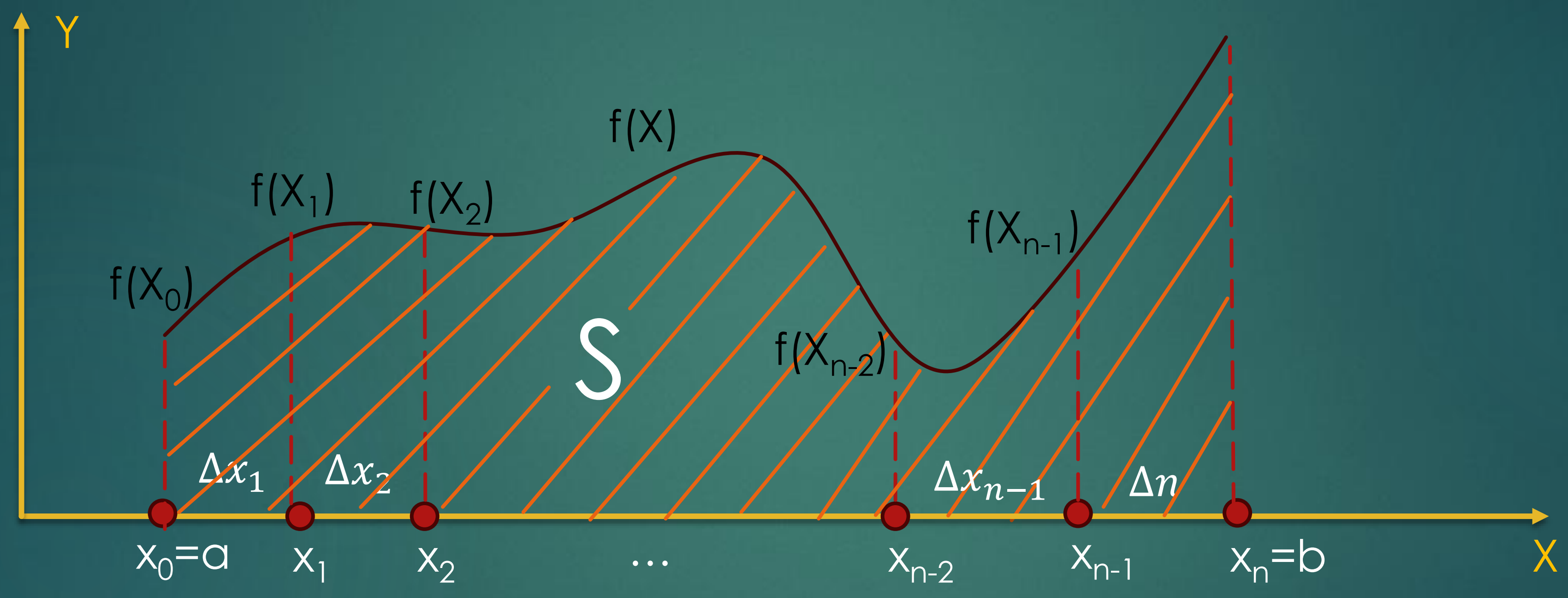
Интеграл

Геометрический смысл интеграла (интегральная сумма)



Криволинейная трапеция ограничена вертикальными прямыми $f(x) = x_0$, $f(x) = x_т$, отрезком x_0, x_n оси x и функцией f(x)

S – площадь криволинейной трапеции.

Геометрический смысл интеграла (интегральная сумма)

Площадь криволинейной трапеции (**n-я Интегральная сумма)**

$$S \sim \sum_{i=0}^{n} f(p_i) \cdot \Delta x_i$$

$$\Delta x_{i-1} \leq p_i \leq \Delta x_i$$

Интеграл

$$S = \lim_{\Delta x_i \to 0} \sum_{i=0}^{n} f(p_i) \cdot \Delta x_i = \int_a^b f(x)dx$$

Первообразная

Формула Ньютона-Лейбница

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

F(x) – первообразная.

F(x) является первообразной функции f(x) если выполняется равенство F'(x)=f(x)

Неопределённый интеграл

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

F(x) – первообразная;
С-константа.

Интегрирование – нахождение первообразной.

