

Задачи по теме «Производная»

1. Правила дифференцирования

1.1) Используя определение, вычислить производные:

- a) $f(x) = x^2;$
- б) $f(x) = \frac{1}{x^2}$
- в) $f(x) = 7x^3 - 9x + 3;$
- г) $f(x) = \cos x;$
- д) $f(x) = \frac{x}{1-x}$

1.2) Используя свойства производной и табличные производные, вычислить производные следующих функций:

- | | |
|---|---|
| 1) $f(x) = \frac{2x}{1-x^2}$ | 2) $f(x) = x + \sqrt{x} + \sqrt[3]{x}$ |
| 3) $f(x) = \sqrt[3]{\frac{1+x^3}{1-x^3}}$ | 4) $f(x) = \cos 2x - 2 \sin x$ |
| 5) $f(x) = \sin[\sin(\sin x)]$ | 6) $f(x) = \frac{\sin^2 x}{\sin x^2}$ |
| 7) $f(x) = \frac{\sin x - x \cos x}{\cos x + x \sin x}$ | 8) $f(x) = 4\sqrt[3]{ctg^2 x} + \sqrt[3]{ctg^8 x}$ |
| 9) $f(x) = e^x \left(1 + ctg \frac{x}{2}\right)$ | 10) $f(x) = e^{-x^2}$ |
| 11) $f(x) = \ln^3(x^2)$ | 12) $f(x) = \ln(\ln^2(\ln^3 x))$ |
| 13) $f(x) = \ln \operatorname{tg} \frac{x}{2} - \cos x \cdot \ln \operatorname{tg} x$ | 14) $f(x) = \arcsin(\sin x - \cos x)$ |
| 15) использовать для решения логарифмическое дифференцирование: | 16) использовать для решения логарифмическое дифференцирование: |

$$f(x) = \sqrt{x \cdot \sin x \cdot \sqrt[4]{1 - e^x}}$$

$$f(x) = \frac{x^2 \sqrt{x+1}}{(x-1)^3 \sqrt[5]{5x-1}}$$

2. Дифференциал

2.1 Вычислить приближённые значения:

- 1) $\sqrt[3]{8.03}$
- 2) $\sin 31^0$
- 3) $\sqrt[3]{1.02}$
- 4) $\sin 29^0$
- 5) $\operatorname{arctg} 1.05$
- 6) $\log_{10} 11$
- 7) $\cos 151^0$

3. Производные высших порядков

3.1 Найти вторую производную:

- | | |
|---|--|
| 1) $y = x\sqrt{1+x^2}$ | 2) $y = (1+x^2)\operatorname{arctg}(x)$ |
| 3) $y = x \cdot \ln x$ | 4) $y = x \cdot (\sin(\ln x) + \cos(\ln x))$ |
| 5) $y = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$ | 6) $y = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ |

4. Разложение функции в ряд

4.1 Разложить в ряд Лорана по степеням ($x-2$) функцию:

$$y = x^3 - 2x^2 + 3x + 5$$

4.2 Разложить в ряд Лорана функцию $\cos(x)$.

4.3 Разложить в ряд Лорана функцию e^x .

4.4 Вычислить с точностью до 10^{-3} значение $\sqrt[3]{121}$

4.5 Вычислить с точностью до 10^{-3} значение $\sqrt[3]{e}$

4.6 Вычислить с точностью до 10^{-3} значение $\sqrt[7]{129}$

5. правило Лопиталя

5.1 Найти пределы:

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos 2x}{\sin 2x}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x}-1}{\arcsin 3x}$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-\sqrt{x}}{1-\sqrt[3]{x}}$$

$$7) \lim_{x \rightarrow \infty} x(e^{\frac{1}{x}} - 1)$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \operatorname{arctg} x}{x^3}$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x}$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 0} \arcsin x \cdot \operatorname{ctg} x$$

$$8) \lim_{x \rightarrow 0} (\operatorname{ctg} x - \frac{1}{x})$$

6. Касательная и нормаль

6.1 Составить уравнение касательной и нормали:

1) Данна функция $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$. Составить уравнения касательной и нормали в точке с абсциссой $x_0=0$.

2) Для функции $f(x) = \sqrt{x+2}$ найти уравнения касательной и нормали в точке $x_0=2$.

3) К графику функции $f(x) = e^x$ провести касательную и нормаль в точке $x_0=0$. Составить их уравнения.

4) Найти уравнения касательной и нормали к графику функции $f(x) = \ln(x+1)$ в точке $x_0=1$.

5) Данна функция $f(x) = \sin 2x$. Составить уравнения касательной и нормали в точке $x_0 = \frac{\pi}{4}$.

6) Для функции $f(x) = x^2 - 4x + 3$ найти уравнения касательной и нормали в точке с абсциссой $x_0=2$.

7) К графику функции $f(x) = \frac{x^2}{x+1}$ провести касательную и нормаль в точке $x_0=1$. Составить их уравнения.

8) Найти уравнения касательной и нормали к графику функции $f(x) = \cos x$ в точке $x_0 = \frac{\pi}{3}$.

9 Дано функция $f(x) = x^4 - 3x^2 + 2$. Составить уравнения касательной и нормали в точке с абсциссой $x_0 = -1$.

7. Исследование функций

7.1 Исследовать функции и построить их графики:

$$1) f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 4}$$

$$2) f(x) = 1 + x^2 - \frac{x^4}{2}$$

$$3) f(x) = \sqrt[3]{1 - x^3}$$

8. Частные производные

8.1 Найти частные производные по переменным x и y для следующих функций:

$$1) z = 3x^2y - 2xy^2 + 5x - 7y$$

$$2) z = \frac{x^2}{y^2} + \ln(xy) - e^{2x}$$

$$3) z = \sin(xy) + \cos(x^2 - y^2)$$

$$4) z = \sqrt{x^2 + y^2} - \frac{1}{x+y}$$

$$5) z = \ln(x^2 + y^2) - \operatorname{arctg} \frac{y}{z}$$

$$6) z = e^{|xy|} \cdot \sin(x - y)$$

$$7) z = \frac{x^2y}{x+y}$$

$$8) z = (x^2 - y^2)e^{x+y}$$

$$9) z = \frac{\sin x}{\cos y} + \frac{\cos x}{\sin y}$$

$$10) z = \ln(1 + x^2y^2) - \sqrt{x - y}$$