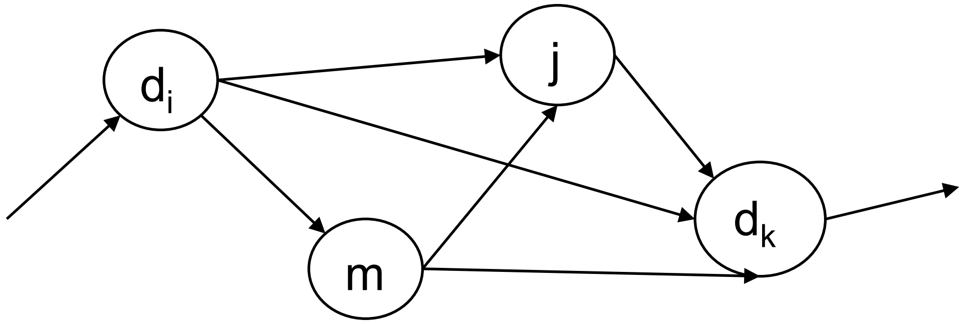
ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

Элементы высшей математики

Транспортная задача; общая транспортная задача



C = {C_{ij}} – матрица стоимости перевозки из пункта I в пункт j

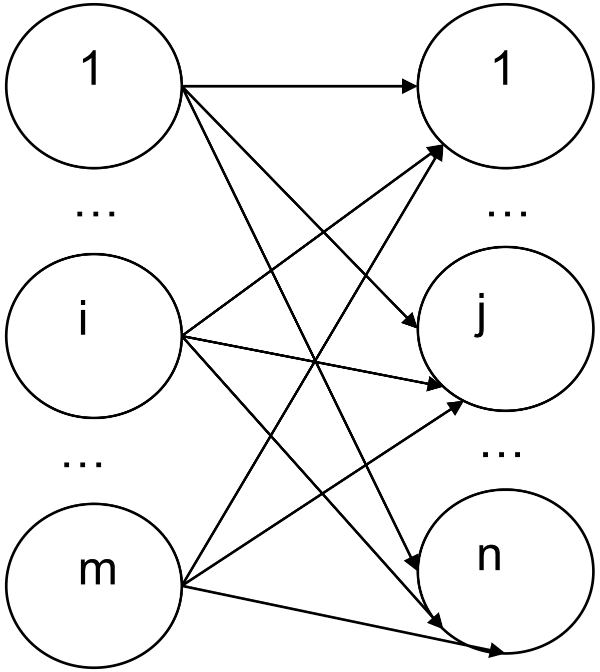
Требуется
построить схему перевозки X_{ij}, при которой $f = \sum_{ij} C_{ij} \cdot X_{ij} \to min$

Ограничение

$$\sum_{k \in U_k^+} X_{ki} + d_i = \sum_{m \in U_m^-} X_{im}$$

$$\sum d_i = 0$$

Транспортная задача; классическая транспортная задача



a_i – мощность производства;
b – интенсивность потребления

X_{ij} – объём поставок от производителя i к потребителю j

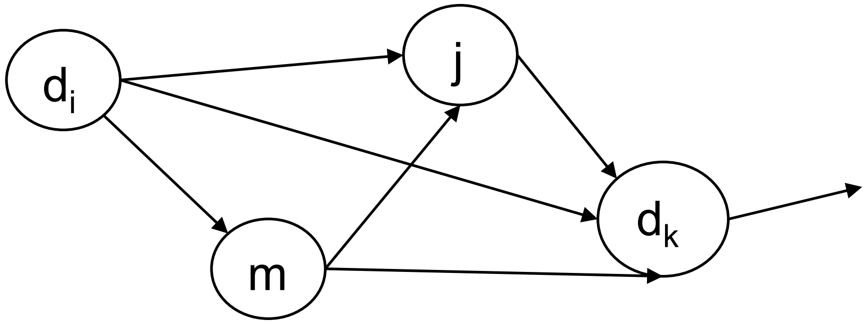
C = {C_{ij}} – матрица стоимости перевозки из пункта i в пункт j

Требуется: $\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} C_{ij} \cdot X_{ij} \to min$

Ограничение: $\sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{X_{ij}} = \boldsymbol{a_i}$; $\sum_{i=1}^{m} \boldsymbol{X_{ij}} = \boldsymbol{b_j}$

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$$

Задача о максимальном потоке



d_i – исток;
d_k - сток

$C = \{C_{ij}\}$ – матрица пропускной способности «трубы»

Требуется
построить схему перекачки, максимизирующую поток в сети;

Ограничения:

1) **Поток, вышедший из истока равен потоку, вошедшему в сток;**
2) **Для каждой промежуточной вершины вошедший поток равен вышедшему потоку;**
3) **Поток не может быть отрицательным и для каждой «трубы» не может превышать её пропускную способность.**

Типовая задача линейного программирования

Задача о диете

Составить план производства кормов для животных при условии, что:

- существуют m различных рецептур g_1, g_2, … , g_n;
- используются n видов компонентов r_1, r_2, … r_m;
- известны цены реализации товаров c_1, c_2, … , c_n, произведённых по каждой из рецептур;
- заданы запасы компонентов b_1, b_2, … , b_m.

