Раздел 1. Функции нескольких переменных

§1. Основные понятия функции нескольких переменных

Определение. Пусть задано множество D упорядоченных пар чисел (x, y). Соответствие f, которое каждой паре чисел $(x, y) \in D$ сопоставляет одно и только одно число $z \in R$, называется ***функцией двух переменных***, определенной на множестве D со значениями в R, и записывается в виде $z = f(x; y)$.

При этом x, y - ***независимые переменные (аргументы)***

z - ***зависимая переменная (функция).***

Например,

$$z = \sqrt{(x-1)(3-y)},$$

$$z = \ln(2x + 5y).$$

Замечание. *Аналогичные рассуждения могут быть применены к функции трех и т.д. переменных.*

Множество $D = D(f) = \{(x,\ y)\}$ - ***область определения функции.***

Множество значений, принимаемых z в области определения, называется ***множеством значения функции***, обозначается $E(f)$.

Примером функции двух переменных служит ***площадь*** S ***прямоугольника*** со сторонами, длины которых равны $x, y : S = xy$. Область ***определения*** этой функции есть множество $\{(x, y) / x > 0,\ y > 0\}$.

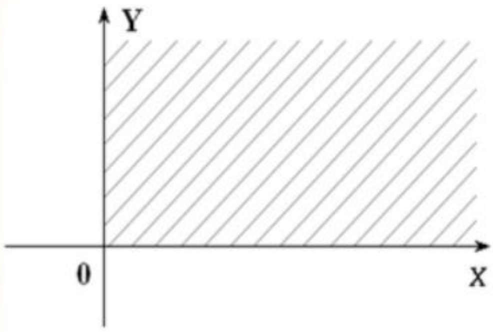


рис. 2

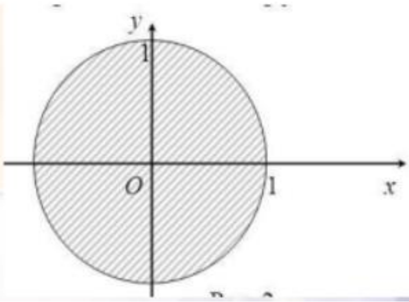
Найти и изобразить область определения функции

$$z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$$

Для того, чтобы z имело действительное значение, нужно, чтобы под корнем стояло неотрицательное число, т. е. x и y должны удовлетворять неравенству

$$1 - x^2 - y^2 \geq 0 \quad \text{или} \quad x^2 + y^2 \leq 1$$

Все точки $M(x, y)$, координаты которых удовлетворяют указанному неравенству, лежат в круге радиуса 1 с центром в начале координат и на границе этого круга.



Областью определения функции может быть вся плоскость или её часть, ограниченная некоторыми линиями.

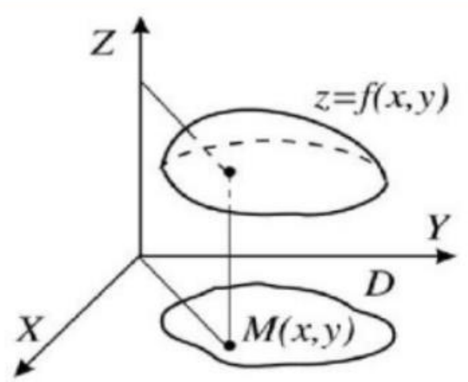
Линию, ограничивающие область, называют ***границей области***.

Точки области, не лежащие на границе, называются ***внутренними***.

Область, состоящая из одних внутренних точек, называется ***открытой***.

Область с присоединенной к ней границей называется ***замкнутой***.

Графиком функции двух переменных $z=f(x,y)$ называется множество точек трехмерного пространства (x,y,z), координаты которых связаны соотношением $z=f(x,y)$.



Построение ***графика функции двух переменных*** во многих случаях представляет значительные затруднения.

Для наглядности изображения функций двух переменных используются так называемые ***линии уровня функции***.

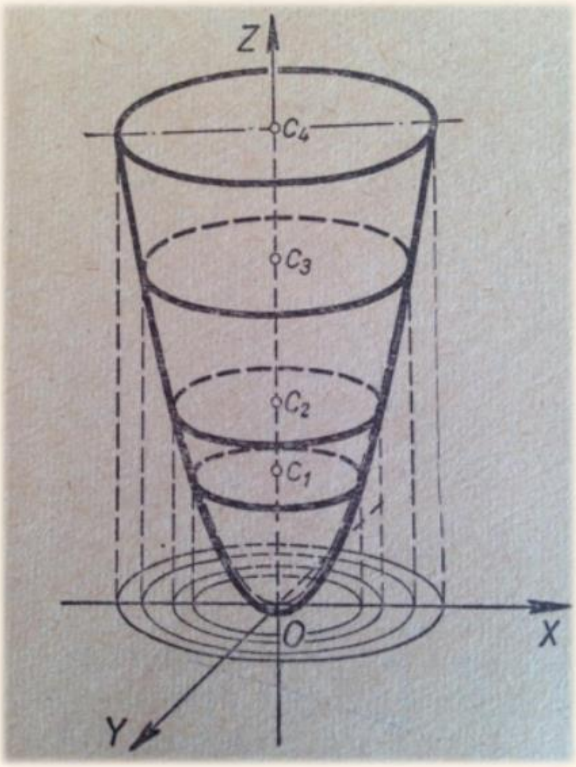
Определение. Линиями уровня функции $z = f(x\,;\,y)$ называется геометрическое место точек плоскости, в которых функция принимает одно и то же постоянное значение c. Её уравнение имеет вид $f(x;\,y) = c$.

