# Лекция 2. Системы нечеткого вывода

## 2.1. Входные и выходные переменные. Нечеткие правила

Практическое применение нечеткой логики – это системы нечеткого вывода. Система нечеткого вывода (Fuzzy Inference System) или просто нечеткая система состоит их входных переменных (input variables), правил (rules) и выходных переменных (output variables). Значения входных переменных – это или результаты измерений, или предварительных вычислений, или числа, выбранные человеком (экспертом). Значения выходных переменных – это управляющие воздействия или варианты каких-либо решений. Правило – это логическое выражение, описывающие зависимость выходных переменных от входных,

ЕСЛИ *условие*, ТО *следствия*,

где *условие* – это нечеткое утверждение, касающееся входных переменных, а *следствия* – выражения для выходных переменных.

На вход системы поступают числовые значения входных переменных. Затем вычисляются степени истинности условий. По совокупности всех правил определяются числовые значения выходных переменных (как именно – об этом позже).

С точки зрения математики система нечеткого вывода – это функция, определяющая зависимость выходных переменных от входных. Но вид этой функции определяется не строгой математической моделью управляемого процесса, а интуитивными знаниями экспертов-практиков об этом процессе. Экспертам удобнее описать свои приемы управления в виде нечетких правил, а не подбирать математические формулы.

Прежде чем переходить к подробному изложению того, как работают системы нечеткого вывода, рассмотрим простой бытовой пример.

## 2.2. Пример: система автоматической настройки смесителя

Душ управляется двумя кранами – холодным и горячим. Необходимо разработать регулятор, позволяющий настроить комфортные температуру и расход воды.

Температура и расход воды и будут входными переменными. Температура измеряется датчиком – термометром, а расход можно отождествить со степенями открытости кранов (от 0 до 100%), поскольку давление воды в холодной и горячей трубах будем считать постоянным.

Будем считать комфортными температуру $40 \pm 5°$, а расход – $50 \pm 5\%$.

Выходные переменные – управления степенями открытости кранов, т.е. изменения (приращения) степени открытости по сравнению с предыдущим моментом регулирования.

Лингвистическую переменную, соответствующую температуре, назовем “вода”, а ее термы – “холодная”, “теплая” и “горячая”. Лингвистическую переменную, соответствующую расходу, назовем “струя” со значениями “слабая”, “комфортная” и “сильная”.

Для выходных переменных – изменений степени открытости – лингвистические переменные будут носить характер команд, поскольку они являются управляющими воздействиями: “горячий-кран” и “холодный-кран”, а их значения – “сильно-закрыть”, “немного-закрыть”, “не-трогать”, “немного-открыть” и “сильно-открыть”.

Как видно из этого примера, названия лингвистической переменной не обязано совпадать с названием измеряемого (входного) или управляющего (выходного) параметра. Важно, чтобы нечеткое утверждение имело ясный смысл на естественном языке: фраза “температура – горячая” безграмотна, а “вода – горячая” – совершенно нормальная.

Правила будут выглядеть следующим образом:

- ЕСЛИ вода – холодная И струя – слабая, ТО холодный-кран – не-трогать И горячий-кран – сильно-открыть;

- ЕСЛИ вода – теплая И струя – слабая, ТО холодный-кран – слегка-открыть И горячий-кран – слегка-открыть;
- ЕСЛИ вода – теплая И струя – сильная, ТО холодный-кран – слегка-закрыть И горячий-кран – слегка-закрыть;

и т.д.

В правилах можно использовать не только операцию И, но и другие логические операции – ИЛИ и НЕ.

Для каждого правила устанавливают вес (weight) – число от 0 до 1. Если некоторые из правил важнее других, то им присваивают больший вес, а для менее важных – и вес меньше. Но на первых порах можно считать, что все правила одинаково важны, а вес, соответственно, равен 1.

Получив числовые значения входных переменных, нечеткая система выполняет ряд действий:

1. определяет степени принадлежности переменных каждому из термов;
2. вычисляет степени истинности всех условий в правилах;
3. определяет числовые значения управляющих (выходных) переменных.

Не будем пока вдаваться в вычислительные подробности, а отнесемся к нечеткой системе как к "черному ящику", т.е. функции $\vec{y} = F(\vec{x})$, связывающей векторы входных $\vec{x} = [x_1, x_2, ...]$ и выходных $\vec{y} = [y_1, y_2, ...]$ переменных, и продолжим наш пример.