Необходимо определить количество товаров x_1, x_2, … , x_n, при котором достигается максимальное значение целевой функции $L = x_1c_1 + x_2c_2 + \ldots + x_nc_n \rightarrow max$

Типовые задачи

Рецептуры задаются **Матрицей производства (Технологической матрицей):**

	g_1	g_2	…	g_n
r_1	a_{11}	a_{12}		a_{1n}
r_2	a_{21}	a_{22}	…	a_{2n}
…	…	…	…	…
r_m	a_{m1}	a_{m2}	…	a_{mn}

$$L = x_1 c_1 + x_2 c_2 + \ldots + x_n c_n \to max$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j \leq b_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, m$$

$$x_1, x_2, \ldots, x_n \geq 0$$

Линейное программирование; общая форма записи задачи

Задана линейная функция L от переменных ($x1$, $x2$,…, x_n).
L(x1, x2,…, x_n) - **целевая функция**.

Задача:
найти экстремум (максимум или минимум) целевой функции при условии, что переменные удовлетворяют системе линейных равенств и/или неравенств.

$$L = x_1c_1 + x_2c_2 + \ldots + x_nc_n \rightarrow \max(\text{или}\min)$$

при условии:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}x_j = b_i, i = 1, 2, \ldots, k$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}x_j \leq b_i, i = k+1, k+2, \ldots, m \quad (\text{вместь } \leq \text{ может быть } \geq)$$

$c_i, b_i, a_{i,j}$ – заданные константы

Стандартная и каноническая форма записи задачи линейного программирования

Стандартная форма записи задачи линейного программирования

$$L = x_1c_1 + x_2c_2 + \ldots + x_nc_n \rightarrow \max(\text{или} \min)$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}x_j \leq b_i, i = 1, 2, \ldots, k$$

$$x_j \geq 0 \ (j = 1, 2, r) \quad r \leq k$$

Каноническая форма записи задачи линейного программирования

$$L = x_1c_1 + x_2c_2 + \ldots + x_nc_n \rightarrow \max(\text{или} \min)$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}x_j = b_i, i = 1, 2, \ldots, k$$

$$x_1, x_2, \ldots, x_n \geq 0$$

Планы в задаче линейного программирования

Допустимый план – набор чисел x_1, x_2, … , x_n, удовлетворяющих системе ограничений.

Оптимальный план – допустимый план, доставляющий минимум (максимум) целевой функции.

Область допустимых планов – множество всех допустимых планов.

Решение задачи линейного программирования – пара, состоящая из оптимального плана и оптимального значения целевой функции.

Матричная форма записи задачи линейного программирования

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}; \ X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_m \end{pmatrix}; C = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & \dots & c_n \end{pmatrix}$$

Стандартная форма записи задачи линейного программирования в матричном виде:

$$A \cdot X \leq B$$
$$X \geq 0$$
$$Z = C \cdot X \ \to \max \ (\text{или} \min \ )$$

Каноническая форма записи задачи линейного программирования в матричном виде:

$$A \cdot X = B$$
$$X \geq 0$$
$$Z = C \cdot X \ \to \max \ (\text{или} \min \ )$$

Переход между формами записи задачи линейного программирования

Приведение задачи минимизации к задаче максимизации

$L = x_1c_1 + x_2c_2 + \ldots + x_nc_n \to min$

$L = -x_1c_1 - x_2c_2 - \ldots - x_nc_n \to max$

$\min(z) = -\max(-z)$

$max(z) = -\min(-z)$

Замена направления знака неравенства

$$\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}x_j \le b_i \sim -\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}x_j \ge -b_i$$
$$\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}x_j \ge b_i \sim -\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}x_j \le -b_i$$

Переход между формами записи задачи линейного программирования

Замена неравенства на равенство

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n \le b$$

замена на: $\Downarrow$

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n + x_{n+1} = b$$
$$x_{n+1} \ge 0$$

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n \ge b$$

замена на: $\Downarrow$

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n - x_{n+1} = b$$
$$x_{n+1} \ge 0$$

Переменная x_{n+1}называется **балансовой** переменной и должна встречаться **ТОЛЬКО** в одном ограничении.