Изменяя c, получаем ряд линий уровня, по взаимному расположению которых можно получить представление о графике функции, то есть о форме поверхности.

Пример.

Построить линии уровня функции $z = x^2 + y^2$.
Для нахождения линии уровня функции пересечем поверхность $z = x^2 + y^2$ плоскостью $z = c$. Получим линию уровня $x^2 + y^2 = c$.
Придавая с различные значения: $c_1 = 1,\ c_2 = 2, \dots$ получаем семейство окружностей с центром в начале координат и радиусами $\sqrt{1}, \sqrt{2}, \dots$

Графиком функции является поверхность вращения вокруг оси OZ.
Из курса аналитической геометрии известно, что уравнение $z = x^2 + y^2$ определяет параболоид вращения, осью которого служит OZ.



§2. Предел и непрерывность функции нескольких переменных

Для функции двух (*и большего числа*) переменных вводится понятие предела функции и непрерывности, аналогично случаю одной переменной.

Определение. Множество всех точек $M(x, y)$ плоскости, координаты которых удовлетворяют неравенству $\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$, называется δ ***- окрестность точки*** $M_0(x_0, y_0)$.

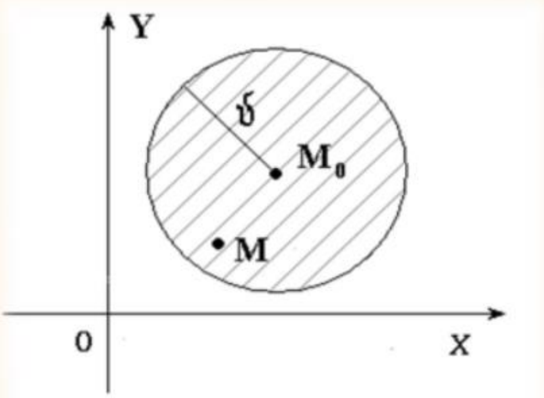


рис. 3

Другими словами, δ - ***окрестность точки*** M_0 - это внутренние точки круга с центром M_0 и радиусом δ.

Определение. Пусть функция $z = f(x, y)$ определена в некоторой окрестности точки $M_0(x_0, y_0)$, кроме, быть может, точки.
Число А называется ***пределом функции*** $z = f(x, y)$ при $x \to x_0$, $y \to y_0$, если $\forall\ \varepsilon > 0, \exists\ \delta > 0$ такое, что $\forall\ x \neq x_0$, $y \neq y_0$, удовлетворяющих неравенству $\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta$ выполняется неравенство $|f(x, y) - A| < \varepsilon$ и это обозначают

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = A$$

Замечание. *Из определения следует, что если существует предел, то он не зависит от пути, по которому М стремится к M_0 (число таких направлений бесконечно, для функции одной переменной $x \to x_0$ по двум направлениям: слева и справа).*

Замечание. *Основные теоремы о пределах функций одной переменной справедливы и для функций двух и большего числа переменных (о пределе суммы, произведения и частного).*

Пример.

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ y\to 2}}\left(\frac{x^2+4y}{2xy-1}\right)=3$$

$$\lim_{\substack{x\to 2\\ y\to 2}}\frac{x^2-y^2}{x^2+2x-xy-2y}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{\substack{x\to 2\\ y\to 2}}\frac{(x-y)(x+y)}{(x+2)(x-y)}=\lim_{\substack{x\to 2\\ y\to 2}}\frac{x+y}{x+2}=1$$

Приближение к точке по прямой (y=kx):

Пример. Найти предел функции $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$.

Будем приближаться к точке $(0,0)$ по прямой $y=kx$, $k-\forall$ *число*.

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2-k^2x^2}{x^2+k^2x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1-k^2}{1+k^2}=\frac{1-k^2}{1+k^2}.$$

Предела не существует, т.к. при разных значениях k предел не одинаков. (нарушается единственность предела).

Непрерывность функции двух переменных:

Определение. Функция $z = f(x, y)$ называется ***непрерывной в точке*** $M_0(x_0, y_0)$, если она определена в некоторой ее окрестности, в том числе и в самой точки и если предел функции в точке равен значению функции в этой точке.

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = f(x_0, y_0)$$

Определение. Функция называется ***непрерывной*** на некоторой ***области***, если она непрерывна в каждой точке этой области.

Определение. Точки в которых непрерывность нарушается, называются ***точками разрыва этой функции***. Точки разрыва $z = f(x, y)$ могут образовывать целые ***линии разрыва***.

