Пределы

Метод математической индукции

- Метод математической индукции используется для доказательства справедливости утверждения S(n), зависящего от натурального аргумента.
- Этапы доказательства:
- 1) **База индукции.** Показать справедливость утверждения S(n) при n=1.
- 2) **Индукционное предположение.** Предположить, что утверждение S(n) справедливо при n=k.
- 3) **Индукционный переход.** Доказать, что утверждение S(n) справедливо при n=k+1.

Метод математической индукции

- **Пример 1.1**
- Доказать методом математической индукции, что число
- $n^3 + 3n^2 + 5n$ кратно 3 при всех $n \in \mathbb{N}$.
- 1) База индукции. n=1.
- $1^3 + 3 \cdot 1^3 + 5 \cdot 1 = 9$ Кратно 3.
- 2) Индукционное предположение. Предположим, что число
- $k^3 + 3k^2 + 5k$ кратно трём при n=k.
- 3) Индукционный переход. Основываясь на 2, докажем, что заданное число кратно 3 при n=k+1
- $(k+1)^3 + 3 \cdot (k+1)^2 + 5 \cdot (k+1) =$
- $k^3 + 3 \cdot k^2 + 3 \cdot k + 1 + 3 \cdot k^2 + 6 \cdot k + 3 + 5 \cdot k + 5 =$
- $\underbrace{k^3 + 3 \cdot k^2 + 5 \cdot k}_{\text{кратно 3 по индукционному предположению}} + 3 \cdot (k^2 + 3 \cdot k + 3)$ – кратно 3

Метод математической индукции

- **Пример 1.2**

- Доказать методом математической индукции, что следующее равенство верно при любых значениях n, принадлежащих множеству натуральных чисел.
- $\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\cdots+\frac{1}{n\cdot(n+1)}=\frac{n}{n+1};\ n\in\mathbb{N}.$
- 1) База индукции. n=1.
- $\frac{1}{1\cdot2}=\frac{1}{2}$ Верно.
- 2) Индукционное предположение. Предположим, что:
- $\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\cdots+\frac{1}{k\cdot(k+1)}=\frac{k}{k+1}.$
- 3) Индукционный переход. Основываясь на 2, докажем, что равенство верно при n=k+1
- $\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\cdots+\frac{1}{k\cdot(k+1)}+\frac{1}{((k+1)\cdot(k+2))}=\frac{k+1}{k+2}=$
- $\frac{k}{k+1}+\frac{1}{((k+1)\cdot(k+2))}=\frac{k\cdot(k+2)+1}{(k+1)\cdot(k+2)}=\frac{k^2+2\cdot k+1}{(k+1)\cdot(k+2)}=\frac{(k+1)^2}{(k+1)\cdot(k+2)}=\frac{(k+1)}{(k+2)}$

Метод математической индукции

- **Пример 1.3**
- Доказать методом математической индукции неравенство Бернулли.
- $(1+\alpha)^n \geq 1+\alpha\cdot n; \qquad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \alpha > 1, \alpha\epsilon\mathbb{R}$
- 1) База индукции. n=0.
- $(1+\alpha)^0 \geq 1+\alpha\cdot 0$
- $1 \geq 1$
- 2) Индукционное предположение. Предположим, что при n=k верно:
- $(1+\alpha)^k \geq 1+\alpha\cdot k$
- 3) Индукционный переход. Основываясь на 2, докажем, что при n=k+1 верно:
- $(1+\alpha)^{k+1} \geq 1+\alpha\cdot(k+1)$
- $(1+\alpha)^k\cdot(1+\alpha) \geq (1+\alpha\cdot k)\cdot(1+\alpha)$
- $(1+\alpha)^{k+1} \geq 1+\alpha\cdot k+\alpha+\alpha^2 k = 1+\alpha\cdot(k+1)+\alpha^2 k$
- $\alpha > 0,$ поэтому: $(1+\alpha)^{k+1} \geq 1+\alpha\cdot(k+1)$

Математическая нотация

- $\exists$ – квантор существования
- $\forall$ – квантор общности
- : или | – такое что …
- $\in$ –принадлежит
- $\mathbb{R}$ – действительные числа
- $\mathbb{N}$ – натуральные числа
- $\cup$ –объединение
- $\cap$ –пересечение

Числовая последовательность

- **$\{a_n\}$ – обозначение числовой последовательности $a_n=f(n)$**
- **Способы задания числовой последовательности:**

- ***формула общего члена***. Например, последовательность нечётных чисел $x_n=2n-1$

- ***рекурсия***. Например, последовательность Фибоначчи $x_n=x_{n-1} + x_{n-2}$, $x_1=1$, $x_2=1$

- ***Словесное описание*** правила формирования членов числовой последовательности.

