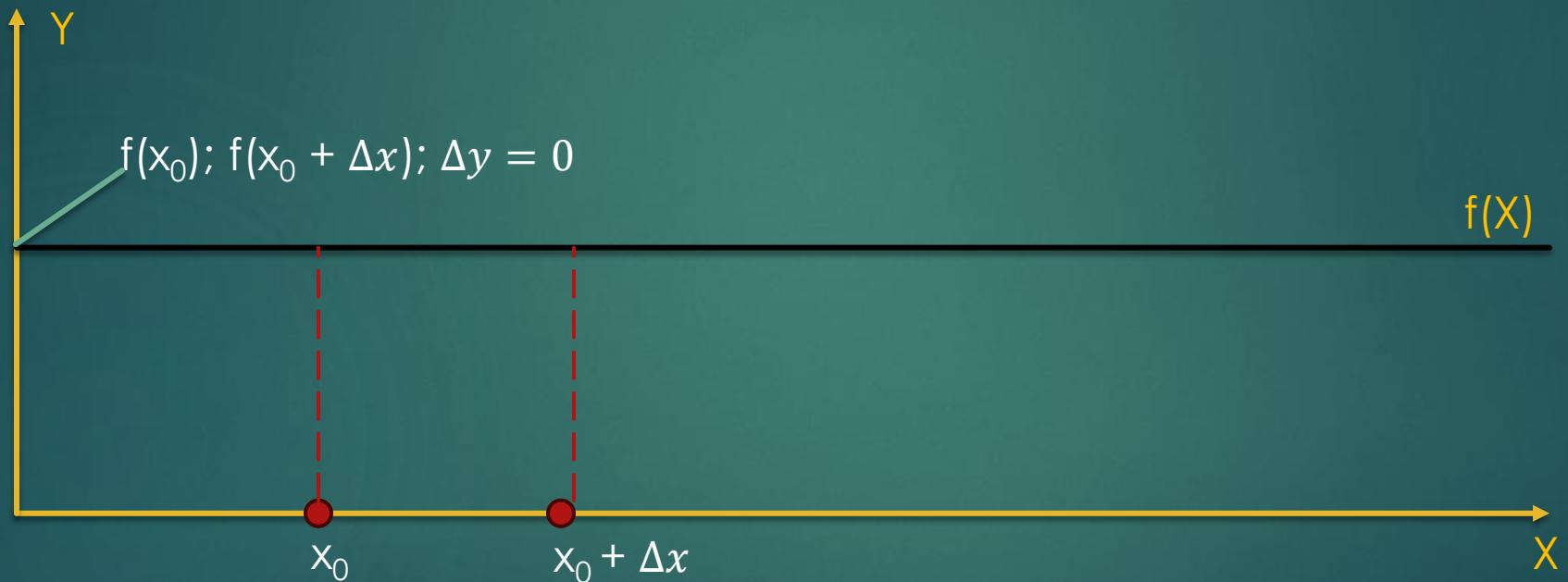


Производная

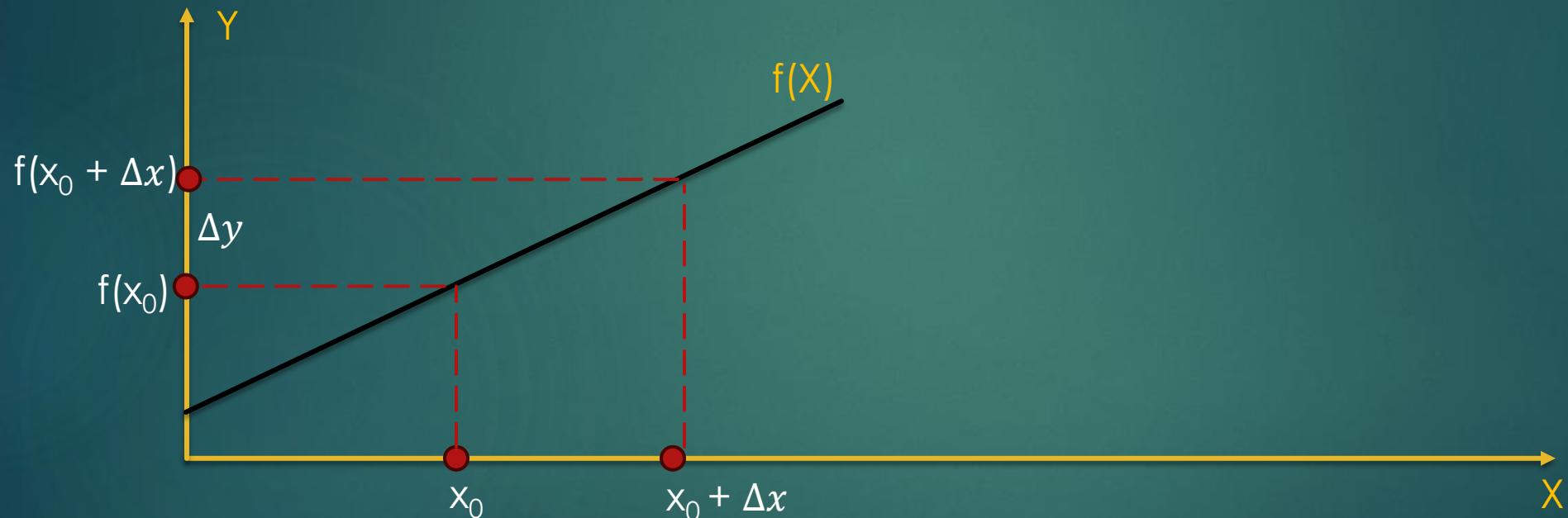
Физический смысл производной

Элементы высшей математики



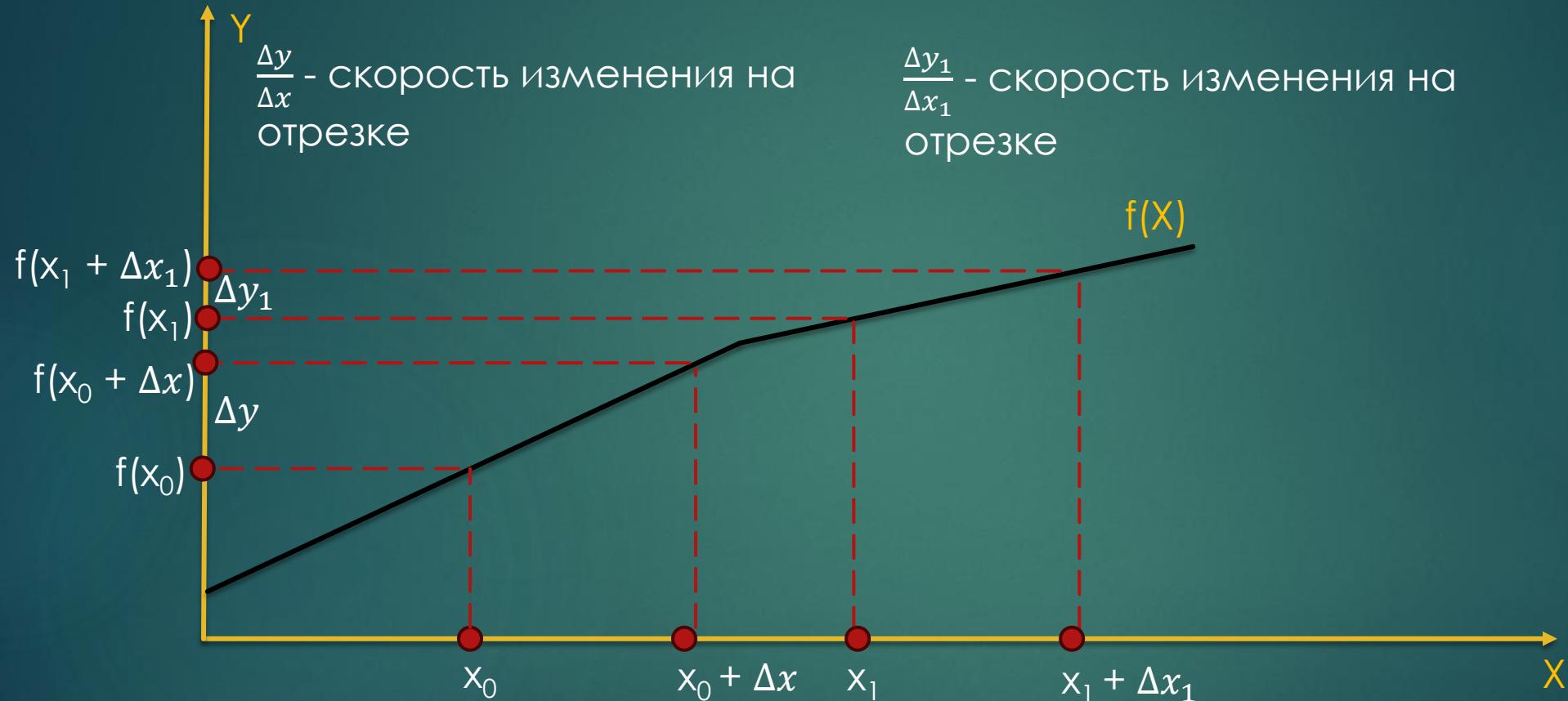
