Линейная алгебра

Решение системы линейных уравнений методом исключения переменных

- Решить систему линейных уравнений, значит найти значения переменных, превращающие в верное равенство КАЖДОЕ уравнение системы.

Решение системы линейных уравнений методом исключения переменных

- $\begin{cases} 4x + y = -5 \\ 3x + 3y = 3 \end{cases}$
- Из первого уравнения: y = -5 – 4x
- Подстановка во второе уравнение: 3x + 3(-5-4x)=3
- -9x - 15 = 3
- -9x = 18
- x = -2
- Обратный ход:
- y = -5 -4*-2=3

Решение системы линейных уравнений методом Гаусса

- *Матрица – таблица чисел.*
- *В двумерной матрице, каждый элемент обозначается двумя индексами. Первый индекс – номер строки, второй индекс – номер столбца.*

$$\begin{array}{cccc}
a11 & a_{12} & a_{13} & \ldots \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots \\
a_{31} & a_{32} & a_{33} & \ldots \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots.
\end{array}$$

Решение системы линейных уравнений методом Гаусса

x_1a_{11}	$+ x_2a_{12}$	$+ x_3a_{13}$	…	$=B_1$
x_1a_{21}	$+ x_2a_{22}$	$+ x_3a_{23}$	…	$=B_2$
x_1a_{31}	$+ x_1a_{32}$	$+ x_1a_{33}$	…	$=B_3$
…	…	…	….	…

a_{ij} – коэффициенты системы уравнений;
B_i – свободные члены

Действия над строками:
Строки можно умножать/делить на число (константу);
Строки можно складывать;
Строки можно переставлять;

Решение системы линейных уравнений методом Гаусса

Верхняя диагональная матрица

a_{11}	a_{12}	a_{13}	…	B_1
0	a_{22}	a_{23}	…	B_2
0	0	a_{33}	…	B_3
…	…	…	….	…
0	0	0 …	a_{nn}	B_n

Решение системы линейных уравнений методом Гаусса

Этапы решения системы уравнений методом Гаусса:

1) Составляется расширенная матрица, состоящая из коэффициентов системы уравнений и свободных членов.
2) Прямой ход. Матрица коэффициентов системы уравнений приводится к верхнему диагональному виду.
3) Обратный ход. Начиная с последней строки, вычисляются значения переменных.

Решение системы линейных уравнений методом Гаусса

Пример:

$$\begin{cases} 3x + 2y - 5z = -1 \\ 2x - y + 3z = 13 \\ x + 2y - z = 9 \end{cases}$$

Расширенная матрица:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -5 & -1 \\ 2 & -1 & 3 & 13 \\ 1 & 2 & -1 & 9 \end{array}\right)$$

Верхняя диагональная матрица:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right)$$

Решение системы линейных уравнений методом Гаусса

Правила приведения матрицы, имеющей n строк к верхнему диагональному виду:

1) столбец j=1 назначается ведущим;
2) для каждой строки i (j<i<=n) выполняются следующие действия:
- - строка i умножается на a_{jj};
- - формируется временная строка, равная строке j, умноженной на $-a_{ji}$;
- - временная строка прибавляется к строке i;

3) Действия пунктов 1, 2 повторяются для столбцов 2, 3, …, n.

- Если в процессе приведение матрицы к верхнему диагональному виду возникает строка, состоящая из нулей, она исключается из матрицы и n уменьшается на 1.
- Если в процессе приведения матрицы к верхнему диагональному виду возникают линейно зависимые строки, то одна из них исключается из матрицы и n уменьшается на 1.

Решение системы линейных уравнений методом Гаусса

Пример
решить систему линейных уравнений методом Гауса:

$$\begin{cases} 3x + 2y - 5z = -1 \\ 2x - 1y + 3z = 13 \\ x + 2y - z = 9 \end{cases}$$

Решение системы линейных уравнений методом Гаусса

Система линейных уравнений может:
- иметь единственное решение;
- иметь бесконечно много решений;
- не иметь решения (такая система линейных уравнений называется **несовместной**).

Решение системы линейных уравнений методом Гаусса

Признак несовместной системы линейных уравнений:
в ходе преобразования матрицы к верхнему диагональному виду появилась строка, коэффициенты в которой равны нулю, а свободный член отличен от нуля.