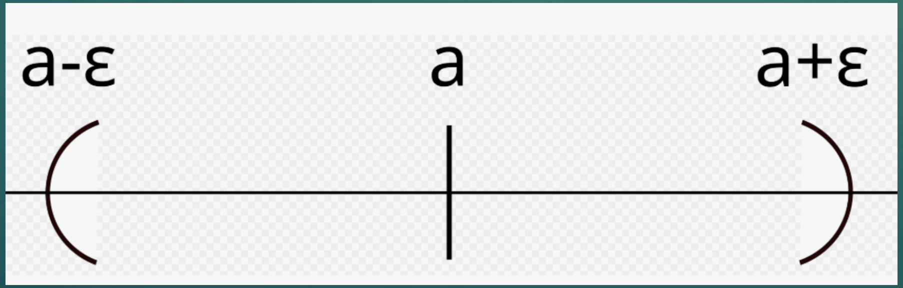
Предел числовой последовательности

- **Неформальное определение.**
- Предел числовой последовательности – величина, к которой стремятся члены последовательности при стремлении n к бесконечности.
- $x_n = \frac{(-1)^n}{n}$
- $n = 100;\ x_{100} = \frac{1}{100}$
- $n = 1001;\ x_{1001} = \frac{-1}{1001}$
- $n = \infty;\ x_\infty =?$

Предел числовой последовательности

- **Формальное определение.**
- Число а называется пределом числовой последовательности, если для любого положительного числа ε существует натуральное число N, такое что для всех n>N выполняется условие $|x_n - a| < \varepsilon$.
- $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, если $\forall\varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N} |\ \forall n > N\ |x_n - a| < \varepsilon$

Эпсилон-окрестность



Предел числовой последовательности

- **У** последовательности
- $x_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$
- предела **нет!**

- **Если у последовательности есть предел, то он единственный.**

Предел числовой последовательности

- **Пример 2.1**
- **Доказать, что предел последовательности $x_n = \frac{1}{n+3}$** равен нулю.
- **Необходимо указать $N(\varepsilon)$, такое что, для N>n все члены последовательности окажутся внутри эпсилон-окрестности нуля.**
- $|x_n - a| < \varepsilon$**, при a=0**
- $|x_n - 0| < \varepsilon$
- $\left|\frac{1}{n+3} - a\right| < \varepsilon$
- $n > \left[\frac{1}{\epsilon} - 3\right]$

Предел числовой последовательности

- **Пример 2.2**
- **Доказать, что:**
- $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n-1}{n^2} = 0$

- **Пример 2.3**
- **Доказать, что:**
- $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n-5}{n+1} = 1$

Предел числовой последовательности

- **Пример 2.4**
- **Доказать, что:**
- $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} \neq 1$
- $\exists \varepsilon > 0 |\ \forall N \in \mathbb{N}\ \ \forall n > N\ |x_n - a| > \varepsilon$

Предел числовой последовательности

Последовательность называется **бесконечно малой**, если её предел равен нулю.

Последовательность называется **ограниченной сверху**, если:

$$\exists M \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad x_n < M$$

Последовательность называется **ограниченной снизу**, если:

$$\exists m \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad x_n > M$$

Последовательность называется **ограниченной**, если она ограничена сверху и снизу.

Предел числовой последовательности

Предел последовательности равен бесконечности:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \infty, \text{если} \quad \forall E > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \mid \forall n > N \ |x_n| > E$$

Последовательность называется **бесконечно большой**, если её предел равен бесконечности.:

Бесконечно большая последовательность стремится к $+\infty$:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty, \text{если} \quad \forall E > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \mid \ \forall n > N \quad x_n > E$$

Бесконечно большая последовательность стремится к $-\infty$:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty, \text{если} \quad \forall E > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \mid \ \forall n > N \quad x_n < -E$$

Предел числовой последовательности

Последовательность сходится, если её предел отличен от бесконечности.