Переход между формами записи задачи линейного программирования

Включение переменной в условие неотрицательности

$$x_t = x_t' - x_t''; \; x_t' \geq 0, x_t'' \geq 0$$

Замена равенства на неравенство

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$$

замена на:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n \geq b$$
$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n \leq b$$

Переход между формами записи задачи линейного программирования

Исходная

$$L = 2x_1 + x_2 + 5\,x_3 \;\rightarrow min$$

$$\begin{cases} x_1 & -7x_2 & +4x_3 & \leq 11 \\ 2x_1 & +9x_2 & +x_3 & \geq 7 \\ x_1 \geq 0 & x_2 \geq 0 & x_3 \geq 0 \end{cases}$$

Основной вид

$$L = -2x_1 - x_2 - 5\,x_3 \;\rightarrow max$$

$$\begin{cases} x_1 & -7x_2 & 4x_3 & \leq 11 \\ -2x_1 & -9x_2 & -x_3 & \leq -7 \\ x_1 \geq 0 & x_2 \geq 0 & x_3 \geq 0 \end{cases}$$

Канонический вид

$$L = -2x_1 - x_2 - 5\,x_3 \;\rightarrow max$$

$$\begin{cases} x_1 & -7x_2 & +4x_3 & +x_4 & = 11 \\ -2x_1 & -9x_2 & -x_3 & +x_5 & = -7 \\ x_1 \geq 0 & x_2 \geq 0 & x_3 \geq 0 & x_4 \geq 0 & x_5 \geq 0 \end{cases}$$

Переход между формами записи задачи линейного программирования

Пример 1
Привести к канонической форме задачу линейного программирования:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 \geq 2 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 6 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 4 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0; x_2 \geq 0$$

$$z = 3x_1 - 2x_2 - x_3 \rightarrow max$$

Переход между формами записи задачи линейного программирования

Пример 2
Привести к стандартной форме задачу линейного программирования:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_3 = 4 \\ 2x_2 + 4x_3 - x_4 = 8 \\ x_2 + x_3 + x_5 = 6 \end{cases}$$

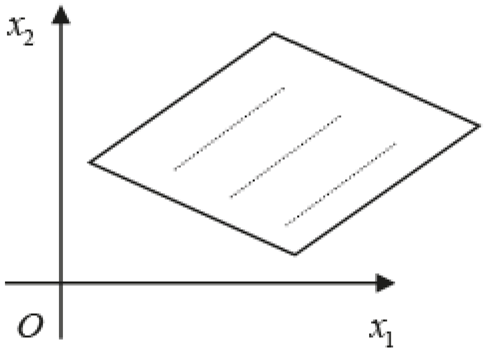
$$x_1 \geq 0; x_2 \geq 0; x_3 \geq 0; x_4 \geq 0; x_5 \geq 0$$

$$z = x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 - 2x_5 \rightarrow max$$

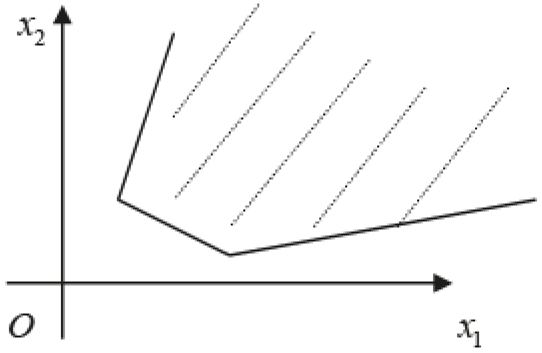
Графический метод решения задачи линейного программирования