Таблица неопределённых интегралов

1. $\int 0 \cdot dx = C$
2. $\int 1 \cdot dx = x + C$
3. $\int x^{\alpha} dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad \alpha \neq -1$
4. $\int \dfrac{1}{x} dx = \int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C$
5. $\int a^{x} dx = \dfrac{a^{x}}{\ln a} + C$
6. $\int e^{x} dx = e^{x} + C$
7. $\int \sin x dx = -\cos x + C$
8. $\int \cos x dx = \sin x + C$
9. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$
10. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$
11. $\int \dfrac{dx}{\sin x} = \ln\left|\operatorname{tg} \dfrac{x}{2}\right| + C$
12. $\int \dfrac{dx}{\cos x} = \ln\left|\operatorname{tg} \dfrac{x + \pi/2}{2}\right| + C$
13. $\int \dfrac{1}{x^2 + a^2} dx = \int \dfrac{dx}{x^2 + a^2} = \dfrac{1}{a} \operatorname{arctg} \dfrac{x}{a} + C$
14. $\int \dfrac{dx}{x^2 - a^2} = \dfrac{1}{2a} \ln\left|\dfrac{x-a}{x+a}\right| + C$
15. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \dfrac{x}{a} + C = -\arccos \dfrac{x}{a} + C$
16. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2 + \alpha}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 + \alpha}\right| + C$
17. $\int \sqrt{x^2 + \alpha} dx = \dfrac{x}{2} \sqrt{x^2 + \alpha} + \dfrac{\alpha}{2} \ln\left|x + \sqrt{x^2 + \alpha}\right| + C$
18. $\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \dfrac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + \dfrac{a^2}{2} \arcsin \dfrac{x}{a} + C$

Свойства неопределённого интеграла

1) Интеграл от дифференциала функции равен этой функции:

$$\int du = u + C$$

2) Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла:

$$\int kf(u)du = k\int f(u)du$$

Свойства неопределённого интеграла

3) Интеграл от суммы равен сумме интегралов:

$$\int (f(u) + g(u))du = \int f(u)du + \int g(u)du$$

Методы нахождения первообразной

Табличное интегрирование

Пример 1.1

Вычислить: $\int x^5 dx$

Пример 1.2

Вычислить: $\int \frac{dx}{3-x^2}$

Пример 1.3

Вычислить: $\int (\frac{5}{\sqrt{3-x^2}} - \sqrt[3]{x^7})dx$

Пример 1.4

Вычислить: $\int \operatorname{tg}^2 x\, dx$

Пример 1.5

Вычислить: $\int \sin^2 \frac{X}{2} dx$

Методы нахождения первообразной
Метод замены переменной

Если подынтегральную функцию f(x) возможно представить в виде $f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$, то выполняется замена переменно $x = \varphi(t)$, находится первообразная F(t) и производится обратная замена переменной.

Пример 2.1

Вычислить: $\int \cos\frac{x}{2} \cdot \frac{1}{x^2} dx$

$$\int \cos\frac{2}{x} \cdot \frac{1}{x^2} dx = \left| \begin{matrix} t = \frac{2}{x}; dt = -\frac{2}{x^2} dx \\ \frac{dx}{x^2} = -\frac{dt}{2} \end{matrix} \right| = \int \cos t \cdot -\frac{dt}{2} = -\frac{1}{2}\sin t + C = -\frac{1}{2}\sin\frac{2}{x} + C$$

Методы нахождения первообразной
Метод замены переменной

Пример 2.2

Вычислить: $\int \frac{e^{3x}dx}{1+e^{6x}}$

$$\int \frac{e^{3x}dx}{1+e^{6x}} = \left| \begin{array}{c} t = e^{3x}; dt = 3e^{3x}dx \\ dx \cdot e^{3x} = \frac{dt}{3} \end{array} \right| = \int \frac{1}{3} \cdot \frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{3}\arctan t + C = \frac{1}{3}\arctan e^{3x} + C$$

Пример 2.3

Вычислить: $\int \frac{x^2dx}{\cos^2 x^3}$

$$\int \frac{x^2dx}{\cos^2 x^3} = \left| \begin{array}{c} t = x^3; dt = 3x^2dx \\ x^2dx = \frac{dt}{3} \end{array} \right| = \int \frac{1}{3} \cdot \frac{dt}{\cos^2 t} = \frac{1}{3}\tan t + C = \frac{1}{3}\tan x^3 + C$$

Методы нахождения первообразной
Метод замены переменной

Пример 2.4

Вычислить: $\int \frac{e^{\arctan x} dx}{1+x^2}$

$$\int \frac{e^{\arctan x} dx}{1+x^2} = \left| t = \arctan x\,;\, dt = \frac{1}{1+x^2} dx \right| = \int e^t dt = e^t + C = e^{\arctan x} + C$$

Пример 2.5

Вычислить: $\int \frac{\ln x dx}{x}$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x\,(1+3\tan x)} = \left| t = 1 + 3\tan x\,;\; dt = \frac{3}{\cos^2 x} dx \right| = \int \frac{dt}{3t} = \frac{1}{3}\ln|t| + C$$

$$= \frac{1}{3}\ln|(1+3\tan x)| + C$$

Методы нахождения первообразной
Метод замены переменной

Пример 2.6

Вычислить: $\int x \cdot 8^{2-3x^2}\, dx$

$$\int x \cdot 8^{2-3x^2} = \left| t = 2 - 3x^2; dt = -6xdx \right| = \int -\frac{1}{6} 8^t dt = -\frac{1}{6} \cdot \frac{8^t}{\ln 8} + C = -\frac{8^{2-3x^2}}{6 \ln 8} + C$$

Пример 2.7

Вычислить: $\int \frac{e^x dx}{e^x + 2}$

$$\int \frac{e^x dx}{e^x + 2} = \left| t = e^x + 2\ dt = e^x dx \right| = \int \frac{dt}{t} = \ln t + C = \ln(e^x + 2) + C$$

