Комплексные числа

Алгебраическая форма комплексного числа

- **Алгебраической формой комплексного числа z** называется выражение z = a + ib, где:
- *a* и *b* – действительные числа;
- *i* – мнимая единица, которая определяется соотношением:
- $i^2 = -1$

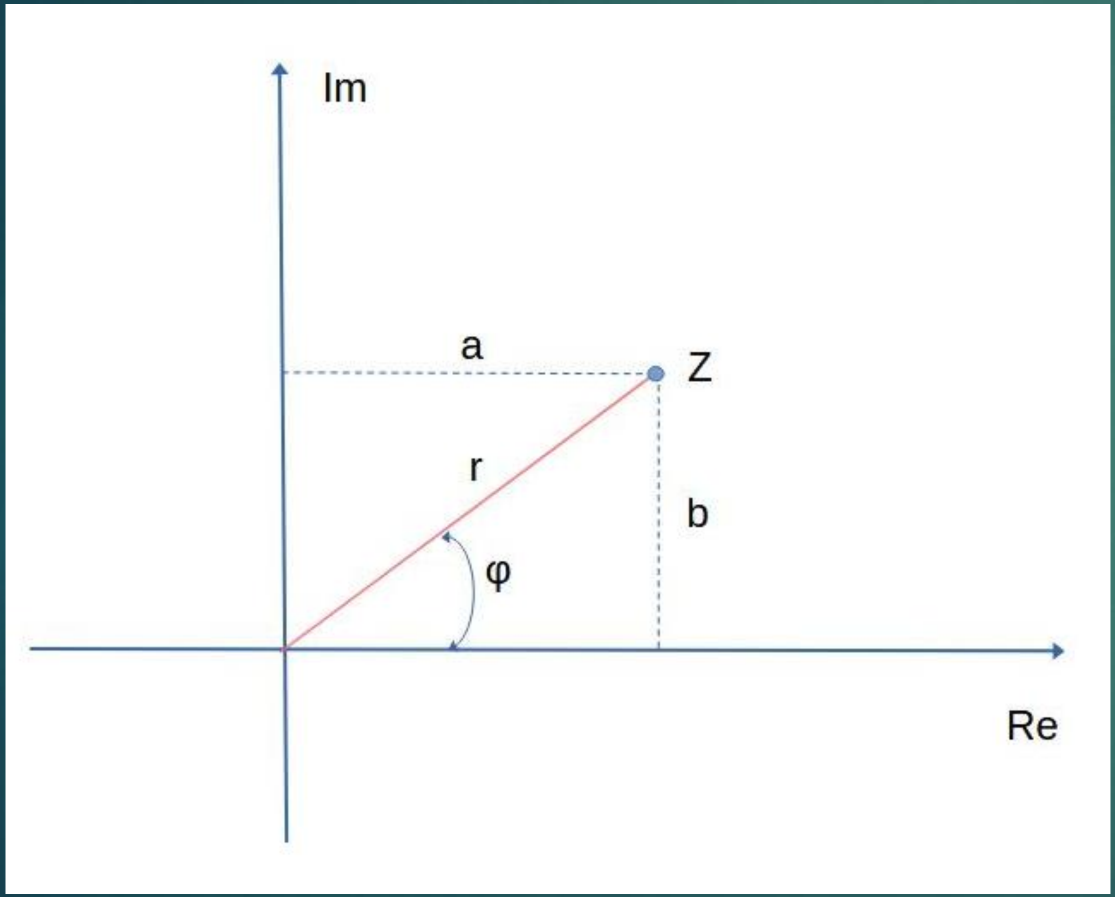
- a – действительная часть комплексного числа (Re z);
- b – мнимая часть комплексного числа (Im z)

Алгебраическая форма комплексного числа

- ***Комплексно-сопряжённые числа:***
- $z = a + ib\ ;\ \bar{z} = a\ - ib$

- ***Равенство комплексных чисел***
- *комплексные числа равны, если равны их мнимые и действительные части:*
- $z_1\ = a_1 +\ b_1 i;\ z_2 = a_2 +\ b_2 i$
- $z_1\ = z_2\ \text{если}\ a_1\ = a_2\ \text{и}\ b_1\ =\ b_2$
- ***Равенство комплексного числа нулю***
- *z = a + bi = 0, если a=b=0*

