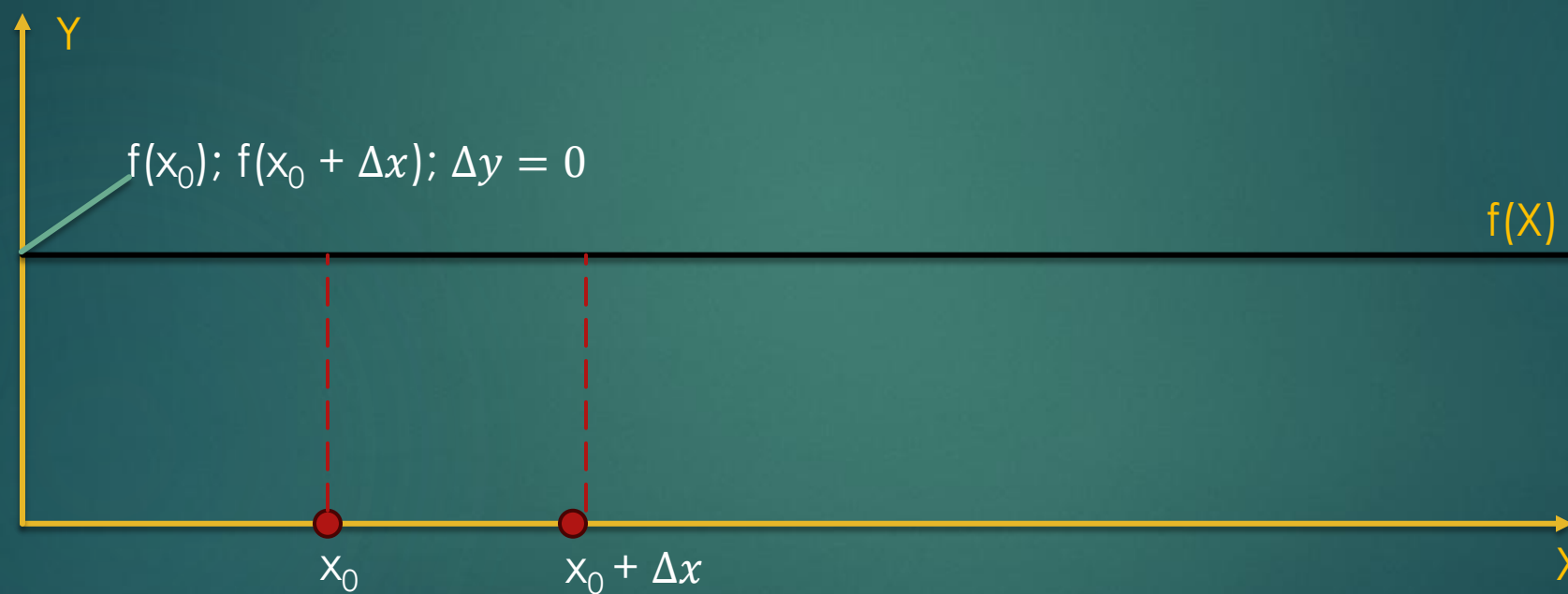


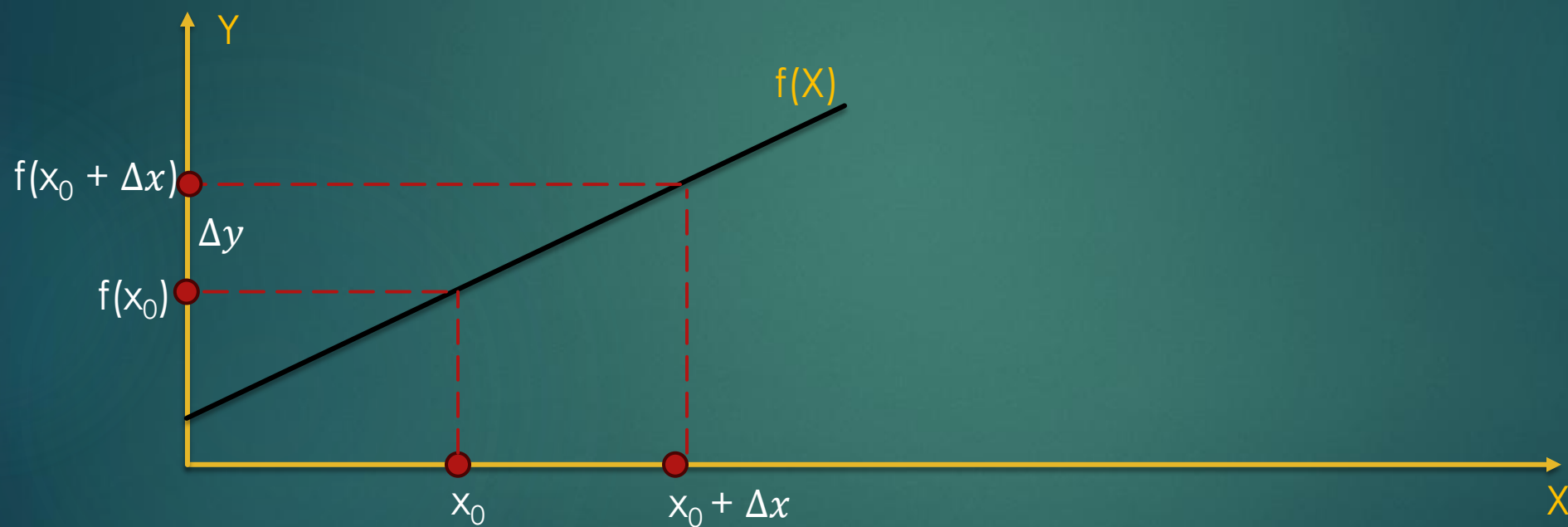
# Производная