Варианты конфигурации области допустимых решений

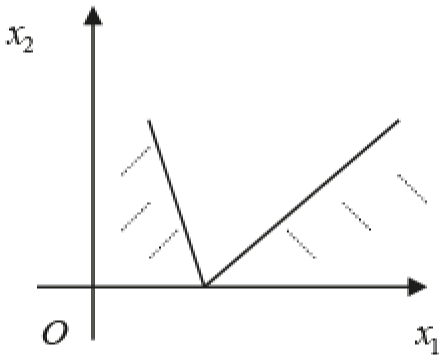
а



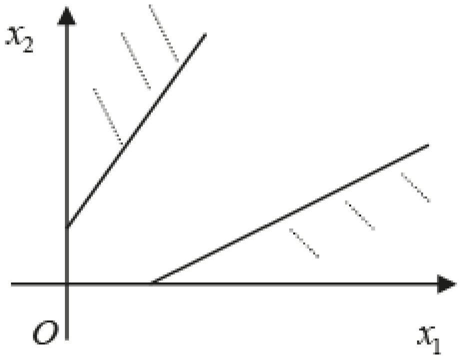
б



в



г

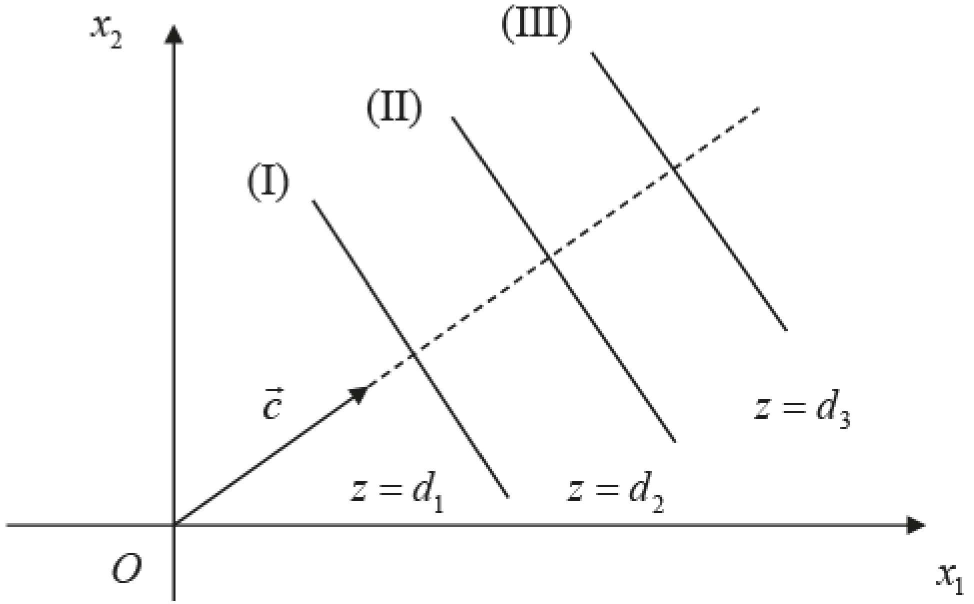


Графический метод решения задачи линейного программирования

Линии уровня

Уравнение линии уровня: $c_1x_1 + c_2x_2 = d$

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 = d_1$$
$$z = c_1x_1 + c_2x_2 = d_2$$
$$z = c_1x_1 + c_2x_2 = 2$$

