

Задачи по теме «Производная»

1. Правила дифференцирования

1.1) Используя определение, вычислить производные:

а) $f(x) = x^2$;

б) $f(x) = \frac{1}{x^2}$

в) $f(x) = 7x^3 - 9x + 3$;

г) $f(x) = \sqrt{x}$;

д) $f(x) = \cos x$;

е) $f(x) = \frac{x}{1-x}$

1.2) Используя свойства производной и табличные производные, вычислить производные следующих функций:

1) $f(x) = \frac{2x}{1-x^2}$

2) $f(x) = \sqrt[3]{\frac{1+x^3}{1-x^3}}$

3) $f(x) = \sin[\sin(\sin x)]$

4) $f(x) = \frac{\sin x - x \cos x}{\cos x + x \sin x}$

5) $f(x) = e^x \left(1 + \operatorname{ctg} \frac{x}{2}\right)$

6) $f(x) = \ln^3(x^2)$

7) $f(x) = \ln \operatorname{tg} \frac{x}{2} - \cos x \cdot \ln \operatorname{tg} x$

8) использовать для решения логарифмическое дифференцирование:

$$f(x) = \sqrt{x \cdot \sin x \cdot \sqrt[4]{1 - e^x}}$$

9) $f(x) = x + \sqrt{x} + \sqrt[3]{x}$

10) $f(x) = \cos 2x - 2 \sin x$

11) $f(x) = \frac{\sin^2 x}{\sin x^2}$

12) $f(x) = 4\sqrt[3]{\operatorname{ctg}^2 x} + \sqrt[3]{\operatorname{ctg}^8 x}$

13) $f(x) = e^{-x^2}$

14) $f(x) = \ln(\ln^2(\ln^3 x))$

15) $f(x) = \arcsin(\sin x - \cos x)$

16) использовать для решения логарифмическое дифференцирование:

$$f(x) = \frac{x^2 \sqrt{x+1}}{(x-1)^3 \sqrt[5]{5x-1}}$$

2. Дифференциал

2.1 Вычислить приближённые значения:

- 1) $\sqrt[3]{8.03}$
- 2) $\sin 31^\circ$
- 3) $\sqrt[3]{1.02}$
- 4) $\sin 29^\circ$
- 5) $\operatorname{arctg} 1.05$
- 6) $\log_{10} 11$
- 7) $\cos 151^\circ$

3. Производные высших порядков

3.1 Найти вторую производную:

- | | |
|---|--|
| 1) $y = x\sqrt{1+x^2}$ | 2) $y = (1+x^2)\operatorname{arctg}(x)$ |
| 3) $y = x \cdot \ln x$ | 4) $y = x \cdot (\sin(\ln x) + \cos(\ln x))$ |
| 5) $y = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$ | 6) $y = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ |

4. Разложение функции в ряд

4.1 Разложить в ряд Лорана по степеням $(x-2)$ функцию:

$$y = x^3 - 2x^2 + 3x + 5$$

4.2 Разложить в ряд Лорана функцию $\cos(x)$.

4.3 Разложить в ряд Лорана функцию e^x .

4.4 Вычислить с точностью до 10^{-3} значение $\sqrt[3]{121}$

4.5 Вычислить с точностью до 10^{-3} значение $\sqrt[3]{e}$

4.6 Вычислить с точностью до 10^{-3} значение $\sqrt[7]{129}$

5. правило Лопитала

5.1 Найти пределы:

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos 2x}{\sin 2x}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{\arcsin 3x}$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \sqrt{x}}{1 - \sqrt[3]{x}}$$

$$7) \lim_{x \rightarrow \infty} x(e^{\frac{1}{x}} - 1)$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \operatorname{arctg} x}{x^3}$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x}$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 0} \arcsin x \cdot \operatorname{ctg} x$$

$$8) \lim_{x \rightarrow 0} (\operatorname{ctg} x - \frac{1}{x})$$

6. Касательная и нормаль

6.1 Составить уравнение касательной и нормали:

1) Дана функция $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$. Составить уравнения касательной и нормали в точке с абсциссой $x_0 = 0$.

2) Для функции $f(x) = \sqrt{x + 2}$ найти уравнения касательной и нормали в точке $x_0 = 2$.

3) К графику функции $f(x) = e^x$ провести касательную и нормаль в точке $x_0 = 0$. Составить их уравнения.

4) Найти уравнения касательной и нормали к графику функции $f(x) = \ln(x + 1)$ в точке $x_0 = 1$.

5) Дана функция $f(x) = \sin 2x$. Составить уравнения касательной и нормали в точке $x_0 = \frac{\pi}{4}$.

6) Для функции $f(x) = x^2 - 4x + 3$ найти уравнения касательной и нормали в точке с абсциссой $x_0 = 2$.

7) К графику функции $f(x) = \frac{x^2}{x + 1}$ провести касательную и нормаль в точке $x_0 = 1$. Составить их уравнения.

8) Найти уравнения касательной и нормали к графику функции $f(x) = \cos x$ в точке $x_0 = \frac{\pi}{3}$.

9 Дана функция $f(x) = x^4 - 3x^2 + 2$. Составить уравнения касательной и нормали в точке с абсциссой $x_0 = -1$.

7. Исследование функций

7.1 Исследовать функции и построить их графики:

1) $f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 4}$

2) $f(x) = 1 + x^2 - \frac{x^4}{2}$

3) $f(x) = \sqrt[3]{1 - x^3}$

8. Частные производные

8.1 Найти частные производные по переменным x и y для следующих функций:

1) $z = 3x^2y - 2xy^2 + 5x - 7y$

2) $z = \frac{x^2}{y^2} + \ln(xy) - e^{2x}$

3) $z = \sin(xy) + \cos(x^2 - y^2)$

4) $z = \sqrt{x^2 + y^2} - \frac{1}{x+y}$

5) $z = \ln(x^2 + y^2) - \arctg \frac{y}{z}$

6) $z = e^{|xy|} \cdot \sin(x - y)$

7) $z = \frac{x^2y}{x+y}$

8) $z = (x^2 - y^2)e^{x+y}$

9) $z = \frac{\sin x}{\cos y} + \frac{\cos x}{\sin y}$

10) $z = \ln(1 + x^2y^2) - \sqrt{x - y}$