Совместная система линейных уравнений имеет **бесконечно много решений**, если в ней количество строк меньше количества неизвестных.

Решение системы линейных уравнений методом Гаусса

Пример 1

Определить, сколько решений имеет следующая система линейных уравнений. Найти общее решение и одно из частных.

$$\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + 1x_4 = 6 \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 4 \\ 9x_1 + 4x_2 + x_3 + 7x_4 = 2 \end{cases}$$

Решение системы линейных уравнений методом Гаусса

Пример 2
Определить, сколько решений имеет следующая система линейных уравнений.

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 4 \\ 4x_1 + 3x_2 + x_3 + 1x_4 = 5 \\ 5x_1 + 11x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 2 \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 - 7x_2 - x_3 + 2x_4 = 7 \end{cases}$$

Решение системы линейных уравнений методом Гаусса

Пример 2

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 4 \\ 4x_1 + 3x_2 + x_3 + 1x_4 = 5 \\ 5x_1 + 11x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 2 \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 - 7x_2 - x_3 + 2x_4 = 7 \end{cases}$$

2	3	1	2	4
4	3	1	1	5
10	22	6	4	4
2	5	1	1	1
-2	14	2	-4	-14
2	3	1	2	4
0	-3	-1	-3	12
0	7	1	-6	-16
0	2	0	-1	-3
0	17	3	-2	-10
2	3	1	2	4
0	-3	-1	-3	12
0	0	4	39	-36
0	0	2	9	-15
0	0	8	57	-174
2	3	1	2	4
0	-3	-1	-3	12
0	0	4	39	-36
0	0	0	21	-6
0	0	0	-21	-102

Решение системы линейных уравнений методом Гаусса - Жордана

Метод Жордана дополняет метод Гаусса.
После получения верхней диагональной матрицы преобразования продолжаются с целью получить единичную матрицу.

Метод Жордана используется, если система линейных уравнений имеет единственное решение.

Решение системы линейных уравнений методом Гаусса - Жордана

Пример

Продолжить преобразования матрицы:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Матричная алгебра

- Матрица – двумерная таблица, заполненная однотипными данными (элементами матрицы).
- Матрица, заполненная числами называется числовой матрицей.
- Расположение элемента в матрице задаётся двумя индексами.
- Первый индекс – номер строки.
- Второй индекс – номер столбца.
- Размер матрицы – количество
- строк и количество столбцов
- (mxn)

a11	a_{12}	a_{13}	…
a_{21}	a_{22}	a_{23}	…
a_{31}	a_{32}	a_{33}	…
…	…	…	….

Матричная алгебра

- Если в матрице один столбец, то её называют вектор-столбец.
- A=$\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 11 \end{pmatrix}$
- Если в матрице одна строка, то её называют вектор-строка.
- $B = (7 \quad 15 \quad 1)$

Матричная алгебра

- Единичная матрица:
- $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
- Нулевая матрица:
- N= $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Матричная алгебра
Умножение матрицы на число

- Чтобы умножить матрицу на число, нужно умножить на это число каждый элемент матрицы.
- $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 5 \\ 8 & 8 & 7 \end{pmatrix}$
- $B = 4A = 4\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 5 \\ 8 & 8 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 8 \\ 12 & 12 & 20 \\ 32 & 32 & 28 \end{pmatrix}$

Матричная алгебра Сложение матриц

- Для того, чтобы сложить две матрицы нужно сложить каждую пару элементов с одинаковыми индексами.
- Сложить можно только матрицы, имеющие одинаковый размер.
- A, B, C – матицы.
- Если A = B + C,
- то $\boldsymbol{a_{ij}} = \boldsymbol{b_{ij}} + \boldsymbol{c_{ij}}$
- Операция сложения матриц **коммутативна:** B + C = C + B

Матричная алгебра
Вычитание матриц

- Для того, чтобы вычесть из матрицы B матрицу C нужно, для каждой пары элементов с одинаковыми индексами выполнить вычитание.
- Вычесть можно только матрицы, имеющие одинаковый размер.
- A, B, C – матицы.
- Если A = B - C,
- то $\boldsymbol{a_{ij}} = \boldsymbol{b_{ij}} - \boldsymbol{c_{ij}}$

