

Задачи по теме «Пределы»

1. Математическая индукция

1.1) Доказать, что для любого натурального n :

- а) число $7^n - 1$ кратно 6;
- б) число $5^n - 4n + 15$ кратно 16;
- в) число $n(2n^2 - 3n + 1)$ кратно 6;
- г) число $2n^3 + 3n^2 + 7n$ кратно 6;
- д) число $6^{2n-2} + 3^{n+1} + 3^{n-1}$ кратно 11;
- е) число $5 \cdot 2^{3n-2} + 3^{3n-1}$ кратно 19;

1.2) Доказать, что при любом натуральном n верны равенства:

- а) $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2};$
- б) $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2;$
- в) $2 + 4 + 6 + \dots + 2n = n(n + 1);$
- г) $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6};$
- д) $1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + (2n - 1)^2 = \frac{n(4n^2+1)}{3};$
- е) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \dots + n)^2;$
- ж) $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + n(n + 1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3};$
- з) $\left(1 - \frac{1}{4}\right) \left(1 - \frac{1}{9}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{n+1}{2n}$ при $n \geq 2;$
- и) $\frac{1}{1 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 9} + \dots + \frac{1}{(4n-3)(4n+1)} = \frac{n}{4n+1};$

1.3) Доказать, что при любом натуральном n верны неравенства:

- а) $2^n > 5n$, при $n \geq 5;$)
- б) $3^n > 5n + 1$, при $n \geq 3;$
- в) $\frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} < \frac{5n-2}{2n};$
- г) $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} > \frac{13}{24}$, при $n \geq 2;$

2. Определение предела

2.1 Доказать:

$$1. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0$$

$$3. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-1 + (-1)^{n+1}}{n} = 0$$

$$5. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n-1} = \frac{1}{2}$$

$$7. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2-1}{n^2} = 1$$

$$9. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-2}{\sqrt[3]{2n-9}} = 0$$

$$11. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cos\left(\frac{\pi n}{2}\right) = 0$$

$$13. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2-2}{n^3} = 0$$

$$15. \lim_{n \rightarrow \infty} (-0.1)^n = 0$$

$$17. \lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0, |q| < 1$$

$$19. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{q^n}{n} = 0, |q| \leq 1$$

$$21. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n}{(n+1)4^n} = 0$$

$$23. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \neq 1$$

$$25. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-n}{n} \neq 0$$

$$27. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+n}{3-n} \neq -2$$

$$29. \lim_{n \rightarrow \infty} (n+3)^2 = +\infty$$

$$31. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{\sqrt{n}} = +\infty$$

$$33. \lim_{n \rightarrow \infty} (-n^2 + 4) = -\infty$$

$$35. \lim_{n \rightarrow \infty} n \sin\left(\frac{\pi}{2} + \pi n\right) = \infty$$

$$2. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n} = 0$$

$$4. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-(-1)^n}{n} = 0$$

$$6. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-n}{1+n} = -1$$

$$8. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2+3n^2}{n^2} = 3$$

$$10. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{\sqrt[n+1]{n}} = 0$$

$$12. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin n}{\sqrt[n+1]{n}} = 0$$

$$14. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n^3+1} = 0$$

$$16. \lim_{n \rightarrow \infty} 0.3^n = 0$$

$$18. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{\sqrt{n^2+n}} = 2$$

$$20. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{0.2^n}{5n} = 0$$

$$22. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n2^n} = 0$$

$$24. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{(n+1)4^n} \neq 1$$

$$26. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{1+n} \neq 1$$

$$28. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4+n}{1+n} \neq 0$$

$$30. \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} = +\infty$$

$$32. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2-n}{2n+1} = +\infty$$

$$34. \lim_{n \rightarrow \infty} (2 - \sqrt{n+6}) = -\infty$$

$$36. \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \operatorname{tg}\left(\frac{\pi+2\pi n}{4}\right) = \infty$$

3. Вычисление пределов последовательностей

3.1 Вычислить пределы:

- 1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1+2n)^3 - 8n^3}{(1+4n)^2 + n^2}$
- 2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2-3n)^2}{(n-3)^3 - (n+3)^3}$
- 3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(4-n)^3 - (3-n)^3}{(1-n)^3 - (1+n)^3}$
- 4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2-n)^3 + (1-n)^3}{(1+n)^2 - (1+n)^4}$
- 5) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+2+3+\dots+n}{\sqrt{n^4+2}}$
- 6) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+3+5+\dots+(2n-1)}{1+2+3+\dots+n}$
- 7) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\dots+\frac{1}{3^n}}{1+\frac{1}{5}+\frac{1}{5^2}+\dots+\frac{1}{5^n}}$
- 8) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\dots+\frac{1}{2^n}}{1+\frac{1}{7}+\frac{1}{7^2}+\dots+\frac{1}{7^n}}$
- 9) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+3)! + (n+1)!}{(n+2)!}$
- 10) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3n+1)! + (3n+2)!}{(3n+3)! - (3n+2)!}$
- 11) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^2+3} + n^2}{\sqrt[4]{n^{12}+2n+1} - n^2}$
- 12) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{10n^3 - \sqrt{n^3+2}}{\sqrt[4]{4n^6+3} - n}$
- 13) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2n^3+3} - \sqrt{n+5}}{\sqrt[3]{n^3+2} - \sqrt{n-1}}$
- 14) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^5+3} - \sqrt{n-2}}{\sqrt[4]{n^4+2} - \sqrt{n-2}}$
- 15) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^{n+1} + 4^{n+1}}{3^n + 4^n}$
- 16) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n - 3^{n+1}}{2^{n+1} + 2^{n+2}}$
- 17) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{(n+2)(n+1)} - \sqrt{(n-1)(n+3)})$
- 18) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n(n+6)} - n)$
- 19) $\lim_{n \rightarrow \infty} n(\sqrt[3]{4+8n^3} - 2n)$
- 20) $\lim_{n \rightarrow \infty} (n + \sqrt[3]{3-n^3})$

3.2 Вычислить пределы последовательностей, используя первый замечательный предел:

- 1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{4n}\right)^n$
- 2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{6n}\right)^n$
- 3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{3n}\right)^{n^2}$
- 4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{4}{5n}\right)^{n^2}$
- 5) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{n-1}$
- 6) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{3n}\right)^{3n}$
- 7) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{5}{n^2+2n+7}\right)^{1-n^2}$
- 8) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{6-n^2+3n}\right)^{2n^2-6n}$
- 9) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2+3}{n^2+2}\right)^{n^2}$
- 10) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2-6}{n^2+8}\right)^{1-n^2}$
- 11) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^3+1}{n^3}\right)^{4+n^2}$
- 12) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2-n^3}{-n^3-1}\right)^{n^2+1}$
- 13) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n^3-3n+8}{4+2n^3}\right)^{n^2+1}$
- 14) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1+2n+3n^2}{3n^2-8n}\right)^{5n}$
- 15) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{5-n^2}{4-n^2}\right)^{6n^3}$
- 16) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2-3}{n^2+2}\right)^{2n^3}$

4. Вычисление пределов функций

4.1 Вычислить пределы функций, используя непосредственное вычисление пределов:

$$\begin{array}{ll} 1) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+2x+2}{x^2-1} & 2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2+x}{4x^3+x+10} \\ 3) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+3) \cdot (x-2)}{x+2} & 4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x+4}{1-x} \\ 5) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{5x+4}{1-x} & 6) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3-4x+5}{x^2+6} \\ 7) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{3}{2x-6} & 8) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2-5x-3}{4x^2-13x+3} \\ 9) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{4x^2-5x-1}{2x^2-x-1} & \end{array}$$

4.2 Раскрыть неопределённость и вычислить пределы:

$$\begin{array}{ll} 1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^3+x}{x} & 2) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-9}{x^2-2x-3} \\ 3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1}-1}{x} & 4) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2-4}{x+2} \\ 5) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{3-x}{x^3-27} & 6) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{3x^2-11x+6}{2x^2-5x-3} \\ 7) \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x-5}{2-\sqrt{x-1}} & 8) \lim_{x \rightarrow \sqrt{5}} \frac{x^4-25}{x^2-5} \\ 9) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{x^2-9} & 10) \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2-8x+15}{x^2-25} \\ 11) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2-8x+4}{5x^2-14x+8} & 12) \lim_{x \rightarrow 6} \frac{x-6}{\sqrt{x+3}-3} \\ 13) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{x+4}-2} & 14) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{4x^2-7x-2}{5x^2-9x-2} \\ 15) \lim_{x \rightarrow 7} \frac{\sqrt{x+2}-3}{x^2-49} & 16) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-4}{x^3-2x^2+x-2} \end{array}$$

