

1. PRINCIPIUL MODULAȚIEI CODATE TRELLIS

1.1. INTRODUCERE

Cele mai multe dintre mediile de transmisiune sunt canale de tip trece-bandă și pe ele nu se pot transmite direct semnalele în banda de bază, deoarece banda de frecvențe utilizabilă a acestor canale nu include zona frecvențelor joase, în care se găsește o mare parte din energia semnalelor în banda de bază. Este necesar deci să se translateze spectrul de frecvențe al semnalelor din banda de bază în banda utilizabilă a suportului de transmisiune. În acest scop, se va folosi o metodă de modulație la emisie, ceea ce implică, desigur, operația de demodulare la recepție.

În transmisiunile de date, se folosesc toate metodele de modulație clasice (de amplitudine - MA, de frecvență - MF, de fază - MΦ) în multe variante. Alegerea metodei de modulație, pentru o anumită aplicație, se face ținând seama de anumite criterii, cum sunt: tipul canalului (raportul semnal-zgomot, lărgimea benzii de frecvențe disponibile), debitul datelor, performanțele metodei în raport cu imperfecțiunile canalului de transmisiune, eficiența utilizării benzii de frecvențe, complexitatea echipamentului și altele. Tehnicile de modulație existente nu satisfac simultan în întregime aceste criterii. În sistemele de comunicație digitale, cea mai utilizată măsură a performanței este *rata erorilor de bit* (mai general, de *simbol*), definită drept raport între numărul mediu al *bijilor* (mai general, al *simbolurilor*) reconstituiri eronat la recepție și numărul total de biți (de simboluri) ce sosesc la receptor într-o transmisiune de date. Rata erorilor de bit este o funcție de raportul dintre energia semnalului pe bit și densitatea spectrală de putere a zgomotului, acesta din urmă considerat de obicei ca fiind aditiv, alb

și Gaussian. Orice canal de comunicație are o bandă de frecvențe finită și suportă o putere limitată a semnalelor ce trec prin el. Aceste două limitări sunt esențiale pentru proiectarea sistemelor de comunicație. Totuși, pentru un canal particular, una din cele două limitări este dominantă. Astfel, un canal telefonic este considerat de bandă limitată (300 – 3400 Hz), deși nici puterea semnalului nu poate depăși limite prescrise (de ex., 100 mW pe o rezistență de 600Ω). Canalul radio utilizat pentru telecomanda unei sonde spațiale nu este, în principiu, limitat de banda de frecvențe, dar semnalul este foarte slab după parcurgerea unei mari distanțe în spațiul cosmic, astfel încât îl considerăm canal limitat ca putere.

Unele tehnici de modulație sunt mai performante din punct de vedere al probabilității de eroare pe bit, altele sunt mai bune în ceea ce privește eficiența utilizării benzii de frecvențe, astfel încât alegera unei anumite metode de modulație va fi determinată de cerințele aplicației.

Două criterii foarte importante în aprecierea unei tehnici de modulație sunt *eficiența în putere* și *eficiența spectrală*. Eficiența în putere exprimă abilitatea unei tehnici de modulație de a menține fidelitatea mesajului (procent mic de erori) la nivele mici ale puterii semnalului. Pentru a mări protecția față de zgomot este necesar să se mărească puterea semnalului. Cu cât trebuie mărită puterea semnalului, pentru a obține o anumită valoare pentru probabilitatea de eroare, depinde de tehnica de modulație utilizată. O măsură a eficienței în putere, pentru o anumită tehnică de modulație, este *raportul dintre energia semnalului corespunzător unui bit și densitatea spectrală de putere a zgomotului* ($\eta_P = E_b / N_0$) necesar la intrarea în receptor pentru o anumită probabilitate de eroare (spre exemplu 10^{-5}).

Eficiența spectrală este o măsură a capacitatii unei tehnici de modulație de a permite transmiterea datelor într-o bandă de frecvențe limitată. În

general, creșterea debitului datelor implică micșorarea duratei impulsului ce reprezintă un simbol digital și creșterea, ca o consecință, a lărgimii spectrului de frecvențe al semnalului. Eficiența spectrală a unei tehnici de modulație este definită ca *raportul dintre debitul datelor D și banda de frecvențe necesară B* ($\eta_B = D/B$, în b/s/Hz).

Există o limită superioară a eficienței spectrale. Conform teoremei lui Shannon privind codarea canalelor cu zgomot, eficiența spectrală maximă este limitată de zgomot și rezultă din formula capacității canalului

$$\eta_{B_{\max}} = \frac{C}{B} = \log_2 \left(1 + \frac{S}{N} \right) \quad (1.1)$$

unde C este capacitatea canalului (în b/s), B este banda (în Hz) și S/N este raportul puterilor semnal-zgomot.

De multe ori, în proiectarea sistemelor de comunicații digitale, este necesar să se facă un compromis între eficiența spectrală și eficiența în putere. Codarea pentru controlul erorii, prin biții suplimentari adăugați, implică o creștere a benzii de frecvențe necesare și deci o reducere a eficienței spectrale, dar reduce puterea necesară a semnalului recepționat pentru o anumită probabilitate de eroare. Pe de altă parte, creșterea numărului de nivele într-o tehnică de modulație micșorează banda de frecvențe necesară, dar reclamă creșterea puterii semnalului pentru a menține aceeași probabilitate de eroare datorită zgomotului.

O metodă de modulație frecvent utilizată, datorită eficienței spectrale, este modulația de amplitudine în quadratură (Quadrature Amplitude Modulation, QAM). Cu acest tip de modulație, două semnale de date în banda de bază, independente, sunt transmise în aceeași bandă de frecvențe. Acest lucru este posibil pentru că un semnal modulează un purtător

cosinusoidal, iar celălalt semnal modulează un purtător sinusoidal de aceeași frecvență. Principiul QAM este prezentat în figura 1.1.

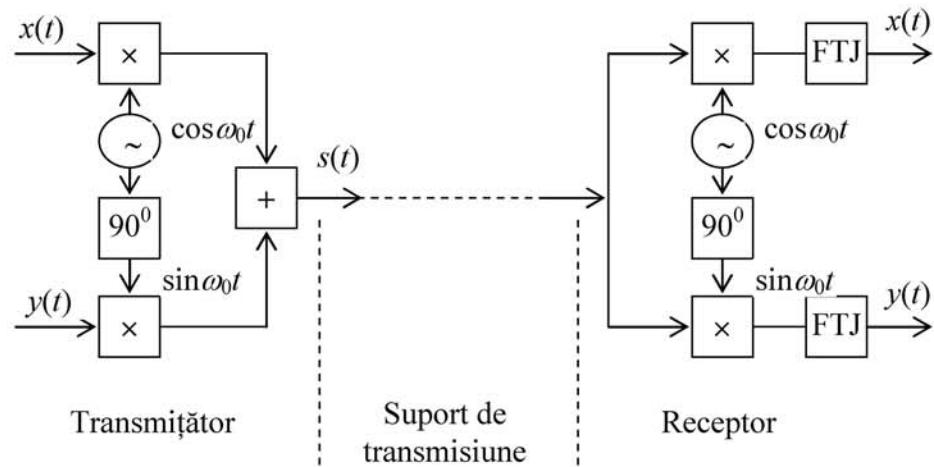


Fig. 1.1 Principiul QAM

Pentru a obține, la recepție, semnalul în banda de bază $x(t)$, semnalul QAM recepționat este multiplicat cu un purtător local $\cos \omega_0 t$:

$$s(t) \cos \omega_0 t = \frac{1}{2} [x(t) + x(t) \cos 2\omega_0 t + y(t) \sin 2\omega_0 t]$$

Componentele $x(t) \cos 2\omega_0 t$ și $y(t) \sin 2\omega_0 t$ reprezintă semnale MA cu spectrele de frecvențe centrate pe frecvența $2f_0$ și pot fi eliminate folosind un filtru trece jos. În același mod, poate fi obținut semnalul $y(t)$, semnalul recepționat $s(t)$ fiind multiplicat cu purtătorul local $\sin \omega_0 t$.

Pentru a transmite m biți într-un interval de simbol (T), fiecare grup de m biți este codat într-una din cele $M = 2^m$ stări ale purtătorului modulat, considerat ca o sumă a doi purtători în quadratură. Fiecărei stări îi corespunde un punct într-un spațiu bidimensional, cu coordonatele x_k, y_k reprezentând amplitudinile acestor purtători.

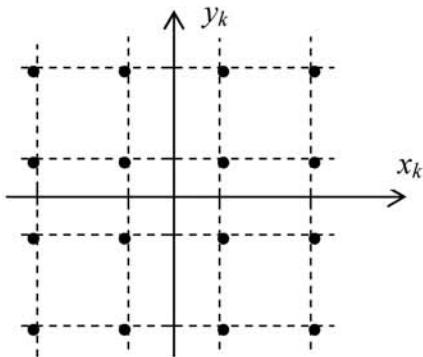


Fig. 1.2 Constelația semnalului pentru $m = 4$

Graficul tuturor punctelor (x_k, y_k) reprezentând toate stările posibile ale purtătorului modulat (în linie) se numește constelația semnalului. Figura 1.2 prezintă o constelație posibilă pentru $m = 4$.

Schema bloc a unui transmițător de date QAM este prezentată în figura 1.3.

