_n$, произведённых по каждой из рецептур;
- заданы запасы компонентов $b_1, b_2, \dots, b_m$.

Необходимо определить количество товаров $x_1, x_2, \dots, x_n$, при котором достигается максимальное значение целевой функции $L = x_1 c_1 + x_2 c_2 + \dots + x_n c_n \rightarrow max$

Типовые задачи

Рецептуры задаются **Матрицей производства (Технологической матрицей):**

	g_1	g_2	…	g_n
r_1	a_{11}	a_{12}		a_{1n}
r_2	a_{21}	a_{22}	…	a_{2n}
…	…	…	…	…
r_m	a_{m1}	a_{m2}	…	a_{mn}

$$L = x_1 c_1 + x_2 c_2 + \ldots + x_n c_n \rightarrow max$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j \leq b_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, m$$

$$x_1, x_2, \ldots, x_n \geq 0$$

Основной и канонический вид задачи линейного программирования

Основной вид задачи линейного программирования

$$L = x_1c_1 + x_2c_2 + \ldots + x_nc_n \rightarrow max$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}x_j \le b_i, i = 1, 2, \ldots, k$$

$$x_1, x_2, \ldots, x_n \ge 0$$

Канонический вид задачи линейного программирования

$$L = x_1c_1 + x_2c_2 + \ldots + x_nc_n \rightarrow max$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}x_j = b_i, i = 1, 2, \ldots, k$$

$$x_1, x_2, \ldots, x_n \ge 0$$

Приведение задачи минимизации к задаче максимизации

$L = x_1c_1 + x_2c_2 + \ldots + x_nc_n \rightarrow min$

$L = -x_1c_1 - x_2c_2 - \ldots - x_nc_n \rightarrow max$

Приведение задачи к каноническому виду

Исходная

$$L = 2x_1 + x_2 + 5\,x_3 \;\to min$$

$$\begin{cases} \begin{array}{llll} x_1 & -7x_2 & 4x_3 & \le 11 \\ 2x_1 & 9x_2 & x_1 \ge 0 - 1x_3 & \ge 7 \\ x_1 \ge 0 & x_2 \ge 0 & x_3 \ge 0 & \end{array} \end{cases}$$

Основной вид

$$L = -2x_1 - x_2 \text{ - } 5\,x_3 \;\to max$$

$$\begin{cases} \begin{array}{llll} x_1 & -7x_2 & 4x_3 & \le 11 \\ -2x_1 & -9x_2 & 1x_3 & \le -7 \\ x_1 \ge 0 & x_2 \ge 0 & x_3 \ge 0 & \end{array} \end{cases}$$

Канонический вид

$$L = -2x_1 - x_2 \text{ - } 5\,x_3 \;\to max$$

$$\begin{cases} \begin{array}{lllll} x_1 & -7x_2 & 4x_3 & x_4 & = 11 \\ -2x_1 & -9x_2 & 1x_3 & x_5 & = -7 \\ x_1 \ge 0 & x_2 \ge 0 & x_3 \ge 0 & x_4 \ge 0 & x_5 \ge 0 \end{array} \end{cases}$$

Разновидности допустимых множеств решений

1. Допустимое множество решений **пусто**. Задача решений не имеет
2. Допустимое множество решений - **выпуклый ограниченный многогранник**. Задача имеет одно или бесконечно много решений.
3. Допустимое множество - **выпуклое неограниченное многогранное множество**. Задача решений не имеет.

Если задача линейного программирования имеет хотя бы один оптимальный план, то его следует искать среди вершин допустимого множества решений.

Графический метод решения задачи линейного программирования

Задача

$$L = 3x_1 + 4x_2 \rightarrow min/max$$

$$\begin{cases} -x_1 \quad\quad x_2 \quad\quad \leq 3 \\ 5x_1 \quad\quad 3x_2 \quad\quad \leq 97 \\ x_1 \quad\quad 7x_2 \quad\quad \geq 74 \\ x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Симплекс-метод

1. Задача должна быть представлена в каноническом виде.
2. В каждом из равенств присутствует **одна** базисная переменная, взятая с единичным коэффициентом, а в других равенствах её нет.