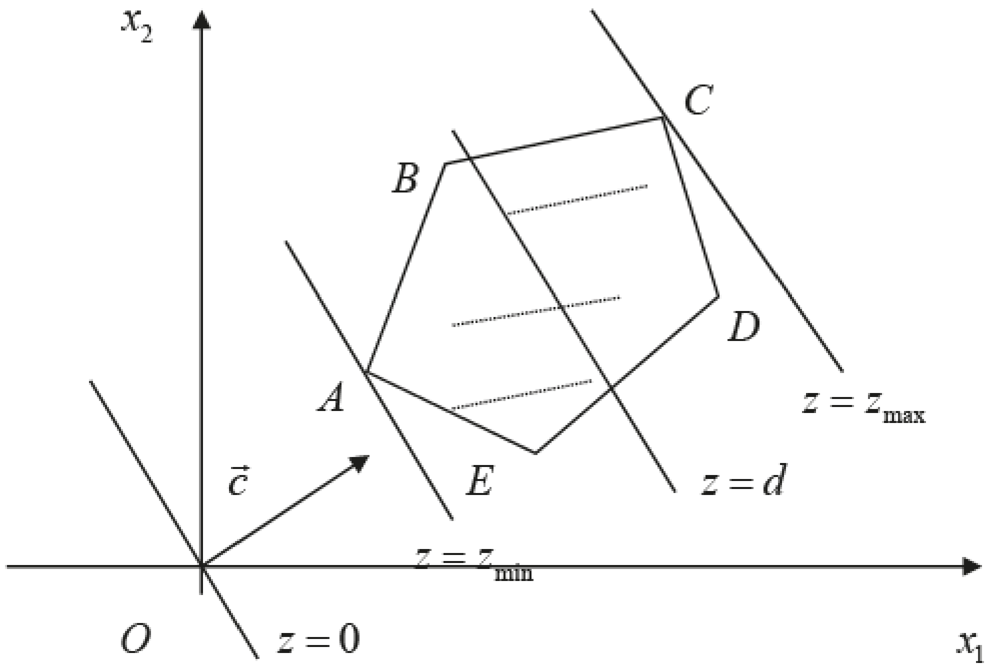


С учётом направления вектора $\bar{c}$, $d_1 < d_2 < d_3$

Графический метод решения задачи линейного программирования

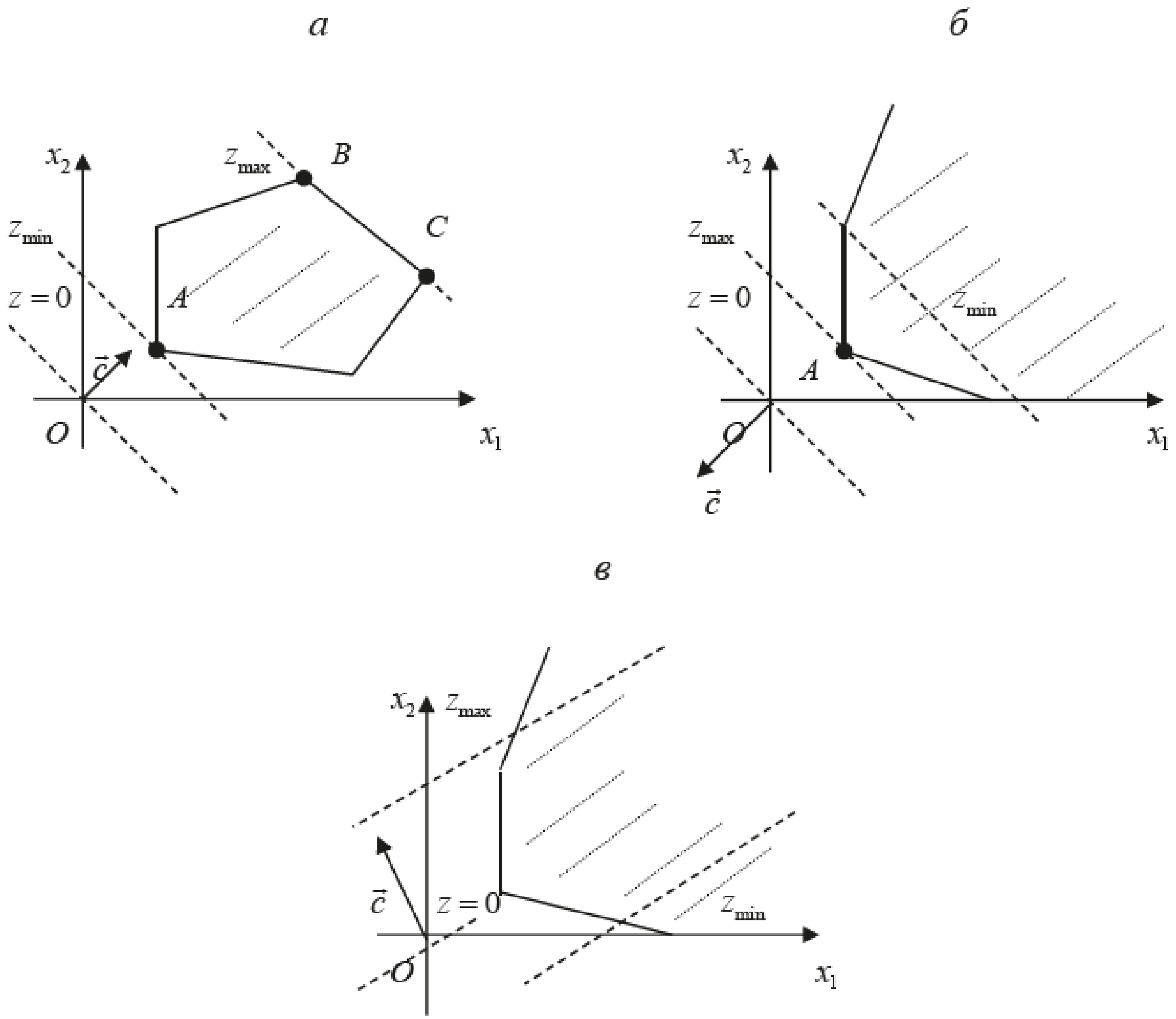
Опорная прямая

Прямая, имеющая хотя бы одну общую точку с областью допустимых решений, и расположенная так, что область допустимых решений лежит с одной стороны от неё, называется опорной прямой.



Графический метод решения задачи линейного программирования

Опорная прямая



Разновидности допустимых множеств решений

1. Допустимое множество решений **пусто**. Задача решений не имеет
2. Допустимое множество решений - **выпуклый ограниченный многогранник**. Задача имеет одно или бесконечно много решений.
3. Допустимое множество - **выпуклое неограниченное многогранное множество**. Задача решений не имеет.

Если задача линейного программирования имеет хотя бы один оптимальный план, то его следует искать среди вершин допустимого множества решений.

Графический метод решения задачи линейного программирования

Пример

$$L = 3x_1 + 4x_2 \to min/max$$

$$\begin{cases} -x_1 & + x_2 & \leq 3 \\ 5x_1 & + 3x_2 & \leq 97 \\ x_1 & + 7x_2 & \geq 74 \\ x_1 \geq 0 & x_2 \geq 0 & \end{cases}$$

Симплекс-метод

1. Задача должна быть представлена в каноническом виде.
2. В каждом из равенств присутствует **одна** базисная переменная, взятая с единичным коэффициентом, а в других равенствах её нет.

