

## Задачи по теме «Пределы»

### 1. Математическая индукция

1.1) Доказать, что для любого натурального  $n$ :

- а) число  $7^n - 1$  кратно 6;
- б) число  $5^n - 4n + 15$  кратно 16;
- в) число  $n(2n^2 - 3n + 1)$  кратно 6;
- г) число  $2n^3 + 3n^2 + 7n$  кратно 6;
- д) число  $6^{2n-2} + 3^{n+1} + 3^{n-1}$  кратно 11;
- е) число  $5 \cdot 2^{3n-2} + 3^{3n-1}$  кратно 19;

1.2) Доказать, что при любом натуральном  $n$  верны равенства:

- а)  $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ ;
- б)  $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$ ;
- в)  $2 + 4 + 6 + \dots + 2n = n(n + 1)$ ;
- г)  $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ ;
- д)  $1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + (2n - 1)^2 = \frac{n(4n^2+1)}{3}$ ;
- е)  $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \dots + n)^2$ ;
- ж)  $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + n(n + 1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$ ;
- з)  $\left(1 - \frac{1}{4}\right) \left(1 - \frac{1}{9}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{n+1}{2n}$  при  $n \geq 2$ ;
- и)  $\frac{1}{1 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 9} + \dots + \frac{1}{(4n-3)(4n+1)} = \frac{n}{4n+1}$ ;

1.3) Доказать, что при любом натуральном  $n$  верны неравенства:

- а)  $2^n > 5n$ , при  $n \geq 5$ ;
- б)  $3^n > 5n + 1$ , при  $n \geq 3$ ;
- в)  $\frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} < \frac{5n-2}{2n}$ ;
- г)  $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} > \frac{13}{24}$ , при  $n \geq 2$ ;



## 2. Определение предела

### 2.1 Доказать:

1.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0$
2.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n} = 0$
3.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-1+(-1)^{n+1}}{n} = 0$
4.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-(-1)^n}{n} = 0$
5.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n-1} = \frac{1}{2}$
6.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-n}{1+n} = -1$
7.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2-1}{n^2} = 1$
8.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2+3n^2}{n^2} = 3$
9.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-2}{\sqrt[3]{2n-9}} = 0$
10.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{\sqrt{n+1}} = 0$
11.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cos\left(\frac{\pi n}{2}\right) = 0$
12.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin n}{\sqrt{n+1}} = 0$
13.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2-2}{n^3} = 0$
14.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n^3+1} = 0$
15.  $\lim_{n \rightarrow \infty} (-0.1)^n = 0$
16.  $\lim_{n \rightarrow \infty} 0.3^n = 0$
17.  $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0, |q| < 1$
18.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{\sqrt{n^2+n}} = 2$
19.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{q^n}{n} = 0, |q| \leq 1$
20.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{0.2^n}{5n} = 0$
21.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n}{(n+1)4^n} = 0$
22.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n2^n} = 0$
23.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \neq 1$
24.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{(n+1)4^n} \neq 1$
25.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-n}{n} \neq 0$
26.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{1+n} \neq 1$
27.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+n}{3-n} \neq -2$
28.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4+n}{1+n} \neq 0$
29.  $\lim_{n \rightarrow \infty} (n+3)^2 = +\infty$
30.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} = +\infty$
31.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{\sqrt{n}} = +\infty$
32.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2-n}{2n+1} = +\infty$
33.  $\lim_{n \rightarrow \infty} (-n^2+4) = -\infty$
34.  $\lim_{n \rightarrow \infty} (2-\sqrt{n+6}) = -\infty$
35.  $\lim_{n \rightarrow \infty} n \sin\left(\frac{\pi}{2} + \pi n\right) = \infty$
36.  $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \operatorname{tg}\left(\frac{\pi+2\pi n}{4}\right) = \infty$