Методы нахождения первообразной
Метод замены переменной

Пример 2.8

Вычислить: $\int x \cdot 8^{2-3x^2}\,dx$

$$\int x \cdot 8^{2-3x^2} dx = \left| t = 2 - 3x^2; dt = -6xdx \right| = \int -\frac{1}{6} 8^t dt = -\frac{1}{6} \cdot \frac{8^t}{\ln 8} + C = -\frac{8^{2-3x^2}}{6\ln 8} + C$$

Пример 2.9

Вычислить: $\int \frac{(x-1)dx}{\sqrt{7-9x^2}}$

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{7-9x^2}} = \left| t = 7 - 9x^2\,; dt = -18xdx \right| = \int -\frac{1}{18} \frac{dt}{\sqrt{t}} = -\frac{\sqrt{t}}{9} + C = -\frac{\sqrt{7-9x^2}}{9} + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{7-9x^2}} = \left| t = 3x;\ dt = 3dx \right| = \int \frac{1}{3} \frac{dt}{\sqrt{\left(\sqrt{7}\right)^2 - t^2}} = \frac{1}{3} \arcsin\frac{t}{\sqrt{7}} + C = \frac{1}{3} \arcsin\frac{3x}{\sqrt{7}} + C$$

Методы нахождения первообразной
Метод замены переменной

$$\int \frac{(x-1)dx}{\sqrt{7-9x^2}} = -\frac{\sqrt{7-9x^2}}{9} - \frac{1}{3}\arcsin\frac{3x}{\sqrt{7}} + C$$

Пример 2.10

Вычислить: $\int \frac{dx}{x(1+\ln^2 x)}$

$$\int \frac{dx}{x(1+\ln^2 x)} = \left| t = \ln x \;; dt = \frac{1}{x}dx \right| = \int \frac{dt}{1+t^2} = \arctan t + C = \arctan(\ln x) + C$$

Методы нахождения первообразной
Метод замены переменной

Пример 2.11

Вычислить: $\int \frac{xdx}{x^2-1}$

$$\int \frac{xdx}{x^2-1} = \left| t = x^2 - 1; dt = 2xdx \right| = \int \frac{dt}{2t} = \frac{1}{2} \cdot \ln|t| + C = \frac{1}{2} \cdot \ln|x^2 - 1| + C$$

Пример 2.12

Вычислить: $\int e^{\cos x} sin\ x\ dx$

$$\int e^{\cos x} sinxdx = \left| t = \cos x\,;\ dt = -\sin x\, dx \right| = \int -e^t dt = -e^t + C = -e^{\cos x} + C$$

Методы нахождения первообразной
Метод Интегрирования по частям

Если интеграл $\int f(x)dx$ можно преобразовать к виду $\int u(x)dv(x)$, то верна формула: $\int u(x)dv(x) = u(x)\cdot v(x) - \int v(x)du(x)$.
Чтобы получить du(x) нужно продифференцировать u(x);
Чтобы получить v(x) нужно проинтегрировать dv(x).

Пример 3.1
Вычислить: $\int xe^{5x}dx$

$$\int xe^{5x}dx = \left| \begin{array}{c} u = x; du = dx \\ dv = e^{5x}dx \\ v = \int e^{5x}dx = \dfrac{e^{5x}}{5} \end{array} \right| = x\cdot\frac{e^{5x}}{5} - \int \frac{e^{5x}}{5}dx = \frac{xe^{5x}}{5} - \frac{e^{5x}}{25} + C$$

Методы нахождения первообразной
Метод Интегрирования по частям

Пример 3.2

Вычислить: $\int x \cdot \cos 2x \, dx$

$$\int x \cdot \cos 2x \, dx = \left| \begin{array}{c} u = x; du = dx \\ dv = \cos 2x \, dx \\ v = \int \cos 2x \, dx = \frac{1}{2}\sin 2x \end{array} \right| = x \cdot \frac{1}{2}\sin 2x \cdot$$

$$- \int \frac{1}{2}\sin 2x \, dx = x \cdot \frac{1}{2}\sin 2x - (-\frac{1}{4}\cos 2x) + C = \frac{x\sin 2x}{2} + \frac{\cos 2x}{4} + C$$

Пример 3.3

Вычислить: $\int e^{\sqrt{x}} dx$

$$\int e^{\sqrt{x}} dx = \left| x = t^2; dx = 2tdt \right| = \int e^t 2tdt = \left| \begin{array}{c} u = t; du = dt \\ dv = e^t dt \\ v = \int e^t dx = e^t \end{array} \right| = 2te^t - 2\int e^t dt$$

$$= 2(te^t - e^t) + C = 2e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x} - 1) + C$$