Пример. Найти точки разрыва функции $z = \dfrac{2-x}{y-x}$.

Функция теряет смысл, если знаменатель обращается в нуль,

т.е. $y - x = 0 \Rightarrow y = x$ - линия разрыва функции.

Замечание. *Основные теоремы о непрерывности функций одной переменной справедливы и для функций двух и большего числа переменны.*

Свойства функций, непрерывных в ограниченной замкнутой области

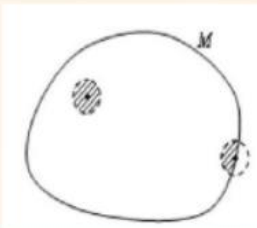
Областью называется множество точек плоскости, обладающих свойствами ***открытости*** и ***связности***.

Свойства открытости: каждая точка принадлежит области вместе с некоторой окрестностью этой точки.

Свойства связности: любые две точки области можно соединить непрерывной линией, целиком лежащей в этой области.

Точка M называется ***граничной точкой области*** D, если она не принадлежит D, но в её окрестности лежат точки этой области.

Совокупность граничных точек области D называется ***границей*** D.



Область D с присоединенной е ней границей называется ***замкнутой*** областью.

Область называется ***ограниченной***, если все её точки принадлежат некоторому кругу радиуса R.

§3. Частные производные функции нескольких переменных

Пусть функция $z = f(x, y)$ определена в некоторой окрестности точки $(x;y)$.

Придадим переменной x в точке $(x;y)$ произвольное приращение Δx, оставляя значение переменной y неизменным, т.е. перейдем на плоскости от точки $(x;y)$ к точке $(x+\Delta x, y)$. При этом Δx такое, что $(x+\Delta x, y)$ лежит в указанной окрестности.

$\Delta_x z = f(x+\Delta x,\ y) - f(x,\ y)$ - ***частное приращение*** функции по переменной x.

$\Delta_y z = f(x,\ y+\Delta y) - f(x,\ y)$ - ***частное приращение*** функции по переменной y.

Определение. Если существует конечный предел

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x z}{\Delta x} \quad \left(\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta_y z}{\Delta y}\right),$$

то он называется ***частной производной*** функции $z = f(x, y)$ в точке (x, y) по переменной x (y) и обозначают

$$z'_x,\ f'_x,\ \frac{\partial f}{\partial x},\ \frac{\partial z}{\partial x} \quad \left(z'_y, f'_y, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial z}{\partial y}\right).$$

Из определения следует, что частная производная функции двух переменных по переменной x представляет собой обыкновенную производную функции одной переменой x при фиксированном значении переменной y.

Пример:

Найти частные производные функции

$$z = y^2 e^x + 4xy^3 - \ln x$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \left(y^2 e^x + 4xy^3 - \ln x\right)'_x = y^2 e^x + 4y^3 - \frac{1}{x}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \left(y^2 e^x + 4xy^3 - \ln x\right)'_y = 2ye^x + 12xy^2$$

Определение. Частные производные от частных производных $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ называются ***частными производными второго порядка*** функции $f(x, y)$.

Функция $f(x, y)$ имеет четыре частные производные второго порядка

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y},$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

Частные производные $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ называются ***смешенными производными второго порядка.***

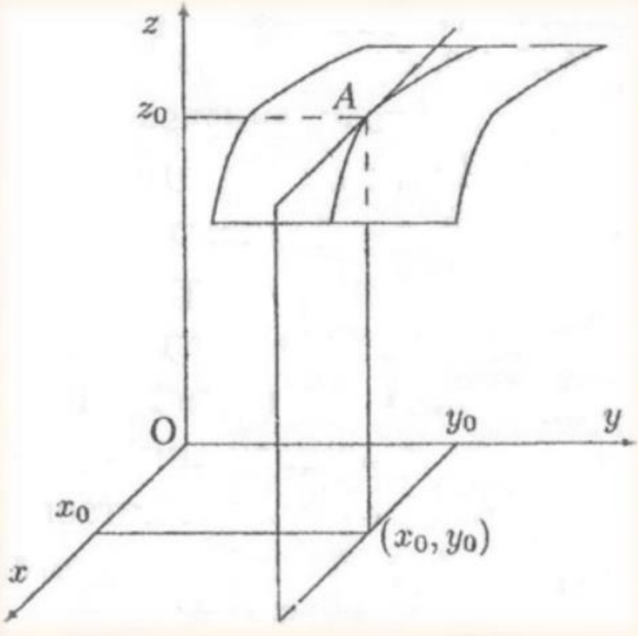
Теорема. Если $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ существуют в некоторой окрестности точки $(x;y)$ и непрерывны в самой точке, то они равны между собой в этой точке и имеет место равенство $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$.

Геометрический смысл частных производных функции двух переменных

Известно, что функция $z = f(x, y)$ геометрически может быть представлена как поверхность в пространстве, в которой введена прямоугольная система координат OXYZ.

Обозначим буквой A некоторую точку рассматриваемой поверхности с координатами (x_0, y_0) и $z_0 = f(x_0, y_0)$.