Матричная алгебра
Сложение и вычитание матриц

- **Пример**
- $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 5 \\ 8 & 8 & 7 \end{pmatrix}$; $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 7 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
- $C = A + B = \begin{pmatrix} 6 & 7 & 9 \\ 5 & 4 & 5 \\ 11 & 8 & 7 \end{pmatrix}$
- $D = A - B = \begin{pmatrix} -4 & -5 & -5 \\ 1 & 2 & 5 \\ 5 & 8 & 7 \end{pmatrix}$

Матричная алгебра Транспонирование матриц

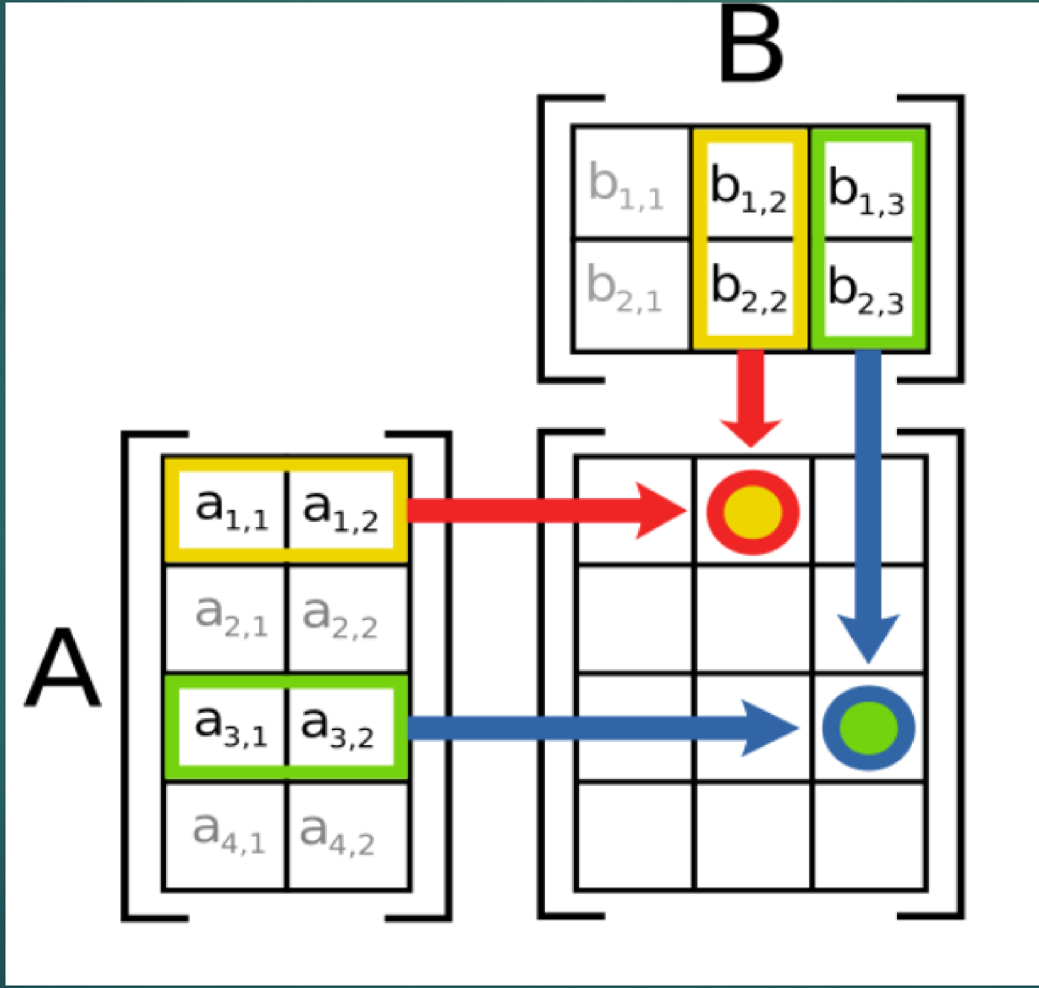
- Для того, чтобы транспонировать матрицу, нужно каждый столбец с номеромі заменить на строку с номером і.
- Операция транспонирования обозначается индексом Т.
- $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 5 \\ 8 & 8 & 7 \end{pmatrix}$
- $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 8 \\ 1 & 3 & 8 \\ 2 & 5 & 7 \end{pmatrix}$

Матричная алгебра
Умножение матриц

- Для того, чтобы матрицу A можно было умножить на матрицу B, необходимо, чтобы **число столбцов матрицы A было равно числу строк матрицы B**.