Физический смысл производной

$\frac{\Delta y}{\Delta x}$ - скорость изменения на отрезке



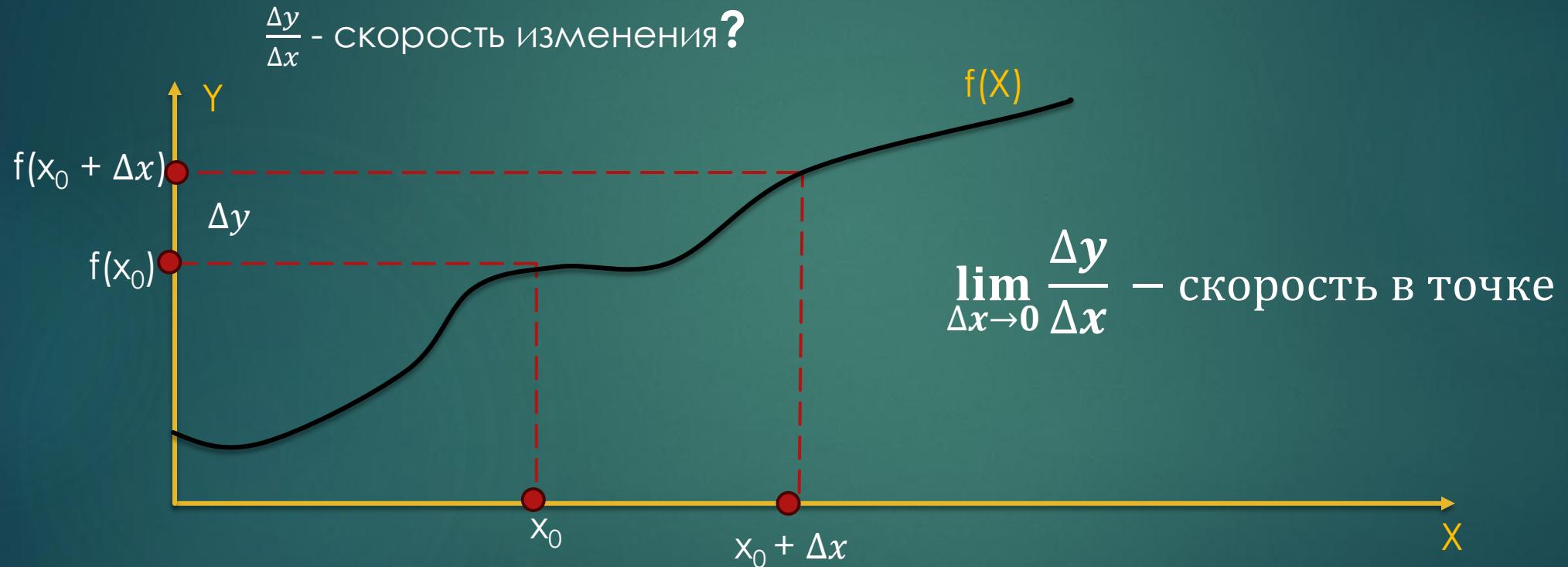
Физический смысл производной

Элементы высшей математики



