

Задачи по теме «Пределы»

1. Математическая индукция

1.1) Доказать, что для любого натурального n :

- а) число $7^n - 1$ кратно 6;
- б) число $5^n - 4n + 15$ кратно 16;
- в) число $n(2n^2 - 3n + 1)$ кратно 6;
- г) число $2n^3 + 3n^2 + 7n$ кратно 6;
- д) число $6^{2n-2} + 3^{n+1} + 3^{n-1}$ кратно 11;
- е) число $5 \cdot 2^{3n-2} + 3^{3n-1}$ кратно 19;

1.2) Доказать, что при любом натуральном n верны равенства:

- а) $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$;
- б) $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$;
- в) $2 + 4 + 6 + \dots + 2n = n(n + 1)$;
- г) $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$;
- д) $1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + (2n - 1)^2 = \frac{n(4n^2+1)}{3}$;
- е) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \dots + n)^2$;
- ж) $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + n(n + 1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$;
- з) $\left(1 - \frac{1}{4}\right) \left(1 - \frac{1}{9}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{n+1}{2n}$ при $n \geq 2$;
- и) $\frac{1}{1 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 9} + \dots + \frac{1}{(4n-3)(4n+1)} = \frac{n}{4n+1}$;

1.3) Доказать, что при любом натуральном n верны неравенства:

- а) $2^n > 5n$, при $n \geq 5$;
- б) $3^n > 5n + 1$, при $n \geq 3$;
- в) $\frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} < \frac{5n-2}{2n}$;
- г) $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} > \frac{13}{24}$, при $n \geq 2$;

2. Определение предела

2.1 Доказать:

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0$
2. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n} = 0$
3. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-1+(-1)^{n+1}}{n} = 0$
4. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-(-1)^n}{n} = 0$
5. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n-1} = \frac{1}{2}$
6. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-n}{1+n} = -1$
7. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2-1}{n^2} = 1$
8. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2+3n^2}{n^2} = 3$
9. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-2}{\sqrt[3]{2n-9}} = 0$
10. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{\sqrt{n+1}} = 0$
11. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cos\left(\frac{\pi n}{2}\right) = 0$
12. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin n}{\sqrt{n+1}} = 0$
13. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2-2}{n^3} = 0$
14. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n^3+1} = 0$
15. $\lim_{n \rightarrow \infty} (-0.1)^n = 0$
16. $\lim_{n \rightarrow \infty} 0.3^n = 0$
17. $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0, |q| < 1$
18. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{\sqrt{n^2+n}} = 2$
19. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{q^n}{n} = 0, |q| \leq 1$
20. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{0.2^n}{5n} = 0$
21. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n}{(n+1)4^n} = 0$
22. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n2^n} = 0$
23. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \neq 1$
24. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{(n+1)4^n} \neq 1$
25. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-n}{n} \neq 0$
26. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{1+n} \neq 1$
27. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+n}{3-n} \neq -2$
28. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4+n}{1+n} \neq 0$
29. $\lim_{n \rightarrow \infty} (n+3)^2 = +\infty$
30. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} = +\infty$
31. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{\sqrt{n}} = +\infty$
32. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2-n}{2n+1} = +\infty$
33. $\lim_{n \rightarrow \infty} (-n^2+4) = -\infty$
34. $\lim_{n \rightarrow \infty} (2 - \sqrt{n+6}) = -\infty$
35. $\lim_{n \rightarrow \infty} n \sin\left(\frac{\pi}{2} + \pi n\right) = \infty$
36. $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \operatorname{tg}\left(\frac{\pi+2\pi n}{4}\right) = \infty$

3. Вычисление пределов последовательностей

3.1 Вычислить пределы:

- | | |
|--|--|
| 1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1+2n)^3 - 8n^3}{(1+4n)^2 + n^2}$ | 2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2-3n)^2}{(n-3)^3 - (n+3)^3}$ |
| 3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(4-n)^3 - (3-n)^3}{(1-n)^3 - (1+n)^3}$ | 4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2-n)^3 + (1-n)^3}{(1+n)^2 - (1+n)^4}$ |
| 5) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+2+3+\dots+n}{\sqrt{n^4+2}}$ | 6) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+3+5+\dots+(2n-1)}{1+2+3+\dots+n}$ |
| 7) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\dots+\frac{1}{3^n}}{1+\frac{1}{5}+\frac{1}{5^2}+\dots+\frac{1}{5^n}}$ | 8) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\dots+\frac{1}{2^n}}{1+\frac{1}{7}+\frac{1}{7^2}+\dots+\frac{1}{7^n}}$ |
| 9) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+3)! + (n+1)!}{(n+2)!}$ | 10) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3n+1)! + (3n+2)!}{(3n+3)! - (3n+2)!}$ |
| 11) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^2+3} + n^2}{\sqrt[4]{n^{12}+2n+1} - n^2}$ | 12) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{10n^3 - \sqrt{n^3+2}}{\sqrt{4n^6+3} - n}$ |
| 13) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2n^3+3} - \sqrt{n+5}}{\sqrt[3]{n^3+2} - \sqrt{n-1}}$ | 14) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^5+3} - \sqrt{n-2}}{\sqrt[4]{n^4+2} - \sqrt{n-2}}$ |
| 15) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^{n+1} + 4^{n+1}}{3^{n+4n}}$ | 16) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n - 3^{n+1}}{2^{n+1} + 2^{n+2}}$ |
| 17) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{(n+2)(n+1)} - \sqrt{(n-1)(n+3)})$ | 18) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n(n+6)} - n)$ |
| 19) $\lim_{n \rightarrow \infty} n(\sqrt[3]{4+8n^3} - 2n)$ | 20) $\lim_{n \rightarrow \infty} (n + \sqrt[3]{3-n^3})$ |

3.2 Вычислить пределы последовательностей, используя первый замечательный предел:

- | | |
|---|--|
| 1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{4n}\right)^n$ | 2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{6n}\right)^n$ |
| 3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{3n}\right)^{n^2}$ | 4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{4}{5n}\right)^{n^2}$ |
| 5) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{n-1}$ | 6) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{3n}\right)^{3n}$ |
| 7) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{5}{n^2+2n+7}\right)^{1-n^2}$ | 8) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{6-n^2+3n}\right)^{2n^2-6n}$ |
| 9) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2+3}{n^2+2}\right)^{n^2}$ | 10) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2-6}{n^2+8}\right)^{1-n^2}$ |
| 11) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^3+1}{n^3}\right)^{4+n^2}$ | 12) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2-n^3}{-n^3-1}\right)^{n^2+1}$ |
| 13) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n^3-3n+8}{4+2n^3}\right)^{n^2+1}$ | 14) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1+2n+3n^2}{3n^2-8n}\right)^{5n}$ |
| 15) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{5-n^2}{4-n^2}\right)^{6n^3}$ | 16) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2-3}{n^2+2}\right)^{2n^3}$ |

4. Вычисление пределов функций

4.1 Вычислить пределы функций, используя непосредственное вычисление пределов:

$$1) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 2x + 2}{x^2 - 1}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+3) \cdot (x-2)}{x+2}$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{5x+4}{1-x}$$

$$7) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{3}{2x-6}$$

$$9) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{4x^2 - 5x - 1}{2x^2 - x - 1}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2 + x}{4x^3 + x + 10}$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x+4}{1-x}$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 4x + 5}{x^2 + 6}$$

$$8) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - 5x - 3}{4x^2 - 13x + 3}$$

4.2 Раскрыть неопределённость и вычислить пределы:

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^3 + x}{x}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1} - 1}{x}$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{3-x}{x^3 - 27}$$

$$7) \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x-5}{2-\sqrt{x-1}}$$

$$9) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{x^2 - 9}$$

$$11) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2 - 8x + 4}{5x^2 - 14x + 8}$$

$$13) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{x+4} - 2}$$

$$15) \lim_{x \rightarrow 7} \frac{\sqrt{x+2} - 3}{x^2 - 49}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x^2 - 2x - 3}$$

$$4) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 4}{x+2}$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{3x^2 - 11x + 6}{2x^2 - 5x - 3}$$

$$8) \lim_{x \rightarrow \sqrt{5}} \frac{x^4 - 25}{x^2 - 5}$$

$$10) \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 8x + 15}{x^2 - 25}$$

$$12) \lim_{x \rightarrow 6} \frac{x-6}{\sqrt{x+3} - 3}$$

$$14) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{4x^2 - 7x - 2}{5x^2 - 9x - 2}$$