Методы нахождения первообразной
Метод Интегрирования по частям

Пример 3.4

Вычислить: $\int x^3 \cdot \sin x^2 \, dx$

$$\int x^3 \cdot \sin x^2 \, dx = \left| \begin{matrix} x^2 = t; dt = 2xdx \\ xdx = \dfrac{dt}{2} \end{matrix} \right| = \int t\sin t \frac{dt}{2} \left| \begin{matrix} u = t; du = dt \\ dv = \sin t \dfrac{dt}{2} \\ v = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int \sin t \, dt = -\dfrac{1}{2}\cos t \end{matrix} \right| = t$$

$$\cdot -\frac{1}{2}\cos t \cdot - \int -\frac{1}{2}\cos t \, dt = -\frac{t\cos t}{2} + \frac{\sin t}{2} + C = \frac{1}{2}(-x^2 \cos x^2 + \sin x^2) + C$$

Методы нахождения первообразной
Метод Интегрирования по частям

Пример 3.5

Вычислить: $\int \arccos 2x \, dx$

$$\int \arccos 2x \, dx = \left| \begin{array}{c} u = \arccos 2x \, ; du = -\dfrac{2dx}{\sqrt{1-4x^2}} \\ dv = dx; v = x \end{array} \right| = \arccos 2x \cdot x$$

$$-\int \frac{-x2dx}{\sqrt{1-4x^2}} = \arccos 2x - \frac{2}{8}\int \frac{d(1-4x^2)}{\sqrt{1-4x^2}} = \arccos 2x - \frac{1}{2}\sqrt{1-4x^2}$$

Методы нахождения первообразной
Метод Интегрирования по частям

Пример 3.6

Вычислить: $\int \frac{\ln x}{x^2} dx$

$$\int \frac{\ln x}{x^2} dx = \left| \begin{array}{c} u = \ln x\,; du = \frac{1}{x} dx \\ dv = \frac{dx}{x^2} \\ v = \int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} \end{array} \right| = -\frac{\ln x}{x} + \int \frac{1}{X^2} dx = -\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} + C$$

Методы нахождения первообразной

Метод Интегрирования по частям

Пример 3.7

Вычислить: $\int e^x \sin 3x \, dx$

$$\int e^x \sin 3x \, dx = \left| \begin{matrix} u = e^x; du = e^x dx \\ dv = \sin 3x \, dx \\ v = \int \sin 3x \, dx = -\frac{1}{3}\cos 3x \end{matrix} \right| = -\frac{1}{3} e^x \cos 3x +$$

$$\frac{1}{3}\int \cos 3x \, e^x \, dx = \left| \begin{matrix} u = e^x; du = e^x dx \\ dv = \cos 3x \, dx \\ v = \int \cos 3x \, dx = \frac{1}{3}\sin 3x \end{matrix} \right| = -\frac{1}{3} e^x \cos 3x +$$

$$\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3} e^x \sin 3x - \frac{1}{3}\int \sin 3x \, e^x \, dx\right)$$

$$\int e^x \sin 3x \, dx = -\frac{1}{3} e^x \cos 3x + \frac{1}{9}\left(e^x \sin 3x - \int e^x \sin 3x \, dx\right)$$

$$\frac{10}{9}\int e^x \sin 3x \, dx = \frac{e^x}{9}(\sin 3x \ - 3\cos 3x)\,; \int e^x \sin 3x \, dx = \frac{e^x}{10}(\sin 3x \ - 3\cos 3x) + C$$

Методы нахождения первообразной
Интегрирование тригонометрических функций

1) Использование тригонометрических формул:

$$\sin mx \cdot \cos nx = \frac{1}{2}(\sin(m+n) + \sin(m-n))$$

$$\sin mx \cdot \sin nx = \frac{1}{2}(\cos(m-n) - \cos(m+n))$$

$$\cos mx \cdot \cos nx = \frac{1}{2}(\cos(m-n) + \cos(n+m))$$

Пример 3.8

Вычислить: $\int \sin 3x \cos 5x \, dx$

$$\int \sin 3x \cos 5x \, dx = \frac{1}{2}\int (\sin(3x$$

$$+ 5x) + \sin(3x - 5x))dx = \frac{1}{2}\int sin8xdx - \frac{1}{2}\int sin2x\, dx = \frac{1}{16}\int \sin 8xd8x - \frac{1}{4}\int \sin 2xd2x =$$

$$-\frac{1}{16}\cos 8x + \frac{1}{4} cos\ 2x + C$$

Методы нахождения первообразной

Интегрирование тригонометрических функций

1) Использование тригонометрических формул:

$$\sin mx \cdot \cos nx = \frac{1}{2}(\sin(m+n) + \sin(m-n)$$

$$\sin mx \cdot \sin nx = \frac{1}{2}(\cos(m-n) - \cos(m+n)$$

$$\cos mx \cdot \cos nx = \frac{1}{2}(\cos(m-n) + \cos(n+m)$$

Пример 3.9

Вычислить: $\int \cos 4x \cos 6x \, dx$

$$\int \cos 4x \cos 6x \, dx = \frac{1}{2}\int (\cos(4x$$

$$-6x) + \cos(4x+6x))dx = \frac{1}{2}\int cos2xdx + \frac{1}{2}\int cos10x \, dx = \frac{1}{4}\int \cos 2xd2x + \frac{1}{20}\int \cos 10xd10x =$$

