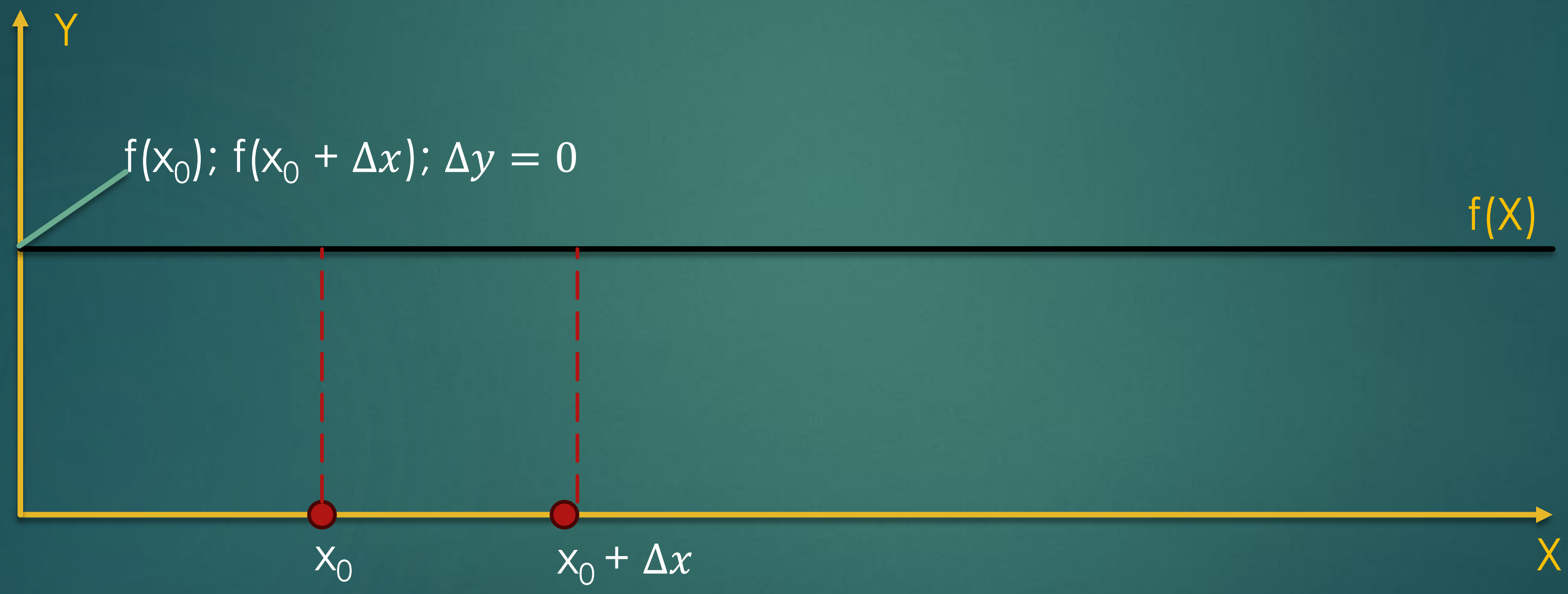
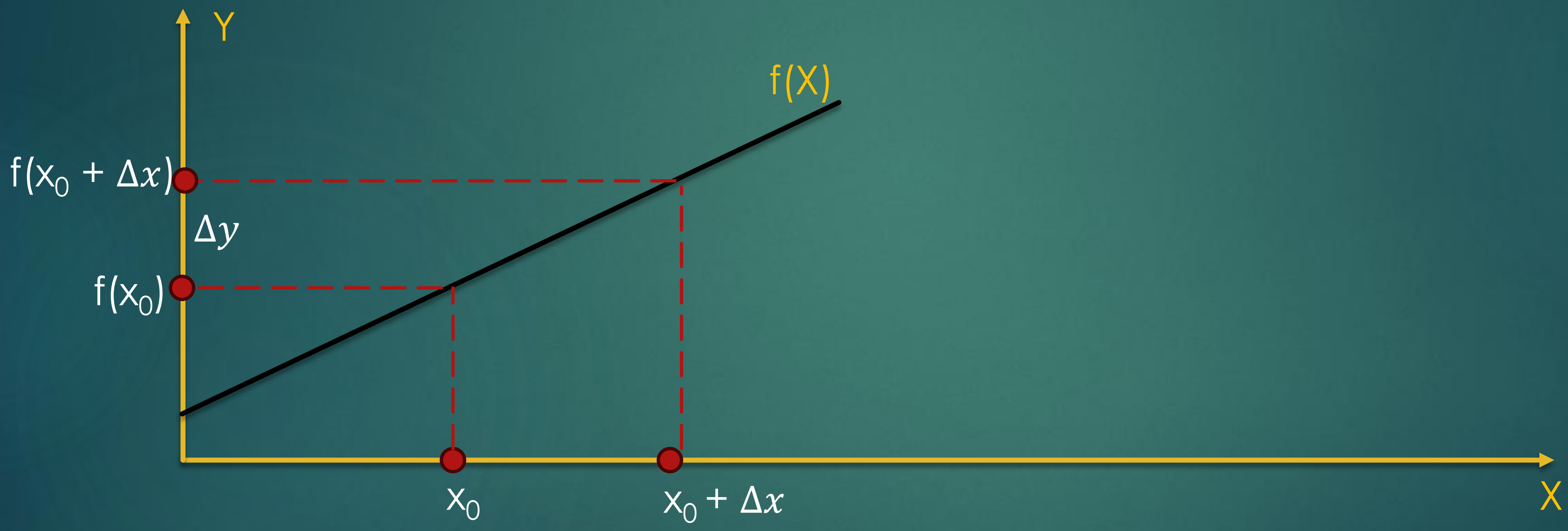
Производная