# Физический смысл производной

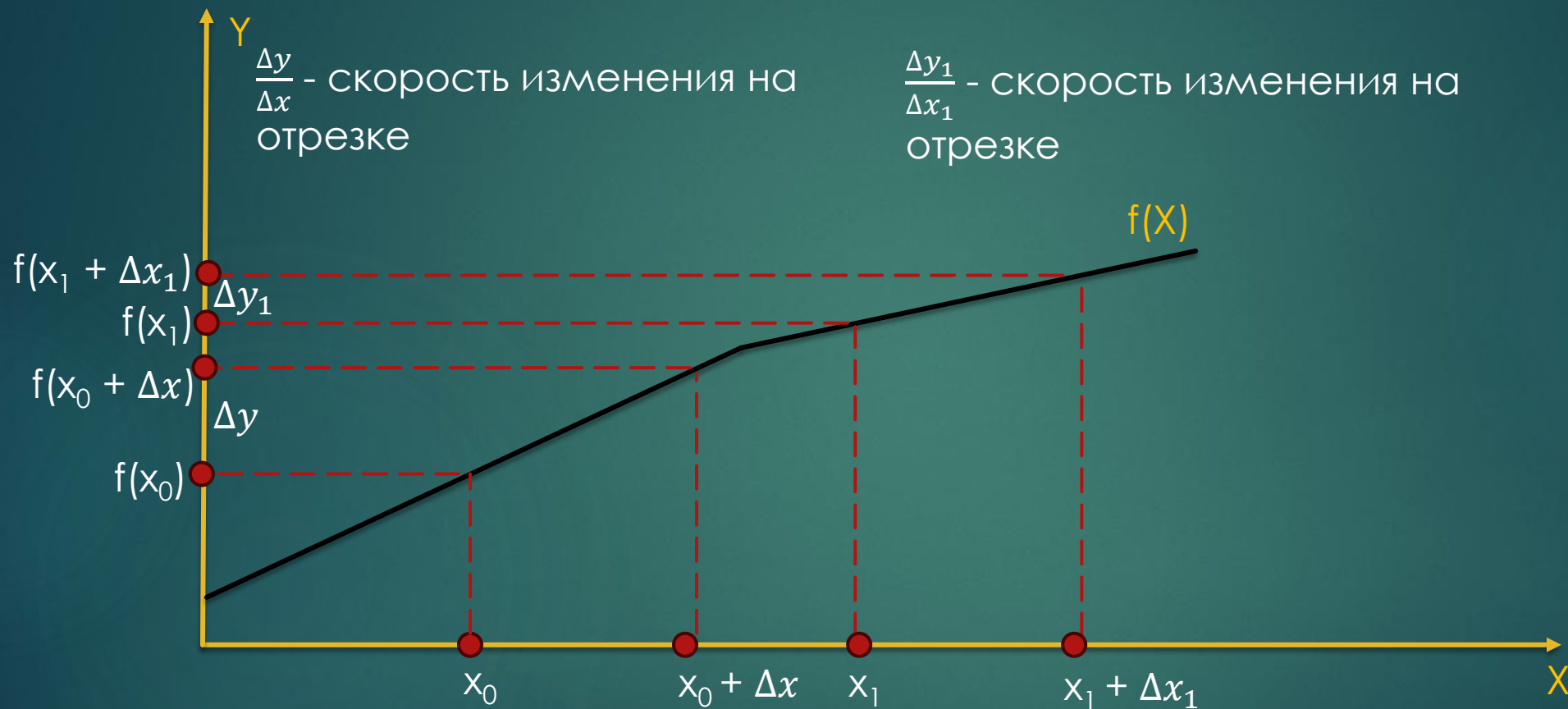


# Физический смысл производной