Проведем через точку A плоскость, параллельную координатной плоскости XOZ.



Уравнение ее примет вид $y = y_0$. В пересечении этой плоскости и данной поверхности получаем кривую, проходящую через точку $A(x_0, y_0, z_0)$ и принадлежащую поверхности.

Эта кривая в плоскости $y = y_0$ имеет уравнение $z = f(x, y_0)$ - функция одной переменной. Угловой коэффициент касательной к кривой $z = f(x, y_0)$ в точке с координатами (x_0, y_0, z_0) будет $k_x = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$.

Аналогично можно получить угловой коэффициент $k_y = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$.

Таким образом, ***первые частные производные от функции*** $z = f(x, y)$ в точке (x_0, y_0) дают ***угловые коэффициенты касательных*** к линиям пересечения поверхности $z = f(x, y)$ с плоскостями, параллельными соответствующим координатным плоскостям и проходящим через точку А(x_0, y_0, z_0).

§4. Дифференцируемость и полный дифференциал ФНП. Геометрический смысл дифференциала ФНП.

- ***Теорема.*** Если функция $z = f(x, y)$ дифференцируема в точке $M(x;y)$, то она имеет в этой точке ***частные производные*** $f'_x(x, y)$, $f'_y(x, y)$, причем $f'_x(x, y) = A$, $f'_y(x, y) = B$ - конечные.
- Пусть функция $z = f(x, y)$ определена в некоторой окрестности точки $M(x;y)$. Придадим переменным x и y приращения Δx и Δy.

Составим ***полное приращение функции*** в точке $M(x;y)$:

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$$

- ***Определение.*** Функция $z = f(x, y)$ называется ***дифференцируемой в точке*** $M(x;y)$, если ее полное приращение в этой точке можно представить в виде:

$$\Delta z = A \cdot \Delta x + B \cdot \Delta y + \alpha \cdot \Delta x + \beta \cdot \Delta y, \qquad (1)$$

$$A, B \in R,\ \alpha \to 0, \beta \to 0 \text{ при } \Delta x \to 0 \text{ и } \Delta y \to 0$$

- ***Определение. Дифференциалом функции*** двух переменных называется ***главная линейная часть*** её приращения $dz = A \cdot \Delta x + B \cdot \Delta y$ или

$$dz = f'_x(x, y)dx + f'_y(x, y)dy$$

- Формула для вычисления ***полного дифференциала*** имеет вид

$$\boxed{dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy}$$

где $d_x z = \frac{\partial z}{\partial x}dx,\quad d_y z = \frac{\partial z}{\partial y}dy$ - ***частные дифференциалы*** функции $z = f(x, y)$.

- ***Теорема.*** Если функция $z = f(x, y)$ дифференцируема в точке $M(x;y)$, то она ***непрерывна*** в этой точке.

- ***Теорема***

(достаточное условие дифференцируемости функции)

Если функция $z = f(x, y)$ имеет частные производные не только в точке $(x;y)$ но и в ее окрестности и эти производные непрерывны в самой точке, то функция ***дифференцируема в точке*** $(x;y)$.

- ***Замечание.*** Аналогично тому, как дифференциал функции одной переменной геометрически представляет собой приращение «ординаты касательной» дифференциал функции двух переменных есть приращение «аппликаты касательной плоскости».

Пример 1: $z = \sin^2 x + \cos^2 y \qquad dz = ?$

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = (\sin^2 x + \cos^2 y)'_x = 2\sin x \cdot \cos x = \sin 2x$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = (\sin^2 x + \cos^2 y)'_y = -2\cos y \cdot \sin y = -\sin 2y$$

$$dz = \sin 2x \cdot dx - \sin 2y \cdot dy$$

Применение дифференциала к приближенным вычислениям

- Пусть функция $z = f(x, y)$ дифференцируема в точке $(x;y)$, т.е. полное приращение

$$\Delta z = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y) = A\,\Delta x + B\,\Delta y + \alpha\,\Delta x + \beta\,\Delta y,$$

α, β – б.м., $\Delta x, \Delta y \to 0$

- Это равенство можно переписать так

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y) \approx f(x, y) + A\Delta x + B\,\Delta y \quad \text{или}$$

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y) \approx f(x, y) + f'_x(x, y)\Delta x + f'_y(x, y)\Delta y$$

- формула для приближенных вычислений.

Пример . Вычислить приближенно значение функции $\sqrt{1{,}02^3 + 1{,}97^3}$.

Решение. Рассмотрим функцию $f(x, y) = \sqrt{x^3 + y^3}$.