4.3 Раскрыть неопределённость и вычислить предел:

$$\begin{array}{ll} 1) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^3+2x-3}{x^3-x^2+10} & 2) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^4+2x^3+4x}{x^3-4x^4+1} \\ 3) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2-7x+5}{x^3+7x^2+3} & 4) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x-23}{x^3+30x^2-10} \\ 5) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^5+2x^4+2x^3-x}{x^4+x^2+1} & 6) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-7x^3+5x-3}{x^2+x-3} \\ 7) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3}{4(2-x)^2} - \frac{x}{4} \right) & 8) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3}{x^2-4} - x \right) \\ 9) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x^2}{2x+1} - \frac{(2x-1)(3x^2+x+2)}{4x^2} \right) & 10) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3}{2x^2-1} - \frac{x^2}{2x+1} \right) \\ 11) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3}{x^2+1} - x \right) & 12) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^2+x}-x} \right) \\ 13) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{5x^3+1}{1-x} + \frac{20x^3+x-4}{4x} \right) & 14) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^3+6}+\sqrt{x^3-1}}{\sqrt[4]{(2+x)-x\sqrt{x}}} \\ 15) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[4]{(x^7+3)}+\sqrt[3]{(x^8-x)}}{\sqrt[4]{x^3+5}-x^2} & 16) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[6]{(x^8+3)}+\sqrt[4]{(x^8+1)}}{\sqrt[5]{x^7+5}+3x^2} \end{array}$$

4.4 Вычислить предел:

- 1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 6x}{x}$
- 2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{\sin x}$
- 3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 8x}{2x}$
- 4) $\lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \operatorname{ctg} x$
- 5) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 10x}{5x}$
- 6) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 4x}{2x}$
- 7) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 2x}{x^2}$
- 8) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x}{\sin 10x}$
- 9) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2}{1 - \cos x}$
- 10) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x-2)}{x-1}$
- 11) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{\sin 3x}$
- 12) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan^2 3x}{2x^2}$
- 13) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos^2 x}{x^2 \cos x}$
- 14) $\lim_{x \rightarrow 0} \sin 3x \cdot \operatorname{ctg} 5x$

4.5 Вычислить предел:

- 1) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{3x}\right)^x$
- 2) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{5x}$
- 3) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-1}{x}\right)^{3x+5}$
- 4) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2-1}{x^2}\right)^{2x^2}$
- 5) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$
- 6) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{x-1}$
- 7) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-2}{x+3}\right)^{4-x}$
- 8) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+1}$
- 9) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{5x-3}{5x+4}\right)^{3x-1}$
- 10) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x^2+2}{2x^2+1}\right)^{x^2}$
- 11) $\lim_{x \rightarrow \infty} (1-x)^{\frac{2}{x}}$
- 12) $\lim_{x \rightarrow \infty} (1+x)^{\frac{4-x}{x}}$

4.6 Вычислить предел с помощью эквивалентных бесконечнo-малых:

- 1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2+x}{\sin 5x}$
- 2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x}-1}{\operatorname{tg} 2x}$
- 3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{7x}-1}{21x-x^2}$
- 4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos 5x}{1-\cos x}$
- 5) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot \arcsin 2x}{1-\cos 4x}$
- 6) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan 6x}{\sin 12x}$
- 7) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{20 \cdot \ln(1+\frac{x}{2})}{\tan 8x}$
- 8) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{21 \cdot \ln(1+\frac{x}{3})}{7x-x^5}$
- 9) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{\sqrt[7]{1+x}-1}$
- 10) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+3x)}{\sqrt[6]{1+x}-1}$
- 11) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5^{2x}-1}{\tan 5x}$
- 12) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4^{-5x}-1}{\sin 5x}$

$$13) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{\sqrt[5]{x-1}}$$

$$15) \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\tan 4x}{\tan 5x}$$

$$17) \lim_{x \rightarrow e} \frac{\ln x - 1}{x - e}$$

$$14) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{9x^2 - 9}{\sqrt[9]{x-1}}$$

$$16) \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin 3x}{\sin 8x}$$

$$18) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\ln 2x - 1}{2x - e}$$