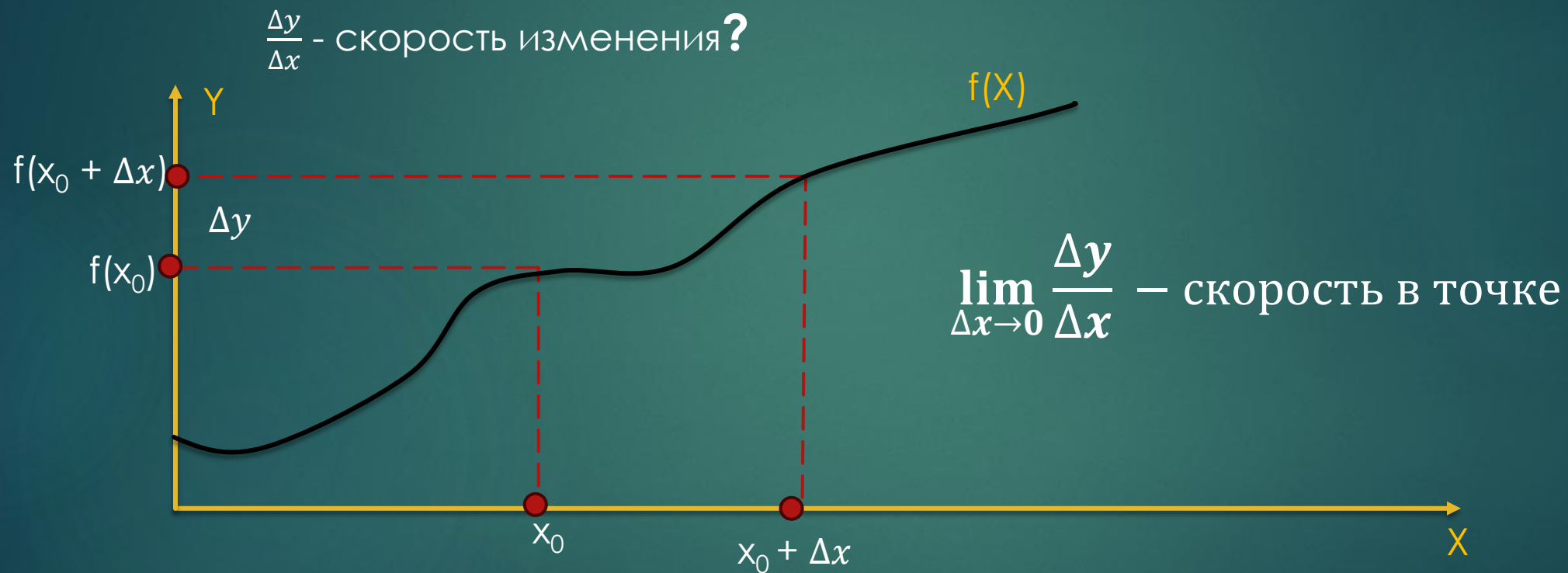
$\frac{\Delta y}{\Delta x}$  - скорость изменения на отрезке



