Оглавление

Глава 1

Введение

1.1 Введение

Гидравлические расчеты трубопроводных сетей, в частности систем газосбора и газораспределения, требуются при решении многих технико-экономических проблем, связанных с их проектированием и эксплуатацией. Задачи гидравлического расчета решаются в рамках теории гидравлических цепей. Одним из недостаточно исследованных вопросов этой теории является оценка и контроль откликов модели трубопроводной системы на изменение исходных данных – граничных условий – задачи. Эти вопросы относятся к сфере чувствительности модели.

Глава 2

Теоретическая часть

2.1 Постановка задачи

Пусть G – ориентированный граф с N_v узлами (образующими множество узлов E) и N_e ветвями (образующими множество ветвей E). Расход по i-й ветви связан с начальным и конечным давлениями p_F^i и p_L^i замыкающим соотношением

$$x_i = \phi\left(p_F^i, p_L^i\right) \tag{1}$$

Если A - матрица инцидентности графа G ($a_{ij} = 1$, если ребро j начинается в узле i, $a_{ij} = -1$, если ребро j заканчивается в узле i);

Q - вектор узловых притоков. Тогда уравнения Кирхгофа (уравнения балансов в узлах) записывается в виде

$$AX = Q \tag{2}$$

Используя матрицы A_F и A_L, соответствующие выходящим и входящим ветвям ($A = A_F + A_L$), вектор узловых давлений P и вектор

Φ функций ϕ_i, уравнения (1) можно записать в виде

$$P_F = A_F^T P, P_L = -A_L^T P$$
$$X = \Phi(P_F, P_L) \tag{3}$$

Преположим что граничные условия заданы

$$P_\gamma = (P_{i_1}, \dots, P_{i_k}), Q_\gamma = (Q_{i_{k+1}}, \dots, Q_{i_n}) \tag{4}$$

Таким образом система уравнений

$$X = \Phi(P_F, P_L), \widetilde{A}X = Q \tag{5}$$

Матрица $\widetilde{A}$ - это матрица A, только без последней строки, так как $rankA = min(N_e, N_v) \leq N_v$.

При граничных условиях (4), система (5) имеет единственное решение.

После решения системы (5), получаются векторы Q_0, P_0

Затем, предположим, что граничные условия (4) – получили малые приращения соответственно

$$\widetilde{P}_\gamma = P_\gamma + \delta P_\gamma, \widetilde{Q}_\gamma = Q_\gamma + \delta Q_\gamma$$

Требуется оценить влияние изменений граничных условий на неграничные (незаданные) переменные.

2.2 Матрица чувствительности

Для удобного рассмотрения модели введем обозначения:

V_P – множество узлов с заданным давлением, V_Q – множество узлов с заданным притоком

Рассмотрим случай, когда замыкающие соотношения являются непрерывно диффиренцируемыми в окрестности решения P_0, Q_0 системы (5).

Обозначим

$$d_{Fi} = \frac{\partial \phi_i(P_F, P_L)}{\partial P_F}$$

$$d_{Li} = -\frac{\partial \phi_i(P_F, P_L)}{\partial P_L}$$

Тогда в силу монотонности ϕ_i справедливы неравенства $d_{Fi} \geq 0$ и $d_{Li} \geq 0$

Определим диагональные матрицы D_F и D_L с d_{Fi} и d_{Li} на диагонали. Тогда уравнения (2) и (3) можно переписать

$$dX = (D_F A_F^T + D_L A_L^T)dP \tag{7}$$

$$dQ = A(D_F A_F^T + D_L A_L^T)dP \tag{8}$$

Перенумеруем узлы графа так, чтобы сначала шли узлы с заданными притоками (из V_Q), а затем с заданными давлением (из V_P) и разобьем векторы и матрицы на соответствующие блоки:

$$P = \begin{pmatrix} P_{var} \\ P_{fix} \end{pmatrix} Q = \begin{pmatrix} Q_{var} \\ Q_{fix} \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} A_Q \\ A_P \end{pmatrix} A_F = \begin{pmatrix} A_{FQ} \\ A_{FP} \end{pmatrix} A_L = \begin{pmatrix} A_{LQ} \\ A_{LP} \end{pmatrix} \tag{9}$$

Тогда уравнения (7) и (8) можно переписать

$$dX = (D_F A_{FQ}^T + D_L A_{LQ}^T) dP_{var} + (D_F A_{FP}^T + D_L A_{LP}^T) dP_{fix} \tag{10}$$

$$dQ_{fix} = A_Q (D_F A_{FQ}^T + D_L A_{LQ}^T) dP_{var} + A_Q (D_F A_{FP}^T + D_L A_{LP}^T) dP_{fix} \tag{11}$$

$$dQ_{var} = A_P (D_F A_{FQ}^T + D_L A_{LQ}^T) dP_{var} + A_P (D_F A_{FP}^T + D_L A_{LP}^T) dP_{fix} \tag{12}$$

Матрица $M = A_Q (D_F A_{FQ}^T + D_L A_{LQ}^T)$ связывает подвекторы с фиксированными переменными (заданными граничными условиями) с подвекторами свободных переменных. Эта матрица также называется модифицированной матрицей Максвелла или M-матрицей.

Отметим еще несколько матриц

$$M_{PP} = A_P (D_F A_{FP}^T + D_L A_{LP}^T) \tag{13}$$

$$M_{PQ} = A_P (D_F A_{FQ}^T + D_L A_{LQ}^T) \tag{14}$$

$$M_{QP} = A_Q (D_F A_{FP}^T + D_L A_{LP}^T) \tag{15}$$

Тогда (11) и (12) можно переписать используя (13), (14) и (15)

$$dQ_{var} = M_{PQ} M^{-1} dQ_{fix} + (M_{PP} - M_{PQ} M^{-1} M_{QP}) dP_{fix} \tag{16}$$

$$dP_{var} = M^{-1} dQ_{fix} - M^{-1} M_{QP} dP_{fix} \tag{17}$$

Заметим также, что матрицы

$$M, M_{QP}, M_{PQ}, M_{PP}$$

– функциональные матрицы, векторных аргументов P_0, Q_0

Глава 3

Практическая часть

3.1 Пример

Рассмотрим систему уравнений (5) и её решение P_0, Q_0

$$A\Phi(A_F^T P_0, -A_L^T P_0) = Q_0$$

А также перенумерованные векторы P_0 и Q_0 так, чтобы сначала шли узлы с заданными притоками, затем с давлениями

$$P_0 = \left(\frac{P_0^{var}}{P_0^{fix}}\right), Q_0 = \left(\frac{Q_0^{var}}{Q_0^{fix}}\right)$$

и их "малые"изменения

$$\delta P_0 = \left(\frac{\delta P_0^{var}}{\delta P_0^{fix}}\right), \delta Q_0 = \left(\frac{\delta Q_0^{var}}{\delta Q_0^{fix}}\right)$$

В соотстветствие с описанным выше способом, получается:

$$dQ_0^{var} = [M_{PQ}M^{-1}](A_F^T P_0, -A_L^T P_0) dQ_0^{fix} +$$

$$[M_{PP} - M_{PQ}M^{-1}M_{QP}](A_F^T P_0, -A_L^T P_0)dP_0^{fix}$$

$$dP_0^{var} = [M^{-1}](A_F^T P_0, -A_L^T P_0)dQ_0^{fix} - [M^{-1}M_{QP}](A_F^T P_0, -A_L^T P_0)dP_0^{fix}$$