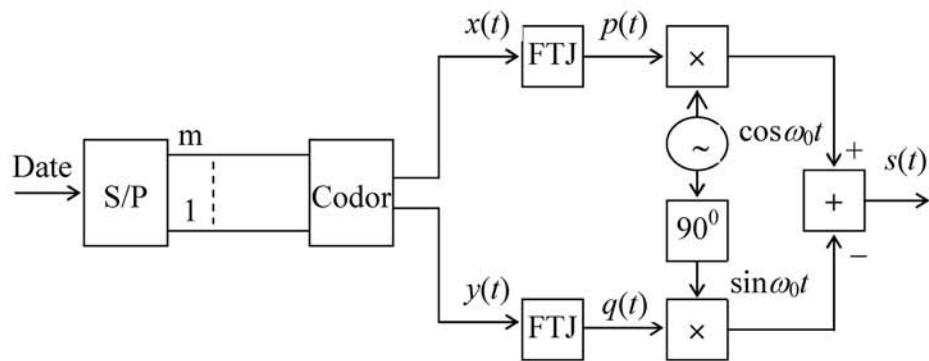


Fig 1.3 Transmițător de date QAM

Fiecare grup de m biți de la ieșirea convertorului serie-paralel îi vor corespunde două valori x_k și y_k la ieșirea codorului, pe un interval de simbol T egal cu m intervale de bit. Dacă aceste valori sunt reprezentate prin

amplitudinile unor impulsuri rectangulare, de durată T , semnalele $x(t)$ și $y(t)$ vor avea expresiile

$$x(t) = \sum_k x_k g(t - kT), \quad y(t) = \sum_k y_k g(t - kT) \quad (1.2)$$

unde $g(t)$ este impulsul rectangular de durată T și amplitudine egală cu unitatea. Filtrele trece jos, identice, au rolul să limiteze spectrele de frecvențe ale acestor semnale și să le formeze în vederea reducerii interferenței simbolurilor. Dacă răspunsul fiecărui filtru la un impuls $g(t)$ este $h(t)$, răspunsurile lor la semnalele de intrare $x(t)$ și $y(t)$ vor fi

$$p(t) = \sum_k x_k h(t - kT); \quad q(t) = \sum_k y_k h(t - kT) \quad (1.3)$$

În cazul realizării cu procesoare de semnal digitale, în loc de pulsuri $g(t)$ se vor considera impulsuri $\delta(t)$ ponderate cu x_k și y_k , iar filtrele trece jos vor avea funcția pondere $h(t)$, astfel încât semnalele $x(t)$ și $y(t)$ vor avea expresiile

$$x(t) = \sum_k x_k \delta(t - kT), \quad y(t) = \sum_k y_k \delta(t - kT) \quad (1.4)$$

iar expresiile semnalelor $p(t)$ și $q(t)$ rămân neschimbate. Semnalul QAM va avea expresia

$$\begin{aligned} s(t) &= \sum_k x_k h(t - kT) \cos \omega_0 t - \sum_k y_k h(t - kT) \sin \omega_0 t \\ &= p(t) \cos \omega_0 t - q(t) \sin \omega_0 t \end{aligned} \quad (1.5)$$

- Eficiența spectrală a sistemelor QAM -

Banda de frecvențe minimă necesară pentru transmisiuni de date în banda de bază fără interferență simbolurilor (teoretic) este egală $1/2T$, T fiind intervalul de simbol. Pentru un sistem QAM, banda minimă va fi de două ori mai mare, deci $1/T$. Considerând că fiecare dintre cele două componente ale purtătorului este modulată multinivel, cu 2^m nivele, rezultă

că fiecare componentă transportă m biți într-un interval T și eficiența spectrală a sistemului QAM fără codare este dată de relația

$$C_{MAQ} = \frac{2m/T}{1/T} = 2m \text{ biți/s/Hz} \quad (1.6)$$

Pe de altă parte, limita superioară a eficienței spectrale este dată de formula lui Shannon (1.1) și această limită este dependentă de raportul semnal-zgomot. Shannon a demonstrat existența unui procedeu de prelucrare a informației (codare) care permite, teoretic, atingerea acestei limite, cu o probabilitate de eroare la recepție arbitrar de mică.

Pentru a determina cu cât este mai mare limita teoretică a eficienței spectrale (a unui sistem cu codare) decât eficiența sistemului QAM fără codare, trebuie să se ia în considerație raportul semnal-zgomot care ar asigura o probabilitate de eroare satisfăcător de mică pentru sistemul QAM fără codare. Pentru o constelație a semnalului modulat ca în figura 1.2, cu un număr mare de puncte și cu nivelele de amplitudine x_k, y_k egale cu $\pm 1, \pm 3, \dots, \pm(M-1)$, puterea medie a semnalului pentru fiecare componentă este

$$S = (M^2 - 1)/3 = (2^{2m} - 1)/3 \quad (1.7)$$

Aproximând zona de decizie, pentru fiecare punct din constelație, cu un cerc de rază unitate, decizia asupra punctului recepționat este eronată dacă fazorul corespunzător tensiunii de zgomot are modulul mai mare decât unitatea:

$$P_e \approx P(|z| > 1) \quad (1.8)$$

Se poate demonstra că pentru zgomot gaussian, de varianță Z pentru fiecare dintre cele două componente ale sale ($\cos \omega_0 t$ și $\sin \omega_0 t$), relația (1.8) devine

$$P_e = e^{-1/2Z} \quad (1.9)$$

Cu $Z = 1/24$, se obține o probabilitate de eroare $P_e \approx 6 \cdot 10^{-6}$, ce poate fi considerată satisfăcător de mică. Introducând S din (1.7) și $Z = 1/24$ în formula eficienței spectrale teoretice, rezultă

$$C_t = \log_2 \left(1 + \frac{2^{2m} - 1}{3.1/24} \right) = 3 + 2m \text{ biți/s/Hz} \quad (1.10)$$

cu 3 biți/s/Hz mai mult decât eficiența spectrală a sistemului QAM fără codare.

Formula lui Shannon indică, prin urmare, un plus de 3 biți/s/Hz posibil de transmis față de ce permite una dintre cele mai eficiente metode de modulație, la același raport semnal-zgomot și la o probabilitate de eroare foarte mică. Altfel spus, prin codare se poate obține aceeași probabilitate de eroare, la același debit, cu un raport semnal-zgomot de 8 ori mai mic (9 dB) față de sistemul fără codare.

Luând ca exemplu circuitul telefonic vocal, cu o bandă de aproximativ 3000 Hz, rezultă că rezerva de câștig pe care o oferă codarea este de 9000 biți/s.

1.2. PRINCIPIUL MODULAȚIEI CODATE

În sistemele clasice de transmisiuni digitale, care folosesc coduri detectoare sau corectoare de erori, operația de codare efectuată în transmițător este independentă de modulație și la fel, în receptor, operația de decodare este independentă de demodulație (Fig. 1.4).

Cu un cod (n, k) , la fiecare k simboluri de informație se atașează $n-k$ simboluri redundante, de verificare. Deoarece decodorul primește numai simboluri de cod discrete, cea mai adecvată măsură a distanței pentru

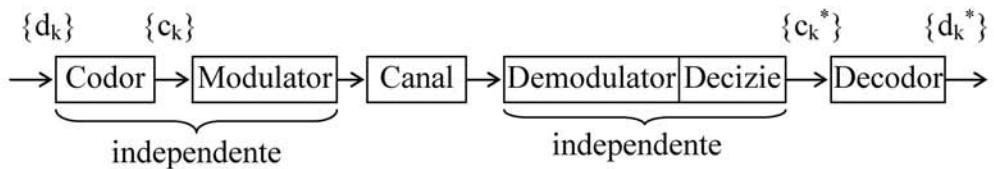


Fig. 1.4 Sistem de transmisiuni folosind codarea

decodare și, ca urmare, și pentru elaborarea codului, este distanța Hamming (numărul minim de poziții în care diferă oricare două cuvinte ale codului). Pentru a compensa reducerea vitezei de transmitere a informației, ca urmare a atașării simbolurilor de verificare, fie se mărește viteză de modulație, dacă banda de frecvențe utilizabilă a canalului permite acest lucru, fie se extinde setul punctelor din constelația semnalului modulat. În ambele cazuri va crește probabilitatea de eroare. Și totuși, când modulația și codarea se fac independent, nu se obțin rezultate satisfăcătoare.

Ca exemplu să considerăm un caz particular al QAM, cel al modulației cu patru faze (Quadriphase Shift Keying, QPSK) fără codare și modulația cu opt faze (8PSK) cu un cod corector (3, 2). Ambele sisteme transmit 2 biți pe un interval de modulație. Dacă sistemul QPSK funcționează, pentru un anumit raport semnal-zgomot, cu o probabilitate de eroare de 10^{-5} , la același raport semnal-zgomot sistemul 8PSK va prezenta un coeficient de eroare, după demodulare, de 10^{-2} , din cauza distanței mai mici dintre semnalele 8PSK. Pentru a ajunge la același coeficient de eroare ca și în sistemul QPSK, trebuie să se folosească un cod convoluțional (3, 2) cu o lungime de constrângere care necesită pentru decodare un decodator Viterbi complex cu 64 stări. Și, în final, după tot acest efort, performanța

sistemului 8PSK folosind codarea va ajunge să fie doar la fel cu cea a sistemului QPSK fără codare.

Există două cauze datorită cărora performanțele acestor sisteme, în care modulația și codarea se realizează independent una de alta, sunt nesatisfăcătoare, departe de limitele teoretice ale canalului. Una constă în faptul că, în receptor, deciziile se iau simbol cu simbol, înainte de decodare, ceea ce conduce la o pierdere ireversibilă de informație. Spre exemplu, în sistemul 8PSK, decizia este determinată de domeniul cu lărgimea de 45^0 în care se află faza semnalului recepționat la momentul de sondare corespunzător și nu contează în nici un fel cât este amplitudinea purtătorului sau chiar mărimea fazei în acel moment. Pentru a evita această pierdere de informație, ar trebui ca decodorul să opereze cu eșantioanele semnalului recepționat luate la intervale de simbol și să decodeze secvența lor în acel semnal, posibil la emisie, care este cel mai apropiat de ea.

Cealaltă cauză a rezultatelor nesatisfăcătoare obținute cu soluția clasică a codării constă în faptul că, în cazul modulației multinivel, codurile optimizate după criteriul distanței Hamming nu asigură și o structură cu o distanțare maximă a semnalelor emise. O protecție mai bună față de zgromot se asigură dacă se reprezintă secvențele datelor ce trebuie transmise prin semnale care diferă cât mai mult unul de altul. O măsură a distanței dintre două semnale este *distanța Euclidiană*. Pentru a mări distanța Euclidiană, este necesar să se extindă setul de semnale așa încât să se asigure o redundanță pentru codare, iar codarea să se facă așa încât să rezulte maximizarea distanței Euclidiene minime între secvențele de semnale modulate posibile la emisie. Această tehnică de combinare a funcțiunilor de codare și de modulație este numită *modulație codată* (coded modulation).

Fie $r_n = a_n + z_n$ eşantionul semnalului recepționat la momentul $t_n = t_0 + nT$, a_n reprezentând eşantionul semnalului emis de modulator (un punct din constelația semnalului) iar z_n eşantionul zgromotului aditiv. În cazul sistemelor cu modulație bidimensională (QAM) r_n , a_n și z_n sunt mărimi complexe. Distanța euclidiană $d_{E,a,b}$ între două secvențe $\{a_n\}$ și $\{b_n\}$ este definită prin relația

$$d_{E,a,b}^2 = \sum_n |a_n - b_n|^2 \quad (1.11)$$

Decodorul de secvență optim decodează secvența eşantioanelor $\{r_n\}$ în acea secvență $\{a_n^*\}$ din setul C al tuturor secvențelor pe care un modulator, comandat de un codor, le poate produce, secvență care prezintă cea mai mică distanță Euclidiană față de $\{r_n\}$. Secvența $\{a_n^*\}$ satisfacă relația

$$\sum_n |r_n - a_n^*|^2 = \min_{\{a_n\} \in C} \sum_n |r_n - a_n|^2 \quad (1.12)$$

Prin urmare decodorul determină secvența de semnal codat cea mai probabilă direct din secvența $\{r_n\}$ a eşantioanelor semnalului recepționat, eşantioane necuantizate, nefiind astfel implicată o operație de corecție a erorilor propriu-zisă.