- **Произведение матриц** *AB* **состоит из всех возможных комбинаций** **скалярных произведений** **вектор-строк матрицы** *A* **и вектор-столбцов матрицы** *B*. Элемент матрицы *AB* с индексами *i, j* есть скалярное произведение *i*-ой вектор-строки матрицы *A* и *j*-го вектор-столбца матрицы *B*.

Матричная алгебра
Умножение матриц



Матричная алгебра Умножение матриц

Пример

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 5 \\ 8 & 8 & 7 \end{pmatrix}$; $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 7 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; C = AB

$c_{11} = (1,1,2) \cdot (5,2,3) = 1 \cdot 5 + 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 = 13$

$c_{12} = (1,1,2) \cdot (6,1,0) = 1 \cdot 6 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 = 9$

$c_{13} = (1,1,2) \cdot (7,0,0) = 1 \cdot 7 + 1 \cdot 0 + 2 \cdot 0 = 7$

$$C = \begin{pmatrix} 13 & 9 & 7 \\ 22 & 21 & 21 \\ 77 & 56 & 56 \end{pmatrix}$$

$c_{21} = (3,3,5) \cdot (5,2,3) = 3 \cdot 5 + 3 \cdot 2 + 5 \cdot 3 = 22$

$c_{22} = (3,3,5) \cdot (6,1,0) = 3 \cdot 6 + 3 \cdot 1 + 5 \cdot 0 = 21$

$c_{23} = (3,3,5) \cdot (7,0,0) = 3 \cdot 7 + 3 \cdot 0 + 5 \cdot 0 = 21$

$c_{31} = (8,8,7) \cdot (5,2,3) = 8 \cdot 5 + 8 \cdot 2 + 7 \cdot 3 = 77$

$c_{32} = (8,8,7) \cdot (6,1,0) = 8 \cdot 6 + 8 \cdot 1 + 7 \cdot 0 = 56$

$c_{33} = (8,8,7) \cdot (7,0,0) = 8 \cdot 7 + 8 \cdot 0 + 7 \cdot 0 = 56$

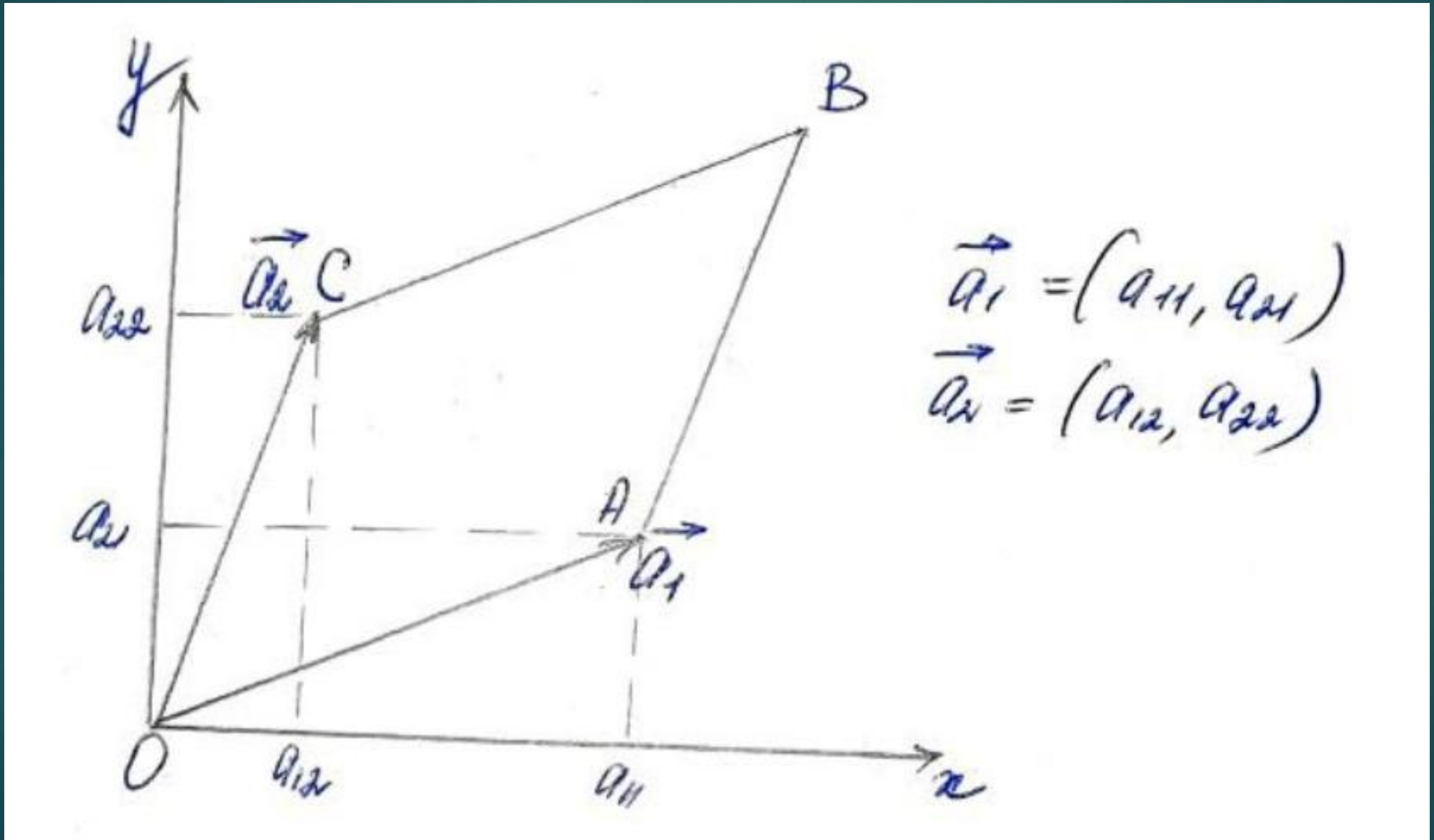
Матричная алгебра Умножение матриц

Умножение матриц **не коммутативно**.

$A \cdot B \neq B \cdot A$

Исключение для единичной матрицы E:
$A \cdot E = E \cdot A$

Матричная алгебра
Определитель матрицы



Матричная алгебра
Определитель матрицы

$$S_{OABC} = |\vec{OC}| \cdot |\vec{OA}| \cdot \sin \angle COA = |\vec{OC}| \cdot |\vec{OA}| \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{\vec{OC} \cdot \vec{OA}}{|\vec{OC}| \cdot |\vec{OA}|} \right)^2}$$

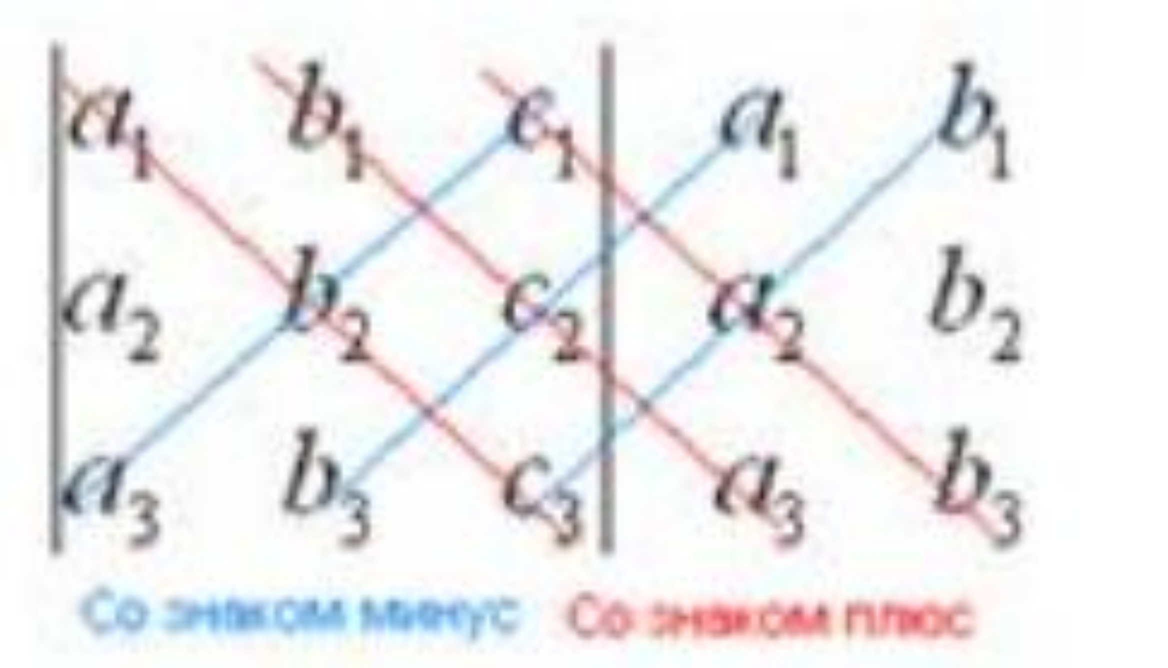
$$= |a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}| \Rightarrow \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \Delta$$