Физический смысл производной



Физический смысл производной

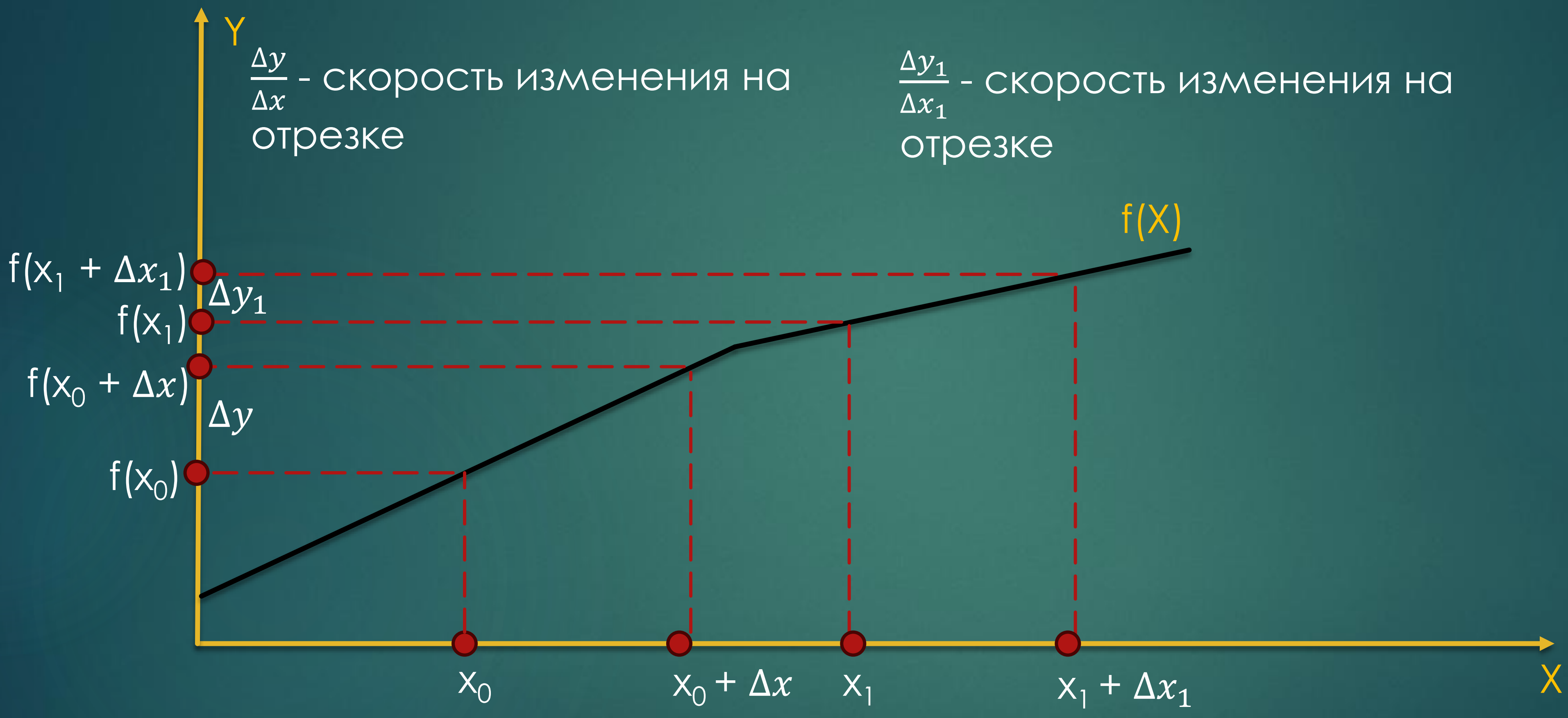
$\frac{\Delta y}{\Delta x}$ - скорость изменения на отрезке