# Физический смысл производной



# Физический смысл производной



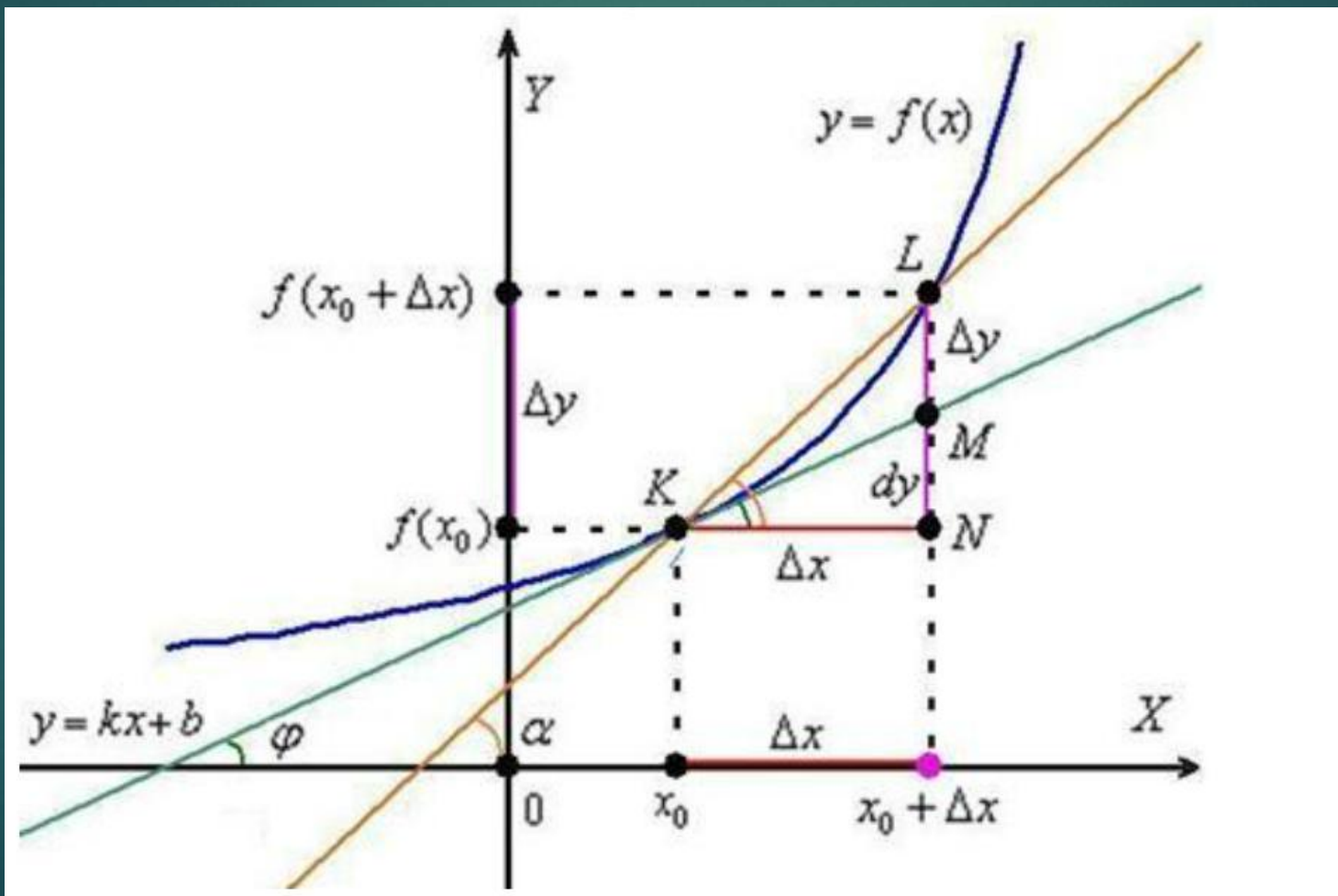
# Определение производной

Предел отношения приращения функции к приращению аргумента при стремлении приращения аргумента к нулю называется **производной**.

Производная функции  $f(x)$  обозначается  $f'(x)$ .

«Дифференцировать» – выделять свойства. В случае производной, выделяется одно из свойств функции – скорость.

# Геометрический смысл производной



# Геометрический смысл производной

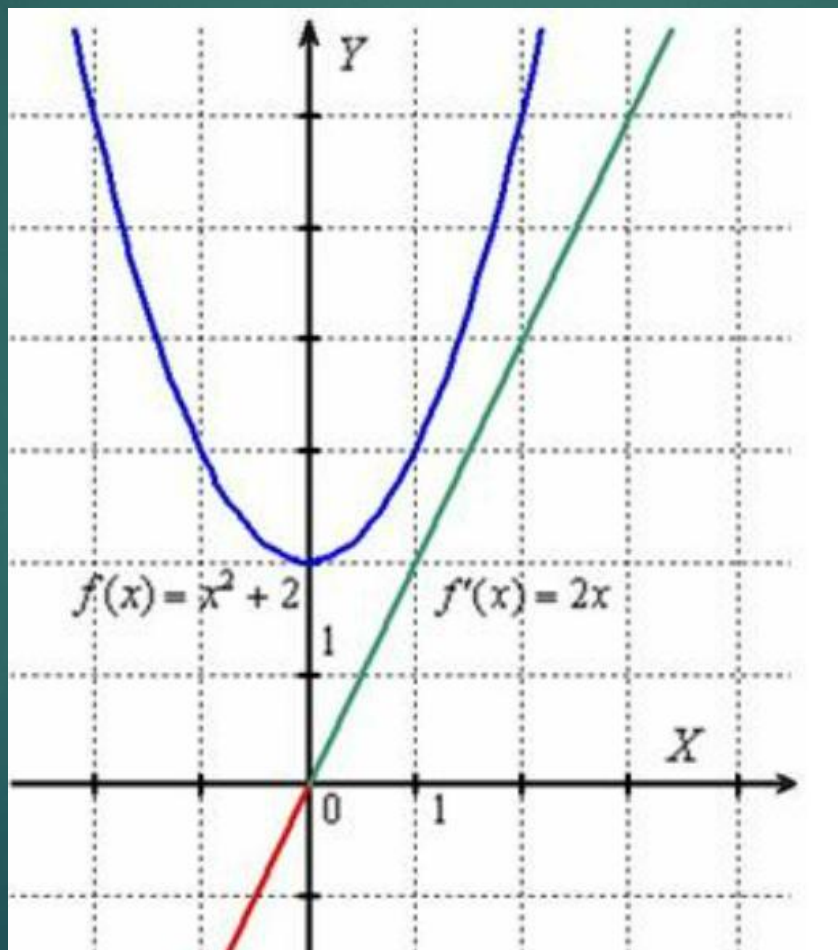
Производная в точке  $x_0$  равна углу наклона касательной к функции в точке  $x_0$ .