Геометрическое представление комплексного числа



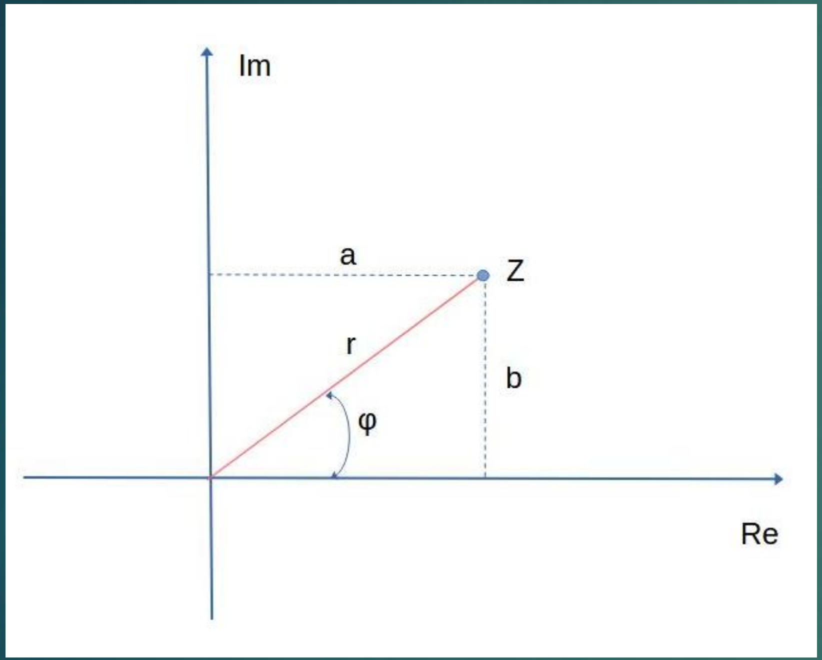
r – **модуль комплексного числа.**

r=$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

φ – **аргумент комплексного числа.**

$$\varphi = Arg\ z = \ rctg\frac{b}{a}$$

Тригонометрическая форма комплексного числа



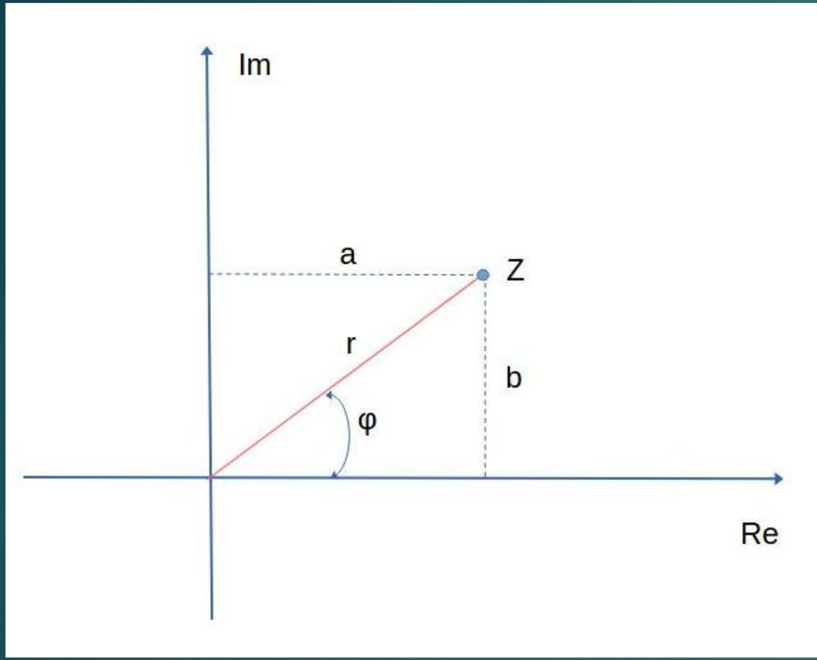
$$\boldsymbol{Z = r(\cos\varphi + \sin\varphi\, i)}$$

Для комплексно-сопряжённых чисел:

$$|z| = |\bar{z}|$$

$$Arg\, z = -Arg\bar{z}$$

Тригонометрическая форма комплексного числа



$$\mathrm{A}rg\,Z = \begin{cases} arctg\,\dfrac{b}{a},\ z \text{ в квадрантах } 1, 4 \\ \pi + arctg\dfrac{b}{a},\ z \text{ в квадранте } 2 \\ -\pi + arctg\dfrac{b}{a},\ z \text{ в квадранте } 3 \end{cases}$$

Показательная форма комплексного числа

- **Формула Эйлера**
- $e^{a+bi} = e^{a}(cos(b) + sin(b)i)$

- **Показательная форма комплексного числа:**
- $z = re^{\varphi i}$

Тригонометрическая форма комплексного числа

- **Пример**

- Представить комплексное число $z = -4\sqrt{3} - 4i$ в тригонометрической и показательной формах.