ПРИМЕР

$$L = 3x_1 + 4x_2 + 6x_3 \rightarrow max$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + 2x_3 \le 12 \\ 7x_1 + x_2 + 2x_3 \le 18 \\ x_1 \ge 0 \quad x_2 \ge 0 \quad x_3 \ge 0 \end{cases}$$

ПРИМЕР

$$L = 3x_1 + 4x_2 + 6x_3 \rightarrow max$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + 2x_3 + x_4 = 12 \\ 7x_1 + x_2 + 2x_3 + x_5 = 18 \\ x_1 \ge 0 \quad x_2 \ge 0 \quad x_3 \ge 0 \quad x_4 \ge 0 \quad x_5 \ge 0 \end{cases}$$

x4, x5 – базисные переменные

Симплекс-таблица

Базис	x_1	…	x_n	x_{n+1}	…	x_{n+m}	Свободные члены	Симплекс-отношения
x_{n+1}	$a_{1,1}$	…	$a_{1,n}$	1	…	0		
…	…	…	…	…	…	…		
x_{n+m}	$a_{m,1}$		$a_{m,n}$	0	…	1		
	-c1	…	$-c_n$	0	…	0		

m – количество базисных переменных

Симплекс-таблица для примера

Базис	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	Свободные члены	Симплекс-отношения
x_4	2	5	2	1	0	12	
x_5	7	1	2	0	1	18	
	-3	-4	-6	0	0		

Опорный план: $\bar{x}^0 = (0, 0, 0, 12, 18)$

Условие оптимальности: если в последней строке симплекс-таблицы все элементы **неотрицательны**, то соответствующий опорный план является оптимальным.

Алгоритм симплекс-метода

1. В последней строке симплекс-таблицы выбирается наименьший отрицательный элемент. Столбец, соответствующий этому элементу, называется *ведущим*. Он определяет переменную, которая будет введена в базис на данном этапе. **В примере - переменная *x*3.**

2. Вычисляют отношения свободных членов к элементам ведущего столбца (симплекс-отношение): θ1=12/2=6, θ1=18/2=9. Находят наименьшее *неотрицательное* из этих симплекс-отношений. Оно соответствует *ведущей* строке, которая определяет переменную, выводимую из базиса. **В примере - переменная *x*4.** (Если все симплекс-отношения окажутся отрицательными, то задача не имеет решений).

12:2

Базис	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	Свободные члены	Симплекс-отношения
x_4	2	5	**2**	1	0	12	6
x_5	7	1	2	0	1	18	9
	-3	-4	-6	0	0		

На пересечении ведущей строки и ведущего столбца находится ведущий элемент.

18:2

Алгоритм симплекс-метода

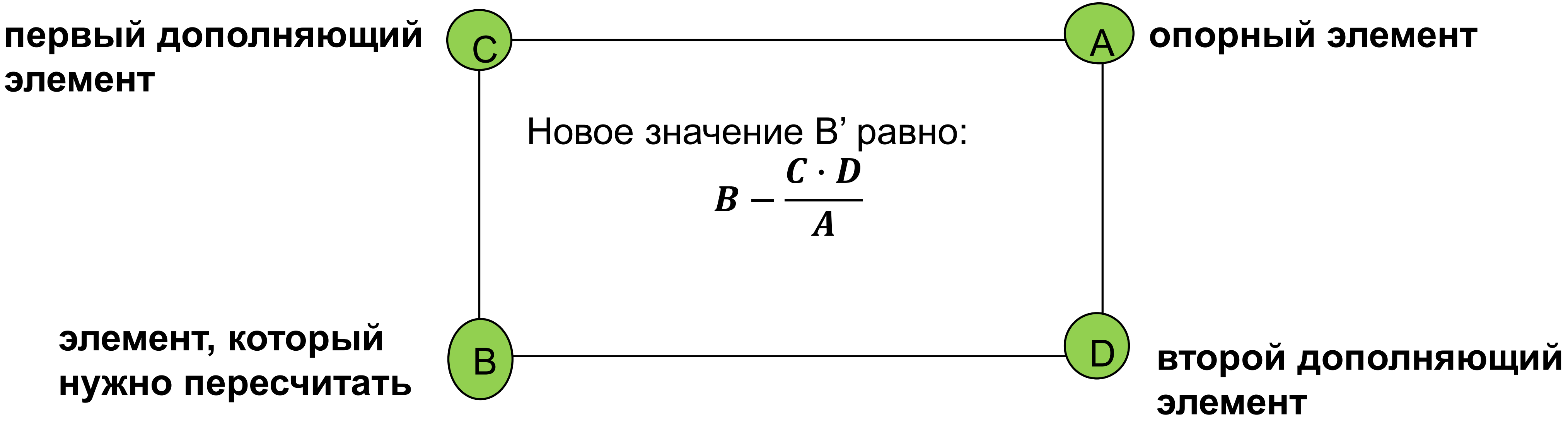
Базис	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	Свободные члены	Симплекс-отношения
x_4	2	5	**2**	1	0	12	6
x_5	7	1	2	0	1	18	9
	-3	-4	-6	0	0		

3) Элементы ведущей строки, за исключением симплекс-отношения, делим на ведущий элемент.