Уравнение касательной:

$$(y-y_0)=f'(x_0)(x-x_0)$$



# Геометрический смысл производной



# Вычисление производной

Пользуясь определением производной найти производные следующих функций.

**Использованы следующие тождества:**

- 1)  $f(x)=C=Const$
- 2)  $f(x) = x^n, x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$
- 3)  $f(x) = \ln x$
- 4)  $f(x) = e^x$
- 5)  $f(x) = \sin(x)$
- 6)  $f(x) = \cos(x)$

Бином Ньютона

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^{n-k} b^k; C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Разность синусов

$$\sin a - \sin b = 2 \sin \frac{a-b}{2} \cos \frac{a+b}{2}$$

# Вычисление производной

Таблица производных

$C' = 0$	$(x^n)' = nx^{n-1}$
$(\ln x)' = \frac{1}{x}$	$\left(\lim_a x\right)' = \frac{1}{x \ln a}$
$(e^x)' = e^x$	$(a^x)' = a^x \ln a$
$(\sin x)' = \cos x$	$(\cos x)' = -\sin x$
$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$	$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$	$(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$

# Вычисление производной

## Правила дифференцирования

<b>Сумма, умножение на константу</b> $(\alpha f(x) + \beta g(x))' = \alpha f'(x) + \beta g'(x)$	<b>Произведение</b> $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x)g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
<b>Частное</b> $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$	<b>Сложная функция</b> $(f(g(x)))' = f'(x)g'(x)$
<b>Обратная функция</b> $(f^{-1}(x))' = \frac{1}{f'(x)}$	<b>Логарифмическое дифференцирование</b> $f'(x) = f(x) \cdot (\ln f(x))'$

# Вычисление производной

## Пример 1.1

Используя определение вычислить производную функции:

$$f(x) = 3x^2 + 9x + 3$$

## Пример 1.2

Используя определение вычислить производную функции:

$$f(x) = \sin 3x$$

## Пример 1.3

Используя определение вычислить производную функции:

$$f(x) = \sqrt[3]{x}$$

# Вычисление производной

Используя свойства производной и табличные производные вычислить  $f'(x)$ :

Пример 2.1

$$f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$$

Пример 2.2

$$f(x) = \frac{1 - x - x^2}{1 - x + x^2}$$

Пример 2.3

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2} - \frac{2}{\sqrt{x}}$$

# Вычисление производной

Используя свойства производной и табличные производные вычислить  $f'(x)$ :

Пример 2.4

$$f(x) = \sin(\cos^2 x) \cdot \cos(\sin^2 x)$$

Пример 2.5

$$f(x) = \ln \frac{x+a}{\sqrt{x^2+b}} + \frac{a^2}{b} \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{b}\right)$$

Пример 2.3 (использовать логарифмическое дифференцирование)

$$f(x) = x \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$$

# Дифференциал

Обозначение производной  $\frac{df(x)}{dx}$  другое не только по форме, но и по смыслу.

Если  $dx$  конечная величина, то:

$$\Delta f(x) = f'(x) \cdot \Delta x$$

$$f(x_0 + \Delta x) = f'(x_0) \cdot \Delta x$$



# Приближённые вычисления

Пример 3.1

Вычислить приближённо  $\sqrt{101}$

Пример 3.2

Вычислить приближённо  $y = e^{1-x^2}$  в точке  $x=1.05$

# Производные высших порядков

Пусть  $y=f(x)$  – дифференцируемая функция.

Её производная  $y'=f'(x)$  то же является функцией  $x$ .

Если существует  $(f'(x))'$ , то она называется производной второго порядка:  $y''=f''(x)$ .

Производные более высоких порядков:

$$(f''(x))'=f'''(x)$$

$$(f'''(x))'=f^{(4)}(x)$$

...

Вторая производная - **ускорение**

# Производные высших порядков

Пример 4.1

Найти производную второго порядка:  $y = e^{-2x^2}$

Пример 4.2

Найти производную второго порядка:  $y = \tan x$

# Разложение функции в ряд

Пусть  $f(x)$  –  $n+1$  раз дифференцируема в точке  $a$ .