$$16) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x^3 - 2x^2 + x - 2}$$

4.2 Раскрыть неопределённость и вычислить предел:

$$1) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^3 + 2x - 3}{x^3 - x^2 + 10}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 7x + 5}{x^3 + 7x^2 + 3}$$

$$5) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^5 + 2x^4 + 2x^3 - x}{x^4 + x^2 + 1}$$

$$7) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3}{4(2-x)^2} - \frac{x}{4} \right)$$

$$9) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x^2}{2x+1} - \frac{(2x-1)(3x^2+x+2)}{4x^2} \right)$$

$$11) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3}{x^2+1} - x \right)$$

$$13) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{5x^3+1}{1-x} + \frac{20x^3+x-4}{4x} \right)$$

$$15) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[4]{(x^7+3)} + \sqrt[3]{(x^8-x)}}{\sqrt[4]{x^3+5} - x^2}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^4 + 2x^3 + 4x}{x^3 - 4x^4 + 1}$$

$$4) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x-23}{x^3 + 30x^2 - 10}$$

$$6) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-7x^3 + 5x - 3}{x^2 + x - 3}$$

$$8) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3}{x^2-4} - x \right)$$

$$10) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3}{2x^2-1} - \frac{x^2}{2x+1} \right)$$

$$12) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^2+x-x}} \right)$$

$$14) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^3+6} + \sqrt{x^3-1}}{\sqrt[4]{(2+x)} - x\sqrt{x}}$$

$$16) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[6]{(x^8+3)} + \sqrt[4]{(x^8+1)}}{\sqrt[5]{x^7+5} + 3x^2}$$

4.3 Вычислить предел:

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 6x}{x}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 8x}{2x}$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 10x}{5x}$$

$$7) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 2x}{x^2}$$

$$9) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2}{1 - \cos x}$$

$$11) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{\sin 3x}$$

$$13) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos^2 x}{x^2 \cos x}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{\sin x}$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \operatorname{ctg} x$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 4x}{2x}$$

$$8) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x}{\sin 10x}$$

$$10) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x-2)}{x-1}$$

$$12) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan^2 3x}{2x^2}$$

$$14) \lim_{x \rightarrow 0} \sin 3x \cdot \operatorname{ctg} 5x$$

4.4 Вычислить предел:

$$1) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{3x}\right)^x$$

$$3) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-1}{x}\right)^{3x+5}$$

$$5) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$$

$$7) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-2}{x+3}\right)^{4-x}$$

$$9) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{5x-3}{5x+4}\right)^{3x-1}$$

$$11) \lim_{x \rightarrow \infty} (1-x)^{\frac{2}{x}}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{5x}$$

$$4) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2-1}{x^2}\right)^{2x^2}$$

$$6) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{x-1}$$

$$8) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+1}$$

$$10) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x^2+2}{2x^2+1}\right)^{x^2}$$

$$12) \lim_{x \rightarrow \infty} (1+x)^{\frac{4-x}{x}}$$

4.5 Вычислить предел с помощью эквивалентных бесконечно-малых:

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2+x}{\sin 5x}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{7x}-1}{21x-x^2}$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot \arcsin 2x}{1 - \cos 4x}$$

$$7) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{20 \cdot \ln(1+\frac{x}{2})}{\tan 8x}$$

$$9) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{\sqrt[7]{1+x}-1}$$

$$11) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5^{2x}-1}{\tan 5x}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x}-1}{\operatorname{tg} 2x}$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 5x}{1 - \cos x}$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan 6x}{\sin 12x}$$

$$8) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{21 \cdot \ln(1+\frac{x}{3})}{7x-x^5}$$

$$10) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+3x)}{\sqrt[6]{1+x}-1}$$

$$12) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4^{-5x}-1}{\sin 5x}$$

$$13) \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{\sqrt[5]{x} - 1}$$

$$15) \quad \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\tan 4x}{\tan 5x}$$

$$17) \quad \lim_{x \rightarrow e} \frac{\ln x - 1}{x - e}$$

$$14) \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{9x^2 - 9}{\sqrt[9]{x} - 1}$$

$$16) \quad \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin 3x}{\sin 8x}$$

$$18) \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\ln 2x - 1}{2x - e}$$