Базис	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	Свободные члены	Симплекс-отношения
x_3	1	$\frac{5}{2}$	**1**	$\frac{1}{2}$	0	6	
x_5	?	?	0	?	1	?	
	?	?	0	?	0		

Алгоритм симплекс-метода

4) Оставшиеся элементы симплекс-таблицы вычисляются по правилу прямоугольника: мысленно чертим прямоугольник, одна вершина которого совпадает с ведущим элементом, а другая - с элементом, образ которого ищется (две другие вершины называются **дополняющими**); Искомый элемент будет равен соответствующему элементу текущей таблицы минус дробь, в знаменателе которой стоит ведущий элемент, а в числителе - произведение элементов **дополняющих** вершин.



Алгоритм симплекс-метода

Базис	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	Свободные члены	Симплекс-отношения
x_3	1	$\frac{5}{2}$	**1**	$\frac{1}{2}$	0	6	
x_5	5	-4	0	-1	1	6	
	3	11	0	3	0		

Алгоритм симплекс-метода

Базис	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	Свободные члены	Симплекс-отношения
x_4	2	5	**2**	1	0	12	6
x_5	7	1	2	0	1	18	9
	-3	-4	-6	0	0		

Базис	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	Свободные члены	Симплекс-отношения
x_3	1	$\frac{5}{2}$	**1**	$\frac{1}{2}$	0	6	
x_5	5	-4	0	-1	1	6	
	3	11	0	3	0		

Алгоритм симплекс-метода

Базис	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	Свободные члены	Симплекс-отношения
x_3	1	$\frac{5}{2}$	**1**	$\frac{1}{2}$	0	6	
x_5	5	-4	0	-1	1	6	
	3	11	0	3	0		

В последней строке нет отрицательных чисел. Решение найдено!

Новый опорный план: $\bar{x}^0 = (0, 0, 6, 0, 6)$

Оптимальное решение: x = (0, 0, 6);
Оптимальное значение целевой функции: L=3*0 + 4*0 + 6*6 =36

Симплекс-метод

ПРИМЕР 2

Для изготовления двух видов продукции P1 и P2 используются четыре вида сырья S1, S2, S3, S4. Запасы сырья ограничены:

Вид сырья	Запас сырья	Расход сырья на единицу продукции	
		P1	P2
S1	19	2	3
S2	13	2	1
S3	15	0	3
S4	18	3	0

Доход от реализации продукции P1 – 7 единиц; P2 – 5 единиц.
Требуется составить план производства, при котором общий доход будет максимальным.

Симплекс-метод

$$L = 7x_1 + 5x_2 \rightarrow max$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 < 19 \\ 2x_1 + x_2 < 13 \\ 3x_2 < 15 \\ 3x_1 < 18 \end{cases}$$

$$x_1 > 0; x_2 > 0$$

Канонический вид

$$L = 7x_1 + 5x_2 \rightarrow max$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 19 \\ 2x_1 + x_2 + x_4 = 13 \\ 3x_2 + x_5 = 15 \\ 3x_1 + x_6 = 18 \end{cases}$$

$$x_1 > 0; x_2 > 0; x_3 > 0; x_4 > 0; x_5 > 0; x_6 > 0$$

Симплекс-метод

Базис	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	Свободные члены	Симплекс-отношения
x_3	2	3	1	0	0	0	19	
x_4	2	1	0	1	0	0	13	
x_5	0	3	0	0	1	0	15	
x_6	3	0	0	0	0	1	18	
	-7	-5	0	0	0	0		

Базис	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	Свободные члены	Симплекс-отношения
x_3	2	3	1	0	0	0	19	$\frac{19}{2}$
x_4	2	1	0	1	0	0	13	$\frac{13}{2}$
x_5	0	3	0	0	1	0	15	
x_6	3	0	0	0	0	1	18	6
	-7	-5	0	0	0	0		

Симплекс-метод

Базис	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	Свободные члены	Симплекс-отношения
x_3	2	3	1	0	0	0	19	$\frac{19}{2}$
x_4	2	1	0	1	0	0	13	$\frac{13}{2}$
x_5	0	3	0	0	1	0	15	
x_6	3	0	0	0	0	1	18	6
	-7	-5	0	0	0	0		

Базис	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	Свободные члены	Симплекс-отношения
x_3	0	3	1	0	0	0	19	
x_4	0	1	0	1	0	0	13	
x_5	0	3	0	0	1	0	15	
x_1	1	0	0	0	0	$\frac{1}{3}$	6	
	0	-5	0	0	0	0		

Симплекс-метод

Базис	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	Свободные члены	Симплекс-отношения
x_3	2	3	1	0	0	0	19	
x_4	2	1	0	1	0	0	13	
x_5	0	3	0	0	1	0	15	
x_1	3	0	0	0	0	1	18	
	-7	-5	0	0	0	0		