Тогда имеем $\sqrt{1{,}02^3 + 1{,}97^3} = \sqrt{(x+\Delta x)^3 + (y+\Delta y)^3}$,

где $x = 1,\ \Delta x = 0{,}02,\ y = 2,\ \Delta y = -0{,}03$.

$$f'_x(x, y) = \frac{3x^2}{2\sqrt{x^3 + y^3}}, \quad f'_y(x, y) = \frac{3y^2}{2\sqrt{x^3 + y^3}}.$$

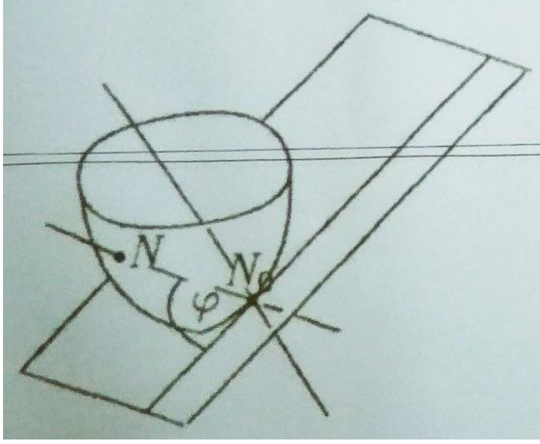
Следовательно, по формуле

$$\sqrt{1{,}02^3 + 1{,}97^3} \approx \sqrt{1+2^3} + \frac{3}{2\sqrt{1+2^3}}\cdot 0{,}02 + \frac{3\cdot 2^2}{2\sqrt{1+2^3}}\cdot(-0{,}03) \approx$$

$$\approx 3 + 0{,}01 + 2\cdot(-0{,}03) \approx 3 - 0{,}05 = 2{,}95.$$

§5. Касательная плоскость к поверхности. Дифференциалы высших порядков.

• ***Определение (касательной плоскости к поверхности).*** Плоскость, проходящая через точку N_0 поверхности, называется ***касательной плоскостью*** к поверхности в точке N_0, если угол φ между секущей N_0N и этой плоскостью стремится к нулю, когда расстояние $|N_0N|$ стремится к нулю, каким бы образом точка N на поверхности не стремилась к точке N_0.



• ***Определение.*** ***Касательная плоскость*** к поверхности $z = f(x, y)$ в точке $N_0(x_0, y_0)$ задается уравнением

$$z - z_0 = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

• ***Определение.*** Прямая, проходящая через точку N_0 и перпендикулярная касательной плоскости, построенной в этой точке поверхности, называется ее ***нормалью***. Задается уравнением

$$\frac{x - x_0}{f'_x(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{f'_y(x_0, y_0)} = \frac{z - z_0}{-1}$$

Дифференциалы высших порядков ФНП

- Пусть функция $z = f(x, y)$ дифференцируема в некоторой окрестности точки $(x;y)$, тогда она имеет дифференциал первого порядка

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$$

~~dz зависит от x, y, dx, dy.~~

Произвольно фиксируем dx, dy - const.

Тогда имеем функцию двух переменных x и y, дифференцируемую в точке $(x;y)$ и ее дифференциал имеет вид:

$$d(dz) = d\left[\frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy\right] = \left[\frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy\right]'_x dx + \left[\frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy\right]'_y dy =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)(dx)^2 + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)dydx + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)dxdy + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)(dy)^2$$

Таким образом $d^2 z = \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2 + 2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}dydx + \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2$

~~- *дифференциал второго порядка* для функции~~ $z = f(x, y)$.

При условии, что смешанные производные $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$, непрерывны и существуют.

$(dx)^2 = dx \cdot dx = dx^2$

dz – дифференциал

$\dfrac{dz}{dx}$ – производная

- ***Замечание.*** Для n-го дифференциала функции $z = f(x, y)$ в точке $(x;y)$ справедлива формула $d^n z = d\left(d^{n-1} z\right)$.
- ***Замечание.*** *Формула для $d^n z$ напоминает разложения двучлена в n-ой степени по формуле Ньютона.*
- ***Замечание.*** *Нетрудно заметить, что дифференциал второго порядка имеет вид иной, чем дифференциал первого порядка* ***(нарушение инвариантности)***.

§6. Производная сложной ФНП

Пусть $z = f(x, y)$ функция двух переменных x и y, каждая из которых, в свою очередь, является функцией независимой переменной t: $x = x(t)$, $y = y(t)$.

Тогда функция $z = f(x(t), y(t))$ является ***сложной*** функцией ***независимой переменной*** t, а переменные x и y - ***промежуточные переменные***. Имеет место теорема.

Теорема. Если функции $x = x(t)$, $y = y(t)$ дифференцируемы в точке t, а функция $z = f(x, y)$ дифференцируема в точке $(x(t), y(t))$, то ***сложная функция*** $z = f(x(t), y(t))$ также дифференцируема в точке t. При этом производная сложной функции вычисляется по формуле:

$$\boxed{\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}} \qquad (1)$$

Пример 2

$z = x \cdot \sin\frac{x}{y}$, $x = 1 + 3t$, $y = \sqrt{1 + t^2}$ Найти $\frac{dz}{dt}$ (или z'_t)

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}$$

$$\frac{dx}{dt} = (1 + 3t)'_t = 3$$

$$\frac{dy}{dt} = \left(\sqrt{1 + t^2}\right)'_t = \frac{t}{\sqrt{1 + t^2}}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \left(x \cdot \sin\frac{x}{y}\right)'_x = \sin\frac{x}{y} + \frac{x}{y} \cdot \cos\frac{x}{y}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \left(x \cdot \sin\frac{x}{y}\right)'_y = x \cdot \cos\frac{x}{y}\left(-\frac{x}{y^2}\right) = -\frac{x^2}{y^2}\cos\frac{x}{y}$$

$$\frac{dz}{dt} = \left(\sin\frac{x}{y} + \frac{x}{y} \cdot \cos\frac{x}{y}\right)3 - \frac{x^2}{y^2}\cos\frac{x}{y} \cdot \frac{t}{\sqrt{1 + t^2}}$$

Замечание (частный случай).