## 2.3. Математическая модель работы смесителя

Поскольку у нас нет возможности проверить работу нашего нечеткого регулятора "в железе", построим математическую модель душа.

Пусть температура воды в трубах колеблется по некоторому периодическому закону,

$$
\begin{aligned}
T_c(t) &= 15 + 10\sin(\pi t/50 + 20), \text{ – холодная (cold) вода,} \\
T_h(t) &= 60 + 20\cos(\pi t/60), \text{ – горячая (hot) вода,}
\end{aligned}
$$

где $t$ – время, с.

Обозначим степень открытости кранов в момент времени $t$ через $q_c(t)$ и $q_h(t)$ для холодного и горячего кранов соответственно. В начальный момент времени $t = 0$ оба крана закрыты, $q_c(0) = q_h(0) = 0$. Для того, чтобы не делить на 0, лучше заменить начальные значения на малое число, например $10^{-15}$.

Температуру воды в душе можно приблизить линейной формулой,

$$T(t) = \frac{T_c(t)\, q_c(t) + T_h(t)\, q_h(t)}{q_c(t) + q_h(t)}.$$

Суммарный расход $q(t)$ будем измерять в процентах от максимума – когда оба крана полностью открыты, т.е.

$$q(t) = \frac{q_c(t) + q_h(t)}{2}.$$

Имея модельные значения входных переменных – $T(t)$ и $q(t)$ – найдем значения выходных переменных – приращений степени открытости кранов с помощью нечеткой системы $F$,

$$\Delta\vec{q} = F\left(T(t),\, q(t)\right).$$

Если приращение положительно – кран открывается, если отрицательно – кран закрывается. Зная приращения, найдем новые значения степеней открытости кранов,

$$q_c(t+1) = q_c(t) + \Delta q_1,$$
$$q_h(t+1) = q_h(t) + \Delta q_2.$$

Нечеткая система управления (функция $F(T, q)$) должна быть настроена так, чтобы степени открытости кранов не вылезали за допустимые границы, не стали меньше 0 или больше 100%, поскольку в этом случае кран сломается :-).

Результат моделирования приведен на рис. 2.1.