$$\frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{20} sin \, 10x + C$$

Методы нахождения первообразной
Интегрирование тригонометрических функций

2) Понижение степени подынтегральной функции:

$$\sin^2\alpha = \frac{1}{2}(1-\cos(2\alpha))$$

$$\cos^2\alpha \cdot = \frac{1}{2}(1+\cos(2\alpha))$$

$$\sin\alpha\cdot\cos\alpha = \frac{1}{2}\sin 2\alpha$$

Пример 3.10

Вычислить: $\int \sin^2 x\,dx$

$$\int \sin^2 x\,dx = \frac{1}{2}\int(1-cos\ 2x)dx = \frac{1}{2}\int dx - \frac{1}{2}\int cos2x\ dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{4}\int \cos 2x\ d2x = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} + C$$

Методы нахождения первообразной
Интегрирование тригонометрических функций

2) Понижение степени подынтегральной функции:

$$\sin^2\alpha = \frac{1}{2}(1-\cos(2\alpha))$$

$$\cos^2\alpha \cdot= \frac{1}{2}(1+\cos(2\alpha))$$

$$\sin\alpha\cdot\cos\alpha = \frac{1}{2}\sin 2\alpha$$

Пример 3.11

Вычислить: $\int \sin^4 x\,dx$

$$\int (\sin^2 x)^2 dx = \frac{1}{4}\int (1$$

$$-\cos 2x)^2 dx = \frac{1}{4}\int (1-2\cos 2x+\cos^2 2x)dx = \frac{1}{4}\int\, dx - \frac{1}{2}\int \cos 2x\,dx + \frac{1}{4}\int \cos^2 2x\,dx =$$

$$= \frac{1}{4}\int dx - \frac{1}{4}\int \cos 2x\,d2x + \frac{1}{8}\int (1+\cos 4x)dx = \frac{3x}{8} - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x + C$$

Методы нахождения первообразной
Интегрирование тригонометрических функций

3) Замена переменной:

Пример 3.12
Вычислить: $\int \sin^3 x \cos x\, dx$

$$\int \sin^3 x \cos x\, dx = \begin{vmatrix} t = \sin x\,; \\ dt = \cos dx \end{vmatrix} = \int t^3 dt = \frac{t^4}{4} + C = \frac{\sin^4 x}{4} + C$$

Пример 3.13
Вычислить: $\int \frac{\sin x}{\cos^3 x} dx$

$$\int \frac{\sin x}{\cos^3 x} dx = \begin{vmatrix} t = \tan x\,; \\ dt = \dfrac{1}{\cos^2 x} dx \end{vmatrix} = \int t dt = \frac{t^2}{2} + C = \frac{\tan^2 x}{2} + C$$

Методы нахождения первообразной
Интегрирование тригонометрических функций

3) Замена переменной:

Пример 3.14

Вычислить: $\int \cos(2x+\frac{\pi}{4})\,dx$

$$\int \cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)dx = \left|\begin{matrix} t = 2x+\frac{\pi}{4}; \\ dt = 2dx \end{matrix}\right| = \frac{1}{2}\int \cos t\,dt = \frac{1}{2}\sin t + C = \frac{\sin(2x+\frac{\pi}{4})}{2} + C$$

Методы нахождения первообразной
Интегрирование элементарных дробей

Элементарные дроби **первого** типа

$$\frac{1}{ax+b}$$

$$\int \frac{dx}{ax+b} = \left| \begin{matrix} t = ax+b \\ dt = adx \end{matrix} \right| = \frac{1}{a}\int \frac{dt}{t} = \frac{1}{a}\ln|t| + C = \frac{1}{a}\ln|ax+b| + C$$

Элементарные дроби **второго** типа

$$\frac{1}{(ax+b)^m};\, m \geq 2$$

$$\int \frac{dx}{(ax+b)^m} = \left| \begin{matrix} t = ax+b \\ dt = adx \end{matrix} \right| = \frac{1}{a}\int \frac{dt}{t^m} = \frac{t^{-m+1}}{a(-m+1)} + C = -\frac{1}{a(m-1)t^{m-1}} + \mathrm{C}$$

$$= -\frac{1}{a(m-1)(ax+b)^{m-1}} + C$$

Методы нахождения первообразной
Интегрирование элементарных дробей

Элементарные дроби **третьего** типа

$$\frac{Mx+N}{ax^2+bx+c}$$

$$\int \frac{(Mx+N)dx}{ax^2+bx+c} = \int \frac{\frac{M}{2}(2x+b)+(N-\frac{Mb}{2})}{ax^2+bx+c}$$

$$= \frac{M}{2}\int \frac{2x+b}{ax^2+bx+c} + \left(N-\frac{Mb}{2}\right)\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}$$

$$= \frac{M}{2}\ln|ax^2+bx+c| + \left(N-\frac{Mb}{2}\right)\int \frac{dx}{\left(x+\frac{b}{2}\right)^2+\left(c-\frac{b^2}{4}\right)}$$

$$= \frac{M}{2}\ln|ax^2+bx+c| + \frac{2N-Mb}{\sqrt{4c-b^2}}\cdot \arctan\frac{2x+b}{\sqrt{4c-b^2}} + C$$