Cele mai probabile erori apar prin decodarea secvenței $\{a_n\}$ transmise, în secvența $\{b_n\}$, posibilă la emisie, cea mai apropiată de $\{a_n\}$. Distanța Euclidiană minimă $d_{E_{\min}}$ pentru setul C al secvențelor posibile la emisie este dată de relația

$$d_{E_{\min}}^2 = \min_{\{a_n\} \neq \{b_n\}} \sum_n |a_n - b_n|^2 ; \{a_n\}, \{b_n\} \in C \quad (1.13)$$

Cu cât această distanță este mai mare, cu atât erorile rezultate prin decodarea de secvență sunt mai puțin probabile.

Pentru a determina care este câștigul maxim în ceea ce privește protecția față de zgomot, care se poate obține prin această metodă a modulației codate, s-a determinat capacitatea canalului cu zgomot Gaussian în cazul modulației multinivel la intrare și al observării semnalului necuantizat la ieșirea din canal. Rezultatele acestor determinări scot în evidență faptul că, prin modulația codată, se poate obține, teoretic, un câștig de 7-8 dB față de modulația multinivel necodată, iar cea mai mare parte din acest câștig se obține prin dublarea doar a setului de semnale (puncte din constelație). Spre exemplu, în cazul modulației 8PSK codate, pentru a transmite 2 biți/simbol, se obține un câștig de 7 dB față de modulația QPSK necodată, la aceeași eficiență spectrală, cu numai 1,2 dB mai puțin decât rezerva teoretică de 8,2 dB (care se obține prin extinderea fără restricții a setului de semnale).

În 1982, într-un articol științific fundamental, Gottfried Ungerboeck a revoluționat teoria clasică, introducând *modulația codată trellis* (MCT) în care modulația și codarea sunt rezultatul unui unic proces de proiectare [1.1]. Vom prezenta ca exemple chiar primele scheme propuse de Ungerboeck.

1.3. CODURI UNGERBOECK (I)

Fie o sursă de informație care generează un bit la fiecare T_b secunde. O modulație digitală performantă nu transmite însă bit cu bit. Sirul biților de informație este segmentat în blocuri de câte m biți, numite *multibiți*. Există

2^m multibiți diferenți. Fiecarui multibit îi corespunde un simbol. Multimea simbolurilor se numește *constelație de semnale*, datorită impresiei pe care o lasă reprezentarea ei grafică. Este astfel definită o bijecție între multimea celor 2^m multibiți și constelația de semnale. O constelație de semnale care permite transmiterea unor dibiți (adică, a unor blocuri de câte doi biți) este QPSK (de la *Quadriphase Shift Keying*), arătată în fig. 1.5. (a).

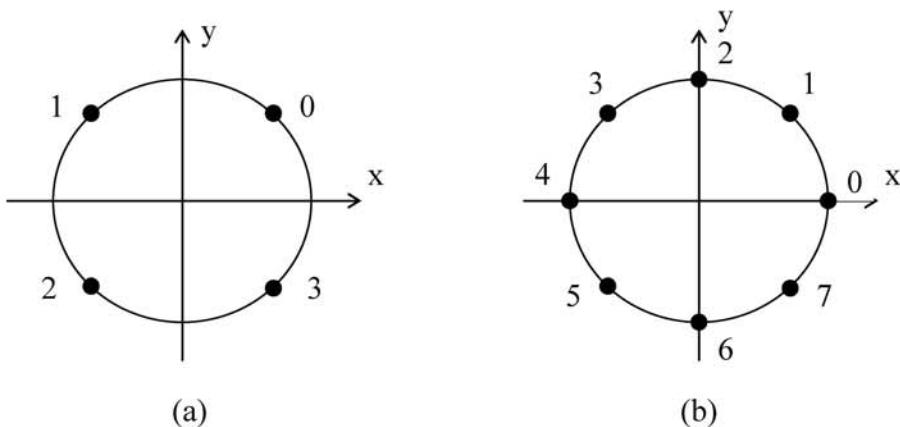


Fig. 1.5. Constelații QPSK (a) și 8-PSK (b)

În cazul modulației codate trellis, se utilizează o constelație de semnale dublă ca număr de semnale în raport cu modulația fără codare, considerată drept referință. Ambele sisteme, însă, atât cel necodat cât și cel la care se aplică MCT, transportă de la sursă la destinație același număr de biți de informație în unitatea de timp. Dacă referință este constelația de semnale din fig. 1.5. (a), o constelație cu număr dublu de simboluri (sau puncte de semnal) este 8PSK, arătată în fig. 1.5 (b).

În cazul constelației QPSK, un simbol are durată egală cu $T = 2 T_b$ secunde, iar semnalul de emisie (nefiltrat) are expresia:

$$s(t) = \sqrt{\frac{2E_s}{T}} \cos\left(2\pi f_p t + (2i-1)\frac{\pi}{4}\right), 0 \leq t \leq T \text{ și } i = 0, 1, 2, 3 \quad (1.14)$$

Un simbol din constelația 8PSK are durata $T = 3 T_b$ secunde, iar semnalul de emisie (nefiltrat) are expresia:

$$s(t) = \sqrt{\frac{2E_s}{T}} \cos\left(2\pi f_p t + i\frac{\pi}{4}\right), 0 \leq t \leq T \text{ și } i = 0, 1, \dots, 7 \quad (1.15)$$

În aceste expresii, E_s este energia pe simbol, iar f_p este frecvența undei sinusoidale purtătoare, constantă. Informația este purtată de *faza* acesteia, modificată prin modulație. Un asemenea semnal cu modulație de fază se poate scrie:

$$\begin{aligned} s(t) &= \sqrt{\frac{2E_s}{T}} \cos(2\pi f_p t + \varphi_i) \\ &= \sqrt{\frac{2E_s}{T}} \cos(\varphi_i) \cos(2\pi f_p t) - \sqrt{\frac{2E_s}{T}} \sin(\varphi_i) \sin(2\pi f_p t) \end{aligned} \quad (1.16)$$

În teoria sistemelor digitale de comunicație, se definesc două funcții $\theta_1(t)$ și $\theta_2(t)$ ce formează o *bază ortonormală* a spațiului semnalelor, astfel:

$$\theta_1(t) = \sqrt{\frac{2}{T}} \cos(2\pi f_p t) \quad (1.17a)$$

și

$$\theta_2(t) = \sqrt{\frac{2}{T}} \sin(2\pi f_p t) \quad (1.17b)$$

Funcțiile $\theta_1(t)$ și $\theta_2(t)$ sunt ortonormate deoarece au normă egală cu 1 iar produsul lor scalar este egal cu 0:

$$\langle \theta_i(t) \theta_j(t) \rangle = \int_0^T \theta_i(t) \theta_j(t) dt = \delta_{ij} \quad (1.18)$$

unde δ_{ij} este simbolul lui Kronecker. Un semnal modulat în fază (1.16) se scrie:

$$s(t) = \sqrt{E_s} (\cos \varphi_i) \theta_1(t) - \sqrt{E_s} (\sin \varphi_i) \theta_2(t). \quad (1.19)$$

Mărimea $\sqrt{E_s}$ este o simplă amplificare, un factor de scală, astfel încât, dacă punctele constelației de semnale sunt pe un cerc cu centrul în originea axelor de coordonate și cu raza egală cu 1, punctul de semnal i are coordonate $(\cos \varphi_i, \sin \varphi_i)$.

Pentru a determina un punct din constelația de semnale 8PSK, sunt necesari trei biți: $v^2 v^1 v^0$, unde v^0 este bitul cel mai puțin semnificativ. Fiecare din cele opt puncte ale constelației 8PSK este etichetat conform aşa-zisei numerotări naturale, căci vectorul de poziție al fiecărui punct face cu axa absciselor un unghi $v\pi/4$, unde variabila v ia valori de la 0 la 7 conform relației:

$$v = 4v^2 + 2v^1 + v^0. \quad (1.20)$$

Pentru început, ne propunem să proiectăm o schemă de modulație codată trellis în care unul din cei doi biți ai dibilitului de intrare rămâne necodat, iar al doilea bit intră într-un codor convoluțional de rată $1/2$, așa cum se arată în fig. 1.6.

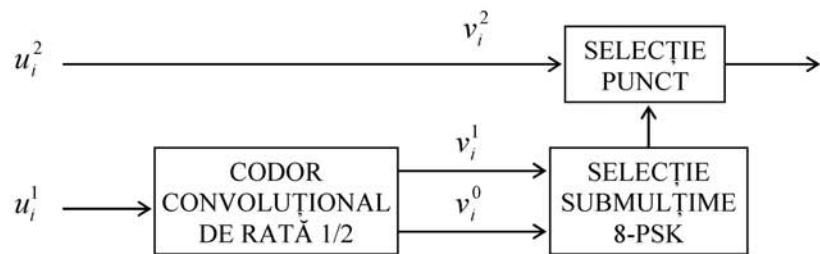


Fig. 1.6. Schema bloc a unui transmițător MCT pentru doi biți de informație pe un interval de simbol

Partiționăm constelația de semnale 8PSK în patru submulțimi S_0, \dots, S_3 astfel:

$$S_0 = \{0, 4\} \quad (1.21a)$$

$$S_1 = \{1, 5\} \quad (1.21b)$$

$$S_2 = \{2, 6\} \quad (1.21c)$$

$$S_3 = \{3, 7\}. \quad (1.21d)$$

Reunim aceste submulțimi în două familii F_0 și F_1 astfel:

$$F_0 = S_0 \cup S_2 \quad (1.22a)$$

$$F_1 = S_1 \cup S_3. \quad (1.22b)$$

Partiția s-a făcut astfel încât distanța euclidiană minimă la pătrat (DEMP) dintre punctele unei familii, notată cu δ_1^2 , să fie egală cu DEMP dintre punctele constelației de referință QPSK, și anume cu 2. Observăm că DEMP dintre punctele oricărei submulțimi S_0, \dots, S_3 este $\delta_2^2 = 4$ și că DEMP dintre punctele constelației 8PSK este $\delta_0^2 = 2 - \sqrt{2}$, astfel încât avem $\delta_0 < \delta_1 < \delta_2$.

Așa cum se vede în fig. 1.6, din cei doi biți care se prezintă la intrare în fiecare interval de semnalizare n de durată T secunde, primul, notat cu u_n^1 , intră într-un codor convoluțional de rată $\frac{1}{2}$ ai cărui biți de ieșire, notați cu v_n^0 și v_n^1 , selectează o submulțime din cele patru, iar al doilea bit, u_n^2 , rămas necodat, este renotat cu v_n^2 și determină punctul din submulțimea selectată ce va fi transmis prin modulație 8PSK. Începem proiectarea codorului convoluțional cu un registru de deplasare cu două etaje, arătat în fig. 1.7.