### 3. Вычисление пределов последовательностей

#### 3.1 Вычислить пределы:

- |  |  |
|--|--|
| 1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1+2n)^3 - 8n^3}{(1+4n)^2 + n^2}$  | 2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2-3n)^2}{(n-3)^3 - (n+3)^3}$  |
| 3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(4-n)^3 - (3-n)^3}{(1-n)^3 - (1+n)^3}$   | 4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2-n)^3 + (1-n)^3}{(1+n)^2 - (1+n)^4}$   |
| 5) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+2+3+\dots+n}{\sqrt{n^4+2}}$  | 6) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+3+5+\dots+(2n-1)}{1+2+3+\dots+n}$  |
| 7) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\dots+\frac{1}{3^n}}{1+\frac{1}{5}+\frac{1}{5^2}+\dots+\frac{1}{5^n}}$ | 8) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\dots+\frac{1}{2^n}}{1+\frac{1}{7}+\frac{1}{7^2}+\dots+\frac{1}{7^n}}$ |
| 9) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+3)! + (n+1)!}{(n+2)!}$  | 10) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3n+1)! + (3n+2)!}{(3n+3)! - (3n+2)!}$  |
| 11) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^2+3} + n^2}{\sqrt[4]{n^{12}+2n+1} - n^2}$  | 12) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{10n^3 - \sqrt{n^3+2}}{\sqrt{4n^6+3} - n}$   |
| 13) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2n^3+3} - \sqrt{n+5}}{\sqrt[3]{n^3+2} - \sqrt{n-1}}$  | 14) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^5+3} - \sqrt{n-2}}{\sqrt[4]{n^4+2} - \sqrt{n-2}}$   |
| 15) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^{n+1} + 4^{n+1}}{3^{n+4n}}$   | 16) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n - 3^{n+1}}{2^{n+1} + 2^{n+2}}$  |
| 17) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{(n+2)(n+1)} - \sqrt{(n-1)(n+3)})$  | 18) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n(n+6)} - n)$  |
| 19) $\lim_{n \rightarrow \infty} n(\sqrt[3]{4+8n^3} - 2n)$   | 20) $\lim_{n \rightarrow \infty} (n + \sqrt[3]{3-n^3})$  |

#### 3.2 Вычислить пределы последовательностей, используя первый замечательный предел:

- |   |  |
|---|--|
| 1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{4n}\right)^n$                | 2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{6n}\right)^n$               |
| 3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{3n}\right)^{n^2}$            | 4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{4}{5n}\right)^{n^2}$           |
| 5) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{n-1}$           | 6) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{3n}\right)^{3n}$            |
| 7) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{5}{n^2+2n+7}\right)^{1-n^2}$    | 8) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{6-n^2+3n}\right)^{2n^2-6n}$ |
| 9) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2+3}{n^2+2}\right)^{n^2}$         | 10) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2-6}{n^2+8}\right)^{1-n^2}$     |
| 11) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^3+1}{n^3}\right)^{4+n^2}$        | 12) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2-n^3}{-n^3-1}\right)^{n^2+1}$    |
| 13) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n^3-3n+8}{4+2n^3}\right)^{n^2+1}$ | 14) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1+2n+3n^2}{3n^2-8n}\right)^{5n}$  |
| 15) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{5-n^2}{4-n^2}\right)^{6n^3}$       | 16) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2-3}{n^2+2}\right)^{2n^3}$      |



## 4. Вычисление пределов функций

### 4.1 Вычислить пределы функций, используя непосредственное вычисление пределов:

- |  |  |
|--|--|
| 1) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+2x+2}{x^2-1}$         | 2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2+x}{4x^3+x+10}$     |
| 3) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+3) \cdot (x-2)}{x+2}$ | 4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x+4}{1-x}$             |
| 5) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{5x+4}{1-x}$               | 6) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3-4x+5}{x^2+6}$       |
| 7) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{3}{2x-6}$                 | 8) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2-5x-3}{4x^2-13x+3}$ |
| 9) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{4x^2-5x-1}{2x^2-x-1}$     |  |

### 4.2 Раскрыть неопределённость и вычислить пределы:

- |   |  |
|---|--|
| 1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^3+x}{x}$              | 2) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-9}{x^2-2x-3}$       |
| 3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1}-1}{x}$        | 4) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2-4}{x+2}$           |
| 5) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{3-x}{x^3-27}$            | 6) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{3x^2-11x+6}{2x^2-5x-3}$ |
| 7) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x-5}{2-\sqrt{x-1}}$      | 8) $\lim_{x \rightarrow \sqrt{5}} \frac{x^4-25}{x^2-5}$  |
| 9) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{x^2-9}$             | 10) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2-8x+15}{x^2-25}$    |
| 11) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2-8x+4}{5x^2-14x+8}$ | 12) $\lim_{x \rightarrow 6} \frac{x-6}{\sqrt{x+3}-3}$    |
| 13) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{x+4}-2}$       | 14) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{4x^2-7x-2}{5x^2-9x-2}$ |
| 15) $\lim_{x \rightarrow 7} \frac{\sqrt{x+2}-3}{x^2-49}$  | 16) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-4}{x^3-2x^2+x-2}$  |