Пусть $z = f(x, y)$, где $y = y(x)$.

То есть $z = f(x, y(x))$ - ***сложная функция одной независимой переменной*** x.

Согласно формуле (1) имеем (*вместо t будет x*)

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dx} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} \quad \text{или} \quad \frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx}.$$

Замечание (общий случай).

Пусть функции $u = u(x, y)$, $\vartheta = \vartheta(x, y)$ дифференцируемы в точке (x, y), а функция $z = f(u, \vartheta)$ дифференцируема в точке (u, ϑ), где $u = u(x, y)$, $\vartheta = \vartheta(x, y)$.

Тогда сложная функция $z = f(u(x, y), \vartheta(x, y))$ дифференцируема в точке (x, y), причем ее частные производные находятся по формулам:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{\partial z}{\partial u} \cdot \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial z}{\partial \vartheta} \cdot \dfrac{\partial \vartheta}{\partial x} \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{\partial z}{\partial u} \cdot \dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial z}{\partial \vartheta} \cdot \dfrac{\partial \vartheta}{\partial y} \end{cases}$$

§7. Производная неявной ФНП

Пусть задано уравнение $F(x, y, z) = 0$.
Этим уравнением может быть определена одна функция от двух переменных, например $z = f(x, y)$.

Теорема *(существования и дифференцируемости неявной функции)*

Если функция $F(x, y, z)$ и ее производные $F'_x(x, y, z)$, $F'_y(x, y, z)$, $F'_z(x, y, z)$ определены и непрерывны в некоторой окрестности точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$, причем $F(x_0, y_0, z_0) = 0$, а $F'_z(x, y, z) \neq 0$, то существует окрестность точки M_0, в которой уравнение $F(x, y, z) = 0$ определяет единственную функцию $z = f(x, y)$, непрерывную и дифференцируемую в окрестности точки (x_0, y_0) и $z_0 = f(x_0, y_0)$.

Причем существуют частные производные и справедливы формулы для их нахождения:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_z}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y}{F'_z}$$

Пример 3

найти частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ для функции заданной неявно $e^z + z - x^2y = 1$

$F(x,y,z) = 0 \qquad z = f(x,y)$

$F(x,y,z) = e^z + z - x^2y - 1$

$F'_x = (e^z + z - x^2y - 1)'_x = -2xy$

$F'_y = (e^z + z - x^2y - 1)'_y = -x^2$

$F'_z = (e^z + z - x^2y - 1)'_z = e^z + 1$

$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2xy}{e^z+1} \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x^2}{e^z+1}$

Замечание. Если уравнение поверхности задано в неявном виде $F(x, y, z) = 0$, то уравнение ***касательной плоскости*** в точке $M_0(x_0, y_o, z_0)$ имеет вид:

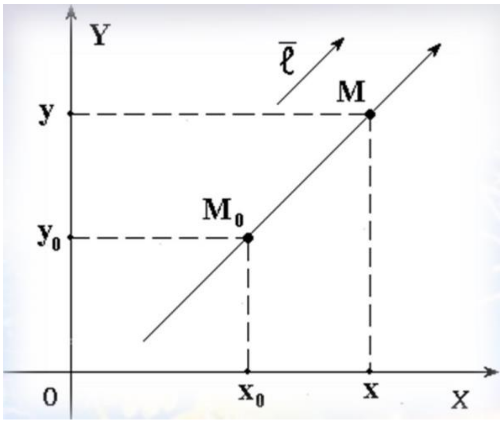
$$(F'_x)_{M_0}(x - x_0) + (F'_y)_{M_0}(y - y_0) + (F'_z)_{M_0}(z - z_0) = 0$$

Уравнение же ***нормали*** к поверхности в этой точке будет следующим:

$$\frac{x - x_0}{(F'_x)_{M_0}} = \frac{y - y_0}{(F'_y)_{M_0}} = \frac{z - z_0}{(F'_z)_{M_0}}$$

§8. Производная по направлению. Градиент.

Рассмотрим функцию двух переменных $z = f(x, y)$, и пусть она определена в некоторой окрестности точки $M_0(x_0, y_0)$, и пусть задано некоторое направление, т.е. вектор $\overline{\ell}$.



Через точку M_0 проведем прямую, параллельную $\overline{\ell}$ и на этой прямой фиксируем точку $M(x, y)$.

