

Задачи по теме «Линейное программирование»

1) Построить математическую модель задачи линейного программирования в общем виде. Привести запись задачи линейного программирования к каноническому виду.

а) Кондитерская компания «Сладкоежка» выпускает два вида продукции: печенье сливочное и вафли в шоколаде.

На изготовление одной партии печенья сливочного требуется затратить 3 кг муки, 3 кг сливок, 1 кг шоколада. На изготовление партии вафель в шоколаде требуется затратить 4 кг муки, 1 кг сливок, 5 кг сырья шоколада. Производство обеспечено мукой, сливками и шоколадом в количестве 600 кг, 357 кг, 600 кг соответственно. Рыночная цена партии печенья сливочное составляет 42 тыс. руб., а партии вафель в шоколаде – 26 тыс. руб.

б) Для анализа рыночной ситуации компания «Маркетинг и Ко» решила провести маркетинговое исследование при помощи опроса по телефону.

Для того чтобы результаты исследования в полной мере отражали реальную ситуацию на рынке запланировано провести опрос хотя бы 150 женщин, находящихся в браке, 120 женатых мужчин, 100 холостых мужчин и 110 незамужних женщин. Стоимость звонка днём составляет 2 у.е., вечером и в ночное время – 5 у.е. Кроме того, у компании «Маркетинг и Ко» имеется статистическая информация о предыдущих исследованиях, которая представлена в таблице:

Оценочные результаты телефонного опроса

Категория респондента	% респондентов, ответивших в дневное время	% респондентов, ответивших в вечернее и ночное время
Замужние женщины	30	30
Женатые мужчины	10	30
Одинокие мужчины	10	15
Одинокие женщины	10	20
Другие	40	5

Штат сотрудников компании «Маркетинг и Ко» ограничен, поэтому часть телефонных звонков рекомендовано провести в вечернее время. Необходимо определить: как компании следует распределить звонки, для того чтобы затраты на опрос были минимальными.

в) Некоторая строительная компания «Городок» планирует строительство нового жилого комплекса в микрорайоне. Комплекс будет содержать современные дома трех типов с квартирами-студиями, двухкомнатными квартирами и квартирами свободной планировки. Современный дом первого типа состоит из 20 квартир-студий, 50 двухкомнатных квартир и 45 квартир свободной планировки. В доме второго типа планируется 10 квартир-студий, 70 двухкомнатных квартир и 10 квартир свободной планировки, а в доме третьего типа всего 15 квартир-студий, 40 двухкомнатных квартир и 5 квартир свободной планировки. Возведение домов первого типа самый затратный проект, затраты на один такой дом составляют 800 тыс. у.е. Дома второго и третьего типов не требуют таких огромных вложений, затраты на их возведение составляют 500, и 200 тыс. у.е.

Компания «Городок» планирует построить хотя бы 800 квартир-студий, 2500 двухкомнатных квартир и 500 квартир свободной планировки в течение года.

Необходимо построить математическую модель задачи, в которой будет представлен годовой план строительства, требующий наименьших затрат.

г) Компании «Зелёный город» необходимо озеленить территорию детского сада. Территория детского сада окаймлена газоном длиной 150 метров.

На момент заказа плана озеленения в компании «Зелёный город» имеются садовые цветы трех типов: однолетние – бархатцы, двулетние – анютины глазки и многолетние – лилии. На один погонный метр газона может быть высажено 10 бархатцев, 6 кустиков анютиных глазок или 2 лилии. В распоряжении компании имеются в наличии 55 штук лилий, 350 рассады анютиных глазок и 530 кустиков бархатцев. Цена рассады представленных цветов составляет 25 рублей лилия, 12 рублей кустик анютиных глазок и 15 рублей бархатцы.

Построить математическую модель задачи, в которой указать какой заказ должен сделать детский сад для того чтобы озеленить свою территорию с наименьшими затратами.

д) Вагоностроительный завод выпускает вагоны трёх типов:

вагоны для перевозки пассажиров, вагоны-цистерны и вагоны специального назначения. Строительство вагонов производится в двух цехах: цех для производства комплектующих и сборочный цех.

В цехе для производства комплектующих за плановый период можно изготовить комплектующие для 25 вагонов, предназначенных для перевозки пассажиров, 50 вагонов-цистерн и 20 вагонов специального назначения. В сборочном цехе за это же время можно собрать 10 пассажирских вагонов, 30 вагонов-цистерн и 15 вагонов специального назначения.

Продажа вагонов приносит тверскому вагоностроительному заводу прибыль в сумме 50 у.е. от выпуска одного вагона для перевозки пассажиров, 20 у.е. от вагона-цистерны и 40 у.е. от вагона специального назначения.

