

# Комплексные числа

# Алгебраическая форма КОМПЛЕКСНОГО ЧИСЛА

- ▶ **Алгебраической формой комплексного числа  $z$**  называется выражение  $z = a + ib$ , где:
  - ▶  $a$  и  $b$  – действительные числа;
  - ▶  $i$  – мнимая единица, которая определяется соотношением:
  - ▶  $i^2 = -1$
- 
- ▶  $a$  – действительная часть комплексного числа ( $\operatorname{Re} z$ );
  - ▶  $b$  – мнимая часть комплексного числа ( $\operatorname{Im} z$ )

# Алгебраическая форма КОМПЛЕКСНОГО ЧИСЛА

- ▶ **Комплексно-сопряжённые числа:**

- ▶  $z = a + ib ; \bar{z} = a - ib$

- ▶ **Равенство комплексных чисел**

- ▶ комплексные числа равны, если равны их мнимые и действительные части:

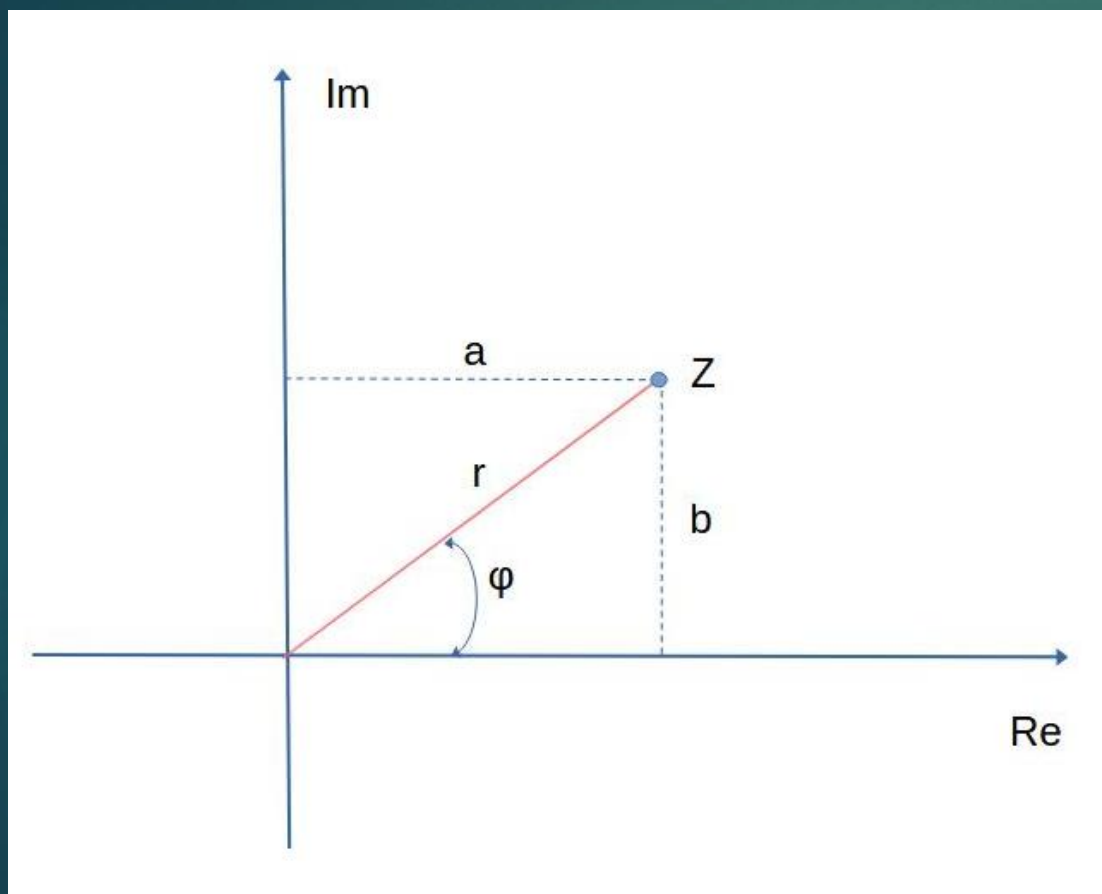
- ▶  $z_1 = a_1 + b_1i ; z_2 = a_2 + b_2i$