Физический смысл производной

Элементы высшей математики



Определение производной

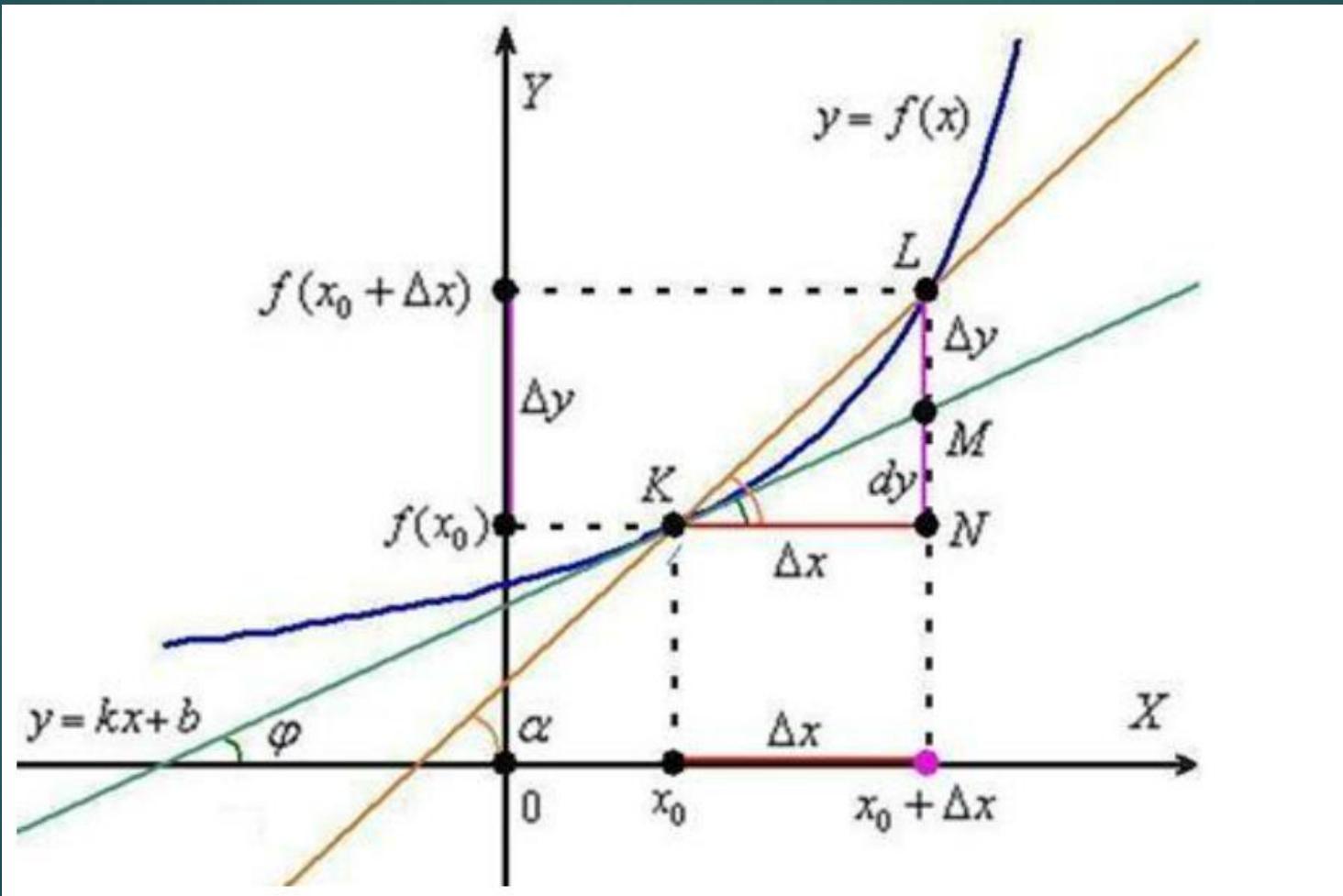
Предел отношения приращения функции к приращению аргумента при стремлении приращения аргумента к нулю называется **производной**.

Производная функции $f(x)$ обозначается $f'(x)$.

«Дифференцировать» – выделять свойства. В случае производной, выделяется одно из свойств функции – скорость.