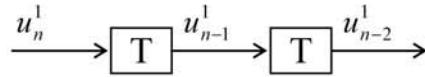


Fig. 1.7. Registr de deplasare cu două celule,
componentă a codorului conoluțional

Starea internă a codorului conoluțional este dată de conținutul registrului de deplasare, adică, de cele două variabile binare u_{n-1}^1 și u_{n-2}^1 , ambele fiind valori pe care bitul de intrare u_n^1 le-a avut în trecut, și anume, cu T , respectiv cu $2T$ secunde mai înainte. Să notăm cu s^l , $l = 0, \dots, 3$, aceste stări interne. În funcție de valoarea bitului de intrare, 0 sau 1, codorul conoluțional va trece dintr-o stare s_n^l la timpul discret n într-o stare s_{n+1}^m la timpul discret următor $n+1$: $s_n^l \rightarrow s_{n+1}^m$. Este convenabil să denumim stările cu numere în baza zece utilizând relația:

$$s_n = 2u_{n-2}^1 + u_{n-1}^1. \quad (1.23)$$

Această corespondență este arătată și în Tabelul 1.1:

Tabel 1.1

Corespondența dintre starea internă s_n și variabilele de stare u_{n-1}^1 și u_{n-2}^1

s_n	u_{n-2}^1	u_{n-1}^1
0	0	0
1	0	1
2	1	0
3	1	1

Din fig. 1.7 și acest tabel, rezultă următoarea diagramă a tranzițiilor de stare:

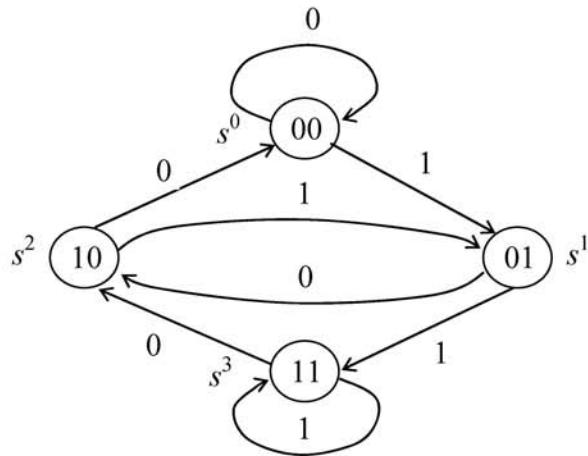


Fig. 1.8. Diagrama tranzitiei de stare pentru cordonul convolutional cu registrul de deplasare din fig. 1.7

Pe baza diagramei tranzitiei de stare, se deseneaza un graf orientat numit *trellis* in care toate stările posibile la un timp discret dat n se figureaza pe verticală, iar tranzitiiile permise din stările la timpul discret n la stările de la timpul discret următor $n+1$ se deseneaza ca arce orientate. Porțiunea dintr-un trellis cuprinzând stările în două momente succesive n și $n+1$ se numește *secțiune de trellis*. Utilizând fig. 1.8, desenăm o secțiune de trellis ca în fig. 1.9.

În modulația codată trellis, fiecare tranzitie de stare se etichetează cu o submulțime a constelației de semnale, submulțime din care biții rămași necodați selectează punctul ce urmează a fi transmis în canal. Etichetarea se face după regulile stabilite de Ungerboeck:

1. Tranzitiiile care își au originea în aceeași stare curentă primesc etichete diferite între ele și aparținând aceleiași familii, F_0 sau F_1 .
2. Tranzitiiile care ajung în aceeași stare următoare primesc etichete

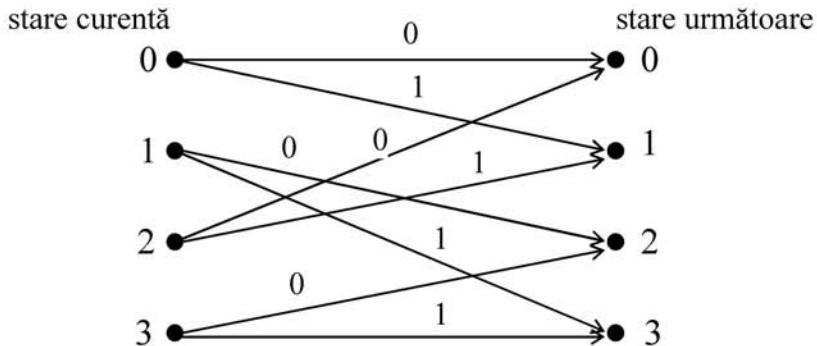


Fig. 1. 9. Secțiune trellis corespunzătoare diagramei tranzițiilor de stare din fig. 1.8

diferite între ele și aparținând aceleiași familii, F_0 sau F_1 .

3. Toate semnalele se utilizează cu aceeași frecvență.

Aplicarea acestor reguli nu duce la o etichetare unică. De regulă, se începe prin atribuirea tranziției $0 \rightarrow 0$ submulțimii S_0 care este codată 00 căci aceasta, dacă nu intervin și alte constrângeri (de ex., invarianta rotațională, după cum vom vedea în capitolul următor), ne permite să proiectăm un cod liniar, ceea ce este întotdeauna preferabil, dacă este și posibil. Conform primei reguli de mai sus, aceasta atrage după sine că tranziția $0 \rightarrow 1$ trebuie etichetată cu S_2 . Tranzițiile ce ajung în starea 1 trebuie etichetate diferit, ceea ce implică faptul că tranziția $2 \rightarrow 1$ se etichetează cu S_0 . Continuând astfel, rezultă etichetarea arătată în fig. 1.10.

Pe baza acestei etichetări, se întocmește tabla de adevăr arătată în Tabelul 1.2.

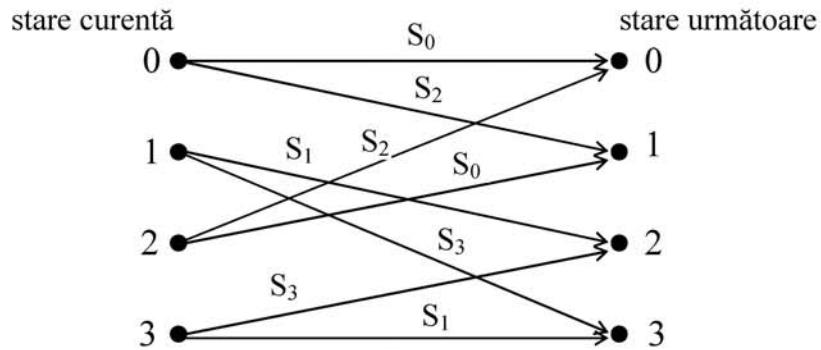


Fig. 1. 10. Secțiune trellis cu 4 stări etichetată conform regulilor lui Ungerboeck

Tabel 1.2

Tabla de adevăr pentru secțiunea trellis etichetată din fig. 1.10.

Intrare			Stare	Ieșire	
u_{n-2}^1	u_{n-1}^1	u_n^1	s_n	v_n^1	v_n^0
0	0	0	0	0	0
		1	2	1	0
0	1	0	1	0	1
		1	3	1	1
1	0	0	2	1	0
		1	0	0	0
1	1	0	3	1	1
		1	1	0	1

Din tabla de adevăr, rezultă:

$$v_n^0 = u_{n-1}^1 \quad (1.24a)$$

$$v_n^1 = u_n^1 \oplus u_{n-2}^1. \quad (1.24b)$$

Cu aceasta, schema MCT este completă, aşa cum se vede în fig. 1. 11.

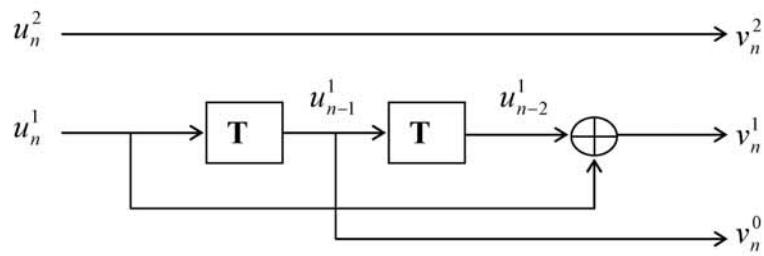


Fig. 1. 11. Schema MCT de rată 2/3 și memorie de capacitate $v = 2$

Pentru a vedea în ce măsură schema de modulație codată trellis este superioară schemei necodate, considerate drept referință, definim câștigul de codare asymptotic γ_c astfel:

$$\gamma_c = 10 \lg \frac{\left(\frac{d_{\min}^2}{P_{\text{med}}} \right)_{\text{codat}}}{\left(\frac{d_{\min}^2}{P_{\text{med}}} \right)_{\text{necodat}}} \quad (1.25)$$

În (1.25), d_{\min} este distanța euclidiană minimă dintre toate sirurile valabile de simboluri, iar P_{med} este puterea medie a constelației de semnale.

În cazul modulației PSK, care este de amplitudine constantă, sistemul de comunicație codat are aceeași putere medie ca și cel necodat, astfel încât formula pentru câștigul asymptotic de codare se simplifică, devenind:

$$\gamma_c = 10 \lg \frac{(d_{\min}^2)_{codat}}{(d_{\min}^2)_{necodat}}. \quad (1.26)$$

Distanța minimă pentru sistemul codat se numește *distanță liberă* (denumire preluată din teoria codurilor convoluționale).

Din fig. 1.5(a), se vede că $(d_{\min}^2)_{necodat} = \delta_1^2 = 2$. Pentru a vedea care este d_{\min}^2 pentru sistemul codat, utilizăm diagrama trellis, punând în evidență un drum prin graful respectiv care se desparte în starea 0 de drumul care trece numai prin starea 0 și se reîntâlnește cu acesta ulterior, diferind de el într-un număr de arce astfel încât distanța euclidiană la pătrat dintre cele două drumuri să fie minimă. Pentru codorul reprezentat în fig. 1.11, distanța minimă dintre două drumuri ce diferă prin mai mult decât o singură tranziție este ilustrată în fig. 1.12.