- ▶  $z_1 = z_2$  если  $a_1 = a_2$  и  $b_1 = b_2$

- ▶ **Равенство комплексного числа нулю**

- ▶  $z = a + bi = 0$ , если  $a=b=0$

# Геометрическое представление КОМПЛЕКСНОГО ЧИСЛА



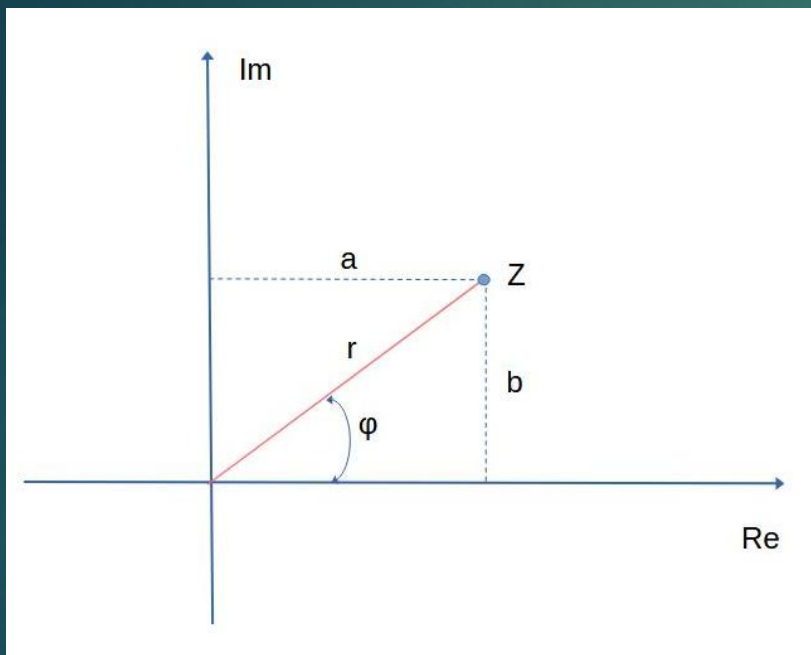
$r$  – **модуль комплексного числа.**

$$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$\varphi$  – **аргумент комплексного числа.**

$$\varphi = \text{Arg } z = r \text{ctg } \frac{b}{a}$$

# Тригонометрическая форма КОМПЛЕКСНОГО ЧИСЛА



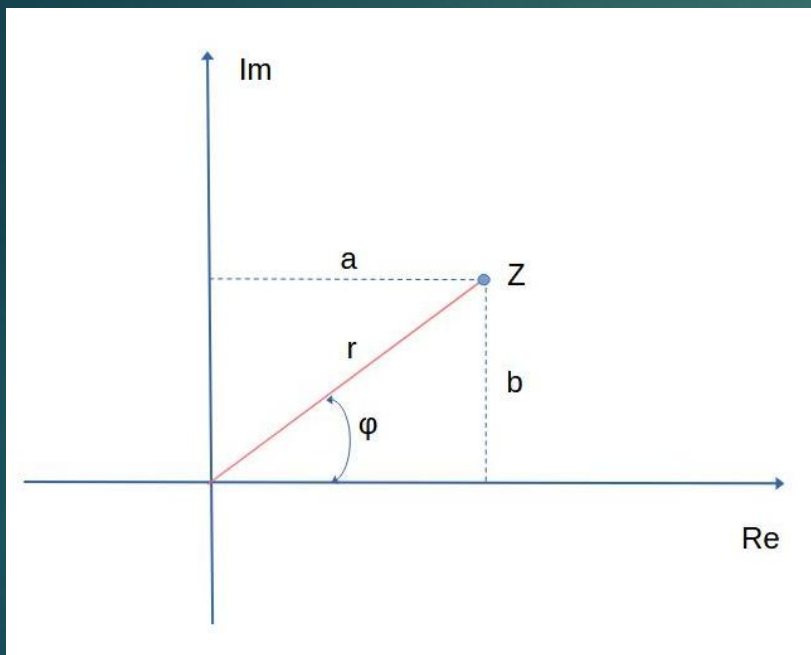
$$Z = r(\cos \varphi + \sin \varphi i)$$

Для комплексно-сопряжённых чисел:

$$|z| = |\bar{z}|$$

$$\operatorname{Arg} z = -\operatorname{Arg} \bar{z}$$

# Тригонометрическая форма КОМПЛЕКСНОГО ЧИСЛА



$$\operatorname{Arg} Z = \begin{cases} \arctg \frac{b}{a}, & z \text{ в квадрантах } 1, 4 \\ \pi + \arctg \frac{b}{a}, & z \text{ в квадранте } 2 \\ -\pi + \arctg \frac{b}{a}, & z \text{ в квадранте } 3 \end{cases}$$

# Показательная форма КОМПЛЕКСНОГО ЧИСЛА

► Формула Эйлера

►  $e^{a+bi} = e^a(\cos(y) + \sin(y)i)$

► Показательная форма комплексного числа:

►  $z = re^{\varphi i}$

# Тригонометрическая форма КОМПЛЕКСНОГО ЧИСЛА

## ► Пример

- Представить комплексное число  $z = -4\sqrt{3} - 4i$  в тригонометрической и показательной формах.