Методы нахождения первообразной
Интегрирование элементарных дробей

Элементарные дроби **четвёртого** типа

$$\frac{Mx+N}{(ax^2+bx+c)^n};n\geq 2;b^2-4ac<0$$

Определённый интеграл

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(A)$$

Свойства определённого интеграла:

1. Если пределы интегрирования совпадают, то значение интеграла равно нулю:

$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

2. Изменение направления интегрирования меняет знак интеграла

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

3. Линейность

$$\int_a^b (f(x) + g(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

Определённый интеграл

4. Постоянный коэффициент можно выносить из-под знака интеграла:

$$\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$$

5. Аддитивность по отношению к отрезку интегрирования:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx\,; c \in [a;b]$$

6. Неотрицательность интеграла от неотрицательной функции:
если $f(x) \geq 0$ на отрезке [a;b], то

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0$$

7. Если $f(x) \geq g(x)$ для всех $x \in [a;b]$, то

$$\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$$

Несобственный интеграл

Несобственным интегралом первого рода от непрерывной функции f(x) на интервале $[a; +\infty)$ называется конечный предел (если он существует):

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty} \int_a^b f(x)dx = \lim_{b\to+\infty} (F(b) - F(a))$$

Несобственным интегралом первого рода от непрерывной функции f(x) на интервале $(-\infty; b]$ называется конечный предел (если он существует):

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty} \int_a^b f(x)dx = \lim_{a\to-\infty} (F(b) - F(a))$$

Несобственным интегралом первого рода от непрерывной функции f(x) на интервале$(-\infty; +\infty)$ называется конечный предел (если он существует):

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty} \int_a^c f(x)dx + \lim_{b\to+\infty} \int_c^b f(x)dx$$

Несобственный интеграл

Несобственным интегралом второго рода от функции f(x), непрерывной на интервале $[a;b)$ и неограниченной при $x \to b$ называется конечный предел (если он существует):

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0}(F(b-\varepsilon) - F(a))$$

Несобственным интегралом второго рода от функции f(x), непрерывной на интервале $(a;b]$ и неограниченной при $x \to b$ называется конечный предел (если он существует):

$$\int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{a+\epsilon}^{b} f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\big(F(b) - F(a+\epsilon)\big)$$

Несобственным интегралом второго рода от функции f(x), непрерывной на интервале$[a;b]$, за исключением точки с $(a < c < b)$ называется конечный предел (если он существует):

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx + \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{c+\varepsilon}^{b} f(x)dx$$

Несобственный интеграл

Пример 3.15

Вычислить: $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{xln^2x}$

$$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{xln^2x} = \left| \begin{array}{c} t = \ln x\,; \\ dt = \frac{1}{x} dx; \\ x \to +\infty, t \to +\infty \end{array} \right| = \int_2^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt = \lim_{b \to +\infty} -\frac{1}{t}\Bigg|_2^b = \lim_{b \to +\infty} -\frac{1}{\ln x}\Bigg|_2^b$$

$$= \lim_{b \to +\infty} \left(-\frac{1}{\ln b} + \frac{1}{\ln 2} \right) = \frac{1}{\ln 2}$$

Несобственный интеграл

Пример 3.16

Вычислить: $\int_0^1 \frac{dx}{x^2-4x+3}$

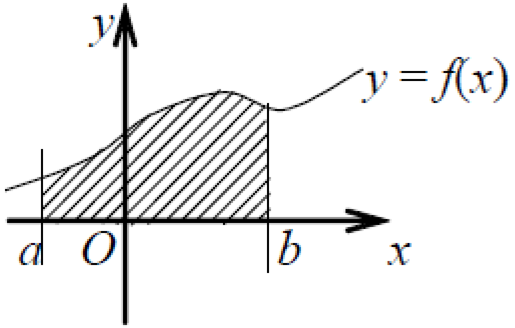
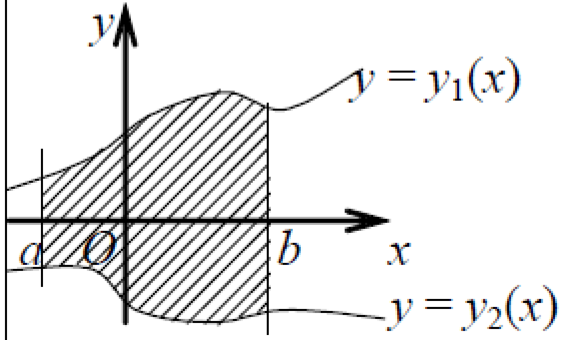
$$\int_0^1 \frac{dx}{x^2-4x+3} = \int_0^1 \frac{dx}{(x-2)^2-1} = \int_0^1 \frac{d(x-2)}{(x-2)^2-1^2}$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-2-1}{x-2+1}\right|\Bigg|_0^{1-\varepsilon} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{2}\left(\ln\left|\frac{1-\varepsilon-3}{1-\varepsilon-1}\right| - \ln\left|\frac{-3}{-1}\right|\right)$$