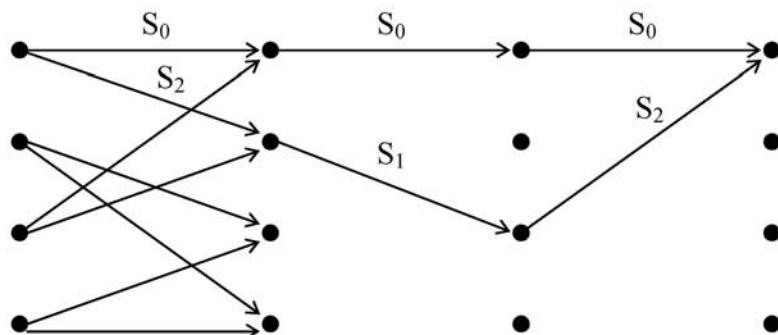


Fig. 1.12. Porțiune de diagramă trellis cu 4 stări, punând în evidență două căi, $\dots 0, 0, 0, 0, \dots$ și $\dots 0, 1, 2, 0, \dots$, care diverg în starea 0 și converg din nou în aceeași stare după trei tranziții de stare diferite

În realitate, deși am desenat în fig. 1.12 un singur arc între două noduri consecutive, ele sunt totuși două, datorită bitului necodat u_n^2 : una

pentru $u_n^2 = 0$ și alta, paralelă cu prima, pentru $u_n^2 = 1$. Vorbim de tranziții paralele, dar sensul cuvântului „paralele” nu este, desigur, cel din geometrie, el descriind doar sugestiv faptul că mai multe tranziții pleacă din aceeași stare la timpul discret n și ajung toate într-o altă stare la timpul discret următor $n+1$. Distanța euclidiană dintre cele două puncte din aceeași submulțime este egală cu 2 (diametrul cercului de rază 1). Distanța euclidiană la pătrat dintre cele două drumuri evidențiate în fig. 1.12 este:

$$d^2(S_0, S_2) + d^2(S_0, S_1) + d^2(S_0, S_2) = d^2(0,2) + d^2(0,1) + d^2(0,2) = 4 + d^2(0,1) > 4.$$

Rezultă că, pentru această schemă MCT, $d_{\min}^2 = 4$. Aplicând formula (1.26), obținem:

$$\gamma_c = 10 \lg \frac{4}{2} = 10 \lg 2 = 3,01 \text{ dB.}$$

Câștigul de codare realizat cu o schemă relativ simplă ca cea reprezentată în fig. 1.11 este important: 3 dB. Pentru a obține un câștig de codare mai mare, trebuie să mărim memoria v a codorului. Dacă facem aceasta adăugând un etaj la registrul de deplasare din fig. 1.7, distanța euclidiană minimă va fi dată tot de tranzițiile paralele, astfel încât nu rezultă nicu un câștig. De aceea, va trebui să codăm convoluțional ambii biți de intrare, ceea ce vom face adăugând o celulă de memorie aşa cum se arată în fig. 1.13.

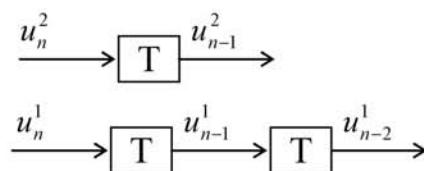


Fig. 1.13. Două registre de deplasare, unul cu două celule, altul cu una singură, ca elemente componente ale unui codor convoluțional cu memorie de capacitate $v = 3$

Starea internă a codorului convoluțional este dată de variabilele binare u_{n-1}^1, u_{n-2}^1 și u_{n-1}^2 . Pentru a utiliza numere exprimate în baza 10, scriem:

$$s_n = 4u_{n-2}^1 + 2u_{n-1}^2 + u_{n-1}^1. \quad (1.27)$$

Fiecare dbit de intrare $u_n^2 u_n^1$ determină codorul să treacă într-o nouă stare.

Este util să arătăm aceasta printr-o diagramă de stare, ca în fig. 1.14.

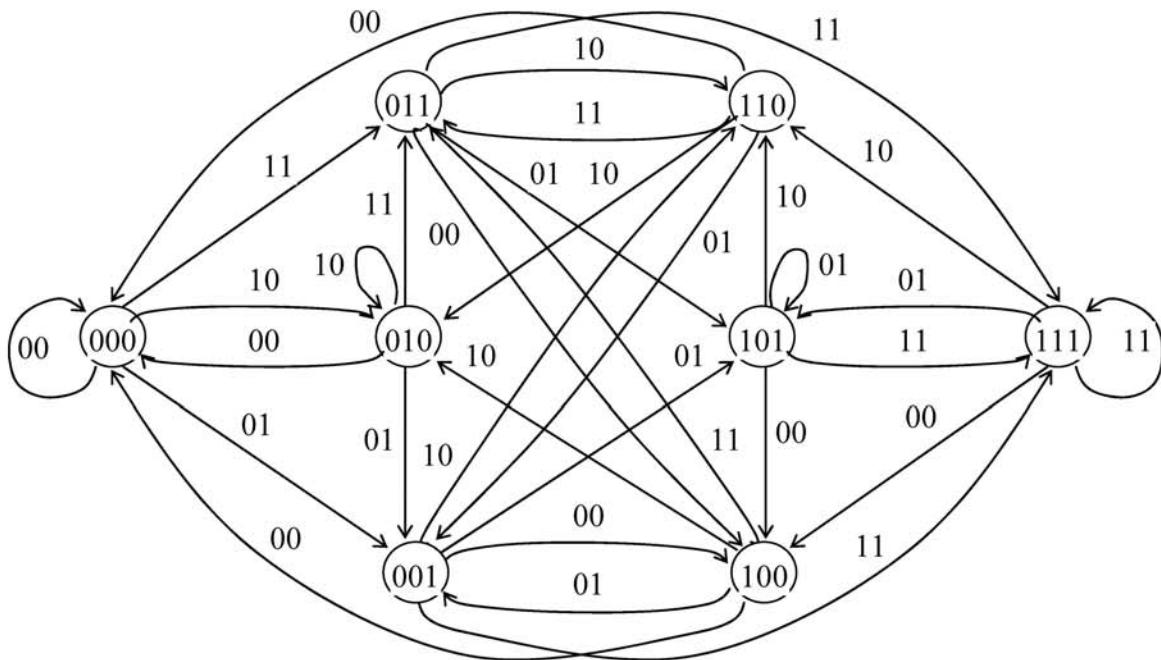


Fig. 1.14. Diagrama tranzițiilor de stare pentru codorul convolutional care include registrele de deplasare din fig. 1.10

Pe baza diagramei tranzițiilor de stare, desenăm o secțiune de trellis cu 8 stări, numerotate de la 0 la 7, cu tranzițiile etichetate conform regulilor lui Ungerboeck. De această dată, familia F_0 este formată din toate punctele numerotate par $\{0, 2, 4, 6\}$, iar F_1 , din toate punctele numerotate impar $\{1,$

$\{3, 5, 7\}$. Etichetele tranzițiilor sunt puncte din constelația de semnale 8PSK, așa cum se arată în fig. 1.15.

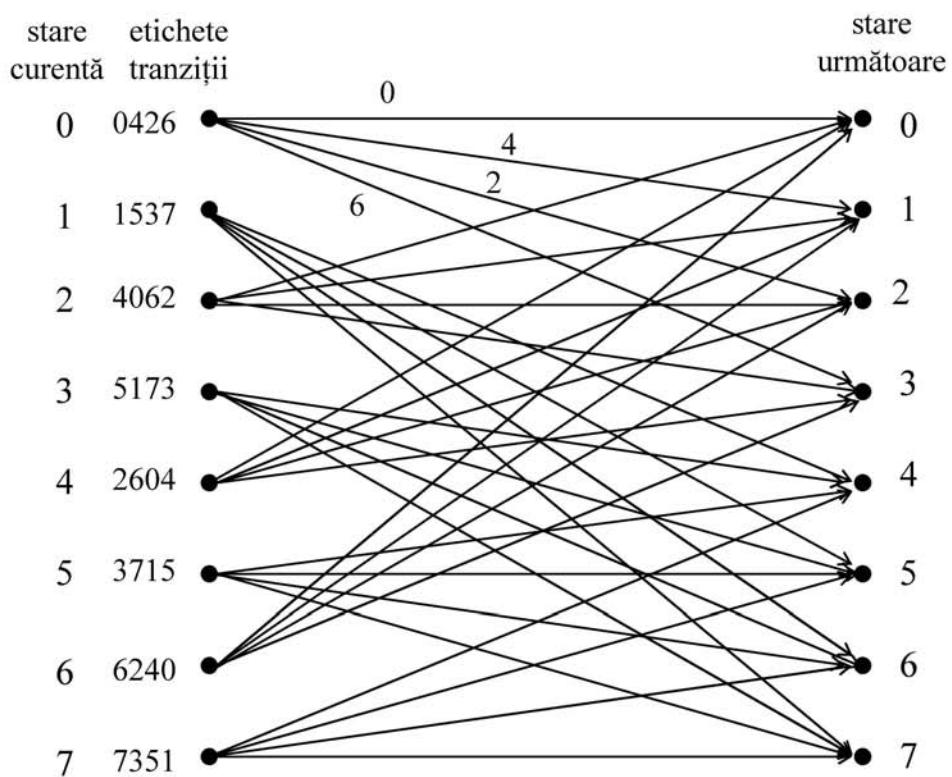


Fig. 1. 15. Secțiune trellis cu 8 stări etichetată conform regulilor lui Ungerboeck

Pe baza acestei etichetări, se întocmește tabla de adevăr arătată în Tabelul 1.3.

Tabel 1.3

Tabla de adevăr pentru secțiunea trellis etichetată din fig. 1.12.

Intrare					Punct	Ieșire		
u_{n-2}^1	u_{n-1}^2	u_{n-1}^1	u_n^2	u_n^1	P_n	v_n^2	v_n^1	v_n^0
0	0	0	0	0	0	0	0	0
			0	1	4	1	0	0
			1	0	2	0	1	0
			1	1	6	1	1	0
0	0	1	0	0	1	0	0	1
					5	1	0	1
					3	0	1	1
					7	1	1	1
0	1	0	0	0	4	1	0	0
					0	0	0	0
					6	1	1	0
					2	0	1	0
0	1	1	0	0	5	1	0	1
					1	0	0	1
					7	1	1	1
					3	0	1	1
1	0	0	0	0	2	0	1	0
					6	1	1	0
					0	0	0	0
					4	1	0	0
1	0	1	0	0	3	0	1	1

					7	1	1	1
					1	0	0	1
					5	1	0	1
1	1	0	0	0	6	1	1	0
					2	0	1	0
					4	1	0	0
					0	0	0	0
1	1	1	0	0	7	1	1	1
					3	0	1	1
					5	1	0	1
					1	0	0	1

Din tabla de adevăr, rezultă:

$$v_n^0 = u_{n-1}^1 \quad (1.28a)$$

$$v_n^1 = u_{n-2}^1 \oplus u_n^2 \quad (1.28b)$$

$$v_n^2 = u_{n-1}^2 \oplus u_n^1. \quad (1.28c)$$

Rezultă schema MCT din fig. 1.16.