Физический смысл производной

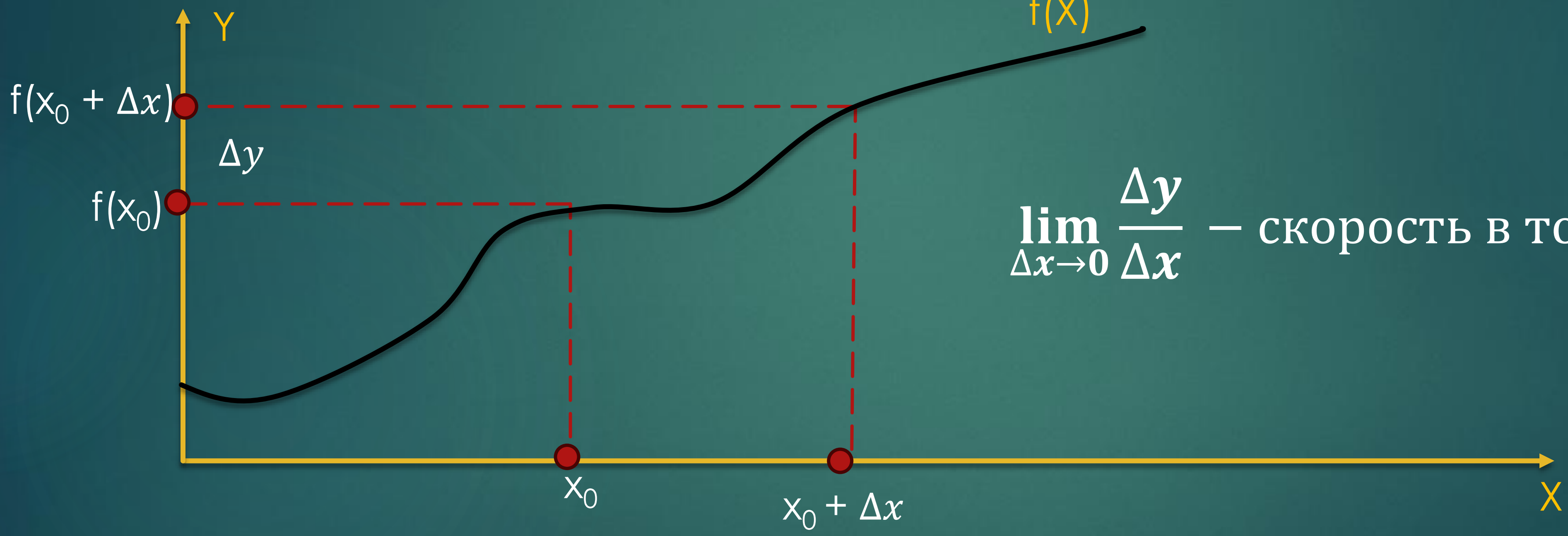
$\frac{\Delta y}{\Delta x}$ - скорость изменения на отрезке

$\frac{\Delta y_1}{\Delta x_1}$ - скорость изменения на отрезке



Физический смысл производной

$\frac{\Delta y}{\Delta x}$ - скорость изменения**?**



$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} - \text{скорость в точке}$$