Ряд Тейлора

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_{n+1}(x)$$

Остаточный член ряда Тейлора:

$$R_{n+1}(x) = \left( \frac{x-a}{x-\xi} \right)^p \frac{(x-\xi)^{n+1}}{n!p} f^{(n+1)}(\xi)$$

# Разложение функции в ряд

Пусть  $f(x)$  –  $n+1$  раз дифференцируема в точке  $a$ .

Ряд Лорана получается из ряда Тейлора при  $a=0$

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_{n+1}(x)$$

Остаточный член ряда Лорана в форме Коши:

$$R_{n+1}(x) = \frac{x^{n+1}(1 - \Theta)^n}{n!} f^{(n+1)}(\Theta x), \quad \Theta \in (0,1)$$

# Разложение функции в ряд

Пример 5.1

Разложить в ряд Лорана функцию  $\sin(x)$ .

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^{2n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$$

Пример 5.2

Разложить в ряд Лорана функцию  $\ln(1+x)$

$$e^x = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$$

# Правило Лопиталя

Пусть в некоторой окрестности точки  $x_0$  функции  $f(x)$  и  $\varphi(x)$  дифференцируемы и  $\varphi(x_0) \neq 0$ .

Если  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{0}{0}$  или  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{\infty}{\infty}$ , то:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$$

Если отношение производных является неопределённостью, правил Лопиталя справедливо и для производных высших порядков.

# Правило Лопиталя

**Пример 6.1**  
Найти предел:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1 + \ln x}{e^x - e}$$

**Пример 6.2**  
Найти предел:

$$\lim_{x \rightarrow 0} (x^2 \ln x)$$

**Пример 6.3**  
Найти предел:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right)$$



# Касательная и нормаль

Уравнение касательной к функции в точке  $x_0, y_0$ :

$$y - y(x_0) = y'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

Уравнение нормали к функции в точке  $x_0, y_0$ :

$$y - y(x_0) = \frac{1}{y'(x_0)} \cdot (x - x_0)$$

Угол между касательными:

$$\operatorname{tg} \varphi = \left| \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2} \right|; k_1, k_2 \text{ — тангенсы углов наклона касательных}$$

# Касательная и нормаль

## Пример 7.1

Найти уравнения касательной и нормали к графику функции  $f(x)=x^3-2x+1$  в точке  $x_0=1$

# Анализ функций

## Пример 8.1

Провести анализ функции и построить её график:

$$f(x) = \frac{(x-1)^3}{(x+1)^2}$$

# Анализ функций

## Область определения

**Область определения** – множество всех значений аргумента, при которых функция может быть вычислена.

Для  $f(x) = \frac{(x-1)^3}{(x+1)^2}$  область определения:  $x \in (-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$

Особая точка:  $x=-1$

# Анализ функций

## Чётные и нечётные функции

**Чётная функция** — это функция, которая удовлетворяет двум условиям:

- Область определения функции симметрична относительно начала координат
- Для любого значения аргумента выполняется равенство:  $f(-x)=f(x)$

**Свойства чётной функции:**

График симметричен относительно оси ординат (оси Oy)

При замене  $x$  на  $-x$  значение функции не меняется

**Нечётная функция** — это функция, которая удовлетворяет двум условиям:

- Область определения функции симметрична относительно начала координат
- Для любого значения аргумента выполняется равенство:  $f(-x)=-f(x)$

**Свойства нечётной функции:**

График симметричен относительно начала координат

При замене  $x$  на  $-x$  значение функции меняет знак на противоположный

# Анализ функций

## Чётные и нечётные функции

$$f(x) = \frac{(x-1)^3}{(x+1)^2}$$
$$f(-x) = \frac{(-x-1)^3}{(-x+1)^2} = -\frac{(x+1)^3}{(x-1)^2}$$

$$f(-x) \neq f(x)$$
$$f(-x) \neq -f(x)$$

**Не является ни чётной ни нечётной**

# Анализ функций

## Периодические функции

Периодической называется функция, для которой существует такое число  $T \neq 0$ , что для любого  $x$  из её области определения выполняется равенство:  
 $f(x+T)=f(x)$

Функция  $f(x) = \frac{(x-1)^3}{(x+1)^2}$  **непериодическая**.

# Анализ функций

## Непрерывность функции

Функция является непрерывной в точке  $x_0$ , если  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

*График непрерывной функции можно нарисовать не отрывая карандаш от бумаги.*



# Анализ функций

## Устранимый разрыв функции

**Устранимый разрыв функции** — это точка, в которой:

- Существуют конечные односторонние пределы функции.
- Эти пределы равны между собой.
- Значение функции в данной точке либо не совпадает с этими пределами, либо функция вообще не определена в этой точке.