# Справочный материал

## ЗНАЧЕНИЯ ОБРАТНЫХ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

$a$	$-1$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$0$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$1$
$\arcsin a$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	$0$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\arccos a$	$\pi$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	$0$

$a$	$-\sqrt{3}$	$-1$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$0$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$1$	$\sqrt{3}$
$\operatorname{arctg} a$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	$0$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
$\operatorname{arcctg} a$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$

# Справочный материал

## ТАБЛИЦА ЗНАЧЕНИЙ ОСНОВНЫХ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

$\alpha^\circ$	$0^\circ$	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$	$90^\circ$	$120^\circ$	$135^\circ$	$150^\circ$	$180^\circ$	$210^\circ$	$225^\circ$	$240^\circ$	$270^\circ$	$300^\circ$	$315^\circ$	$330^\circ$	$360^\circ$
$\alpha$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\pi$	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	$2\pi$
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\operatorname{tg} \alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	-	$\sqrt{3}$	-1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	-	$\sqrt{3}$	-1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0
$\operatorname{ctg} \alpha$	-	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	-1	$-\sqrt{3}$	-	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	-1	$-\sqrt{3}$	-



# Справочный материал

сумма и разность углов

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta - \cos \alpha \cdot \sin \beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta}$$

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta}$$

$$\operatorname{ctg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{ctg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \beta - 1}{\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta}$$

$$\operatorname{ctg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{ctg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \beta + 1}{\operatorname{ctg} \beta - \operatorname{ctg} \alpha}$$

# Действия над комплексными числами в алгебраической форме

## ► Сумма и разность

$$\text{► } z_1 = a_1 + b_1 i$$

$$\text{► } z_2 = a_2 + b_2 i$$

$$\text{► } z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$$

$$\text{► } z_1 - z_2 = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i$$

# Действия над комплексными числами в алгебраической форме

## ▶ Произведение

▶  $z_1 = a_1 + b_1 i$

▶  $z_2 = a_2 + b_2 i$

▶  $z_1 z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1) i$

# Действия над комплексными числами в алгебраической форме

## ▶ Частное

▶  $z_1 = a_1 + b_1 i$

▶  $z_2 = a_2 + b_2 i$

▶  $z_1 z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1) i$

▶  $\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 + b_1 i}{a_2 + b_2 i} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \frac{b_1 a_2 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} i$

# Действия над комплексными числами в алгебраической форме

## Пример

**Выполнить сложение, вычитание, умножение и деление для следующих комплексных чисел:**

▶  $z_1 = -9 - 7i$

▶  $z_2 = -1 + i$

# Решение квадратных уравнений над комплексной плоскостью

## Пример

*Решить уравнения над комплексной плоскостью:*

$$6x^2+7=0$$

$$3x^2+3x+1=0$$



# Произведение и частное комплексных чисел в тригонометрической форме

$$\blacktriangleright z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + \sin\varphi_1 i)$$

$$\blacktriangleright z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + \sin\varphi_2 i)$$

$$\blacktriangleright z_1 z_2 = r_1 r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + \sin(\varphi_1 + \varphi_2) i)$$

$$\blacktriangleright \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + \sin(\varphi_1 - \varphi_2) i)$$

# Произведение и частое комплексных чисел в тригонометрической форме

- ▶ Пример
- ▶ Найти произведение и частое комплексных чисел в тригонометрической форме:
- ▶  $z_1 = -4 + 4i$ ;  $z_2 = 9\sqrt{3} - 9i$

# Возведение комплексного числа в степень

- ▶ **Формула Муавра:**
- ▶  $z = r (\cos\varphi + \sin\varphi i)$
- ▶  $z^n = r^n (\cos(n\varphi) + \sin(n\varphi)i)$

# Возведение комплексного числа в степень

- ▶ Пример
- ▶ Выполнить возведение в 3-ю степень комплексного числа<sup>Λ</sup>
- ▶  $z = -5 - 5i$

# Извлечение корня из КОМПЛЕКСНОГО ЧИСЛА

- ▶ **Формула Муавра**
- ▶  $z = r (\cos \varphi + \sin \varphi i)$
- ▶  $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \left( \cos \left( \frac{\varphi + 2\pi k}{n} \right) + \sin \left( \frac{\varphi + 2\pi k}{n} \right) i \right), k = 0, 1, 2 \dots, n - 1$
- ▶ **Комплексное число имеет ровно  $n$  корней степени  $n$ .**

# Извлечение корня из комплексного числа

- ▶ Пример
- ▶ Найти все значения корня пятой степени из комплексного числа  
 $z = 4 - 4\sqrt{3}$