Бесконечно большая последовательность является неограниченной и расходится.

Предел числовой последовательности

Пример 2.4

Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty}(n^2-1)=+\infty$

Пример 2.5

Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{-n^2}{n+1}=-\infty$

Предел числовой последовательности

Арифметика пределов

Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A;\ \lim\limits_{n\to\infty} b_n = B$

1) $\forall \alpha, \beta \epsilon \mathbb{R}\ \lim\limits_{n\to\infty}(\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha \lim\limits_{n\to\infty} a_n + \beta \lim\limits_{n\to\infty} b_n = \alpha A + \beta B$
2) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} b_n = A \cdot B$
3) Если $B \neq 0$ и $b_n \neq 0\ \ n \in \mathbb{N}$, то $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n} = \frac{A}{B}$
4) Если $\exists n_0 \mid \mathrm{a_n} \leq b_n\ \forall n > n_0$, то $A \leq B$
5) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^{b_n} = (\lim\limits_{n\to\infty} a_n)^{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}$

Предел числовой последовательности

Неопределённости

Для следующих выражений значение предела не определено:

$\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$, $\left(\frac{0}{0}\right)$, $(0 \cdot \infty)$, $(\infty - \infty)$, (1^{∞}), (0^{∞}), (∞^{0})

Справочный материал

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$$

$$a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$$

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$

$$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = (a+b)^3$$

$$a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = (a-b)^3$$

$$a^3 + b^3 = (a+b)\left(a^2 - ab + b^2\right)$$

$$a^3 - b^3 = (a-b)\left(a^2 + ab + b^2\right)$$

Основные тригонометрические тождества

1. $sin^2t + cos^2t = 1$

$1 - sin^2t = cos^2t$

$1 - cos^2t = sin^2t$

2. $tgt = \dfrac{sint}{cost}$

3. $ctgt = \dfrac{cost}{sint}$

4. $tgt \cdot ctgt = 1$

5. $tg^2t + 1 = \dfrac{1}{cos^2t}$

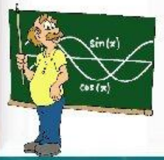
6. $ctg^2t + 1 = \dfrac{1}{sin^2t}$

7. $\sin(-t) = -sint$

8. $tg(-t) = -tgt$

9. $ctg(-t) = -ctgt$

10. $\cos(-t) = cost$



Справочный материал

Синус и косинус суммы и разности аргументов

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$$

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\ \sin\ \beta$$

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\ \sin\ \beta$$

Произведение синусов и косинусов

$$\sin\alpha\cos\beta=\tfrac{1}{2}(\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta))$$

$$\sin\alpha\sin\beta=\tfrac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta))$$

$$\cos\alpha\cos\beta=\tfrac{1}{2}(\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta))$$

№	Формулы половинного угла
4.1	$\sin\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$
4.2	$\cos\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$
4.3	$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$
4.4	$\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}=\frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}=\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}$

Сумма и разность синусов и косинусов

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

Предел числовой последовательности

Вычисление пределов

Пример 3.1

Вычислить предел: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^3+3n^2-1}{10n^2+12n}$

Пример 3.2

Вычислить предел: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^3+3n^2-1}{2n^4+n^2+1}$

Пример 3.3

Вычислить предел: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(3n+1)^2-(2n-1)^2}{n^2+2n+1}$

Предел числовой последовательности

Вычисление пределов

Пример 3.4

Вычислить предел: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)!+3n^2n!}{5(n+2)!+n!}$

Пример 3.5

Вычислить предел: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n\sqrt[6]{n}+\sqrt[5]{32n^{10}+1}}{(n+\sqrt[4]{n})\sqrt[3]{n^3-1}}$

Пример 3.6

Вычислить предел: $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+2n+3}-n)$

Предел числовой последовательности

Число e,
второй замечательный предел

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

Пример 4.1

Вычислить предел $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{3}{n}\right)^n$

Пример 4.2

Вычислить предел $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{5n}\right)^n$