Обозначим

$$M_0M = \begin{cases} |M_0M|, \text{если направление совпадает с } \overline{\ell} \\ -|M_0M|, \text{если направление противоположно} \\ \text{направлению } \overline{\ell} \end{cases}$$

Где $|M_0M|$ понимается, как расстояние от M_0 до M.

Определение. Если существует конечный предел $\lim\limits_{M\to M_0}\dfrac{f(M)-f(M_0)}{M_0M}$, при условии, что точка $M\to M_0$ по лучу $\overline{\ell}$, то он называется ***производной функции*** $z=f(x,y)$ ***по направлению*** $\overline{\ell}$ в точке $M_0(x_0,y_0)$ и обозначается

$$\frac{\partial z}{\partial \ell}=\lim_{M\to M_0}\frac{f(M)-f(M_0)}{M_0M}$$

Производная в данном направлении характеризует быстроту изменение функции f (x;y) по направлению $\overline{\ell}$.

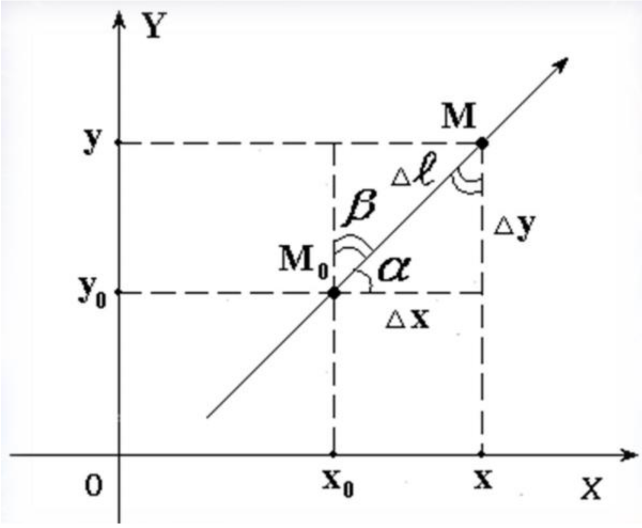
Определение. Если функция $z=f(x,y)$ дифференцируема в точке $M_0(x_0,y_0)$, то в этой точке существует ***производная этой функции по направлению и справедлива формула***

$$\frac{\partial z}{\partial \ell}=\frac{\partial z}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial z}{\partial y}\sin\alpha$$

где α - угол, образованный вектором $\overline{\ell}$ и осью OX.

Из геометрии известно, что

$$\frac{\Delta x}{\Delta \ell} = \cos\alpha\ , \quad \frac{\Delta y}{\Delta \ell} = \sin\alpha = \cos\beta$$



Определение. Градиентом функции $z = f(x, y)$ в точке $M(x;y)$ называется вектор, координаты которого равны соответствующим частным производным $\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}$, взятым в точке $M(x;y)$ и обозначаются

$$\boxed{grad\, z = \frac{\partial z}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial z}{\partial y}\bar{j}}$$

Замечание. Производная функции в направлении $\overline{\ell}$ связана с градиентом функции формулой:

$$\frac{\partial z}{\partial \ell} = np_{\ell}\, grad\, z = \left(grad\, z, \frac{\ell}{|\ell|} \right)$$

Т.е. производная по направлению равна скалярному произведению градиента функции на вектор единичной длины.

Направление градиента функции в точке есть направление наибольшей скорости возрастания функции в точке.

§9. Экстремумы ФНП

- ***Определение.*** Пусть $z = f(x, y)$ определена в некоторой окрестности точки $M_0(x_0, y_0)$ и выполняется неравенство $f(x_0, y_0) \geq f(x, y)$ $[f(x_0, y_0) \leq f(x, y)]$, то говорят, что функция $z = f(x, y)$ имеет ***max (min)*** в точке $M_0(x_0, y_0)$.
- *При этом если неравенства строгие, то говорят о строгом max (min).*
- *Значение функции в точке **max (min)** называется **максимумом (минимумом) функции.***
- ***Максимум (минимум) функции называют ее экстремумами.***

- ***Теорема (необходимое условие экстремума)***

Если дифференцируемая функция $z = f(x, y)$ имеет экстремум в точке $M_0(x_0, y_0)$, то обе частные производные функции $z = f(x, y)$ в этой точке равны нулю, т.е. $\begin{cases} f'_x(x_0, y_0) = 0 \\ f'_y(x_0, y_0) = 0 \end{cases}$

Эти точки ***называются стационарными***.

- ***Теорема (достаточное условие экстремума)***

Пусть в стационарной точке $M_0(x_0, y_0)$ функция $f(x, y)$ имеет непрерывные частные производные до второго порядка и их значения равны:

$$A = f''_{xx}(x_0, y_0), \quad B = f''_{xy}(x_0, y_0), \quad C = f''_{yy}(x_0, y_0)$$

Обозначим $\Delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2$.

Тогда:

если $\Delta > 0$, то функция $f(x, y)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$ имеет ***экстремум***:

max, если $A < 0$; ***min***, если $A > 0$;

если $\Delta < 0$, то функция $f(x, y)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$ ***экстремума не имеет;***

если $\Delta = 0$, экстремум в точке $M_0(x_0, y_0)$ может быть, может не быть. Необходимы дополнительные исследования.