Геометрический смысл производной

Элементы высшей математики



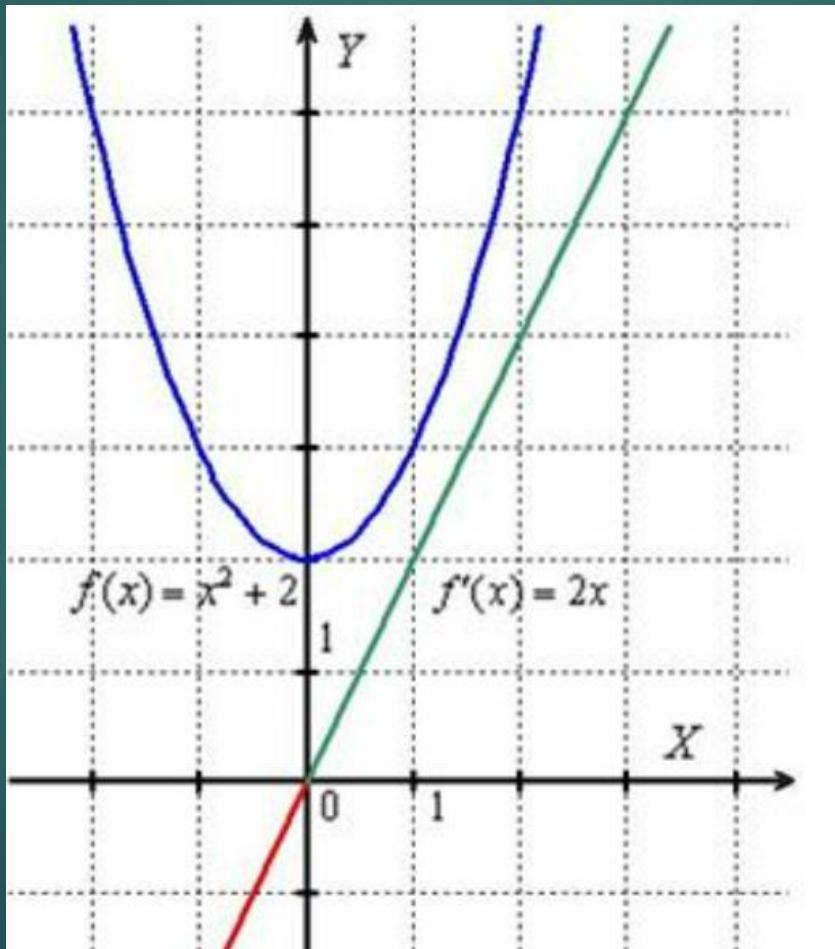
Геометрический смысл производной

Производная в точке x_0 равна углу наклона касательной к функции в точке x_0 .

Уравнение касательной:

$$(y - y_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

Геометрический смысл производной



Вычисление производной

Пользуясь определением производной найти производные следующих функций.

- 1) $f(x) = C = \text{Const}$
- 2) $f(x) = x^n, x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$
- 3) $f(x) = \ln x$
- 4) $f(x) = e^x$
- 5) $f(x) = \sin(x)$
- 6) $f(x) = \cos(x)$

Использованы следующие тождества:

Бином Ньютона

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^{n-k} b^k; C_n^k = \frac{n!}{k!(n - k)!}$$

Разность синусов

$$\sin a - \sin b = 2 \sin \frac{a - b}{2} \cos \frac{a + b}{2}$$

Вычисление производной

Таблица производных

$C' = 0$	$(x^n)' = nx^{n-1}$
$(\ln x)' = \frac{1}{x}$	$\left(\lim_a x\right)' = \frac{1}{x \ln a}$
$(e^x)' = e^x$	$(a^x)' = a^x \ln a$
$(\sin x)' = \cos x$	$(\cos x)' = -\sin x$
$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$	$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$	$(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$

Вычисление производной

Правила дифференцирования

<i>Сумма, умножение на константу</i> $(\alpha f(x) + \beta g(x))' = \alpha f'(x) + \beta g'(x)$	<i>Произведение</i> $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x)g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
<i>Частное</i> $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$	<i>Сложная функция</i> $(f(g(x)))' = f'(x)g'(x)$
<i>Обратная функция</i> $(f^{-1}(x))' = \frac{1}{f'(x)}$	<i>Логарифмическое дифференцирование</i> $f'(x) = f(x) \cdot (\ln f(x))'$

Вычисление производной

Пример 1.1

Используя определение вычислить производную функции:
 $f(x) = 3x^2 + 9x + 3$

Пример 1.2

Используя определение вычислить производную функции:
 $f(x) = \sin 3x$

Пример 1.3

Используя определение вычислить производную функции:
 $f(x) = \sqrt[3]{x}$

Вычисление производной

Используя свойства производной и табличные производные вычислить $f'(x)$:

Пример 2.1

$$f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$$

Пример 2.2

$$f(x) = \frac{1 - x - x^2}{1 - x + x^2}$$

Пример 2.3

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2} - \frac{2}{\sqrt{x}}$$

Вычисление производной

Используя свойства производной и табличные производные вычислить $f'(x)$:

Пример 2.4

$$f(x) = \sin(\cos^2 x) \cdot \cos(\sin^2 x)$$

Пример 2.5

$$f(x) = \ln \frac{x+a}{\sqrt{x^2+b}} + \frac{a^2}{b} \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{b}\right)$$

Пример 2.3 (использовать логарифмическое дифференцирование)

$$f(x) = x \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$$

Дифференциал

Обозначение производной $\frac{df(x)}{dx}$ другое не только по форме, но и по смыслу.

Если dx конечная величина, то:

$$\Delta f(x) = f'(x) \cdot \Delta x$$

$$f(x_0 + \Delta x) = f'(x_0) \cdot \Delta x$$

Приближённые вычисления

Пример 3.1

Вычислить приближённо $\sqrt{101}$

Пример 3.2

Вычислить приближённо $y = e^{1-x^2}$ в точке $x=1.05$

Производные высших порядков

Пусть $y=f(x)$ – дифференцируемая функция.

Её производная $y'=f'(x)$ тоже является функцией x .

Если существует $(f'(x))'$, то она называется производной второго порядка: $y''=f''(x)$.

Производные более высоких порядков:

$$(f''(x))' = f'''(x)$$

$$(f'''(x))' = f^{(4)}(x)$$

...

Вторая производная - **ускорение**

Производные высших порядков

Пример 4.1

Найти производную второго порядка: $y = e^{-2x^2}$

Пример 4.2

Найти производную второго порядка: $y = \tan x$

Разложение функции в ряд

Пусть $f(x)$ – $n+1$ раз дифференцируема в точке a .