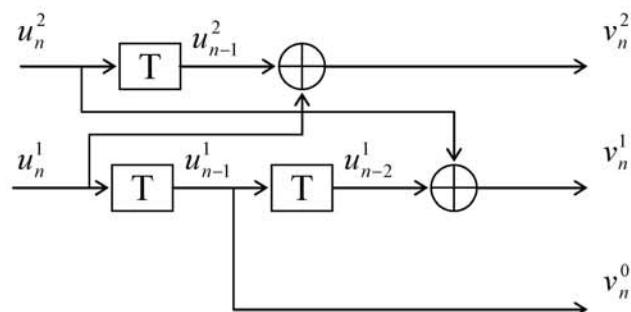


Fig. 1.16. Schemă MTC de rată 2/3 și memorie de capacitate $v = 3$

Pentru a putea calcula câștigul asymptotic de codare, trebuie să punem în evidență două drumuri prin diagrama trellis care sunt despărțite de distanța minimă. Întrucât codul este liniar, putem lua ca referință drumul ce trece numai prin starea 0. În fig. 1.17, se arată o porțiune de diagramă trellis în care se evidențiază un drum aflat la distanță euclidiană minimă: $\dots, 0, 3, 6, 0, \dots$. Distanța liberă la pătrat este:

$$d_{lb}^2 = d^2(0,6) + d^2(0,7) + d^2(0,6) = \delta_1^2 + \delta_0^2 + \delta_1^2 = 2 + 4 \sin^2 \frac{\pi}{4} + 2 = 4,586.$$

Prin urmare, câștigul asymptotic de codare este

$$\gamma_c = 10 \log \frac{4,586}{2} = 10 \lg 2,293 = 3,6 \text{ dB.}$$

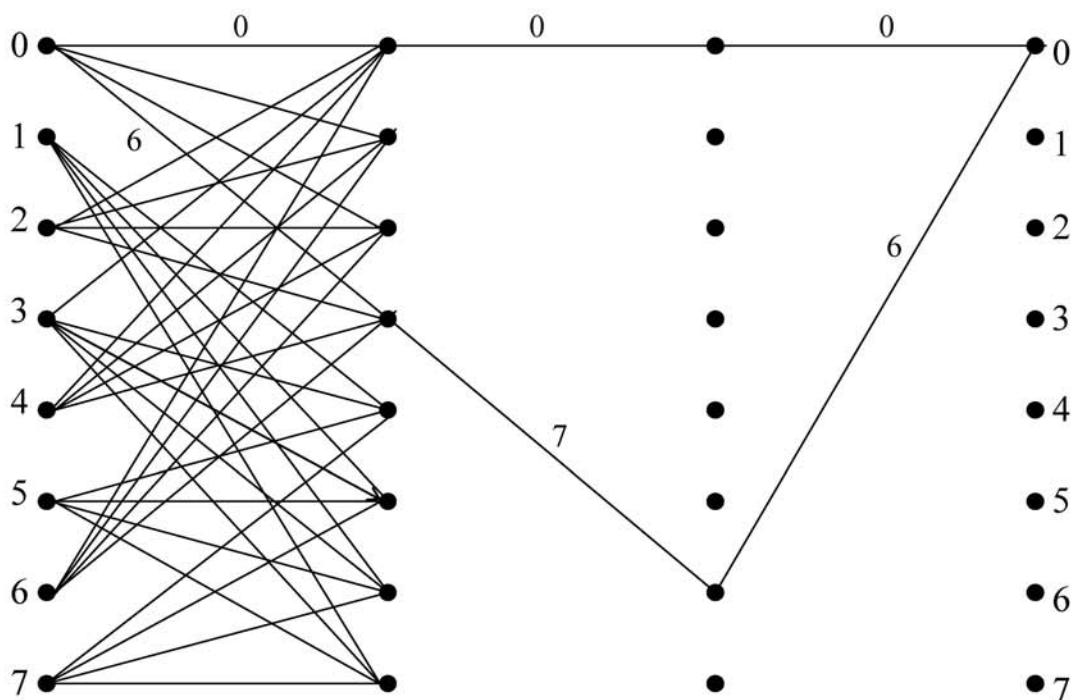


Fig. 1. 17. Porțiune de diagramă trellis punând în evidență două căi, $\dots, 0, 0, 0, 0, \dots$ și $\dots, 0, 6, 7, 6, \dots$, care diverg în starea 0 și converg în aceeași stare după trei tranzitii de stare diferite

Să proiectăm acum o schemă MTC cu ordin de memorie $v = 4$. Începem cu cele două registre de deplasare din fig. 1.18.

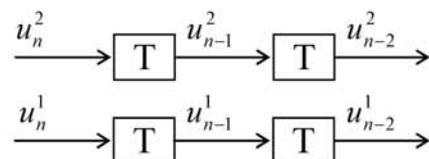


Fig. 1.18. Două registre de deplasare, cu câte două celule, ca elemente componente ale unui codor convoluțional cu memorie de capacitate $v = 4$

Definim starea internă a codorului convoluțional astfel:

$$s_n = 8u_{n-2}^2 + 4u_{n-2}^1 + 2u_{n-1}^2 + u_{n-1}^1. \quad (1.29)$$

Codorul are $2^4 = 16$ stări. Diagrama de stare este mai greu de desenat din cauza numărului mare de stări și vom renunța la ea. Să observăm însă că díbitul $u_n^2 u_n^1$ determină codorul convoluțional să treacă din starea $u_{n-2}^2 u_{n-2}^1 u_{n-1}^2 u_{n-1}^1$ în starea $u_{n-1}^2 u_{n-1}^1 u_n^2 u_n^1$. Din fiecare stare pleacă 4 tranziții, iar în fiecare stare ajung 4 tranziții. Numerotăm stările de la 0 la 15. Partiționăm stările inițiale în 4 submulțimi, astfel: {0, 4, 8, 12}, {1, 5, 9, 13}, {2, 6, 10, 14} și {3, 7, 11, 15}. Partiționăm diferit stările următoare: {0,

$\{1, 2, 3\}$, $\{4, 5, 6, 7\}$, $\{8, 9, 10, 11\}$ și $\{12, 13, 14, 15\}$. Putem descrie simbolic diagrama trellis arătând submulțimile de stări, inițiale și următoare, între care sunt permise tranziții:

$$\begin{aligned}\{0, 4, 8, 12\} &\rightarrow \{0, 1, 2, 3\} \\ \{1, 5, 9, 13\} &\rightarrow \{4, 5, 6, 7\} \\ \{2, 6, 10, 14\} &\rightarrow \{8, 9, 10, 11\} \\ \{3, 7, 11, 15\} &\rightarrow \{12, 13, 14, 15\}.\end{aligned}$$

Să observăm ca, în vreme ce stările inițiale dintr-o submulțime sunt fie pare, fie impare, în submulțimile stărilor următoare, cele pare și cele impare sunt în număr egal.

O secțiune de trellis cu 16 stări, etichetată conform regulilor lui Ungerboeck, este arătată în fig. 1.29.

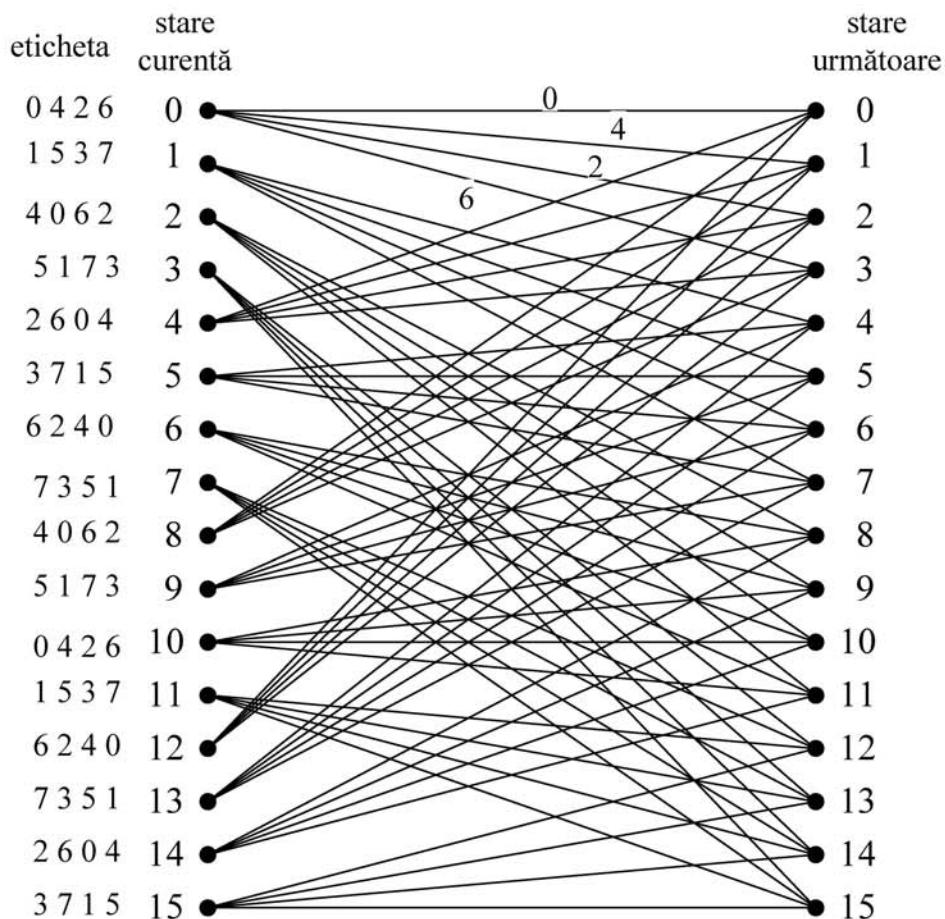


Fig. 1. 29. Secțiune trellis cu 16 stări etichetată conform regulilor lui Ungerboeck

Această etichetare se transcrie în tabla de adevăr arătată în Tabelul 1.4.

Tabel 1.4
Tabla de adevăr pentru secțiunea trellis etichetată din fig. 1.16.