Построить математическую модель, которая позволит определить, сколько нужно выпустить вагонов каждого типа за плановый период, чтобы получить наибольшую прибыль. При этом нужно учесть, что в плановый период необходимо выпускать пассажирских вагонов не менее 45% от выпуска грузовых вагонов.

е) В рамках программы по популяризации спорта среди населения администрация города выделила спортивному клубу «Радуга» капиталовложения в объёме 100 тыс. рублей на приобретение нового спортивного инвентаря и помещение площадью 74 м² для его размещения. Генеральная дирекция спортивного клуба может приобрести тренажёры трех видов. Кардио-тренажёр занимает 9 м² и стоит 16 тыс. руб. Беговая дорожка занимает 4 м² и стоит 13 тыс. руб., а доска для мышц пресса занимает 3 м² и стоит 11 тыс. руб.

После приобретения нового оборудования спортивный клуб рассчитывает на привлечение новых клиентов. Причём маркетинговые исследования показали, что прибыль от приобретения кардио-тренажёра может составить до 5 тыс. руб., беговой дорожки до 2 тыс. руб. и доски для прокачивания мышц пресса до 1 тыс. руб. Составить математическую модель задачи, которая позволит определить сколько нужно приобрести нового спортивного оборудования, чтобы спортивному клубу получить наибольшую прибыль и при этом полностью израсходовать выделенные администрацией средства?

ж) Лесопильный завод и фабрика по производству фанеры являются градообразующими предприятиями. Они располагаются в районе лесного массива, засаженного хвойными и лиственными деревьями в количестве 80 м³ хвойных и 180 м³ лиственных материалов.

Для производства 2,6 м³ коммерческих комплектов строительных лесоматериалов необходимо израсходовать 2 м³ хвойных и 7,5 м³ лиственных лесоматериалов. Для приготовления фанеры размером в 100 м² требуется 5 м³ хвойных и 10 м³ лиственных лесоматериалов.

Согласно условиям поставок лесопильному заводу и фабрике по производству фанеры, в течение планируемого периода необходимо произвести хотя бы 10 м³ коммерческих комплектов строительных лесоматериалов и 1200 м² фанеры. Прибыль с 1 м³ коммерческого комплекта строительных лесоматериалов составляет 150 руб., а с одного листа фанеры – 600 руб.

Постройте математическую модель, которая позволит составить такой план производства, при котором город от данных предприятий получит наибольший доход.

2) Решить графическим методом следующие задачи линейного программирования.

а)

$$\begin{aligned} z &= 4x_1 + 2x_2 \rightarrow \max \\ \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leq 18 \\ -x_1 + 3x_2 \leq 9 \\ 2x_1 - x_2 \leq 10 \end{cases} \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

б)

$$\begin{aligned} z &= 3x_1 - x_2 \rightarrow \min \\ \begin{cases} 2x_1 - x_2 \leq 4 \\ -x_1 + x_2 \leq 2 \\ 3x_1 - 2x_2 \geq 0 \\ x_1 - x_2 \leq 0 \end{cases} \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

в)

$$\begin{aligned} z &= 3x_1 - x_2 \rightarrow \max \\ \begin{cases} -3x_1 + 2x_2 \leq 6 \\ 2x_1 - 3x_2 \leq 6 \\ x_1 \leq 6 \\ x_2 \leq 6 \end{cases} \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

г)

$$\begin{aligned} z &= 5x_1 + 5x_2 \rightarrow \max \\ \begin{cases} -2x_1 + x_2 \leq 2 \\ -x_1 + 3x_2 \geq 9 \\ x_1 + x_2 \geq 3 \end{cases} \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

д)

$$\begin{aligned} z &= 4x_1 + 2x_2 \rightarrow \min \\ \begin{cases} -3x_1 + 2x_2 \leq 6 \\ x_1 + 2x_2 \geq 10 \\ x_1 - 3x_2 \leq 6 \\ x_1 + x_2 \geq 3 \end{cases} \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

е)

$$\begin{aligned} z &= 2x_1 + 4x_2 \rightarrow \max \\ \begin{cases} -3x_1 + 2x_2 \leq 6 \\ x_1 + 2x_2 \geq 10 \\ x_1 - 5x_2 \leq 5 \\ x_1 + x_2 \leq 4 \end{cases} \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

ж)

$$z = 2x_1 + 4x_2 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \leq 11 \\ -2x_1 + x_2 \leq 0 \\ x_1 - 3x_2 \leq 0 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

з)

$$z = 4x_1 + 6x_2 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} 4x_1 - 5x_2 \geq 0 \\ 2x_1 - 3x_2 \leq 0 \\ 2x_1 + 3x_2 \geq 6 \\ 2x_1 + x_2 \geq 2 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

и)

$$z = 3x_1 + 2x_2 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 \geq 0 \\ -x_1 + 2x_2 \leq 3 \\ x_2 \leq 3 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

3) Решить следующие задачи симплекс-методом.