Ряд Тейлора

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n + R_{n+1}(x)$$

Остаточный член ряда Тейлора:

$$R_{n+1}(x) = \left(\frac{x - a}{x - \xi}\right)^p \frac{(x - \xi)^{n+1}}{n! p} f^{(n+1)}(\zeta)$$

Разложение функции в ряд

Пусть $f(x)$ – $n+1$ раз дифференцируема в точке a .

Ряд Лорана получается из ряда Тейлора при $a=0$

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}(x) + \frac{f''(0)}{2!}(x)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}(x)^n + R_{n+1}(x)$$

Остаточный член ряда Лорана в форме Коши:

$$R_{n+1}(x) = \frac{x^{n+1}(1-\theta)^n}{n!} f^{(n+1)}(\theta x), \quad \theta \in (0,1)$$

Разложение функции в ряд

Пример 5.1

Разложить в ряд Лорана функцию $\sin(x)$.

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^{2n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$$

Пример 5.2

Разложить в ряд Лорана функцию $\ln(1+x)$

$$e^x = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$$

Правило Лопиталя

Пусть в некоторой окрестности точки x_0 функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ дифференцируемы и $\varphi'(x_0) \neq 0$.

Если $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{0}{0}$ или $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{\infty}{\infty}$, то:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$$

Если отношение производных является неопределённостью, правило Лопиталя справедливо и для производных высших порядков.

Правило Лопиталя

Пример 6.1

Найти предел:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1 + \ln x}{e^x - e}$$

Пример 6.2

Найти предел:

$$\lim_{x \rightarrow 0} (x^2 \ln x)$$

Пример 6.3

Найти предел:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right)$$

Касательная и нормаль

Уравнение касательной к функции в точке x_0, y_0 :

$$y - y(x_0) = y'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

Уравнение нормали к функции в точке x_0, y_0 :

$$y - y(x_0) = \frac{1}{y'(x_0)} \cdot (x - x_0)$$

Угол между касательными:

$$\tg \varphi = \left| \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2} \right|; k_1, k_2 \text{ — тангенсы углов наклона касательных}$$

Касательная и нормаль

Пример 7.1

Найти уравнения касательной и нормали к графику
функции $f(x)=x^3-2x+1$ в точке $x_0=1$

Анализ функций

Пример 8.1

Провести анализ функции и построить её график:

$$f(x) = \frac{(x-1)^3}{(x+1)^2}$$

Анализ функций

Область определения

Область определения – множество всех значений аргумента, при которых функция может быть вычислена.

Для $f(x) = \frac{(x-1)^3}{(x+1)^2}$ область определения: $x \in (-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$

Особая точка: $x=-1$

Анализ функций

Чётные и нечётные функции

Чётная функция — это функция, которая удовлетворяет двум условиям:

- Область определения функции симметрична относительно начала координат
- Для любого значения аргумента выполняется равенство: $f(-x)=f(x)$

Свойства чётной функции:

График симметричен относительно оси ординат (оси Oy)

При замене x на $-x$ значение функции не меняется

Нечётная функция — это функция, которая удовлетворяет двум

условиям:

- Область определения функции симметрична относительно начала координат
- Для любого значения аргумента выполняется равенство: $f(-x)=-f(x)$

Свойства нечётной функции:

График симметричен относительно начала координат

При замене x на $-x$ значение функции меняет знак на противоположный

Анализ функций

Чётные и нечётные функции

$$f(x) = \frac{(x - 1)^3}{(x + 1)^2}$$
$$f(-x) = \frac{(-x - 1)^3}{(-x + 1)^2} = -\frac{(x + 1)^3}{(x - 1)^2}$$

$$f(-x) \neq f(x)$$
$$f(-x) \neq -f(x)$$

Не является ни чётной ни нечётной

Анализ функций

Периодические функции

Периодической называется функция, для которой существует такое число $T \neq 0$, что для любого x из её области определения выполняется равенство:

$$f(x+T)=f(x)$$

Функция $f(x) = \frac{(x-1)^3}{(x+1)^2}$ **непериодическая**.

Анализ функций

Непрерывность функции

Функция является непрерывной в точке x_0 , если $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

График непрерывной функции можно нарисовать не отрывая карандаш от бумаги.

Анализ функций

Устранимый разрыв функции

Устранимый разрыв функции — это точка, в которой:

- Существуют конечные односторонние пределы функции.
- Эти пределы равны между собой.
- Значение функции в данной точке либо не совпадает с этими пределами, либо функция вообще не определена в этой точке.