Intrare						Punct	Ieșire		
u_{n-2}^2	u_{n-2}^1	u_{n-1}^2	u_{n-1}^1	u_n^2	u_n^1	P_n	v_n^2	v_n^1	v_n^0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
				0	1	4	1	0	0
				1	0	2	0	1	0
				1	1	6	1	1	0
0	0	0	1	0	0	1	0	0	1
				0	1	5	1	0	1
				1	0	3	0	1	1
				1	1	7	1	1	1
0	0	1	0	0	0	4	1	0	0
				0	1	0	0	0	0
				1	0	6	1	1	0
				1	1	2	0	1	0
0	0	1	1	0	0	5	1	0	1
				0	1	1	0	0	1
				1	0	7	1	1	1

				1	1	3	0	1	1
0	1	0	0	0	0	2	0	1	0
				0	1	6	1	1	0
				1	0	0	0	0	0
				1	1	4	1	0	0
0	1	0	1	0	0	3	0	1	1
				0	1	7	1	1	1
				1	0	1	0	0	1
				1	1	5	1	0	1
0	1	1	0	0	0	6	1	1	0
				0	1	2	0	1	0
				1	0	4	1	0	0
				1	1	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	7	1	1	1
				0	1	3	0	1	1
				1	0	5	1	0	1
				1	1	1	0	0	1
1	0	0	0	0	0	4	1	0	0
				0	1	0	0	0	0
				1	0	6	1	1	0
				1	1	2	0	1	0
1	0	0	1	0	0	5	1	0	1
				0	1	1	0	0	1
				1	0	7	1	1	1
				1	1	3	0	1	1
1	0	1	0	0	0	0	0	0	0
				0	1	4	1	0	0

				1	0	2	0	1	0
				1	1	6	1	1	0
1	0	1	1	0	0	1	0	0	1
				0	1	5	1	0	1
				1	0	3	0	1	1
				1	1	7	1	1	1
1	1	0	0	0	0	6	1	1	0
				0	1	2	0	1	0
				1	0	4	1	0	0
				1	1	0	0	0	0
1	1	0	1	0	0	7	1	1	1
				0	1	3	0	1	1
				1	0	5	1	0	1
				1	1	1	0	0	1
1	1	1	0	0	0	2	0	1	0
				0	1	6	1	1	0
				1	0	0	0	0	0
				1	1	4	1	0	0
1	1	1	1	0	0	3	0	1	1
				0	1	7	1	1	1
				1	0	1	0	0	1
				1	1	5	1	0	1

Din tabla de adevăr, utilizând regulile algebrei lui Boole, obținem cu ușurință:

$$v_n^0 = u_{n-1}^1 \quad (1.30a)$$

$$v_n^1 = u_{n-2}^1 \oplus u_n^2 \quad (1.30b)$$

$$v_n^2 = u_n^1 \oplus u_{n-1}^2 \oplus u_{n-2}^2. \quad (1.30c)$$

Rezultă schema MCT din fig. 1.20.

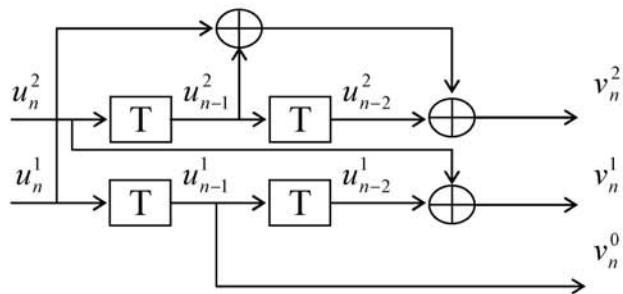


Fig. 1.20. Schemă MTC de rată 2/3 și memorie cu memorie de capacitate $v = 4$

Să calculăm și câștigul de codare al acestei scheme MCT. Fie două drumuri prin diagrama trellis ce diverg în starea 0 și se reîntâlnesc în aceeași stare după cum urmează:

$$0 \rightarrow 0 \rightarrow 0 \rightarrow 0 \rightarrow 0$$

$$0 \rightarrow 3 \rightarrow 13 \rightarrow 4 \rightarrow 0$$

Aceasta ne dă distanța liberă:

$$d_{lib}^2 = \delta_1^2 + \delta_0^2 + \delta_0^2 + \delta_1^2 = 2(\delta_1^2 + \delta_0^2) = 2[2 + 2(1 - \cos \pi/4)] = 5,171.$$

Introducând această valoare în formula câștigului de codare, obținem în definitiv:

$$\gamma_c = 10 \lg \frac{5,171}{2} = 4,1 \text{ dB.}$$

1.4. CODURI UNGERBOECK (II)

Codorul conoluțional este o componentă esențială a oricărei scheme de modulație codată trellis. Codoarele pe care le-am considerat până acum sunt *nesistematice fără reacție* (nonsystematic feedforward convolutional encoders). Este util să interpretăm codorul conoluțional drept un *automat cu număr finit de stări* (ANFS). Aceasta ne va permite să proiectăm scheme MCT în care codorul conoluțional este de tip *sistemtic cu reacție*. Un codor se spune că este *sistemtic* dacă blocul biților de intrare se regăsește nemodificat la ieșire. După cum se știe din teoria codurilor conoluționale, codurile sistematice nu sunt *catastrofale*. Pentru un cod catastrofal, un număr finit de erori produse de canalul de comunicație cauzează un număr infinit de erori de decodare. Faptul că un codor conoluțional este cu reacție nu constituie în sine un avantaj. După cum vom vedea, însă, condiția impusă codorului conoluțional de a fi sistemtic duce negreșit la o schemă cu reacție.

Pentru $v = 2$, începem cu două variabile de stare binare, notate cu s_n^1 și s_n^2 . În baza zece, starea internă la timpul discret n se scrie

$$s_n = 2s_n^2 + s_n^1. \quad (1.31)$$

Bitul de intrare u_n^2 rămâne necodat, astfel încât

$$v_n^2 = u_n^2. \quad (1.32)$$

Întrucât codorul trebuie să fie sistemtic, punem condiția ca

$$v_n^1 = u_n^1. \quad (1.33)$$

Obiectivul nostru de proiectare este de a găsi v_n^0 , s_{n+1}^1 și s_{n+1}^2 în funcție de bitul de intrare u_n^1 și de variabilele de stare curentă s_n^1 și s_n^2 .

Utilizăm aceeași secțiune trellis cu 4 stări etichetată conform regulilor lui Ungerboeck din fig. 1.10, unde submulțimea S_i are indicele i dat de

$$i = 2v_n^1 + v_n^0 = 2u_n^1 + v_n^0. \quad (1.34)$$

Tabla de adevăr corespunzătoare este dată în Tabelul 1.5.

Tabel 1.5

Tabla de adevăr pentru schema de modulație codată trellis
de rată 2/3 incluzând un codor convoluțional sistematic
cu reacție și ordin de memorie $v = 2$

Intrare			Submulțime	Ieșire		
s_n^2	s_n^1	u_n^1	S_i	v_n^0	s_{n+1}^2	s_{n+1}^1
0	0	0	0	0	0	0
		1	2	0	0	1
0	1	0	1	1	1	0
		1	3	1	1	1
1	0	1	2	0	0	0
		0	0	0	0	1
1	1	1	3	1	1	0
		0	1	1	1	1

Din tabla de adevăr, deducem:

$$s_{n+1}^1 = s_n^2 \oplus u_n^1 \quad (1.35a)$$

$$s_{n+1}^2 = v_n^0 = s_n^1. \quad (1.35b)$$

Cu ajutorul acestor ecuații, desenăm schema din fig. 1.21.

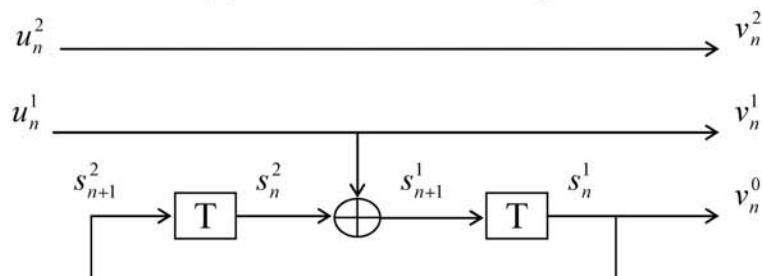


Fig. 1.21. Schemă MTC de rată 2/3 și memorie de capacitate $v = 2$, realizată cu un codor convoluțional sistematic cu reacție

Pentru $v = 3$, starea internă este reprezentată de trei variabile binare, să spunem s_n^1 , s_n^2 și s_n^3 . Sunt opt stări, numerotate de la 0 la 7, iar starea curentă se scrie ca un număr în baza zece conform relației:

$$s_n = 4s_n^3 + 2s_n^2 + s_n^1. \quad (1.36)$$

Codorul conoluțional fiind sistematic, avem:

$$v_n^1 = u_n^1 \quad (1.37)$$

$$v_n^2 = u_n^2. \quad (1.38)$$

Trebuie să determinăm v_n^0 , s_{n+1}^1 , s_{n+1}^2 și s_{n+1}^3 ca funcții de biții de intrare u_n^1 și u_n^2 și de starea curentă reprezentată de s_n^1 , s_n^2 și s_n^3 . Nu avem nici un motiv să utilizăm altă diagramă trellis decât cea din fig. 1.15, pe baza căreia am proiectat schema de modulație codată trellis incluzând un codor conoluțional nesistemtic. Totuși, tabla de adevăr este diferită, căci intrările și ieșirile corespund unui codor sistematic cu reacție. Aceasta este arătată în Tabelul 1.6.

Tabel 1.6

Tabla de adevăr pentru schema de modulație codată trellis de rată 2/3 incluzând un codor conoluțional sistematic cu reacție și ordin de memorie $v = 3$

Intrare	Ieșire
---------	--------

s_n^3	s_n^2	s_n^1	u_n^2	u_n^1	v_n^0	s_{n+1}^3	s_{n+1}^2	s_{n+1}^1
0	0	0	0	0	0	0	0	0
			1	0		0	0	1
			0	1		0	1	0
			1	1		0	1	1
0	0	1	0	0	1	1	0	0
			1	0		1	0	1
			0	1		1	1	0
			1	1		1	1	1
0	1	0	1	0	0	0	0	0
			0	0		0	0	1
			1	1		0	1	0
			0	1		0	1	1
0	1	1	1	0	1	1	0	0
			0	0		1	0	1
			1	1		1	1	0
			0	1		1	1	1
1	0	0	0	1	0	0	0	0
			1	1		0	0	1
			0	0		0	1	0
			1	0		0	1	1
1	0	1	0	1	1	1	0	0
			1	1		1	0	1
			0	0		1	1	0
			1	0		1	1	1
1	1	0	1	1	0	0	0	0

			0	1		0	0	1
			1	0		0	1	0
			0	0		0	1	1
1	1	1	1	1	1	1	0	0
			0	1		1	0	1
			1	0		1	1	0
			0	0		1	1	1

Din tabla de adevăr, deducem:

$$s_{n+1}^1 = s_n^2 \oplus u_n^2 \quad (1.39a)$$

$$s_{n+1}^2 = s_n^3 \oplus u_n^1 \quad (1.39b)$$

$$s_{n+1}^3 = v_n^0 = s_n^1. \quad (1.39c)$$

Rezultă schema MCT din fig. 1.22.

