

## Задачи по теме «Интеграл»

### 1. Табличное интегрирование

1.1) Вычислить интеграл используя таблицу интегралов и свойства неопределённого интеграла:

1)  $\int \frac{1}{\sqrt{1-4x^2}} dx$   
3)  $\int \frac{(1-\sqrt[3]{x})^2}{x} dx$   
5)  $\int e^{x+5} dx$   
7)  $\int \frac{\sqrt{1-x^2}-\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1-x^4}} dx$   
9)  $\int ctg^2 x dx$

2)  $\int \frac{1}{\sqrt{3x^2-2}} dx$   
4)  $\int \frac{x^2}{4x^2+25} dx$   
6)  $\int 3^x e^x dx$   
8)  $\int \sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2} dx$

### 2. Интегрирование с использованием замены переменной

2.1) Используя метод замены переменной вычислить интегралы:

1)  $\int (4x+1)^7 dx$   
3)  $\int \frac{dx}{\sin 2x}$   
5)  $\int \frac{dx}{6x+5}$   
7)  $\int x \cdot 3^{x^2} dx$   
9)  $\int \sqrt{\frac{\arcsin x}{1-x^2}} dx$   
11)  $\int \frac{x+5}{x^2-9} dx$   
13)  $\int \frac{dx}{1+e^x}$

2)  $\int \cos 3x dx$   
4)  $\int (\sin x + \cos x)^2 dx$   
6)  $\int \frac{dx}{\sqrt{2x-3}}$   
8)  $\int \frac{arctg^2 x}{x^2+1} dx$   
10)  $\int \cos 3x \sin^2 3x dx$   
12)  $\int \frac{3-4x}{\sqrt{1-9x^2}} dx$   
14)  $\int \frac{x+arctg 4x}{1+16x^2} dx$

### 3. Метод интегрирования по частям

3.1 Вычислить интегралы используя метод интегрирования по частям:

1)  $\int arcctg x dx$   
3)  $\int \frac{\log_2 x}{x^2} dx$   
5)  $\int x \sin 2x dx$   
7)  $\int 2^x \sin x dx$   
9)  $\int \frac{x \cos x}{\sin^3 x} dx$

2)  $\int x^2 \ln x dx$   
4)  $\int x e^{3x} dx$   
6)  $\int x^2 \cos x dx$   
8)  $\int \cos \ln x dx$

## 4. Интегралы от тригонометрических функций

3.2 Вычислить интегралы:

$$1) \int \sin 2x \cdot \cos 7x \, dx$$

$$3) \int \sin 5x \cdot \sin 3x \, dx$$

$$5) \int \sin^2 x \cdot \cos^2 x \, dx$$

$$7) \int \cos^3 x \, dx$$

$$9) \int \sin^5 x \cos x \, dx$$

$$2) \int \cos 3x \cdot \cos 9x \, dx$$

$$4) \int \cos^4 x \, dx$$

$$6) \int \cos^2 x \, dx$$

$$8) \int \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x} \, dx$$

$$10) \int \frac{\sec^2 x}{1+\tan^2 x} \, dx$$

## 5. Несобственные интегралы

5.1 Вычислить или доказать расходимость интегралов:

$$1) \int_1^\infty \frac{\ln x}{x^2} \, dx$$

$$2) \int_0^5 \frac{5dx}{\sqrt{25-x^2}}$$

$$3) \int_1^5 \frac{dx}{x \ln x}$$

$$4) \int_0^2 \frac{dx}{(\sqrt[3]{x-1})^2}$$

$$5) y \int_0^1 \frac{x^4 dx}{\sqrt{1-x^5}}$$

$$6) \int_0^1 \ln x \, dx$$

$$7) \int_1^{+\infty} \frac{2+3 \cos x}{x^4} \, dx$$

$$8) \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{x \ln^2 x}$$

$$9) \int_1^\infty \frac{dx}{2+x+3x^5}$$

$$10) \int_1^\infty \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}$$

$$11) \int_{-\infty}^0 xe^{-x^2} \, dx$$

$$12) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$$

## 6. Площадь плоской фигуры

1) Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:

$$x \cdot y = 4; y = x; x = 4.$$

2) Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:

$$y = x^2 + 4x; y = x + 4.$$

3) Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:

$$y^2 = 2x - 1; y = x - 2.$$

4) Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:

$$y = 3x^2 + 1; y = 3x + 7.$$

5) Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:  
 $3y = x^2 - 6; y = x.$

## 7. Длина отрезка кривой

1) Найти длину дуги кривой:  $y = 1 - \ln \sin x; \frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$

2) Найти длину дуги кривой:

$$\begin{cases} x = 6(\cos t + ts \sin t) \\ y = 6(\sin t - t \cos t) \end{cases}; 0 \leq t \leq \pi$$

3) Найти длину дуги кривой:

$$\rho = 2\varphi; 0 \leq \varphi \leq \frac{3}{4}$$

## 8. Объём фигуры вращения

1) Фигура ограничена параболой  $y = x^2$  и прямой  $y=4$ . Найдите объём тела, образованного вращением этой фигуры вокруг оси ОY.

2) Найдите объём тела, полученного вращением вокруг оси ОX фигуры, ограниченной графиками  $y = \sin x$  и  $y=0$  на отрезке  $[0; \pi]$ .

3) Фигура ограничена окружностью  $x^2 + y^2 = 9$  (верхняя полуокружность) и осью ОХ. Найдите объём тела вращения вокруг оси ОХ.

4) Кривая задана параметрически:  $x = 2 \cos t; y = 2 \sin t; t \in [0; \frac{\pi}{2}]$   
Найдите объём тела, полученного вращением дуги вокруг оси ОХ.