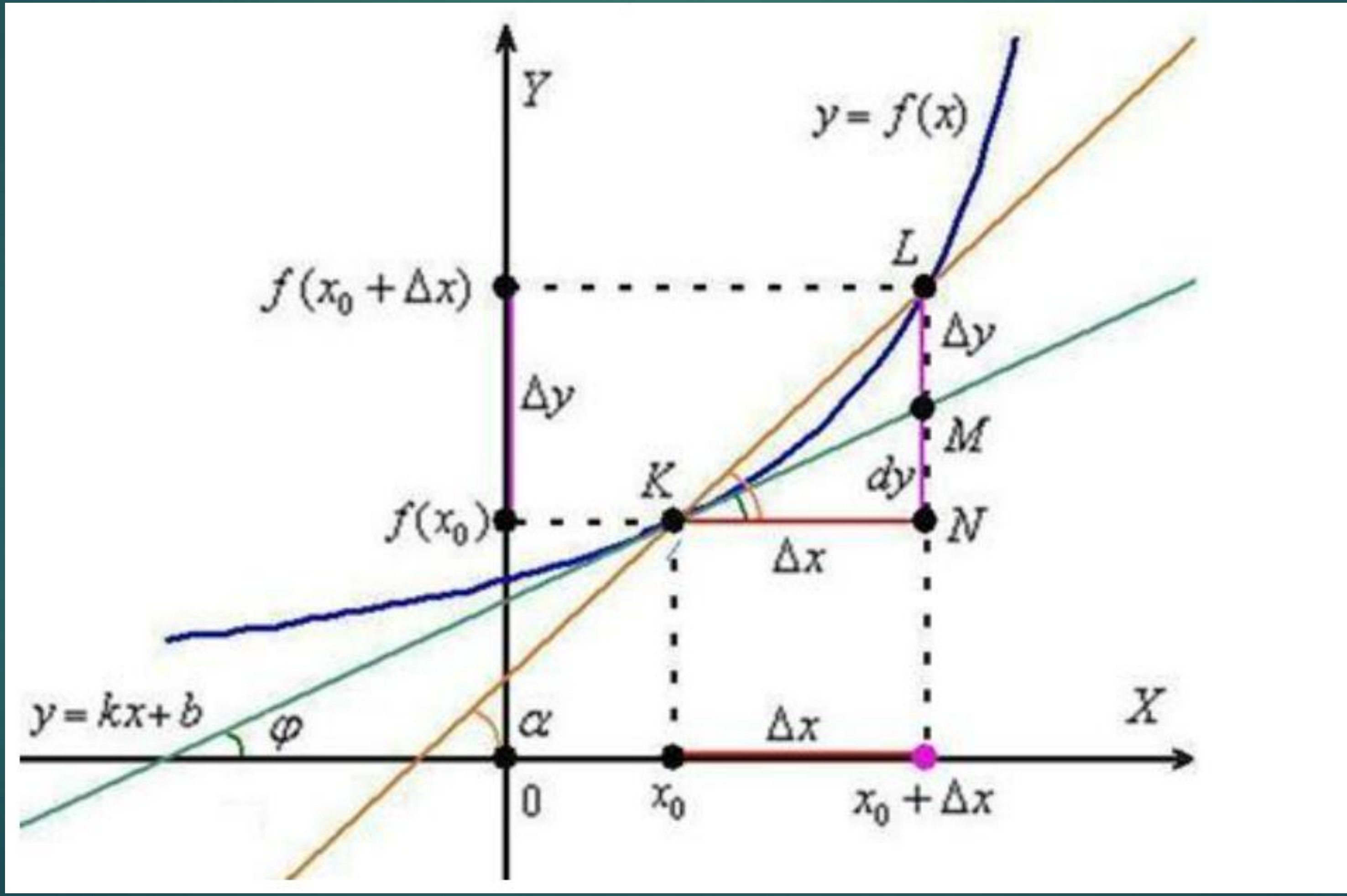
Определение производной

Предел отношения приращения функции к приращению аргумента при стремлении приращения аргумента к нулю называется **производной.**

Производная функции f(x) обозначается f'(x).

«Дифференцировать» – выделять свойства. В случае производной, выделяется одно из свойств функции – скорость.

Геометрический смысл производной



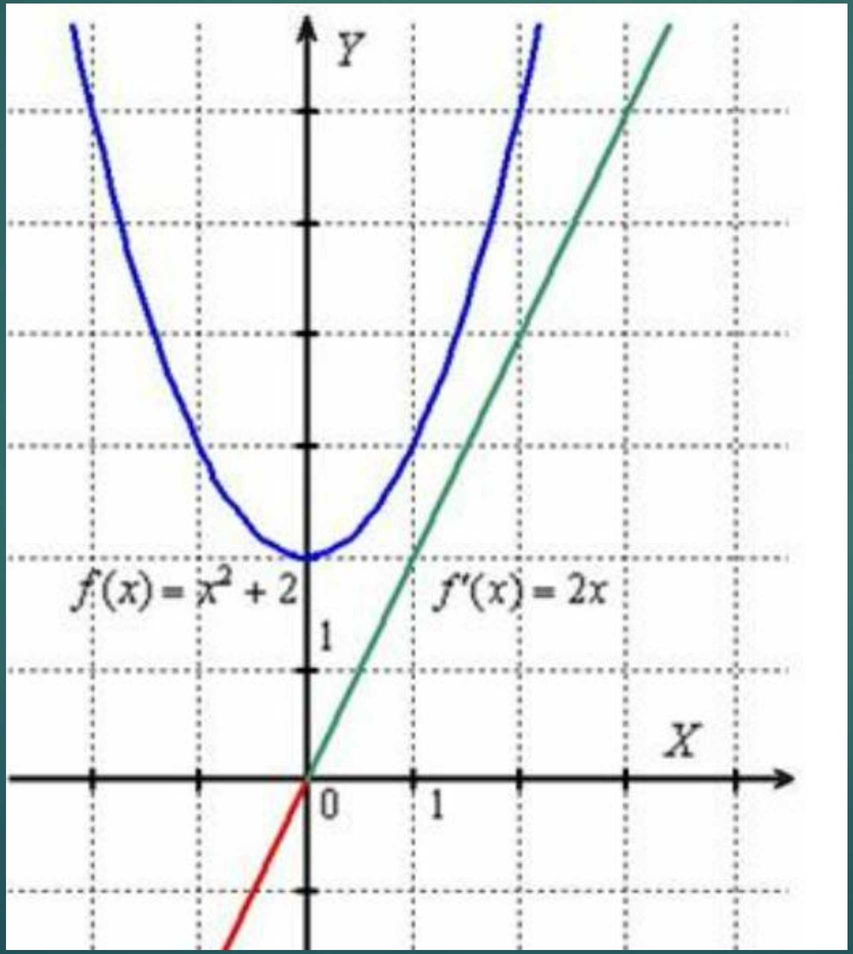
Геометрический смысл производной

Производная в точке x_0 равна углу наклона касательной к функции в точке x_0.