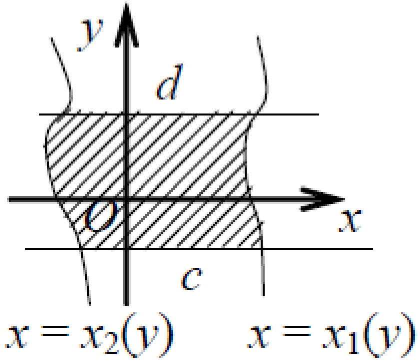
$$= \frac{1}{2}(\infty - \ln 3) = \infty$$

Интеграл расходится.

Вычисление площади плоской фигуры

1		$S = \int\limits_a^b f(x)dx, \; a < b$
2		$S = \int\limits_a^b \left(y_1(x)dx - y_2(x)\right)dx, \; a < b$

Вычисление площади плоской фигуры

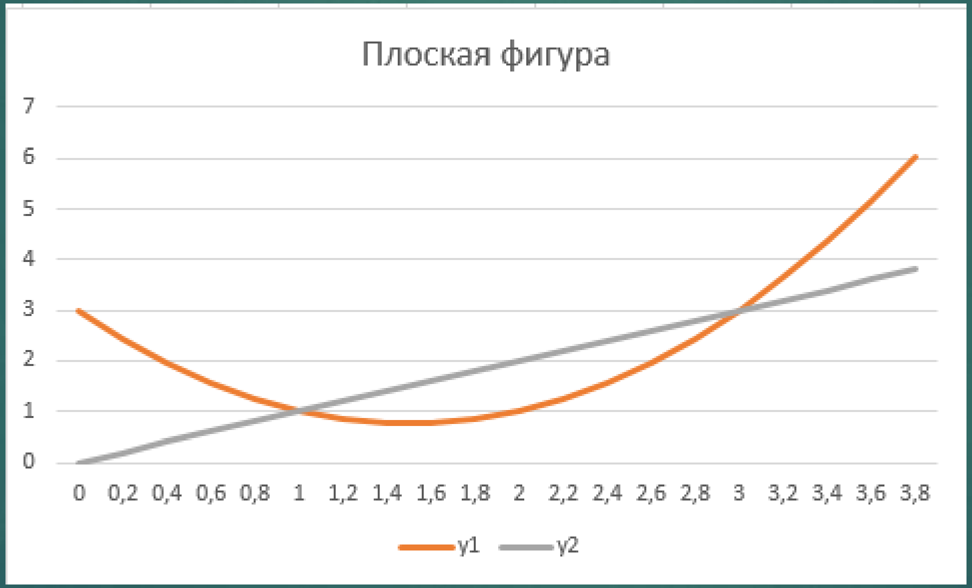
3		$S = \int_c^d \left(x_1(y) - x_2(y)\right) dy,\ c < d$

Вычисление площади плоской фигуры

Пример 4.1

Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:

$$y = x^2 - 3x + 3; y = x$$



Точки пересечения:
x1=1; y1=1
x1=3; x2=3

Вычисление площади плоской фигуры

Пример 4.1

$$S = \int_1^3 (x - (x^2 - 3x + 3)dx = \int_1^3 (x^2 - 4x + 3)dx = \left(\frac{x^3}{3} - 2 \cdot x^2 + 3x\right)\Bigg|_1^3 = 0 + \frac{4}{3} = \frac{4}{3}$$

Вычисление длины отрезка кривой

	Способ задания кривой	Формула для вычисления длины дуги кривой
1	Кривая задана уравнением $y = y(x)$, $a \le x \le b$	$l = \int_a^b \sqrt{1 + (y'_x)^2}\, dx$
2	Кривая задана параметрическими уравнениями $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases}$ $t_1 \le t \le t_2$	$l = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2}\, dt$
3	Кривая задана в полярной системе координат уравнением $\rho = \rho(\varphi)$, $\alpha \le \varphi \le \beta$	$l = \int_\alpha^\beta \sqrt{\rho^2(\varphi) + (\rho'(\varphi))^2}\, d\varphi$

Вычисление длины отрезка кривой

Пример 5.1

Найти длину отрезка кривой:

$$y = \arcsin x - \sqrt{1 - x^2}\,; 0 \leq x \leq \frac{15}{16}$$

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} + \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} = \frac{1 + x}{\sqrt{(1 - x)(1 + x)}} = \sqrt{\frac{1 + x}{1 - x}}$$

$$l = \int_0^{\frac{15}{16}} \sqrt{1 + \left(\sqrt{\frac{1 + x}{1 - x}}\right)^2}\, dx = \int_0^{\frac{15}{16}} \sqrt{\frac{2}{1 - x}}\, dx = -2\sqrt{2}\sqrt{1 - x}\,\Bigg|_0^{\frac{15}{16}}$$

$$= -\sqrt{8(1 - x)}\,\Bigg|_0^{\frac{15}{16}} = -\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \sqrt{8}\right) = \frac{3}{\sqrt{2}}$$