Пример 4.3

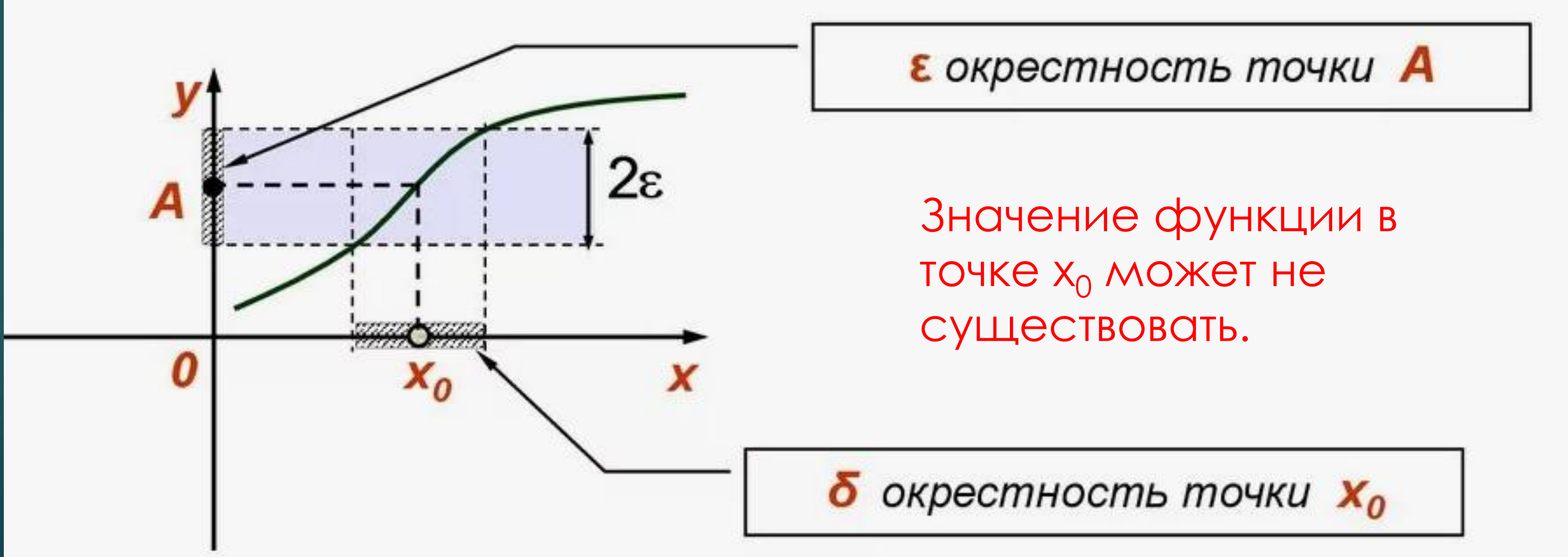
Вычислить предел $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n$

Предел функции

Определение предела по Коши

Пусть функция f(x) определена на множестве действительных чисел.
Число A называется пределом функции f(x) в точке x_0, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для любого x, такого что $0 < |x - x_0| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \iff \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 |\ \forall x \in \mathbb{R} \wedge 0 < |x - x_0| < \delta\ |f(x) - A| < \varepsilon$$



Значение функции в точке x_0 может не существовать.

Предел функции

Пример 5.1

Используя определение предела, доказать, что:

$$\lim_{x \to 2}(5x - 1) = 9$$

Пример 5.2

Используя определение предела, доказать, что:

$$\lim_{x \to -3} \frac{2x^2 + 5x - 3}{x + 3} = -7$$

Предел функции

Арифметика пределов

1) Предел постоянной величины равен этой величине:

$\lim\limits_{x\to a} C = C$ где C – константа.

2) Предел суммы (разности) функций:

$$\lim_{x\to a}\left(g(x) \pm m(x)\right) = \lim_{x\to a} g(x) \pm \lim_{x\to a} m(x)$$

3) Предел произведения функций:

$$\lim_{x\to a}\left(g(x) \cdot m(x)\right) = \lim_{x\to a} g(x) \cdot \lim_{x\to a} m(x)$$

Следствие: $\lim\limits_{x\to a} C \cdot g(x) = C \cdot \lim\limits_{x\to a} g(x)$

4) Предел частного функций:

$$\lim_{x\to a}\left(\frac{g(x)}{m(x)}\right) = \frac{\lim\limits_{x\to a} g(x)}{\lim\limits_{x\to a} m(x)}, \text{ при условии, что } \lim_{x\to a} m(x) \neq 0$$