Уравнение касательной:

$(y-y_0)=f'(x_0)(x-x_0)$

Геометрический смысл производной



Элементы высшей математики

Вычисление производной

Пользуясь определением производной найти производные следующих функций.

1) f(x)=C=Const
2) f(x) = $x^n, x\epsilon\mathbb{R}, n\epsilon\mathbb{N}$
3) f(x) = ln x
4) f(x) = e^x
5) f(x) = sin(x)
6) f(x) = cos(x)

Использованы следующие тождества:

Бином Ньютона

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k\, a^{n-k} b^k;\ C_n^k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

Разность синусов

$$\sin a - \sin b = 2\sin\frac{a-b}{2}\cos\frac{a+b}{2}$$

Вычисление производной

Таблица производных

C'=0	$(x^n)' = nx^{n-1}$
$(\ln x)' = \frac{1}{x}$	$\left(\log_a x\right)' = \frac{1}{x \ln a}$
$(e^x)' = e^x$	$(a^x)' = a^x \ln a$
$(\sin x)' = \cos x$	$(\cos x)' = -\sin x$
$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$	$(\mathrm{ctg}\, x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$(\mathrm{arc}tan\, x)' = \frac{1}{1+x^2}$	$(\mathrm{arcctg}\, x)' = -\frac{1}{1+x^2}$

Вычисление производной

Правила дифференцирования

Сумма, умножение на константу $\left(\alpha f(x)+\beta g(x)\right)'=\alpha f'(x)+\beta g'(x)$	***Произведение*** $\left(f(x)\cdot g(x)\right)'=f'(x)g(x)+f(x)\cdot g'(x)$
Частное $\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}$	***Сложная функция*** $\left(f\left(g(x)\right)\right)'=f'(x)g'(x)$
Обратная функция $(f^{-1}(x))'=\dfrac{1}{f'(x)}$	**Логарифмическое дифференцирование** $\mathrm{f}'(\mathrm{x})=\mathrm{f}(\mathrm{x})\cdot(\ln f(x))'$

Вычисление производной

Пример 1.1

Используя определение вычислить производную функции:
$f(x) = 3x^2 + 9x + 3$

Пример 1.2

Используя определение вычислить производную функции:
$f(x) = sin\,3x$

Пример 1.3

Используя определение вычислить производную функции:
$f(x) = \sqrt[3]{x}$

Вычисление производной

Используя свойства производной и табличные производные вычислить f'(x):

Пример 2.1

$$f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$$

Пример 2.2

$$f(x) = \frac{1 - x - x^2}{1 - x + x^2}$$

Пример 2.3

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2} - \frac{2}{\sqrt{x}}$$

Вычисление производной

Используя свойства производной и табличные производные вычислить f'(x):

Пример 2.4

$$f(x) = sin(cos^2x) \cdot cos(sin^2x)$$

Пример 2.5

$$f(x) = ln\frac{x+a}{\sqrt{x^2+b}} + \frac{a^2}{b}arctg(\frac{x}{b})$$

Пример 2.3 (использовать логарифмическое дифференцирование)

$$f(x) = x\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$$

Дифференциал

Обозначение производной $\frac{df(x)}{dx}$ другое не только по форме, но и по смыслу.

Если dx конечная величина, то:

$$\Delta f(x) = f'(x) \cdot \Delta x$$

$$f(x_0 + \Delta x) = f'(x_0) \cdot \Delta x$$

Приближённые вычисления

Пример 3.1

Вычислить приближённо $\sqrt{101}$

Пример 3.2

Вычислить приближённо $y = e^{1-x^2}$ в точке x=1.05

Производные высших порядков

Пусть $y=f(x)$ – дифференцируемая функция.
Её производная $y'=f'(x)$ то же является функцией x.
Если существует $(f'(x))'$, то она называется производной второго порядка: $y''=f''(x)$.

Производные более высоких порядков:
$(f''(x))'=f'''(x)$
$(f'''(x))'=f^{(4)}(x)$
…

Вторая производная - **ускорение**

Производные высших порядков

Пример 4.1
Найти производную второго порядка: $y = e^{-2x^2}$

Пример 4.2
Найти производную второго порядка: $y = \tan x$

Разложение функции в ряд

Пусть f(x) – n+1 раз дифференцируема в точке a.

