

Задачи по теме «Интеграл»

1. Табличное интегрирование

1.1) Вычислить интеграл используя таблицу интегралов и свойства неопределённого интеграла:

$$1) \int \frac{1}{\sqrt{1-4x^2}} dx$$
$$3) \int \frac{(1-\sqrt[3]{x})^2}{x} dx$$
$$5) \int e^{x+5} dx$$
$$7) \int \frac{\sqrt{1-x^2}-\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1-x^4}} dx$$
$$9) \int ctg^2 x dx$$

$$2) \int \frac{1}{\sqrt{3x^2-2}} dx$$
$$4) \int \frac{x^2}{4x^2+25} dx$$
$$6) \int 3^x e^x dx$$
$$8) \int \sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2} dx$$

2. Интегрирование с использованием замены переменной

2.1) Используя метод замены переменной вычислить интегралы:

$$1) \int (4x+1)^7 dx$$
$$3) \int \frac{dx}{\sin 2x}$$
$$5) \int \frac{dx}{6x+5}$$
$$7) \int x \cdot 3^{x^2} dx$$
$$9) \int \sqrt{\frac{\arcsin x}{1-x^2}} dx$$
$$11) \int \frac{x+5}{x^2-9} dx$$
$$13) \int \frac{dx}{1+e^x}$$

$$2) \int \cos 3x dx$$
$$4) \int (\sin x + \cos x)^2 dx$$
$$6) \int \frac{dx}{\sqrt{2x-3}}$$
$$8) \int \frac{arctg^2 x}{x^2+1} dx$$
$$10) \int \cos 3x \sin^2 3x dx$$
$$12) \int \frac{3-4x}{\sqrt{1-9x^2}} dx$$
$$14) \int \frac{x+arctg 4x}{1+16x^2} dx$$

3. Метод интегрирования по частям

3.1 Вычислить интегралы используя метод интегрирования по частям:

$$1) \int arcctg x dx$$
$$3) \int \frac{\log_2 x}{x^2} dx$$
$$5) \int x \sin 2x dx$$
$$7) \int 2^x \sin x dx$$
$$9) \int \frac{x \cos x}{\sin^3 x} dx$$

$$2) \int x^2 \ln x dx$$
$$4) \int x e^{3x} dx$$
$$6) \int x^2 \cos x dx$$
$$8) \int \cos \ln x dx$$

4. Интегралы от тригонометрических функций

4.1 Вычислить интегралы:

$$1) \int \sin 2x \cdot \cos 7x \, dx$$

$$3) \int \sin 5x \cdot \sin 3x \, dx$$

$$5) \int \sin^2 x \cdot \cos^2 x \, dx$$

$$7) \int \cos^3 x \, dx$$

$$9) \int \sin^5 x \cos x \, dx$$

$$2) \int \cos 3x \cdot \cos 9x \, dx$$

$$4) \int \cos^4 x \, dx$$

$$6) \int \cos^2 x \, dx$$

$$8) \int \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x} \, dx$$

$$10) \int \frac{\sec^2 x}{1+\tan^2 x} \, dx$$

5. Несобственные интегралы

5.1 Вычислить или доказать расходимость интегралов:

$$1) \int_1^\infty \frac{\ln x}{x^2} \, dx$$

$$2) \int_0^5 \frac{5dx}{\sqrt{25-x^2}}$$

$$3) \int_1^5 \frac{dx}{x \ln x}$$

$$4) \int_0^2 \frac{dx}{(\sqrt[3]{x-1})^2}$$

$$5) y \int_0^1 \frac{x^4 dx}{\sqrt{1-x^5}}$$

$$6) \int_0^1 \ln x \, dx$$

$$7) \int_1^{+\infty} \frac{2+3 \cos x}{x^4} \, dx$$

$$8) \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{x \ln^2 x}$$

$$9) \int_1^\infty \frac{dx}{2+x+3x^5}$$

$$10) \int_1^\infty \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}$$

$$11) \int_{-\infty}^0 xe^{-x^2} \, dx$$

$$12) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$$

6. Площадь плоской фигуры

1) Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:

$$x \cdot y = 4; y = x; x = 4.$$

2) Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:

$$y = x^2 + 4x; y = x + 4.$$

3) Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:

$$y^2 = 2x - 1; y = x - 2.$$

4) Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:

$$y = 3x^2 + 1; y = 3x + 7.$$

5) Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:
 $3y = x^2 - 6; y = x.$

7. Длина отрезка кривой

1) Найти длину дуги кривой: $y = 1 - \ln \sin x; \frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$

2) Найти длину дуги кривой:

$$\begin{cases} x = 6(\cos t + ts \sin t) \\ y = 6(\sin t - t \cos t) \end{cases}; 0 \leq t \leq \pi$$

3) Найти длину дуги кривой:

$$\rho = 2\varphi; 0 \leq \varphi \leq \frac{3}{4}$$

8. Объём фигуры вращения

1) Фигура ограничена параболой $y = x^2$ и прямой $y=4$. Найдите объём тела, образованного вращением этой фигуры вокруг оси ОY.

2) Найдите объём тела, полученного вращением вокруг оси ОX фигуры, ограниченной графиками $y = \sin x$ и $y=0$ на отрезке $[0; \pi]$.

3) Фигура ограничена окружностью $x^2 + y^2 = 9$ (верхняя полуокружность) и осью ОХ. Найдите объём тела вращения вокруг оси ОХ.

4) Кривая задана параметрически: $x = 2 \cos t; y = 2 \sin t; t \in [0; \frac{\pi}{2}]$
Найдите объём тела, полученного вращением дуги вокруг оси ОХ.