5) $\lim\limits_{x\to a} g(x)^{m(x)} = (\lim\limits_{x\to a} g(x))^{\lim\limits_{x\to a} m(x)}$

6) Если f – элементарная функция, то $\lim\limits_{x\to a} f\left(g(x)\right) = \text{f}(\lim\limits_{x\to a} g(x))$

Предел функции

Бесконечно-малые и бесконечно-большие функции

Функция m(x) называется бесконечно-малой при x стремящемся к a, если $\lim_{x \to a} m(x) = 0$

Функция g(x) называется бесконечно-большой при x стремящемся к a, если $\lim_{x \to a} m(x) = +\infty$ или $\lim_{x \to a} m(x) = -\infty$

Если m(x) бесконечно-малая функция, то $\frac{1}{m(x)}$ - бесконечно-большая функция.

Если g(x) бесконечно-большая функция, то $\frac{1}{g(x)}$ - бесконечно-малая функция.

Предел функции

Непосредственное вычисление пределов

Пример 5.3
Вычислить предел:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+3x}{x^2-2}$$

Пример 5.4
Вычислить предел:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2+3x}{x^2-2}$$

Пример 5.5

Вычислить предел:

$$\lim_{x\to \sqrt{2}}\frac{x^2+3x}{x^2-2}$$

Предел функции

Раскрытие неопределённости вида $\frac{0}{0}$

Пример 5.6
Вычислить предел:

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 9}{x^2 - 3x}$$

Пример 5.7
Вычислить предел:

$$\lim_{x \to 5} \frac{x^2 - 7x + 10}{x^2 - 9x + 20}$$

Пример 5.8

Вычислить предел:

$$\lim_{x \to 0} \frac{x}{\sqrt{1 + 3x} - 1}$$

Предел функции

Раскрытие неопределённости вида $\frac{\infty}{\infty}$

Пример 5.7
Вычислить предел:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^4-x^2+2}{x^3-x+1}$$

Пример 5.8
Вычислить предел:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+x^4}{x^5+x^6}$$

Пример 5.9

Вычислить предел:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{10x^2-x-6}{3x-x^2}$$

Предел функции

Первый замечательный предел

$$\lim_{x\to 0}\frac{sinx}{x}=1 \qquad \lim_{x\to 0}\frac{tgx}{x}=1$$

Пример 5.10
Вычислить предел:

$$\lim_{x\to 0}\frac{sinx}{3x}$$

Пример 5.11

Вычислить предел:

$$\lim_{x\to 0}\frac{sin5x}{x}$$

Предел функции

Первый замечательный предел

Пример 5.12
Вычислить предел:

$$\lim_{x\to 0}\frac{tg3x}{x}$$

Пример 5.13

Вычислить предел:

$$\lim_{x\to 0}\frac{sin3x}{sin5x}$$

Предел функции

Второй замечательный предел

$$\lim_{x\to\infty}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e \qquad \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = e$$

Пример 5.14

Вычислить предел:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^{x}$$

Пример 5.15

Вычислить предел:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{5x}\right)^{x}$$

Предел функции

Второй замечательный предел

Пример 5.16
Вычислить предел:

$$\lim_{x\to\infty}(1+4x)^{\frac{3}{5x}}$$

Пример 5.17

Вычислить предел:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1+x}{x}\right)^{\frac{x}{2}}$$

Предел функции

Эквивалентные бесконечно-малые

Таблица эквивалентностей бесконечно малых функций

1	$\sin x \sim x$
2	$\arcsin x \sim x$
3	$\operatorname{tg} x \sim x$
4	$\operatorname{arctg} x \sim x$
5	$\ln(1+x) \sim x$
6	$1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}$
7	$e^x - 1 \sim x$
8	$a^x - 1 \sim xlna$
9	$(1+x)^m - 1 \sim mx$
10	$\log_a x \sim \frac{x}{\ln a}$

Предел функции

Эквивалентные бесконечно-малые

Пример 5.18

Вычислить предел:

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2 \sin^2 3x}{1 - \cos x^2}$$

Пример 5.19

Вычислить предел:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(x^2 - 7x + 11)}{x - 2}$$

Пример 5.20

Вычислить предел:

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{2x} - e^{x}}{x sin\, 3x + \operatorname{tg} x}$$