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-0} f(x) = A \neq f(x_0)$$

или

функция не определена в точке  $x_0$ , но существует предел:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$$

# Анализ функций

## Неустранимый разрыв функции

### Неустранимый разрыв первого рода

Существует в точке  $x_0$ , если:

- Существуют конечные односторонние пределы
- Эти пределы не равны между собой
- Математическая запись:  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$

### Неустранимый разрыв второго рода

Существует в точке  $x_0$ , если:

- Хотя бы один из односторонних пределов не существует или
- Хотя бы один из односторонних пределов равен бесконечности

# Анализ функций

## Вертикальная асимптота для функции из примера

$$\lim_{x \rightarrow -1^+0} \frac{(x-1)^3}{(x+1)^2} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-0} \frac{(x-1)^3}{(x+1)^2} = -\infty$$

В точке  $x=-1$  функция терпит неустранимый разрыв второго рода.  
В точке  $x=-1$  существует вертикальная асимптота.

# Анализ функций

## Невертикальная асимптота

Косая асимптота выражается уравнением  $y=ax+b$ , где

$$a = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$$
$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - k \cdot x)$$

Косая асимптота существует, если указанные пределы существуют и конечны.

Горизонтальная асимптота существует, если  $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x)) = \text{const}$

# Анализ функций

## Косая асимптота для функции из примера

Косая асимптота выражается уравнением  $y=ax+b$ , где

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x-1)^3}{x(x+1)^2} = 1$$
$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{(x-1)^3}{(x+1)^2} - x \right) = -5$$

Косая асимптота существует:  $y=x-5$

# Анализ функций

## *Динамика функции*

*Если первая производная положительная – функция возрастает.*

*Если первая производная отрицательная – функция убывает.*

# Анализ функций

## Экстремумы функции

Точка, в которой первая производная равна нулю является точкой экстремума.

Типы точек экстремума

Производная слева от точки экстремума	Производная в точке экстремума	Производная справа от точки экстремума	Тип экстремума
Отрицательная	Равна нулю	Положительная	Минимум
Положительная	Равна нулю	Отрицательная	Максимум



# Анализ функций

## Форма функции

**Выпуклая функция** — функция, график которой на некотором интервале расположен не выше любой своей касательной.

**Вогнутая функция** — функция, график которой на некотором интервале расположен не ниже любой своей касательной.

Если в точке  $x_0$  вторая производная положительная, функция в точке  $x_0$  вогнутая.

Если в точке  $x_0$  вторая производная отрицательная, функция в точке  $x_0$  выпуклая.

Если в точке  $x_0$  вторая производная равна нулю, точка  $x_0$  является точкой перегиба.



# Анализ функций

## Динамика, экстремумы, форма для функции из примера

$$f'(x) = \frac{3(x-1)^2(x+1)^2 - (x-1)^2 2(x+1)}{(x+1)^4} = \frac{(x-1)^2(x+5)}{(x+1)^3}$$

Особые точки первой производной:  $x=1$  (производная равна нулю);  $x=-5$  (производная равна нулю);  $x=-1$  (производная не существует).

$$f''(x) = \frac{-3}{(x+1)^4} (x-1)^2(x+5) + \frac{1}{(x+1)^3} (2(x-1)(x+5) + (x-1)^2) = \frac{24(x-1)}{(x+1)^4}$$

Особые точки второй производной:  $x=1$  (вторая производная равна нулю);  $x=-1$  (вторая производная не существует).