Ряд Тейлора

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_{n+1}(x)$$

Остаточный член ряда Тейлора:

$$R_{n+1}(x) = \left(\frac{x-a}{x-\xi}\right)^p \frac{(x-\xi)^{n+1}}{n!\,p} f^{(n+1)}(\zeta)$$

Разложение функции в ряд

Пусть f(x) – n+1 раз дифференцируема в точке a.

Ряд Лорана получается из ряда Тейлора при a=0

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}(x) + \frac{f''(0)}{2!}(x)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}(x)^n + R_{n+1}(x)$$

Остаточный член ряда Лорана в форме Коши:

$$R_{n+1}(x) = \frac{x^{n+1}(1-\Theta)^n}{n!} f^{(n+1)}(\Theta x), \qquad \Theta \in (0,1)$$

Разложение функции в ряд

Пример 5.1
Разложить в ряд Лорана функцию sin(x).

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^{2n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$$

Пример 5.2
Разложить в ряд Лорана функцию ln(1+x)

$$e^x = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$$

Правило Лопиталя

Пусть в некоторой окрестности точки x_0 функции $f(x)$и $\varphi(x)$ дифференцируемы и $\varphi(x_0) \neq 0$.

Если $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{0}{0}$ или $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{\infty}{\infty}$, то:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$$

Если отношение производных является неопределённостью, правил Лопиталя справедливо и для производных высших порядков.

Правило Лопиталя

Пример 6.1
Найти предел:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1+ln\,x}{e^x-e}$$

Пример 6.2
Найти предел:

$$\lim_{x\to 0}(x^2 ln\,x)$$

Пример 6.3
Найти предел:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right)$$

Касательная и нормаль

Уравнение касательной к функции в точке x_0, y_0:

$$y - y(x_0) = y'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

Уравнение нормали к функции в точке x_0, y_0:

$$y - y(x_0) = \frac{1}{y'(x_0)} \cdot (x - x_0)$$

Угол между касательными:

$$tg\,\varphi = \left|\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2}\right|; k_1, k_2 \ - \text{тангенсы углов наклона касстельных}$$

Касательная и нормаль

Пример 7.1

Найти уравнения касательной и нормали к графику функции $f(x)=x^3-2x+1$ в точке $x_0=1$

Анализ функций

Пример 8.1

Провести анализ функции и построить её график:

$$f(x) = \frac{(x-1)^3}{(x+1)^2}$$

Анализ функций
Область определения

Область определения – множество всех значений аргумента, при которых функция может быть вычислена.

Для $\boldsymbol{f(x)} = \frac{(\boldsymbol{x}-\mathbf{1})^3}{(\boldsymbol{x}+\mathbf{1})^2}$ область определения: $x \in (-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$

Особая точка: x=-1

Анализ функций
Чётные и нечётные функции

Чётная функция — это функция, которая удовлетворяет двум условиям:
- Область определения функции симметрична относительно начала координат
- Для любого значения аргумента выполняется равенство: $f(-x)=f(x)$

Свойства чётной функции:
График симметричен относительно оси ординат (оси Oy)
При замене x на −x значение функции не меняется

Нечётная функция — это функция, которая удовлетворяет двум условиям:
- Область определения функции симметрична относительно начала координат
- Для любого значения аргумента выполняется равенство: $f(-x)=-f(x)$

Свойства нечётной функции:
График симметричен относительно начала координат
При замене x на −x значение функции меняет знак на противоположный

Анализ функций
Чётные и нечётные функции

$$f(x) = \frac{(x-1)^3}{(x+1)^2}$$
$$f(-x) = \frac{(-x-1)^3}{(-x+1)^2} = -\frac{(x+1)^3}{(x-1)^2}$$

$$f(-x) \neq f(x)$$
$$f(-x) \neq -f(x)$$

Не является ни чётной ни нечётной

Анализ функций
Периодические функции

Периодической называется функция, для которой существует такое число $T \neq 0$, что для любого x из её области определения выполняется равенство:
$f(x+T)=f(x)$

Функция $\boldsymbol{f(x)} = \frac{(\boldsymbol{x}-\mathbf{1})^3}{(\boldsymbol{x}+\mathbf{1})^2}$ ***непериодическая***.

Анализ функций

Непрерывность функции

Функция является непрерывной в точке x_0, если $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

График непрерывной функции можно нарисовать не отрывая карандаш от бумаги.