§10. Нахождение наибольших и наименьших значений ФНП

- Пусть в некоторой ограниченной замкнутой области D задана дифференцируемая функция $z = f(x, y)$ и требуется найти наибольшее и наименьшее значения этой функции в области D.

- Так как функция дифференцируема в области D, то наибольшее и наименьшее значение во внутренних точках области могут достигаться только в точках экстремума.

- Поэтому внутри области D нужно найти все точки, в которых возможен экстремум. Затем, не выясняя, имеет ли функция $f(x, y)$ в этих точках экстремумы, вычислить значения функции во всех найденных точках.

- Далее следует принять во внимание, что функция может принимать наибольшее и наименьшее значения на границе области D.

- Поэтому нужно отдельно найти наибольшее и наименьшее значение функции на границе области. При этом можно использовать уравнение границы области, что позволит уменьшит число независимых переменных у функции и свести задачу к исследованию функции одной переменной.

- Сравнивая все полученные таким образом значения функции, выбираем из них наибольшее и наименьшее.

§11. Условный экстремум ФНП

• Иногда приходится решать задачу о нахождении экстремума функции при условии, что ее аргументы удовлетворяют некоторым дополнительным ограничениям.

Это и есть задача нахождения условного экстремума, то есть найти экстремум при каком-то условии.

• *Нахождение условного экстремума производиться путем введения множителя Лагранжа.*

• Рассмотрим дифференцируемую функцию $z = f(x, y)$. Чтобы найти ***условный экстремум*** этой функции при наличии ***уравнения связи*** $\varphi(x, y) = 0$, составляем ***функцию Лагранжа:***

$$F(x, y) = f(x, y) + \lambda \varphi(x, y) \qquad \textbf{(1)}$$

где λ- ***неопределенный множитель Лагранжа***, и ищем экстремум функции.

• ***Необходимые условия экстремума функции Лагранжа*** записываются в виде системы уравнений (частные производные независимых переменных приравненных к нулю и уравнения связи):

$$\begin{cases} F'_x(x, y) = 0, \\ F'_y(x, y) = 0, \\ \varphi(x, y) = 0. \end{cases}$$

• Находим x и y, они дадут координаты точки условного экстремума.

• Вопрос о ***существовании и характере условного экстремума*** решается на основании изучения знака ***дифференциала второго порядка*** функции Лагранжа:

$$d^2F = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}dy^2$$

(при условии, что $dx^2 + dy^2 \neq 0$).

А именно, функция $f(x,y)$ имеет

условный max, если $d^2F < 0$

и, ***условный min, если*** $d^2F > 0$.

Пример. Найти условный экстремум для функции $z = 9 - 8x - 6y$
при условии, что $x^2 + y^2 = 25$

$$F(x,y,\lambda) = 9 - 8x - 6y + \lambda(x^2+y^2-25)$$

$$F'_x = \left(9-8x-6y+\lambda(x^2+y^2-25)\right)'_x = -8+2\lambda x$$

$$F'_y = \left(9-8x-6y+\lambda(x^2+y^2-25)\right)'_y = -6+2\lambda y$$

$$\begin{cases} -8+2\lambda x = 0 \\ -6+2\lambda y = 0 \\ x^2+y^2 = 25 \end{cases} \quad \boxed{\begin{cases} \lambda x = 4 \\ \lambda y = 3 \\ x^2+y^2 = 25 \end{cases}} \quad \begin{cases} \lambda^2 x^2 = 16 \\ \lambda^2 y^2 = 9 \\ x^2+y^2 = 25 \end{cases}$$

$$\lambda^2 x^2 + \lambda^2 y^2 = 25$$

$$\lambda^2 (x^2+y^2) = 25$$

$$\lambda^2 \cdot 25 = 25$$

$$\boxed{\lambda = \pm 1}$$

подставляем сюда

и получаем

Стац. точки:

$\lambda = 1$, $x = 4$, $y = 3$

$\lambda = -1$, $x = -4$, $y = -3$

$$F''_{xx} = 2\lambda, \quad F''_{xy} = 0, \quad F''_{yy} = 2\lambda$$

$$d^2F = 2\lambda\, dx^2 + 2\lambda\, dy^2 = 2\lambda(dx^2+dy^2)$$

1) $(4,3)$ при $\lambda = 1$

$$d^2F = 2(dx^2+dy^2) > 0$$ значит это точка min

$$(4,3) - \min, \quad Z_{min}(4,3) = 9 - 8\cdot 4 - 6\cdot 3 = 9 - 32 - 18 = 9 - 50 = -41$$

2) $(-4,-3)$ при $\lambda = -1$

$$d^2F = -2(dx^2+dy^2) < 0$$ значит это точка max

$$(-4,-3) - \max, \quad Z_{max}(-4,-3) = 9 + 8\cdot 4 + 6\cdot 3 = 9 + 32 + 18 = 59$$