

Задачи по теме «Интеграл»

1. Табличное интегрирование

1.1) Вычислить интеграл используя таблицу интегралов и свойства неопределённого интеграла:

- | | |
|---|--|
| 1) $\int \frac{1}{\sqrt{1-4x^2}} dx$ | 2) $\int \frac{1}{\sqrt{3x^2-2}} dx$ |
| 3) $\int \frac{(1-\sqrt[3]{x})^2}{x} dx$ | 4) $\int \frac{x^2}{4x^2+25} dx$ |
| 5) $\int e^{x+5} dx$ | 6) $\int 3^x e^x dx$ |
| 7) $\int \frac{\sqrt{1-x^2}-\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1-x^4}} dx$ | 8) $\int \sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2} dx$ |
| 9) $\int \operatorname{ctg}^2 x dx$ | |

2. Интегрирование с использованием замены переменной

2.1) Используя метод замены переменной вычислить интегралы:

- | | |
|---|---|
| 1) $\int (4x+1)^7 dx$ | 2) $\int \cos 3x dx$ |
| 3) $\int \frac{dx}{\sin 2x}$ | 4) $\int (\sin x + \cos x)^2 dx$ |
| 5) $\int \frac{dx}{6x+5}$ | 6) $\int \frac{dx}{\sqrt{2x-3}}$ |
| 7) $\int x \cdot 3^{x^2} dx$ | 8) $\int \frac{\operatorname{arctg}^2 x}{x^2+1} dx$ |
| 9) $\int \sqrt{\frac{\arcsin x}{1-x^2}} dx$ | 10) $\int \cos 3x \sin^2 3x dx$ |
| 11) $\int \frac{x+5}{x^2-9} dx$ | 12) $\int \frac{3-4x}{\sqrt{1-9x^2}} dx$ |
| 13) $\int \frac{dx}{1+e^x}$ | 14) $\int \frac{x+\operatorname{arctg} 4x}{1+16x^2} dx$ |

3. Метод интегрирования по частям

3.1 Вычислить интегралы используя метод интегрирования по частям:

- | | |
|--|-------------------------|
| 1) $\int \operatorname{arctg} x dx$ | 2) $\int x^2 \ln x dx$ |
| 3) $\int \frac{\log_2 x}{x^2} dx$ | 4) $\int x e^{3x} dx$ |
| 5) $\int x \sin 2x dx$ | 6) $\int x^2 \cos x dx$ |
| 7) $\int 2^x \sin x dx$ | 8) $\int \cos \ln x dx$ |
| 9) $\int \frac{x \cos x}{\sin^3 x} dx$ | |

4. Интегралы от тригонометрических функций

3.2 Вычислить интегралы:

1) $\int \sin 2x \cdot \cos 7x \, dx$

3) $\int \sin 5x \cdot \sin 3x \, dx$

5) $\int \sin^2 x \cdot \cos^2 x \, dx$

7) $\int \cos^3 x \, dx$

9) $\int \sin^5 x \cos x \, dx$

2) $\int \cos 3x \cdot \cos 9x \, dx$

4) $\int \cos^4 x \, dx$

6) $\int \cos^2 x \, dx$

8) $\int \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x} \, dx$

10) $\int \frac{\sec^2 x}{1 + \tan^2 x} \, dx$

5. Несобственные интегралы

5.1 Вычислить или доказать расходимость интегралов:

1) $\int_1^{\infty} \frac{\ln x}{x^2} \, dx$

2) $\int_0^5 \frac{5 \, dx}{\sqrt{25-x^2}}$

3) $\int_1^5 \frac{dx}{x \ln x}$

4) $\int_0^2 \frac{dx}{(\sqrt[3]{x-1})^2}$

5) $y \int_0^1 \frac{x^4 \, dx}{\sqrt{1-x^5}}$

6) $\int_0^1 \ln x \, dx$

7) $\int_1^{+\infty} \frac{2+3 \cos x}{x^4} \, dx$

8) $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{x \ln^2 x}$

9) $\int_1^{\infty} \frac{dx}{2+x+3x^5}$

10) $\int_1^{\infty} \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}$

11) $\int_{-\infty}^0 x e^{-x^2} \, dx$

12) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$

6. Площадь плоской фигуры

1) Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:

$$x \cdot y = 4; y = x; x = 4.$$

2) Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:

$$y = x^2 + 4x; y = x + 4.$$

3) Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:

$$y^2 = 2x - 1; y = x - 2.$$

4) Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:

$$y = 3x^2 + 1; y = 3x + 7.$$

- 5) Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:
 $3y = x^2 - 6; y = x.$

7. Длина отрезка кривой

- 1) Найти длину дуги кривой: $y = 1 - \ln \sin x; \frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$

- 2) Найти длину дуги кривой:

$$\begin{cases} x = 6(\cos t + t \sin t) \\ y = 6(\sin t - t \cos t) \end{cases}; 0 \leq t \leq \pi$$

- 3) Найти длину дуги кривой:

$$\rho = 2\varphi; 0 \leq \varphi \leq \frac{3}{4}$$

8. Объём фигуры вращения

- 1) Фигура ограничена параболой $y = x^2$ и прямой $y=4$. Найдите объём тела, образованного вращением этой фигуры вокруг оси ОУ.

- 2) Найдите объём тела, полученного вращением вокруг оси ОХ фигуры, ограниченной графиками $y = \sin x$ и $y=0$ на отрезке $[0; \pi]$.

- 3) Фигура ограничена окружностью $x^2 + y^2 = 9$ (верхняя полуокружность) и осью ОХ. Найдите объём тела вращения вокруг оси ОХ.

- 4) Кривая задана параметрически: $x = 2 \cos t; y = 2 \sin t; t \in [0; \frac{\pi}{2}]$
Найдите объём тела, полученного вращением дуги вокруг оси ОХ.