Вычисление длины отрезка кривой

Пример 5.2

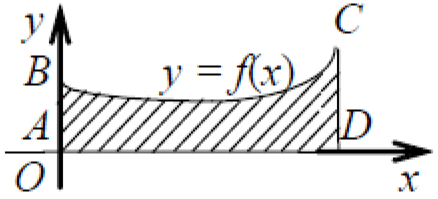
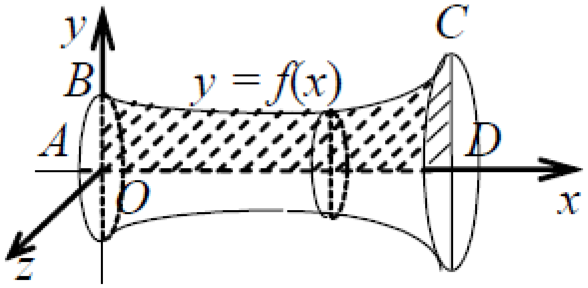
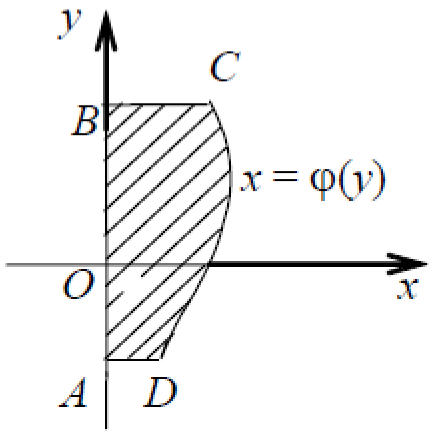
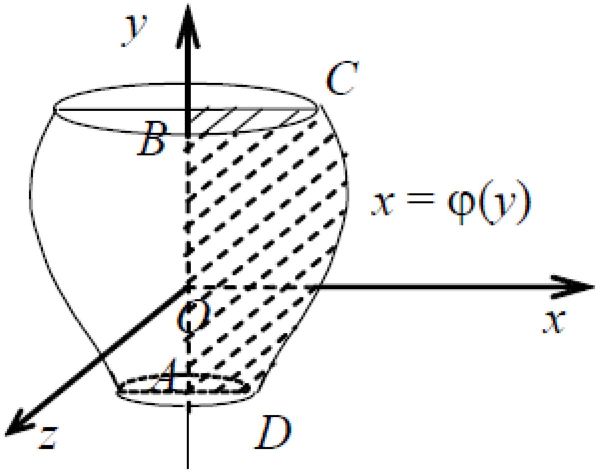
Найти длину отрезка кривой:

$$\rho = 4e^{\frac{4}{3}\varphi}; 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{3}$$

$$\rho' = 4\frac{4}{3}e^{\frac{4}{3}\varphi}$$

$$l = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sqrt{16e^{\frac{8}{3}\varphi} + \frac{256}{9}e^{\frac{8}{3}\varphi}}\, d\varphi = \frac{\sqrt{400}}{3}\int_0^{\frac{\pi}{3}} e^{\frac{4}{3}\varphi}\, d\varphi = \frac{\sqrt{400}}{4}e^{\frac{4}{3}\varphi}\Big|_0^{\frac{\pi}{3}} = 5(e^{\frac{4\pi}{9}} - 1)$$

Вычисление объёма тела вращения

2	Криволинейная трапеция $ABCD$ вращается вокруг оси Ox 		$V_{ox} = \pi\int_a^b [f(x)]^2 dx$, $a < b$
3	Криволинейная трапеция $ABCD$ вращается вокруг оси Oy 		$V_{oy} = \pi\int_c^d [\varphi(y)]^2 dy$, $c < d$

Вычисление объёма тела вращения

Если фигура ограничена графиками двух функций:

вращение вокруг оси OX

$$V = \pi \int_a^b ([f_1(x)]^2 - [f_2(x)])^2 dx$$

вращение вокруг оси OY

$$V = \pi \int_a^b ([\varphi_1(y)]^2 - [\varphi_2(y)])^2 dx$$

Для параметрически заданной кривой:

вращение вокруг оси OX

$$V = \pi \int_{t_1}^{t_2} y^2(t)|x'(t)|dt$$

вращение вокруг оси OY

$$V = \pi \int_{t_1}^{t_2} y\,(t)x(t)|x'(t)|dt$$

Вычисление объёма тела вращения

Пример 6.1
Фигура ограничена линиями $y = \sqrt{x}$, y=0, x=4. Найдите объём тела, полученного вращением этой фигуры вокруг оси Ох.

$$\boldsymbol{V = \pi \int_0^4 \left(\sqrt{x}\right)^2 dx = \pi \int_0^4 x dx = \frac{\pi x^2}{2}\Big|_0^4 = \pi 8}$$