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = A \neq f(x_0)$$

или

функция не определена в точке x_0 , но существует предел:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$$

Анализ функций

Неустранимый разрыв функции

Неустранимый разрыв первого рода

Существует в точке x_0 , если:

- Существуют конечные односторонние пределы
- Эти пределы не равны между собой
- Математическая запись: $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$

Неустранимый разрыв второго рода

Существует в точке x_0 , если:

- Хотя бы один из односторонних пределов не существует или
- Хотя бы один из односторонних пределов равен бесконечности

Анализ функций

Вертикальная асимптота для функции из примера

$$\lim_{x \rightarrow -1^+ 0} \frac{(x - 1)^3}{(x + 1)^2} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^- 0} \frac{(x - 1)^3}{(x + 1)^2} = -\infty$$

В точке $x=-1$ функция терпит неустранимый разрыв второго рода.

В точке $x=-1$ существует вертикальная асимптота.

Анализ функций

Невертикальная асимптота

Косая асимптота выражается уравнением $y=ax+b$, где

$$a = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$$
$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - k \cdot x)$$

Косая асимптота существует, если указанные пределы существуют и конечны.

Горизонтальная асимптота существует, если $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x)) = const$

Анализ функций

Косая асимптота для функции из примера

Косая асимптота выражается уравнением $y=ax+b$, где

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x-1)^3}{x(x+1)^2} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{(x-1)^3}{(x+1)^2} - x \right) = -5$$

Косая асимптота существует: $y=x-5$

Анализ функций

Динамика функции

Если первая производная положительная – функция возрастает.

Если первая производная отрицательная – функция убывает.

Анализ функций

Экстремумы функции

Точка, в которой первая производная равна нулю является точкой экстремума.

Типы точек экстремума

Производная слева от кочки экстремума	Производная в точке экстремума	Производная справа от точки экстремума	Тип экстремума
Отрицательная	Равна нулю	Положительная	Минимум
Положительная	Равна нулю	Отрицательная	Максимум

Анализ функций

Форма функции

Выпуклая функция — функция, график которой на некотором интервале расположен не выше любой своей касательной.

Вогнутая функция — функция, график которой на некотором интервале расположен не ниже любой своей касательной.

Если в точке x_0 вторая производная положительная, функция в точке x_0 вогнутая.

Если в точке x_0 вторая производная отрицательная, функция в точке x_0 выпуклая.

Если в точке x_0 вторая производная равна нулю, точка x_0 является точкой перегиба.

Анализ функций

Динамика, экстремумы, форма для функции из примера

$$f'(x) = \frac{3(x-1)^2(x+1)^2 - (x-1)^2 2(x+1)}{(x+1)^4} = \frac{(x-1)^2(x+5)}{(x+1)^3}$$

Особые точки первой производной: $x=1$ (производная равна нулю); $x=-5$ (производная равна нулю); $x=-1$ (производная не существует).

$$F''(x) = \frac{-3}{(x+1)^4}(x-1)^2(x+5) + \frac{1}{(x+1)^3}(2(x-1)(x+5) + (x-1)^2) = \frac{24(x-1)}{(x+1)^4}$$

Особые точки второй производной: $x=1$ (вторая производная равна нулю); $x=-1$ (вторая производная не существует).