Анализ функций
Устранимый разрыв функции

Устранимый разрыв функции — это точка, в которой:
- Существуют конечные односторонние пределы функции.
- Эти пределы равны между собой.
- Значение функции в данной точке либо не совпадает с этими пределами, либо функция вообще не определена в этой точке.

$$\lim_{x\to x_0^{+0}} f(x) = \lim_{x\to x_0^{-0}} f(x) = A \neq f(x_0)$$

или

функция не определена в точке x_0, но существует предел:

$$\lim_{x\to x_0} f(x_0) = A$$

Анализ функций
Неустранимый разрыв функции

Неустранимый разрыв первого рода
Существует в точке x_0, если:
- Существуют конечные односторонние пределы
- Эти пределы не равны между собой
- Математическая запись: $\lim_{x \to x_0^{+0}} f(x) \neq \lim_{x \to x_0^{-0}} f(x)$

Неустранимый разрыв второго рода
Существует в точке x_0, если:
- Хотя бы один из односторонних пределов не существует или
- Хотя бы один из односторонних пределов равен бесконечности

Анализ функций

Вертикальная асимптота для функции из примера

$$\lim_{x \to -1^{+0}} \frac{(x-1)^3}{(x+1)^2} = -\infty$$

$$\lim_{x \to -1^{-0}} \frac{(x-1)^3}{(x+1)^2} = -\infty$$

В точке x=-1 функция терпит неустранимый разрыв второго рода.
В точке x=-1 существует вертикальная асимптота.

Анализ функций
Невертикальная асимптота

Косая асимптота выражается уравнением y=ax+b, где

$$a = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}$$

$$b = \lim_{x\to\infty} (f(x) - k \cdot x)$$

Косая асимптота существует, если указанные пределы существуют и конечны.

Горизонтальная асимптота существует, если $\lim_{x\to\infty} (f(x)) = const$

Анализ функций

Косая асимптота для функции из примера

Косая асимптота выражается уравнением y=ax+b, где

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(x-1)^3}{x(x+1)^2}=1$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{(x-1)^3}{(x+1)^2}-x\right)=-5$$

Косая асимптота существует: y=x-5

Анализ функций
Динамика функции

Если первая производная положительная – функция возрастает.

Если первая производная отрицательная – функция убывает.

Анализ функций
Экстремумы функции

Точка, в которой первая производная равна нулю является точкой экстремума.

Типы точек экстремума

Производная слева от кочки экстремума	Производная в точке экстремума	Производная справа от точки экстремума	Тип экстремума
Отрицательная	Равна нулю	Положительная	Минимум
Положительная	Равна нулю	Отрицательная	Максимум

Анализ функций
Форма функции

Выпуклая функция — функция, график которой на некотором интервале расположен не выше любой своей касательной.
Вогнутая функция — функция, график которой на некотором интервале расположен не ниже любой своей касательной.

Если в точке x_0 вторая производная положительная, функция в точке x_0 вогнутая.
Если в точке x_0 вторая производная отрицательная, функция в точке x_0 выпуклая.

Если в точке x_0 вторая производная равна нулю, точка x_0 является точкой перегиба.

Анализ функций

Динамика, экстремумы, форма для функции из примера

$$f'(x) = \frac{3(x-1)^2(x+1)^2 - (x-1)^2 2(x+1)}{(x+1)^4} = \frac{(x-1)^2(x+5)}{(x+1)^3}$$

Особые точки первой производной: x=1 (производная равна нулю); ч=-5 (производная равна нулю); x=-1 (производная не существует).

$$F''(x) = \frac{-3}{(x+1)^4}(x-1)^2(x+5) + \frac{1}{(x+1)^3}(2(x-1)(x+5) + (x-1)^2) = \frac{24(x-1)}{(x+1)^4}$$

Особые точки второй производной: x=1 (вторая производная равна нулю); x=-1(вторая производная не существует).