ПРИМЕР

$$L = 3x_1 + 4x_2 + 6x_3 \rightarrow max$$

$$\begin{cases} 2x_1 \quad 5x_2 \quad 2x_3 \quad \leq 12 \\ 7x_1 \quad 1x_2 \quad 2x_3 \quad \leq 18 \\ x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0 \quad x_3 \geq 0 \end{cases}$$

ПРИМЕР

$$L = 3x_1 + 4x_2 + 6x_3 \rightarrow max$$

$$\begin{cases} 2x_1 \quad 5x_2 \quad 2x_3 \quad x_4 \quad \leq 12 \\ 7x_1 \quad 1x_2 \quad 2x_3 \quad x_5 \quad \leq 18 \\ x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0 \quad x_3 \geq 0 \quad x_4 \geq 0 \quad x_5 \geq 0 \end{cases}$$

x4, x5 – базисные переменные

Симплекс-таблица

Базис	x_1	…	x_n	x_{n+1}	…	x_{n+m}	Свободные члены	Симплекс-отношения
x_{n+1}	$a_{1,1}$	…	$a_{1,n}$	1	…	0		
…	…	…	…	…	…	…		
x_{n+m}	$a_{m,1}$		$a_{m,n}$	0	…	1		
	-c1	…	$-c_n$	0	…	0		

m – количество базисных переменных

Симплекс-таблица для примера

Базис	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	Свободные члены	Симплекс-отношения
x_4	2	5	2	1	0	12	
x_5	7	1	2	0	1	18	
	-3	-4	-6	0	0		

Опорный план: $\bar{x}^0 = (0, 0, 0, 12, 18)$

Условие оптимальности: если в последней строке симплекс-таблицы все элементы **неотрицательны**, то соответствующий опорный план является оптимальным.

Алгоритм симплекс-метода

1. В последней строке симплекс-таблицы выбирается наименьший отрицательный элемент. Столбец, соответствующий этому элементу, называется *ведущим*. Он определяет переменную, которая будет введена в базис на данном этапе. **В примере - переменная *x*3.**

2. Вычисляют отношения свободных членов к элементам ведущего столбца (симплекс-отношение): θ1=12/2=6, θ1=18/2=9. Находят наименьшее *неотрицательное* из этих симплекс-отношений. Оно соответствует *ведущей* строке, которая определяет переменную, выводимую из базиса.
В примере - переменная *x*4. (Если все симплекс-отношения окажутся отрицательными, то задача не имеет решений).

Базис	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	**Свободные члены**	**Симплекс-отношения**
x_4	2	5	**2**	1	0	12	6
x_5	7	1	2	0	1	18	9
	-3	-4	-6	0	0		

На пересечении ведущей строки и ведущего столбца находится ведущий элемент.

Алгоритм симплекс-метода

Базис	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	Свободные члены	Симплекс-отношения
x_3	?	?	**1**	?	0	?	
x_5	?	?	0	?	1	?	
	?	?	0	?	0		

3) Элементы ведущей строки, за исключением симплекс-отношения, делим на ведущий элемент.

Базис	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	Свободные члены	Симплекс-отношения
x_3	1	2.5	**1**	0.5	0	6	
x_5	?	?	0	?	1	?	
	?	?	0	?	0		

Алгоритм симплекс-метода

4) Оставшиеся элементы симплекс-таблицы вычисляются по правилу прямоугольника: мысленно чертим прямоугольник, одна вершина которого совпадает с разрешающим элементом, а другая - с элементом, образ которого ищется (две другие вершины называются **дополняющими**);
Искомый элемент будет равен соответствующему элементу текущей таблицы минус дробь, в знаменателе которой стоит разрешающий элемент, а в числителе - произведение элементов **дополняющих** вершин.

Базис	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	**Свободные члены**	**Симплекс-отношения**
x_3	1	2.5	**1**	0.5	0	6	
x_5	5	-4	0	-1	1	6	
	3	11	0	3	0		

Новый опорный план: $\bar{x}^0 = (0, 0, 6, 0, 6)$

Оптимальное решение: x = (0, 0, 6);
Оптимальное значение целевой функции: L=3*0 + 4*0 + 6*6 =36