Задачи по теме «Операции с матрицами»

1) Найти линейные комбинации для матриц F и B: $C = \alpha A + \beta B$.

а) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 5 & -2 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}, \alpha = 1, \beta = -2$

б) $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -2 & 5 & 3 \\ 0 & -1 & 7 \end{pmatrix}, \alpha = 3, \beta = -2$

в) $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 0 & 5 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -4 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}, \alpha = 4, \beta = 2$

г) $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 5 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \alpha = 1, \beta = -\lambda$

2) Вычислить произведение матриц:

а) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}$

б) $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$

в) $\begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & -4 & 2 \end{pmatrix}$

г) $\begin{pmatrix} -4 & 0 & 1 \\ 4 & 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$

д) $\begin{pmatrix} 20 \\ -8 \\ 13 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 7 & 3 \end{pmatrix}$

е) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

3) Вычислить:

а) $\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 7 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -8 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} xy & x \\ y & 1 \end{vmatrix};$

б) $\begin{vmatrix} sin\alpha & cos\alpha \\ sin\beta & cos\beta \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x-1 & x^3 \\ 1 & x^2+x+1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & x+1 & 2 \\ 0 & 0 & x-1 \end{vmatrix};$

в) $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 7 & 0 \\ -3 & 4 & -2 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 200 & 700 & 50 & 100 \\ 22 & -33 & 43 & 2 \\ 4 & 14 & 1 & 2 \\ -3333 & 4 & -28 & 0 \end{vmatrix}$

4) Вычислить определитель по схеме Саррюса, найти миноры и алгебраические дополнения для элементов a_{21}, a_{13}, a_{22}

а) $\begin{vmatrix} 7 & 2 & 2 \\ 2 & 9 & 3 \\ 1 & 4 & 11 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ в) $\begin{vmatrix} \alpha & 1 & \alpha \\ 1 & -\alpha & 0 \\ -\alpha & 0 & 1 \end{vmatrix}$

5) Вычислить определители указанных матриц, применяя свойства определителей:

а) $\begin{vmatrix} 1 & 30 & 987 \\ 20 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 299 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}$ в) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 5 & 4 \\ -4 & 2 & 1 \end{vmatrix}$ г) $\begin{vmatrix} 5 & 1 & -1 \\ -4 & 2 & 8 \\ 1 & 3 & 7 \end{vmatrix}$

6)Решить уравнения:

а) $\begin{vmatrix} 3 & 2x+1 \\ 2 & x+5 \end{vmatrix} = 0$ б) $\begin{vmatrix} x-1 & x+3 \\ x-1 & 7-x \end{vmatrix} = 0$

7) Убедится, что матрица В является обратной для матрицы А:

а) $A = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 7 \end{pmatrix}$

б) $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 4 \\ -3 & 5 & -6 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 5 \\ 0 & 3 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

8) Найдите матрицу, обратную данной, по формуле обратной матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 2 & -a \\ b & -1 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} 3 & 8 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

9) Найдите матрицу, обратную данной, методом Гаусса-Жордана:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 2 & -1 & 4 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

10) Решить матричное уравнение:

+а) $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$

б) $X \cdot \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$

в) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & -4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 5 \\ 12 \\ -9 \end{pmatrix}$

г) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 \\ -1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 4 \\ -7 \\ -3 \end{pmatrix}$

11) Решить систему линейных уравнений с помощью обратной матрицы:

11.1) $\begin{cases} -5x_1 - x_2 - 2x_3 = 4 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = -4 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = -3 \end{cases}$ 11.2) $\begin{cases} 8x_1 - x_3 = -6 \\ -x_1 + 3x_2 - x_3 = 2 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 = -3 \end{cases}$

11.3) $\begin{cases} x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 6 \\ -3x_1 - x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 2 \end{cases}$

11.4) $\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + 2x_3 = 9 \\ -x_1 + x_2 = 2 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 4 \end{cases}$

11.5) $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 3 \\ 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 2 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$

11.6) $\begin{cases} -x_1 + 2x_2 = 3 \\ -3x_1 + 2x_2 - x_3 = 4 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = -2 \end{cases}$

11.7) $\begin{cases} x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 6 \\ -3x_1 - x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 2 \end{cases}$

11.8) $\begin{cases} -7x_1 + 7x_2 - 2x_3 = 5 \\ 7x_1 - 8x_2 + 3x_3 = -6 \\ 3x_1 - 3x_2 + x_3 = -2 \end{cases}$

11.9) $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 = -1 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 9 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 8 \end{cases}$

11.10) $\begin{cases} x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 6 \\ -3x_1 - x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 2 \end{cases}$

11.11) $\begin{cases} -2x_1 + 3x_2 + x_3 = 5 \\ x_1 - x_2 - x_3 = -2 \\ -2x_1 + 2x_2 + x_3 = 3 \end{cases}$

12) Решить систему уравнений по формуле Крамера:

12.1) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = -3 \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 = -6 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = -1 \end{cases}$

12.2) $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 3 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0 \\ 4x_1 - x_2 = 3 \end{cases}$

12.3) $\begin{cases} -x_1 - x_3 = -2 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 = 6 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 1 \end{cases}$

12.4) $\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + 2x_3 = -3 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = -3 \\ 3x_1 + 4x_2 + 4x_3 = -1 \end{cases}$

12.5) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 2 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 = -3 \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 3 \end{cases}$

12.6) $\begin{cases} -4x_1 - 2x_2 - x_3 = 2 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = -5 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = -2 \end{cases}$

12.7) $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 = -2 \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 = -1 \\ -x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 2 \end{cases}$

12.8) $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -5 \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 4 \\ -x_2 + 3x_3 = 2 \end{cases}$

12.9) $\begin{cases} 2x_1 - 3x_3 = 2 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = -4 \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 = -3 \end{cases}$

12.10) $\begin{cases} x_1 - 3x_2 - 4x_3 = 3 \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 = -2 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 = 1 \end{cases}$

12.11) $\begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_3 = -2 \\ 3x_1 + 2x_3 = -4 \\ -x_1 - x_2 - 2x_3 = 2 \end{cases}$

13) Решить однородную систему линейных уравнений. В ответе указать фундаментальную систему решений и любое частное решение.

13.1) $\begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_3 = 0 \\ -4x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$

13.2 $\begin{cases} x_1 - 3x_2 - 4x_3 = 0 \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$

13.3) $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + 5x_3 = 0 \end{cases}$

13.4) $\begin{cases} 4x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_1 + x_3 = 0 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$

13.5) $\begin{cases} -3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0 \\ 4x_1 - x_2 = 0 \end{cases}$

13.6) $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 + 12x_4 - x_5 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 - 10x_4 + x_5 = 0 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_4 = 0 \end{cases}$

13.7) $\begin{cases} -3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0 \\ -2x_1 + 5x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases}$

13.8) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 - x_5 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 - 2x_5 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 5x_3 - 2x_4 - x_5 = 0 \end{cases}$

13.9) $\begin{cases} -4x_1 - 2x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 0 \\ -2x_1 - 6x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$

13.10) $\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 6x_4 = 0 \end{cases}$