Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана

Однопроходные алгоритмы

сентябрь 2023 г.

Определение простоты числа

Число N называется простым, если оно делится ТОЛЬКО на 1 и на себя.

Если
X1 – делитель числа N, то
X2 = N / X1
тоже делитель числа N.

Если $X1 < N^{1/2}$, то $X2 > N^{1/2}$.

Доказательство:

$X1 < N^{1/2}$

$N / X2 < N^{1/2}$

$N^{1/2} * N^{1/2} / X2 < N^{1/2}$

$N^{1/2} / X2 < 1$

$N^{1/2} < X2$

Если квадратный корень числа N является целым числом, то число N не простое.

Определение простоты числа

Псевдокод

```
Ввести число N
k = 0
ЕСЛИ N нечётное
ТО:
        root = N ½
        ЕСЛИ root не целое число
        ТО:
                bord = целая часть от root
                ДЛЯ x от:3 до: bord шаг:2
                ДЕЛАЙ:
                        ЕСЛИ N / x целое число
                        ТО:
                                прервать цикл
                КОНЕЦ
                ЕСЛИ x = bord
                ТО:
                        k = 1
ЕСЛИ к = 1
ТО:
        Вывести: N простое число
ИНАЧЕ: Вывести: N не простое число
```

Разложение числа на простые множители

Псевдокод

```
Ввести число N
d = 2
ПОКА N > 1
ДЕЛАЙ:
        ЕСЛИ остаток x / d = 0
        ТО:
                ВЫВЕСТИ d
                N = целая часть x / d
        ИНАЧЕ:
                d  = d + 1
```

Разложение числа на простые множители

Законы теории чисел

Главная теорема арифметики:

$$x = p_1 \cdot p_2 \cdot \cdot \cdot p_n$$

$p_1, p_{2,} \ldots p_n$ – простые числа

$$x = p_1^{d_1} \cdot p_2^{d_2} \cdot \cdot \cdot p_n^{d_n}$$

$d_1, d_2, \ldots, d_n$ – натуральные числа

Количество делителей натурального числа n:

$$\tau(n) = (d_1 + 1) \cdot (d_2 + 1) \cdots (d_n + 1)$$

Вычисление квадрата дисперсии

Псевдокод

$$D^2 = \frac{\sum_i (x_i - \bar{x})^2}{n}$$

$$D^2 = \frac{\sum_i (x_i^2 - 2x_i\bar{x} + \bar{x}^2)}{n} = \frac{\sum_i x_i^2}{n} - 2\bar{x}\frac{\sum_i x_i}{n} + \bar{x}^2\frac{\sum_i 1}{n}$$

$$D^2 = \overline{x^2} - \bar{x}^2$$

Развитие алгоритма поиска максимума

В файле записаны N чисел, каждое из которых не превышает 10^9. Напишите эффективную программу, которая должна вывести на экран максимальное произведение двух различных элементов последовательности, которое кратно 6. Под «различными» нужно понимать не различные значения, а различные номера в последовательности. То есть, результат может быть квадратом некоторого числа, если оно в последовательности встречается не менее двух раз.

Решение

Произведение кратно 6, если:

- один сомножитель кратен 3 и не кратен 6; а другой – кратен 2 и не кратен 6;
- один из сомножителей кратен 6, другой не кратен 6;
- оба сомножителя кратны 6.

Для каждого числа из файла вычисляем одну из четырёх характеристик:

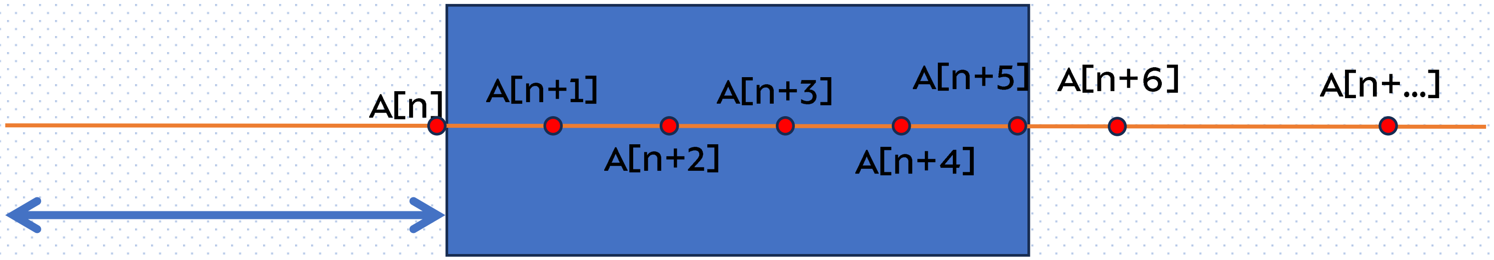
- максимум среди чисел кратных 3-м и не кратных 6-и (m1);
- максимум среди чисел кратных 2-м не кратных 6-и (m2);
- первый и второй максимум среди чисел кратных 6-и (m3, m4);
- максимум среди чисел не кратных 6-и (m5).

Вычисляем: m1*m2; m3*m4; m5*m3, выбираем максимальное произведение.

Скользящее окно

В файле записаны N чисел, каждое из которых не превышает 10^9. Напишите эффективную, в том числе и по используемой памяти, программу, которая выводит на экран максимальную сумму двух элементов этой последовательности, номера которых различаются не меньше чем на 5.

Сумма будет максимальной, если слагаемые – максимальные числа.



Вычислить max(A[n])
Сложить max с A[n+5]
Сравнить сумму с текущим результатом,
обновить результат, при необходимости.

Сдвиг окна вправо после завершения вычислений слева от него.

Циклический сдвиг

```
a = [1, 2, 3, 4, 5]

for i in range(5):
    a[i%5] = 6 + i
    print(a)
```

Цикл. сдвиг	Нециклический сдвиг
[6, 2, 3, 4, 5]	[2, 3, 4, 5, 6]
[6, 7, 3, 4, 5]	[3, 4, 5, 6, 7]
[6, 7, 8, 4, 5]	[4, 5, 6, 7, 8]
[6, 7, 8, 9, 5]	[5, 6, 7, 8, 9]
[6, 7, 8, 9, 10]	[6, 7, 8, 9, 10]
O(n)	O(1)

В общем случае, для последовательности длиной m, номер элемента равен (i+idx)%m, где
i – номер циклического сдвига;
idx – индекс элемента в нециклическом массиве.

Префиксные суммы

Дана последовательность из N натуральных чисел. Рассматриваются все её непрерывные подпоследовательности, такие что сумма элементов каждой из них кратна k = 43. Найдите среди них подпоследовательность с максимальной суммой, определите её длину. Если таких подпоследовательностей найдено несколько, в ответе укажите количество элементов самой короткой из них.

A[0]	A[1]	…	A[n]	…	A[m]		
sum[0]	sum[1]	…	sum[n]	…	sum[m]		

S_{nm} = sum[m] – sum[n - 1]

Индекс: Остаток от деления sum на к	Значение
0	0
1	-1
…	…
42	-1