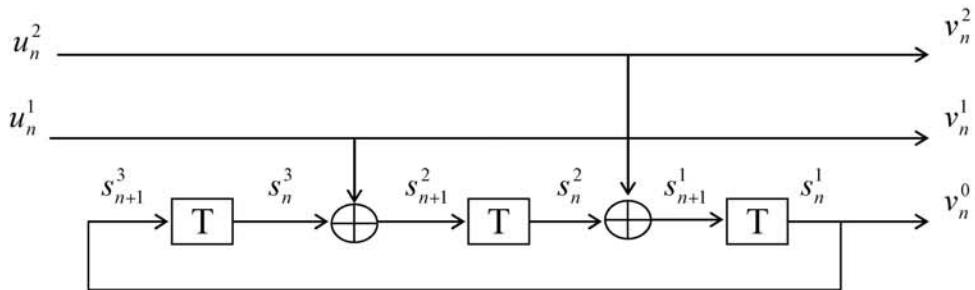


Fig. 1.22. Schemă MTC de rată 2/3 și memorie de capacitate $v = 3$, realizată cu un codor convolutional sistematic cu reacție

Pentru $v = 4$, avem $2^4 = 16$ stări, numerotate de la 0 la 15, iar fiecare stare este dată de patru variabile binare s_n^1, s_n^2, s_n^3 și s_n^4 :

$$s_n = 8s_n^4 + 4s_n^3 + 2s_n^2 + s_n^1. \quad (1.40)$$

Vom refolosi etichetarea Ungerboeck din fig. 1.19. Stările, însă, nu mai sunt date de valori din trecut ale biților de intrare, ca în cazul în care codorul conoluțional este nesistematic fără reacție. Conform figurii 1.19, se obține următoarea tablă de adevăr.

Tabel 1.7

Tabla de adevăr pentru schema de modulație codată trellis de rată 2/3 incluzând un codor conoluțional sistematic cu reacție și ordin de memorie $v = 4$.

Intrare						Punct	Ieșire				
s_n^4	s_n^3	s_n^2	s_n^1	u_n^2	u_n^1	P_n	v_n^0	s_{n+1}^4	s_{n+1}^3	s_{n+1}^2	s_{n+1}^1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
				1	0	4			0	1	
				0	1	2			1	0	
				1	1	6			1	1	
0	0	0	1	0	0	1	1	0	1	0	0
				1	0	5			0	1	
				0	1	3			1	0	
				1	1	7			1	1	
0	0	1	0	1	0	4	0	1	0	0	0
				0	0	0			0	1	
				1	1	6			1	0	
				0	1	2			1	1	
0	0	1	1	1	0	5	1	1	1	0	0

				0	0	1				0	1
				1	1	7				1	0
				0	1	3				1	1
0	1	0	0	0	1	2	0	0	0	0	0
				1	1	6				0	1
				0	0	0				1	0
				1	0	4				1	1
0	1	0	1	0	1	3	1	0	1	0	0
				1	1	7				0	1
				0	0	1				1	0
				1	0	5				1	1
0	1	1	0	1	1	6	0	1	0	0	0
				0	1	2				0	1
				1	0	4				1	0
				0	0	0				1	1
0	1	1	1	1	1	7	1	1	1	0	0
				0	1	3				0	1
				1	0	5				1	0
				0	0	1				1	1
1	0	0	0	1	0	4	0	0	0	0	0
				0	0	0				0	1
				1	1	6				1	0
				0	1	2				1	1
1	0	0	1	1	0	5	1	0	1	0	0
				0	0	1				0	1
				1	1	7				1	0
				0	1	3				1	1

1	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0
				1	0	4			0	0	1
				0	1	2			1	0	
				1	1	6			1	1	
1	0	1	1	0	0	1	1	1	0	0	
				1	0	5			0	1	
				0	1	3			1	0	
				1	1	7			1	1	
1	1	0	0	1	1	6	0	0	0	0	
				0	1	2			0	1	
				1	0	4			1	0	
				0	0	0			1	1	
1	1	0	1	1	1	7	1	0	1	0	
				0	1	3			0	1	
				1	0	5			1	0	
				0	0	1			1	1	
1	1	1	0	0	1	2	0	1	0	0	
				1	1	6			0	1	
				0	0	0			1	0	
				1	0	4			1	1	
1	1	1	1	0	1	3	1	1	1	0	
				1	1	7			0	1	
				0	0	1			1	0	
				1	0	5			1	1	

Din tabla de adevăr, deducem:

$$s_{n+1}^1 = s_n^2 \oplus s_n^4 \oplus u_n^2 \quad (1.41a)$$

$$s_{n+1}^2 = s_n^3 \oplus u_n^1 \quad (1.41b)$$

$$s_{n+1}^3 = s_n^1 = v_n^0 \quad (1.41c)$$

$$s_{n+1}^4 = s_n^2. \quad (1.41d)$$

Din aceste ecuații, rezultă schema MCT din fig. 1.23.

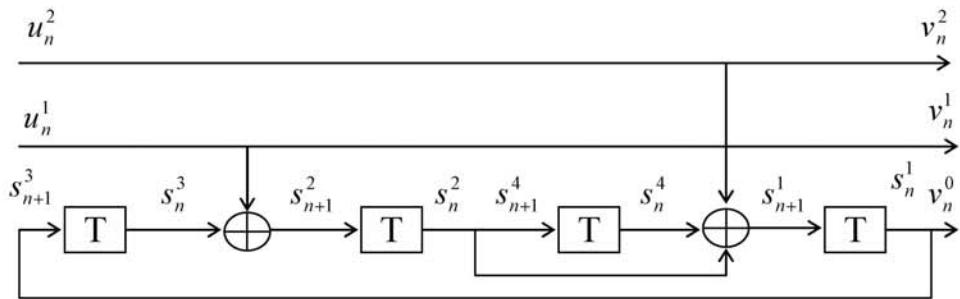


Fig. 1.23. Schemă MTC de rată 2/3 și memorie de capacitate $v = 4$, realizată cu un codor convoluțional sistematic cu reacție

1.5. CONCLUZII

Aplicând modulația codată trellis, se obține un câștig asimptotic de codare de 3 dB în raport cu modulația de referință fără codare cu o schemă simplă, având doar două etaje de regisztru de deplasare. Câștigul de codare crește cu ordinul de memorie v , dar creșterea este din ce în ce mai mică pe măsură ce se mărește v . Pe de altă parte, complexitatea decodării este proporțională cu numărul de stări 2^v .

Dacă numărul de biți m transmiși într-un interval de semnalizare de sistemul de referință este mare, este posibil să codăm conținutul numai o parte din biții de intrare, să spunem k , unde $k < m$, restul de $m-k$ biți rămânând necodăți. Constelația de semnale pentru sistemul codat, având 2^{m+1} puncte, se partă în 2^{k+1} submulțimi de câte 2^{m-k} puncte; cei $(k+1)$ biți codați conținutul selecteză o astfel de submulțime, iar cei $(m-k)$ biți rămași necodăți selecteză punctul de semnal din submulțimea selectată. Punctul de semnal astfel selectat este transmis prin modulație bidimensională, la fel ca în cazul unei modulații fără codare. Structura generală a unei scheme de modulație trellis este dată în fig. 1.24.

Partiționarea constelației de semnale în 2^{k+1} submulțimi se face astfel încât distanța euclidiană minimă dintre punctele oricărei submulțimi să fie mai mare decât cea dintre punctele constelației. Fie δ_0 distanța euclidiană minimă dintre punctele constelației de semnale, δ_s distanța euclidiană minimă dintre punctele unei submulțimi și d_{lib} distanța liberă între sirurile de submulțimi pe care le poate genera schema de modulație trellis. Atunci, d_{\min} pentru sistemul codat din formula de calcul a câștigului de codare (1.24) este

$$d_{\min} = \min(\delta_s, d_{\text{lib}}). \quad (1.42)$$

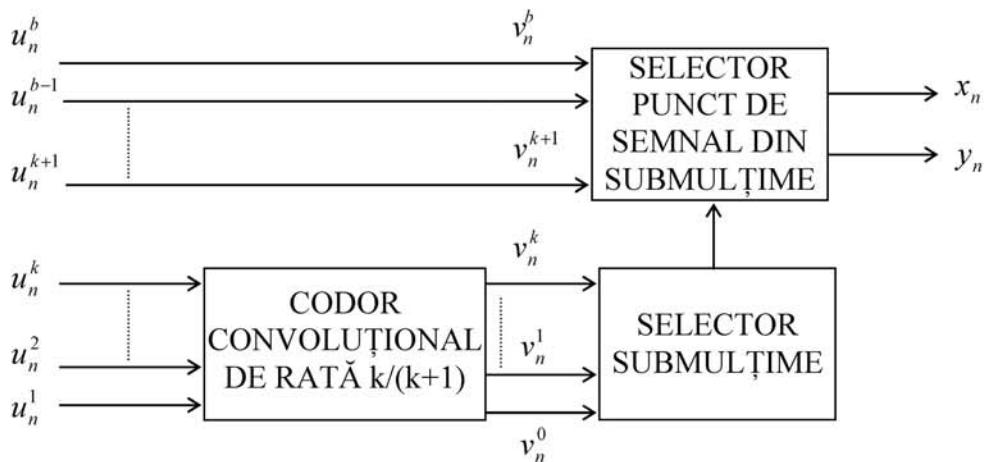


Fig. 1.24. Structura generală a unei scheme MCT în care k biți de intrare sunt codați conținutul, rezultând un bloc de $(k+1)$ biți care selecteză una din cele 2^{k+1} submulțimi ale constelației de semnale cu 2^{b+1} puncte. Cei $(b-k)$ biți necodăți selecteză unul din cele 2^{b-k} puncte din submulțimea deja selectată. Punctul selectat pentru transmisie prin modulație 2-D are coordonatele (x_n, y_n) . 44

Dacă, pentru un ordin de memorie v dat, $\delta_s \leq d_{\text{lib}}$, este inutil să încercăm să mărim câștigul de codare prin creșterea lui v , căci distanța minimă va fi dată de δ_s . Putem, însă, mări δ_s reducând numărul bițiilor necodați. La limită, toți biții de la intrare se codează conlovuțional, dar acest lucru este posibil numai pentru constelații de semnale cu un număr relativ redus de puncte. Într-adevăr, fie $k = m$, unde m este mare. Din fiecare stare curentă a codorului conlovuțional pleacă 2^m tranziții. Pentru ca diagrama trellis să nu aibă conectivitate totală (adică, fiecare stare curentă conectată la fiecare stare următoare), trebuie ca numărul de stări $2^v > 2^m$, ceea ce înseamnă că $v > m$, adică, memoria codorului devine excesiv de mare iar complexitatea de decodare este prohibitivă într-un asemenea caz.

BIBLIOGRAFIE

- Al. Spătaru: Teoria transmisiunii informației. E.D.P., București, 1983
Al Spătaru: Fondements de la théorie de la transmission de l'information.
Presses polytechn. Romandes, Lausanne, 1987
A-T. Murgan: Prinzipiile teoriei informației în ingineria informației și a comunicațiilor. Editura Academiei Române, București, 1998

G. Ungerboeck: Channel coding with multilevel/phase signals. IEEE Transactions on Information Theory, vol. IT-28, no. 1, January 1982, p. 55-67

G. Ungerboeck: Trellis-coded modulation with redundant signal sets, Part I: Introduction, Part II: State of the art. IEEE Communications Magazine, vol. 25, no. 2, February 1987, p.5-21

E. Biglieri, D. Divsalar, P.J. McLane, M.K. Simon: Introduction to trellis-coded modulation with applications. Macmillan Publishing Company, New York, 1991