Справочный материал

ЗНАЧЕНИЯ ОБРАТНЫХ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

a	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\arcsin a$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\arccos a$	π	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	0

a	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$
$\mathrm{arctg}\, a$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
$\mathrm{arcctg}\, a$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$

Справочный материал

ТАБЛИЦА ЗНАЧЕНИЙ ОСНОВНЫХ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

α^0	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	210°	225°	240°	270°	300°	315°	330°	360°
α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
$Sin\,\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
$Cos\,\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$tg\,\alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	-	$\sqrt{3}$	-1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	-	$\sqrt{3}$	-1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0
$ctg\,\alpha$	-	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	-1	$-\sqrt{3}$	-	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	-1	$-\sqrt{3}$	-

Справочный материал

сумма и разность углов

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\sin\beta$$

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta-\cos\alpha\cdot\sin\beta$$

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta$$

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta+\sin\alpha\cdot\sin\beta$$

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}$$

$$\operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}$$

$$\operatorname{ctg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{ctg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\beta-1}{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta}$$

$$\operatorname{ctg}(\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{ctg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\beta+1}{\operatorname{ctg}\beta-\operatorname{ctg}\alpha}$$

Действия над комплексными числами в алгебраической форме

- **Сумма и разность**
  - $z_1 = a_1 + b_1 i$
  - $z_2 = a_2 + b_2 i$
- $z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$
- $z_1 - z_2 = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i$

Действия над комплексными числами в алгебраической форме

- **Произведение**
  - $z_1 = a_1 + b_1 i$
  - $z_2 = a_2 + b_2 i$
- $z_1 z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1) i$

Действия над комплексными числами в алгебраической форме

- **Частное**
- $z_1 = a_1 + b_1 i$
- $z_2 = a_2 + b_2 i$
- $z_1 z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1) i$
- $\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 + b_1 i}{a_2 + b_2 i} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{{a_2}^2 + {b_2}^2} + \frac{b_1 a_2 - a_1 b_2}{{a_2}^2 + {b_2}^2}$

Действия над комплексными числами в алгебраической форме

Пример

Выполнить сложение, вычитание, умножение и деление для следующих комплексных чисел:

- $z_1 = -9 - 7i$
- $z_2 = -1 + i$

Решение квадратных уравнений над комплексной плоскостью

Пример

Решить уравнения над комплексной плоскостью:

$$6x^2+7=0$$

$$3x^2+3x+1=0$$

Произведение и частое комплексных чисел в тригонометрической форме

- $z_1 = r_1(cos\varphi_1 + sin\varphi_1 i)$
- $z_2 = r_2(cos\varphi_2 + sin\varphi_2 i)$
- $z_1 z_2 = r_1 r_2(cos(\varphi_1 + \varphi_2) + sin(\varphi_1 + \varphi_2)i)$
- $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(cos(\varphi_1 - \varphi_2) + sin(\varphi_1 - \varphi_2)i)$

Произведение и частое комплексных чисел в тригонометрической форме

- **Пример**
- Найти произведение и частое комплексных чисел в тригонометрической форме:
- $z_1 = -4 + 4i;\ z_2 = 9\sqrt{3} - 9i$

Возведение комплексного числа в степень

- **Формула Муавра:**
- $z = r\ (cos\varphi + sin\varphi i)$
- $z^n = r^n(cos(n\varphi) + sin(n\varphi)i)$

Возведение комплексного числа в степень

- **Пример**
- **Выполнить возведение в 3-ю степень комплексного числа^**
- **Z = -5 -5i**

Извлечение корня из комплексного числа

- **Формула Муавра**
- $z = r\,(cos\varphi + sin\varphi i)$
- $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{z}\left(cos\left(\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right) + sin\left(\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right) i\right), k = 0, 1, 2 \ldots, n-1$
- **Комплексное число имеет ровно n корней степени n.**

Извлечение корня из комплексного числа

- **Пример**
- **Найти все значения корня пятой степени из комплексного числа $z = 4 - 4\sqrt{3}$**