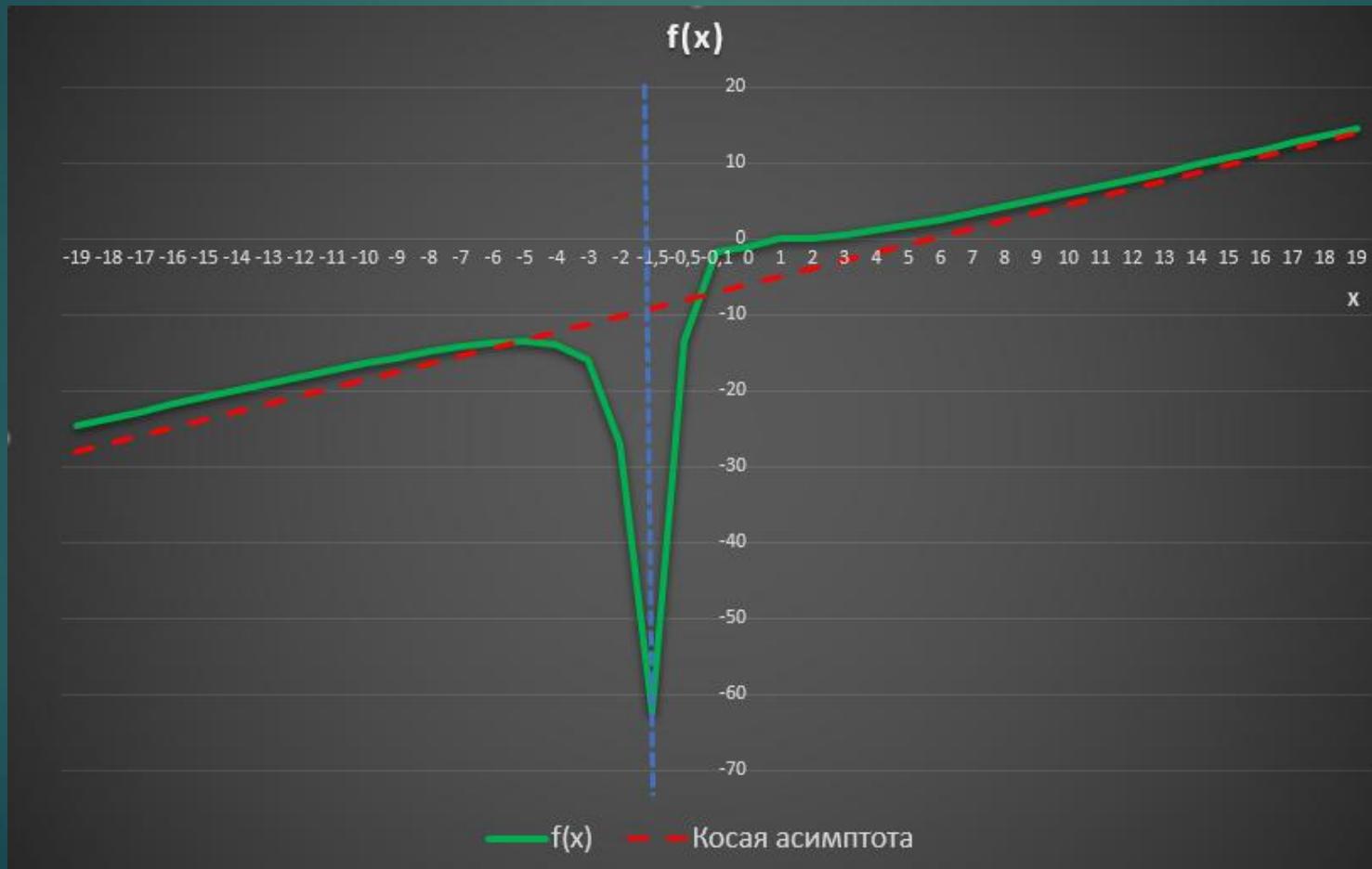
Анализ функций

Динамика, экстремумы, форма для функции из примера

x	($-\infty; -5$)	-5	($-5; -1$)	-1	($-1; 1$)	1	($1; +\infty$)
$f'(x)$	+	0	-	N/A	+	0	+
$f''(x)$	-	-	-	N/A	-	0	+
$f(x)$	возрастает; выпуклая	max	убывает; выпуклая	Разрыв	Возрастает; Выпуклая	Перегиб	Возрастает; Вогнутая

Анализ функций

Динамика, экстремумы, форма для функции из примера



Анализ функций

Шаги процесса анализа функции

- 1) Найти область определения, перечислить особые точки функции.
- 2) Определить чётность/нечётность функции.
- 3) Определить периодичность функции.
- 4) Определить тип разрыва в особых точках функции. Определить наличие вертикальных асимптот.
- 5) Определить наличие косых асимптот.
- 6) Вычислить первую производную функции, найти её особые точки.
- 7) Вычислить вторую производную функции, найти её особые точки.
- 8) Заполнить таблицу интервалов функций с указанием знаков первой и второй производной. Определить интервалы возрастания/убывания, максимумы/минимумы, вогнутость/выпуклость.
- 9) Начертить функцию.

Частная производная

Дана функция нескольких переменных $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$

Производная по аргументу x_k :

$$\frac{\partial f}{\partial x_k} = \lim_{\Delta x_k \rightarrow 0} \frac{f(x_1, x_2, \dots, x_k + \Delta x_k, \dots, x_n) - f(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\Delta x_k}$$

При вычислении частной производной, все переменные, кроме x_k считаются имеющими постоянное значение.

Смешанная производная:

$$\frac{\partial^2 f(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_1 \partial x_2}$$

Частная производная

Пример 9.1

Вычислить частные производные по x и y для функции:

$$z = x^3y^2 - 2x^2y + 3xy - 4$$

Пример 9.2

Вычислить частные производные по x и y для функции:

$$z = \frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{x} - xy$$

Полная производная

Полная производная функции — это производная функции по времени вдоль траектории, которая учитывает все возможные зависимости между переменными.

Пусть дана функция $f=f(t,x(t),y(t))$. Тогда её полная производная по времени t определяется как:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t}$$