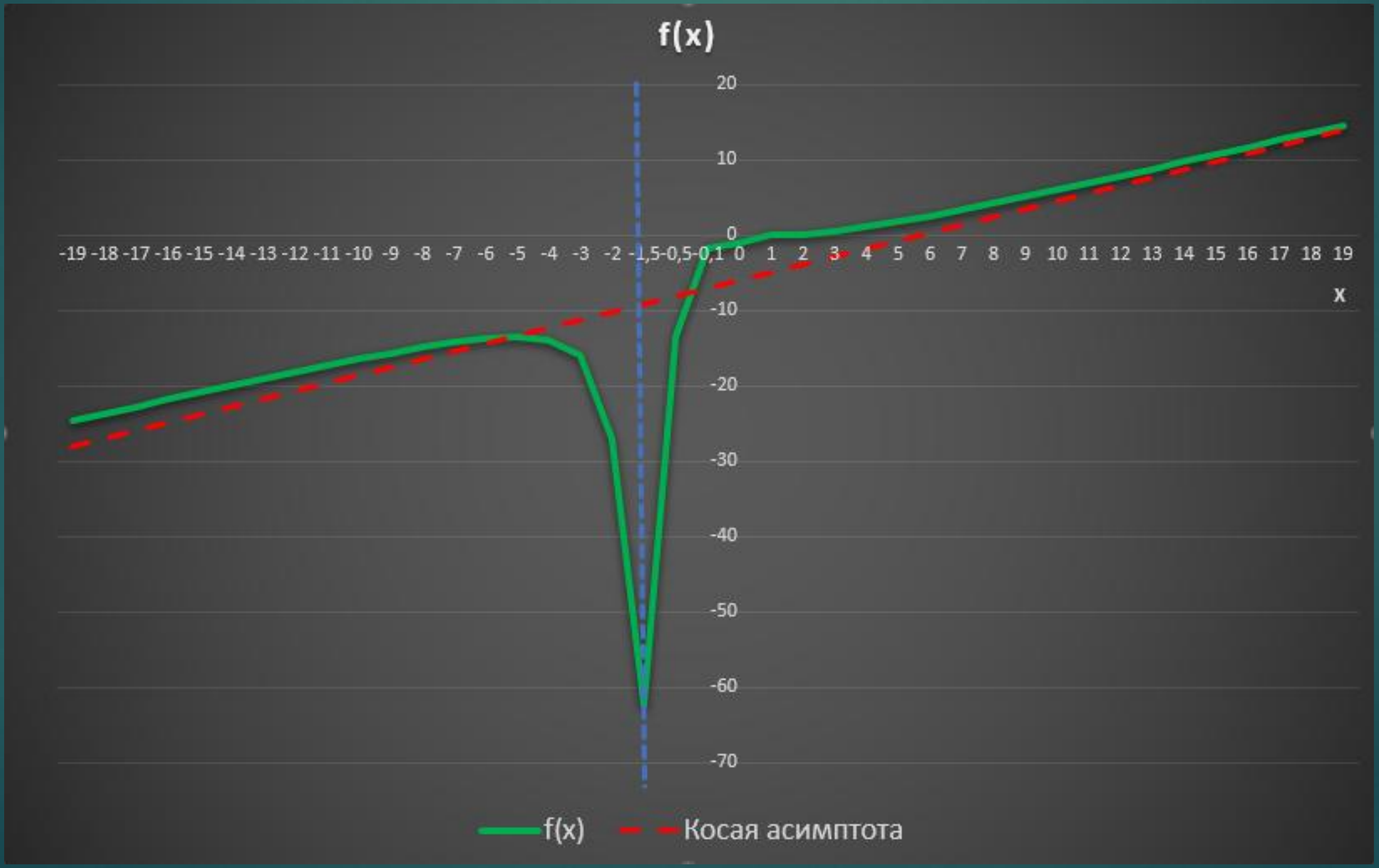
Анализ функций

Динамика, экстремумы, форма для функции из примера

x	$(-\infty;-5)$	**-5**	**(-5; -1)**	**-1**	**(-1;1)**	**1**	**(1;+∞)**
f'(x)	+	0	-	N/A	+	0	+
f''(x)	-	-	-	N/A	-	0	+
f(x)	возрастает; выпуклая	max	убывает; выпуклая	Разрыв	Возрастает; Выпуклая	Перегиб	Возрастает; Вогнутая

Анализ функций

Динамика, экстремумы, форма для функции из примера



Анализ функций
Шаги процесса анализа функции

1) *Найти область определения, перечислить особые точки функции.*
2) *Определить чётность/нечётность функции.*
3) *Определить периодичность функции.*
4) *Определить тип разрыва в особых точках функции. Определить наличие вертикальных асимптот.*
5) *Определить наличие косых асимптот.*
6) *Вычислить первую производную функции, найти её особые точки.*
7) *Вычислить вторую производную функции, найти её особые точки.*
8) *Заполнить таблицу интервалов функций с указанием знаков первой и второй производной. Определить интервалы возрастания/убывания, максимумы/минимумы, вогнутость/выпуклость.*
9) *Начертить функцию.*

Частная производная

Дана функция нескольких переменных $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$

Производная по аргументу x_k*:*

$$\frac{\partial f}{\partial x_k} = \lim_{\Delta x_k \to 0} \frac{f(x_1, x_2, \dots, x_k + \Delta x_k, \dots, x_n) - f(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\Delta x_k}$$

При вычислении частной производной, все переменные, кроме x_k *считаются имеющими постоянное значение.*

Смешанная производная:

$$\frac{\partial^2 f(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_1 \partial x_2}$$

Частная производная

Пример 9.1

Вычислить частные производные по x и y для функции:
$z = x^3y^2 - 2x^2y + 3xy - 4$

Пример 9.2

Вычислить частные производные по x и y для функции:
$z = \frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{x} - xy$

Полная производная

Полная производная функции — это производная функции по времени вдоль траектории, которая учитывает все возможные зависимости между переменными.

Пусть дана функция $f=f(t,x(t),y(t))$. Тогда её полная производная по времени t определяется как:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t}$$