а) Лесоперерабатывающее предприятие выпускает следующего вида продукцию: доски, брус, фанеру и дрова. Для производства этой продукции необходимо использовать труд рабочих, пиломатериалы и деревообрабатывающие станки. Технологические характеристики данного производства представлены в таблице.

Ресурс	Вид продукции				Объем ресурса
	доски	брус	фанера	дрова	
труд рабочих	1	1	1	1	16
пиломатериалы	6	5	4	3	110
деревообрабатывающие станки	4	6	10	13	100

Лесоперерабатывающее предприятие продаёт свою продукцию и выручает за неё за 1 м³ доски – 50 у.е., за 1 м³ бруса – 70 у.е., за лист фанеры – 120 у.е. и машина дров стоит 220 у.е.

Выяснить сколько досок, бруса, фанеры и дров необходимо производить предприятию для того чтобы получить максимальную прибыль от реализации.

б) Фабрика по производству ткани выпускает бязь, ситец и батист.

Плановое задание на сутки для данной фабрики составляет не менее 100 м бязи, до 75 м – ситца и 60 м – батиста. Для производства ткани фабрика использует труд рабочих, ресурсы которых составляют 780 единиц, электроэнергию в количестве 790 кВт/ч и сырьё в количестве 850 единиц. В таблице представлен расход ресурсов на один метр тканей.

Ресурсы	Ткани		
	Бязь	Ситец	Батист
Трудовые ресурсы	2	3	4
Сырьё	1	4	5
Электродэнергия	3	4	2

Всю изготовленную ткань фабрика реализует в собственном магазине по цене 80 рублей за батист, 70 рублей за бязь и 60 рублей за ситец. Укажите какое количество ткани целесообразно выпускать фабрике, чтобы получить максимальную прибыль от её реализации.

в) Частное кондитерское предприятие выпускает полуфабрикаты для приготовления бисквитов, песочного теста, слоённого теста и крема. Так как конкурентов у данного предприятия в городе нет, то как правило, любое количество изделий реализуется. К основным продуктам, которые используются для изготовления этой продукции относятся мука, масло, молочные продукты и сахар. С помощью технологов-кондитеров разработаны нормы каждого вида сырья для всех видов продукции предприятия.

Ресурс	Выпускаемая продукция				Объем ресурса
	Бисквит	Тесто песочное	Тесто слоёное	Крем	
Мука	3	4	2	0	4600
Молочные продукты и масло	2	12	6	10	2500
Сахар	1	0,5	3	2	2000
Прибыль, у.е.	60	75	65	130	

Составьте план выпуска полуфабрикатов для данного кондитерского производства, который будет являться для данного предприятия наилучшим с точки зрения полученной прибыли.

г) Молочный комбинат «Молочко» выпускает сметану, кефир, йогурт и творог. Для производства кисломолочной продукции использует молоко, закваску и фруктовые наполнители. В таблице представлены объёмы сырья, нормы расхода сырья и прибыль на единицу кисломолочной продукции при изготовлении каждого вида продукции молочного комбината «Молочко».

Вид сырья	Выпускаемая продукция				Объем ресурса
	Сметана	Кефир	Йогурт	Творог	
Молоко	14	12	12	23	135
Закваска	1	1	2	3	20
Наполнители	0	2	8	1	50
Прибыль, у.е.	64	20	34	81	

Всю продукцию молочный комбинат «Молочко» реализует в розничной сети магазинов. Необходимо рассчитать какое количество кисломолочных продуктов принесёт предприятию наибольшую прибыль при заданных условиях производства.

д) Спортивный магазин предлагает следующие виды новой продукции: кардио-тренажёр, тренажёр для фитнес-тренировки, тренажёры для силовой нагрузки. При реализации новой продукции у магазина есть два ограничения: полезная площадь помещений для размещения нового товара, которая составляет 275 м^2 , и рабочее время работников спортивного магазина – 295 человеко-часов. Для того чтобы новая продукция была выгодна для реализации в данном спортивном магазине, товарооборот должен быть не менее 240 тыс. руб.