### 4.3 Раскрыть неопределённость и вычислить предел:

- |   |  |
|---|--|
| 1) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^3+2x-3}{x^3-x^2+10}$                                     | 2) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^4+2x^3+4x}{x^3-4x^4+1}$                                   |
| 3) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2-7x+5}{x^3+7x^2+3}$                                      | 4) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x-23}{x^3+30x^2-10}$  |
| 5) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^5+2x^4+2x^3-x}{x^4+x^2+1}$                               | 6) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-7x^3+5x-3}{x^2+x-3}$  |
| 7) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^3}{4(2-x)^2} - \frac{x}{4} \right)$                | 8) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^3}{x^2-4} - x \right)$                              |
| 9) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{3x^2}{2x+1} - \frac{(2x-1)(3x^2+x+2)}{4x^2} \right)$ | 10) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^3}{2x^2-1} - \frac{x^2}{2x+1} \right)$             |
| 11) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^3}{x^2+1} - x \right)$                            | 12) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^2+x-x}} \right)$   |
| 13) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{5x^3+1}{1-x} + \frac{20x^3+x-4}{4x} \right)$        | 14) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^3+6}+\sqrt{x^3-1}}{\sqrt[4]{(2+x)-x}\sqrt{x}}$      |
| 15) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[4]{(x^7+3)}+\sqrt[3]{(x^8-x)}}{\sqrt[4]{x^3+5}-x^2}$ | 16) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[6]{(x^8+3)}+\sqrt[4]{(x^8+1)}}{\sqrt[5]{x^7+5}+3x^2}$ |



#### 4.4 Вычислить предел:

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 6x}{x}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 8x}{2x}$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 10x}{5x}$$

$$7) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 2x}{x^2}$$

$$9) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2}{1 - \cos x}$$

$$11) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{\sin 3x}$$

$$13) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos^2 x}{x^2 \cos x}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{\sin x}$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \operatorname{ctg} x$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 4x}{2x}$$

$$8) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x}{\sin 10x}$$

$$10) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin (2x-2)}{x-1}$$

$$12) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan^2 3x}{2x^2}$$

$$14) \lim_{x \rightarrow 0} \sin 3x \cdot \operatorname{ctg} 5x$$

#### 4.5 Вычислить предел:

$$1) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{3x}\right)^x$$

$$3) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-1}{x}\right)^{3x+5}$$

$$5) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$$

$$7) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-2}{x+3}\right)^{4-x}$$

$$9) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{5x-3}{5x+4}\right)^{3x-1}$$

$$11) \lim_{x \rightarrow \infty} (1-x)^{\frac{2}{x}}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{5x}$$

$$4) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2-1}{x^2}\right)^{2x^2}$$

$$6) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{x-1}$$

$$8) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+1}$$

$$10) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x^2+2}{2x^2+1}\right)^{x^2}$$

$$12) \lim_{x \rightarrow \infty} (1+x)^{\frac{4-x}{x}}$$

#### 4.6 Вычислить предел с помощью эквивалентных бесконечно-малых:

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2+x}{\sin 5x}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{7x}-1}{21x-x^2}$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot \arcsin 2x}{1 - \cos 4x}$$

$$7) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{20 \cdot \ln(1+\frac{x}{2})}{\tan 8x}$$

$$9) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{\sqrt[7]{1+x}-1}$$

$$11) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5^{2x}-1}{\tan 5x}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x}-1}{\operatorname{tg} 2x}$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 5x}{1 - \cos x}$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan 6x}{\sin 12x}$$

$$8) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{21 \cdot \ln(1+\frac{x}{3})}{7x-x^5}$$

$$10) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+3x)}{\sqrt[6]{1+x}-1}$$

$$12) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4^{-5x}-1}{\sin 5x}$$



$$13) \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{\sqrt[5]{x} - 1}$$

$$15) \quad \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\tan 4x}{\tan 5x}$$

$$17) \quad \lim_{x \rightarrow e} \frac{\ln x - 1}{x - e}$$

$$14) \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{9x^2 - 9}{\sqrt[9]{x} - 1}$$

$$16) \quad \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin 3x}{\sin 8x}$$

$$18) \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\ln 2x - 1}{2x - e}$$