Базис	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	Свободные члены	Симплекс-отношения
x_3	0	3	1	0	0	-2/3	7	
x_4	0	1	0	1	0	-2/3	1	
x_5	0	3	0	0	1	0	15	
x_1	1	0	0	0	0	1/3	6	
	0	-5	0	0	0	7/3		

Симплекс-метод

Базис	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	Свободные члены	Симплекс-отношения
x_3	0	3	1	0	0	-2/3	7	
x_4	0	1	0	1	0	-2/3	1	
x_5	0	3	0	0	1	0	15	
x_1	1	0	0	0	0	1/3	6	
	0	-5	0	0	0	7/3		

Базис	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	Свободные члены	Симплекс-отношения
x_3	0	3	1	0	0	-2/3	7	7/3
x_2	0	1	0	1	0	-2/3	1	1
x_5	0	3	0	0	1	0	15	5
x_1	1	0	0	0	0	1/3	6	
	0	-5	0	0	0	7/3		

Симплекс-метод

Базис	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	Свободные члены	Симплекс-отношения
x_3	0	3	1	0	0	-2/3	7	7/3
x_2	0	1	0	1	0	-2/3	1	1
x_5	0	3	0	0	1	0	15	5
x_1	1	0	0	0	0	1/3	6	
	0	-5	0	0	0	7/3		

Базис	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	Свободные члены	Симплекс-отношения
x_3	0	0	1	0	0	-2/3	7	7/3
x_2	0	1	0	1	0	-2/3	1	1
x_5	0	0	0	0	1	0	15	5
x_1	1	0	0	0	0	1/3	6	
	0	0	0	0	0	7/3		

Симплекс-метод

Базис	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	Свободные члены	Симплекс-отношения
x_3	0	3	1	0	0	-2/3	7	7/3
x_2	0	1	0	1	0	-2/3	1	1
x_5	0	3	0	0	1	0	15	5
x_1	1	0	0	0	0	1/3	6	
	0	-5	0	0	0	7/3		

Базис	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	Свободные члены	Симплекс-отношения
x_3	0	0	1	-3	0	4/3	4	
x_2	0	1	0	1	0	-2/3	1	
x_5	0	0	0	-3	1	2	12	
x_1	1	0	0	0	0	1/3	6	
	0	0	0	5	0	-1		

Симплекс-метод

Базис	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	Свободные члены	Симплекс-отношения
x_3	0	0	1	-3	0	4/3	4	
x_2	0	1	0	1	0	-2/3	1	
x_5	0	0	0	-3	1	2	12	
x_1	1	0	0	0	0	1/3	6	
	0	0	0	5	0	-1		

Базис	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	Свободные члены	Симплекс-отношения
x_3	0	0	1	-3	0	4/3	4	3
x_2	0	1	0	1	0	-2/3	1	-3/2
x_5	0	0	0	-3	1	2	12	6
x_1	1	0	0	0	0	1/3	6	18
	0	0	0	5	0	-1		

Симплекс-метод

Базис	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	Свободные члены	Симплекс-отношения
x_3	0	0	1	-3	0	4/3	4	3
x_2	0	1	0	1	0	-2/3	1	-3/2
x_5	0	0	0	-3	1	2	12	6
x_1	1	0	0	0	0	1/3	6	18
	0	0	0	5	0	-1		

Базис	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	Свободные члены	Симплекс-отношения
x_6	0	0	3/4	-9/4	0	1	3	
x_2	0	1	0	1	0	0	1	
x_5	0	0	0	-3	1	0	12	
x_1	1	0	0	0	0	0	6	
	0	0	0	5	0	0		

Симплекс-метод

Базис	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	Свободные члены	Симплекс-отношения
x_6	0	0	3/4	-9/4	0	1	3	
x_2	0	1	0	1	0	-2/3	1	
x_5	0	0	0	-3	1	2	12	
x_1	1	0	0	0	0	1/3	6	
	0	0	0	5	0	-1		

Базис	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	Свободные члены	Симплекс-отношения
x_6	0	0	3/4	-9/4	0	1	3	
x_2	0	1	1/2	-1/2	0	0	3	
x_5	0	0	-3/2	3/2	1	0	6	
x_1	1	0	-1/4	3/4	0	0	5	
	0	0	3/4	11/4	0	0		

Симплекс-метод

Базис	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	Свободные члены	Симплекс-отношения
x_6	0	0	$3/4$	-9/4	0	1	3	
x_2	0	1	1/2	-1/2	0	0	3	
x_5	0	0	-3/2	3/2	1	0	6	
x_1	1	0	-1/4	3/4	0	0	5	
	0	0	3/4	11/4	0	0		

В последней строке отрицательных значений нет. Решение найдено!

$x_1 = 5$; $x_2=3$; $x_3=0$; $x_4=0$; $x_5=6$; $x_6=3$

Максимальное значение целевой функции: $L=7x_1+5x_2=35+15=50$