Ресурсы	Ткани			Объём ресурса
	Кардио-тренажёр	Тренажёр для фитнеса	Тренажёр для силовой нагрузки	
Площадь, м^2	1,5	2	4	275
Рабочее время, чел. час	4	2	1,5	295
Цена, тыс. у.е.	1	2	4	
Прибыль, тыс. у.е.	0,1	0,2	0,4	

Разработайте план товарооборота данной продукции так, чтобы прибыль от её реализации оказалась для спортивного магазина максимальной, а оборот был не менее 240 тыс. руб.

е) Фирма по производству спецодежды выпускает два вида медицинских халатов – стандартные и улучшенные. На производстве выполняют две основные операции – пошив и отделка.

Затраты	Партия из 100 халатов		Объём ресурсов
	Стандартные	Улучшенные	
Материал, м	200	400	50000
Время на пошив, ч	40	60	800
Время на отделку, ч	4	24	500
Расходные материалы, у.е.	30	60	7000

Халаты реализуются в магазине спецодежды по цене 1300 руб. за обычный и 2500 за улучшенный халат. Требуется определить, какое количество халатов каждого типа можно изготовить в течение месяца так, чтобы обеспечить максимальную прибыль при имеющихся ограничениях на ресурсы.

жс) На обувном предприятии «Башмачок» имеется три вида сырья: кожа, замша и нубук из которых предприятие производит детские ботинки и женские сумки. Данные о расходе сырья на производство единицы продукции, запасов сырья и прибыли от реализации единицы продукции предоставлены в таблице.

Вид сырья	Расход сырья на единицу продукции		Объём ресурсов
	Ботинки	Сумки	
Кожа	3	4	145
Замша	5	2	131
Нубук	2	3	130
Прибыль от реализации единицы продукции	1700	2550	

Определите, какое количество детских ботинок и женских сумок целесообразно производить предприятию, чтобы при заданных запасах сырья иметь наибольшую прибыль.

з) Завод по производству новогодних ёлочных украшений из стекла, специальной краски и сусального золота может выпускать новогодние шары, украшения для гирлянды и снежинки. В течение планируемого периода завод должен освоить не менее 640 ед. стекла и 800 ед. краски, при этом сусального золота может быть израсходовано не более 160 ед.

Вид сырья	Нормы расхода сырья			Объём ресурса
	Шар	Гирлянда	Снежинка	
Стекло	1	4,3	2,6	640
Краска	5	1,5	3	800
Сусальное золото	3	3,9	4,3	160
Себестоимость изделия	20	18	15	

Указать каким должен быть план производства новогодних украшений для завода, чтобы затраты на производство оказались минимальными.

и)

$$\begin{aligned} z &= 8x_1 + 6x_2 \rightarrow \max \\ \begin{cases} 5x_1 + 2x_2 + x_3 = 20 \\ 6x_1 + 12x_2 + x_4 = 72 \end{cases} \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0 \end{aligned}$$

к)

$$\begin{aligned} z &= 8x_3 - 2x_4 - 3x_5 \rightarrow \min \\ \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 - 7x_4 + 15x_5 = 4 \\ x_2 + x_3 - 2x_4 + 2x_5 = 3 \\ 2x_1 + x_3 + 5x_4 = 7 \end{cases} \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0 \end{aligned}$$

л)

$$\begin{aligned} z &= -3x_1 + x_2 + 2x_3 \rightarrow \max \\ \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 7 \\ -x_1 + 3x_3 = 8 \\ 4x_1 + x_2 - 2x_3 \geq 4 \end{cases} \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

4) Решить задачи М-методом.

а)

$$\begin{aligned} z &= 2x_1 - 8x_2 + 2x_3 + x_4 \rightarrow \max \\ \begin{cases} 2x_1 + x_2 + 4x_3 + x_4 = 8 \\ -2x_1 + 2x_3 + x_4 = 6 \end{cases} \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0 \end{aligned}$$

б)

$$\begin{aligned} z &= -2x_1 + x_2 + 8x_3 - 2x_4 \rightarrow \max \\ \begin{cases} 5x_1 - x_2 - 7x_3 + 2x_4 = 6 \\ 3x_1 - x_2 - 4x_3 + x_4 = 2 \end{cases} \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0 \end{aligned}$$

6)

$$\begin{aligned} z &= 2x_1 + 6x_2 + x_3 + x_4 \rightarrow \max \\ \begin{cases} 4x_1 - 5x_2 - 2x_3 + x_4 = 2 \\ -5x_1 + 4x_2 + x_3 - x_4 = 1 \end{cases} \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0 \end{aligned}$$

2)

$$\begin{aligned} z &= x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 - x_5 \rightarrow \max \\ \begin{cases} x_1 - 2x_3 + x_4 = 2 \\ 2x_1 - 2x_2 - x_4 + x_5 = 2 \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 + x_5 = 4 \end{cases} \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0 \end{aligned}$$