Определитель существует только для квадратной матрицы!

Определитель матрицы А обозначается: $\det A$; $|A|$

Матричная алгебра
Определитель третьего порядка

Способ Саррюса



Матричная алгебра
Минор матрицы

Минор i,j – определитель матрицы, которая получена из исходной путём вычёркивания i-й строки и j-го столбца.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 5 \\ 8 & 8 & 7 \end{pmatrix}$$

$$M_{12} = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 8 & 7 \end{vmatrix} = -19$$

Матричная алгебра Алгебраическое дополнение элемента матрицы

Алгебраическое дополнение i,j – минор I,j, умноженный на $(-1)^{i+j}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 5 \\ 8 & 8 & 7 \end{pmatrix}$$

$$A_{12} = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 8 & 7 \end{vmatrix} \cdot (-1)^{1+2} = -19 \cdot -1 = 19$$

Матричная алгебра Определитель матрицы

Определитель матрицы равен сумме произведений алгебраического дополнения i,j на величину элемента$_{i,j}$ для любой строки или столбца матрицы.

Пример

Вычислить определитель матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 5 \\ 8 & 8 & 7 \end{pmatrix}$$

Матричная алгебра
Свойства определителя

1) Определитель транспонированной матрицы равен определителю исходной матрицы: $|A^T| = |A|$
2) Умножение строки или столбца определителя на число равносильно умножению определителя на это число:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ k \cdot a_{21} & k \cdot a_{22} & k \cdot a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = k \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

3)Если в определителе переставить местами две строки или два столбца, то определитель поменяет знак на противоположный.
4) Если определитель содержит нулевую строку/столбец, то определитель равен нулю.
5) Если определитель содержит пропорциональные строки, то определитель равен нулю.
6) определитель верхней треугольной матрицы равен произведению элементов, стоящих на главной диагонали.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & k \cdot a_{22} & k \cdot a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33}$$

Матричная алгебра
Свойства определителя

7) Величина определителя не изменится, если к элементам одной строки прибавить элементы другой строки, умноженные на некоторое число.
8) Произведение определителей для матриц одного размера равно определителю произведения матриц.

Матричная алгебра Обратная матрица

Обратная матрица матрицы А обозначается A^{-1}

Матрица A^{-1} является обратной для матрицы А, если $A^{-1} \cdot A = E$, где Е – единичная матрица.

Если $A^{-1} \cdot A = E$, то верно: $A \cdot A^{-1} = E$

Обратная матрица существует ТОЛЬКО для квадратных матриц.

Матричная алгебра Обратная матрица

Правило нахождения обратной матрицы.

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{\mathbf{1}}{|\boldsymbol{A}|} \cdot \boldsymbol{A}_{*}^{T}$$

$\boldsymbol{A}_{*}^{T}$ – транспонированная матрица алгебраических дополнений.

Матричная алгебра Обратная матрица

Пример

Найти обратную матрицу для матрицы А

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 4 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Матричная алгебра
Обратная матрица

Нахождение обратной матрицы путём выполнения элементарных преобразований.