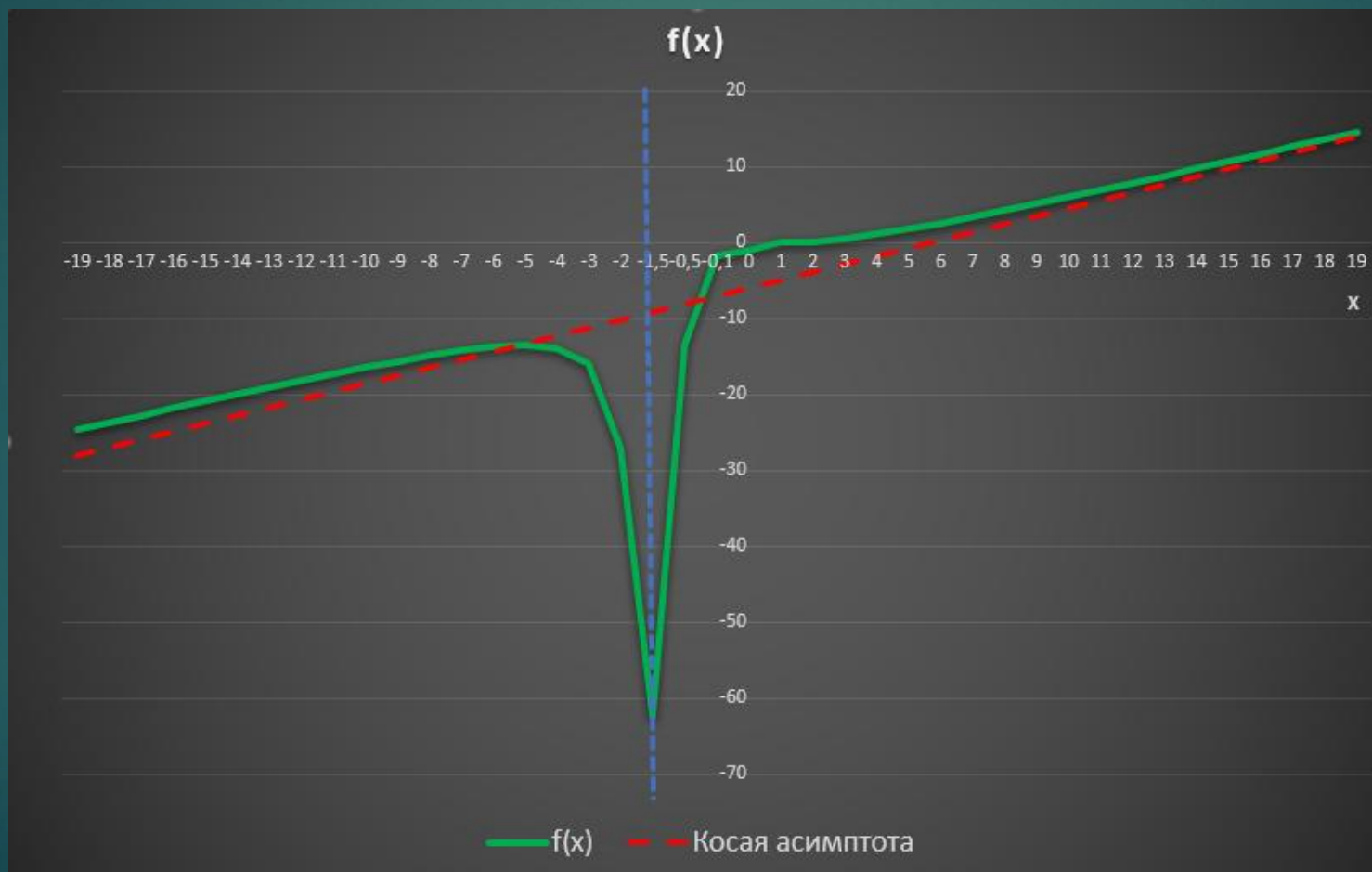
# Анализ функций

## Динамика, экстремумы, форма для функции из примера

$x$	$(-\infty; -5)$	$-5$	$(-5; -1)$	$-1$	$(-1; 1)$	$1$	$(1; +\infty)$
$f'(x)$	+	0	-	N/A	+	0	+
$f''(x)$	-	-	-	N/A	-	0	+
$f(x)$	возрастает; выпуклая	max	убывает; выпуклая	Разрыв	Возрастает; Выпуклая	Перегиб	Возрастает; Вогнутая

# Анализ функций

## Динамика, экстремумы, форма для функции из примера



# Анализ функций

## Шаги процесса анализа функции

- 1) Найти область определения, перечислить особые точки функции.
- 2) Определить чётность/нечётность функции.
- 3) Определить периодичность функции.
- 4) Определить тип разрыва в особых точках функции. Определить наличие вертикальных асимптот.
- 5) Определить наличие косых асимптот.
- 6) Вычислить первую производную функции, найти её особые точки.
- 7) Вычислить вторую производную функции, найти её особые точки.
- 8) Заполнить таблицу интервалов функций с указанием знаков первой и второй производной. Определить интервалы возрастания/убывания, максимумы/минимумы, вогнутость/выпуклость.
- 9) Начертить функцию.

# Частная производная

Дана функция нескольких переменных  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$

Производная по аргументу  $x_k$ :

$$\frac{\partial f}{\partial x_k} = \lim_{\Delta x_k \rightarrow 0} \frac{f(x_1, x_2, \dots, x_k + \Delta x_k, \dots, x_n) - f(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\Delta x_k}$$

При вычислении частной производной, все переменные, кроме  $x_k$  считаются имеющими постоянное значение.

Смешанная производная:

$$\frac{\partial^2 f(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_1 \partial x_2}$$

# Частная производная

## Пример 9.1

Вычислить частные производные по  $x$  и  $y$  для функции:

$$z = x^3y^2 - 2x^2y + 3xy - 4$$

## Пример 9.2

Вычислить частные производные по  $x$  и  $y$  для функции:

$$z = \frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{x} - xy$$

# Полная производная

**Полная производная функции** — это производная функции по времени вдоль траектории, которая учитывает все возможные зависимости между переменными.

Пусть дана функция  $f=f(t,x(t),y(t))$ . Тогда её полная производная по времени  $t$  определяется как:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t}$$