1) Добавить к исходной матрице, справа единичную матрицу.
2) Используя алгоритм Гаусса-Жордана, привести левую часть составной матрицы к единичной.

Правая часть составной матрицы будет представлять собой обратную матрицу по отношению к исходной.

Матричная алгебра Обратная матрица

Нахождение обратной матрицы путём выполнения элементарных преобразований.

Пример

Найти обратную матрицу для матрицы A путём выполнения элементарных операций.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

Матричная алгебра
Обратная матрица

Решение системы линейных уравнений через нахождение обратной матрицы.

$$\mathrm{A} \cdot \boldsymbol{X} = \boldsymbol{B}$$

А – матрица коэффициентов линейного уравнения;
Х – вектор-столбец неизвестных;
В – свободные члены.

$$A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B$$
$$E \cdot X = A^{-1} \cdot B$$

$A^{-1} \cdot B$ – вектор-столбец, содержащий решение.

Матричная алгебра
Обратная матрица

Решение системы линейных уравнений через нахождение обратной матрицы.

Пример
Решить систему линейных уравнений методом нахождения обратной матрицы

$$\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 1 \\ x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 3 \\ 3x_1 - x_2 + 5x_3 = 2 \end{cases}$$

Матричная алгебра Решение СЛАУ методом Крамера

$$A \cdot \boldsymbol{X} = \boldsymbol{B}$$

D – определитель матрицы A (главный определитель).
Если D=0, то система уравнений не имеет единственного решения и решение нужно искать методом Гаусса.

D_i - частный определитель. Вычисляется для матрицы A, в которой i-й столбец заменён на B.

$$x_i = \frac{D_i}{D}$$

Матричная алгебра Решение СЛАУ методом Крамера

Пример

Решить систему линейных уравнений методом Крамера.

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 21 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 9 \\ 2x_1 - x_2 - 1x_3 = 10 \end{cases}$$

Матричная алгебра
Ранг матрицы

Ранг матрицы - количество линейно независимых строк.
Обозначения: rank, rang, r, rg, Ранг.

Методы определения ранга: метод миноров, метод окаймляющих миноров, метод Гаусса.
Методы миноров, и окаймляющих миноров в настоящем курсе не рассматриваются.

После приведения матрицы к верхнему диагональному виду методом Гаусса, ранг равен количеству строк в получившейся матрице.

Однородные системы линейных уравнений

Система линейных уравнений называется однородной, если все свободные члены равны нулю.

$$
\begin{array}{lllll}
x_1a_{11} & +\,x_2a_{12} & +\,x_3a_{13} & \ldots & =0 \\
x_1a_{21} & +\,x_2a_{22} & +\,x_3a_{23} & \ldots & =0 \\
x_1a_{31} & +\,x_1a_{32} & +\,x_1a_{33} & \ldots & =0 \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots. & \ldots
\end{array}
$$

Однородные системы линейных уравнений

Однородная система линейных уравнений **ВСЕГДА** имеет решение, называемое тривиальным:

$$\boldsymbol{x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0}$$

Если ранг матрицы коэффициентов равен количеству переменных, то тривиальное решение **ЕДИНСТВЕННОЕ.**

Однородные системы линейных уравнений Фундаментальное решение

Фундаментальное решение однородной системы уравнений – совокупность линейно независимых решений $\overline{x_1}, \overline{x_2}, \overline{x_3} \dots \overline{x_m}$.

m – количество свободных переменных.

Решением является линейная комбинация:

$$c_1\overline{x_1} + c_2\overline{x_2} + c_3\overline{x_3} + \dots + c_m\overline{x_m}$$

c_i – произвольное действительное число.

Однородные системы линейных уравнений Фундаментальное решение

Пример

Найти общее и одно из частных решений однородной системы уравнений:

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ 5x_1 + 4x_2 - 6x_3 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 0 \end{cases}$$

Однородные системы линейных уравнений

Связь между решением однородной и неоднородной систем уравнений:

$$X_{\text{ОН}} = X_{\text{ОО}} + X_{\text{ЧН}}$$

ОН – общее решение неоднородной системы уравнений;
ОО – общее решение однородной системы уравнений;
ЧН – частное решение неоднородной системы уравнений.

$$X_{\text{ОО}} = X_{\text{ОН}} - X_{\text{ЧН}}$$