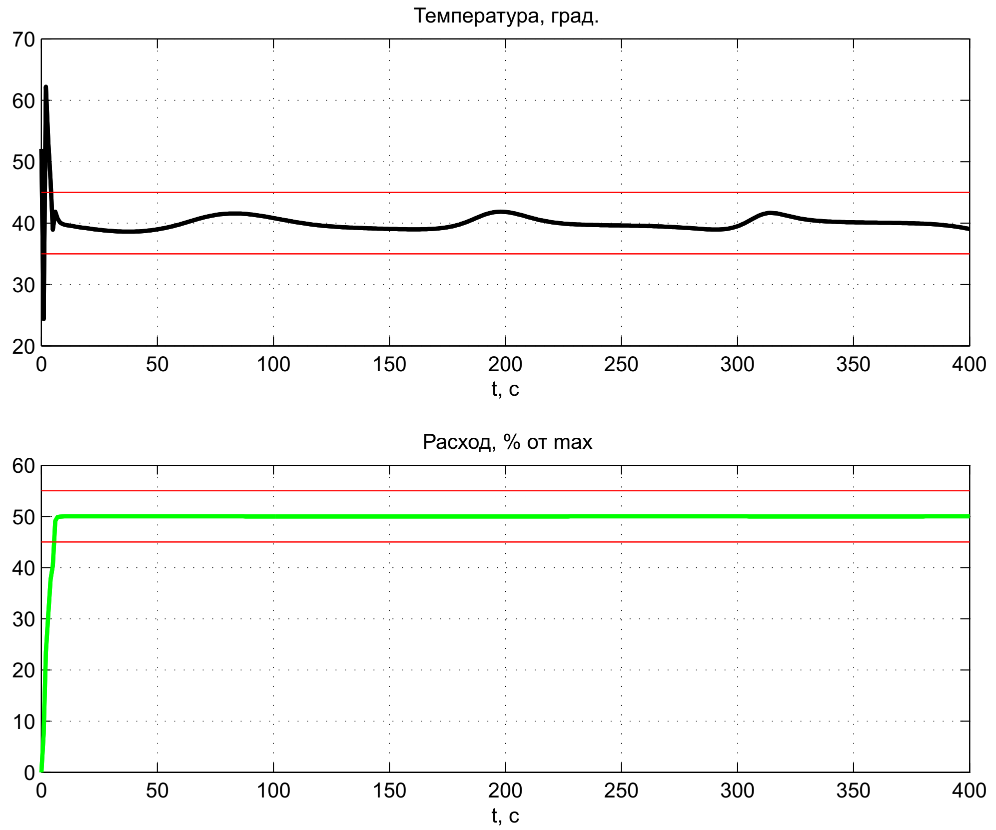


Рис. 2.1. Поведение регулируемых параметров в течение 400 с.

## 2.4. Операции с нечеткими утверждениями

В нечетких правилах используются логические операции И, ИЛИ и НЕ. Нам нужно вычислить степень истинности их результатов. В классической (четкой) логике мы рассматривали два варианта арифметических вычислений степени истинности для операций И и ИЛИ. Результаты были одинаковыми, т.к. степени истинности могли быть только нулем и единицей. Для нечетких логических операций результаты могут быть разными, т.к. степени истинности могут быть и другими числами от 0 до 1. Но все варианты имеют право на существование, поэтому выбор метода оставляется на усмотрение разработчика системы нечеткого вывода.

$$C = A \wedge B \Leftrightarrow x_C = \min(x_A, x_B) \text{ или } x_C = x_A\, x_B;$$
$$C = A \vee B \Leftrightarrow x_C = \max(x_A, x_B) \text{ или } x_C = x_A + x_B - x_A\, x_B;$$
$$C = \neg A \Leftrightarrow x_C = 1 - x_A.$$

Здесь $A, B$ и $C$ – нечеткие утверждения, $x_A, x_B$ и $x_C$ – их степени истинности. Методы вычислений нечетких логических операций имеют очевидные (за исключением последнего) названия: методы минимума (min), произведения (prod), максимума (max) и вероятности (probor). Метод вероятности называется так потому, что именно так выглядит формула вероятности того, что произойдет хотя бы одно из двух событий, $A$ или $B$.

## 2.5. Операции с нечеткими множествами

В классической теории множеств используются три основных операции: объединение ($A \cup B$), пересечение ($A \cap B$) и дополнение ($\overline{A}$). Для формализации этих операций используются *характеристические функции*, равные 1 для элементов множества и равные 0 для всех прочих,

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A, \\ 0, & x \notin A. \end{cases}$$

Тогда операции с множествами можно заменить на арифметические операции с их характеристическими функциями,

$$\begin{array}{rcll} C &=& A \cap B & \Leftrightarrow \quad \chi_C(x) = \min(\chi_A(x), \chi_B(x)) = \chi_A(x)\,\chi_B(x); \\ C &=& A \cup B & \Leftrightarrow \quad \chi_C(x) = \max(\chi_A(x), \chi_B(x)) = \chi_A(x) + \chi_B(x) - \chi_A(x)\,\chi_B(x); \\ C &=& \overline{A} & \Leftrightarrow \quad \chi_C(x) = 1 - \chi_A(x). \end{array}$$

В этих формулах $A, B, C$ – это обычные (четкие) множества. Эти формулы очень похожи на формулы операций с утверждениями. Отличие состоит в том, что здесь используются функции, а там – конкретные числа.

Операции с нечеткими множествами задаются аналогично, с тем отличием, что вместо характеристических функций используются функции принадлежности, т.е. результаты арифметических аналогов операций с множествами могут не совпадать.

$$\begin{array}{rcll} C &=& A \cap B & \Leftrightarrow \quad \mu_C(x) = \min(\mu_A(x), \mu_B(x)) \text{ или } \mu_C(x) = \mu_A(x)\,\mu_B(x); \\ C &=& A \cup B & \Leftrightarrow \quad \mu_C(x) = \max(\mu_A(x), \mu_B(x)) \text{ или } \mu_C(x) = \mu_A(x) + \mu_B(x) - \mu_A(x)\,\mu_B(x); \\ C &=& \overline{A} & \Leftrightarrow \quad \mu_C(x) = 1 - \mu_A(x). \end{array}$$

В этих формулах $A, B, C$ – это нечеткие множества, а $\mu(x)$ – их функции принадлежности. Выбор метода расчета, так же как и для нечетких утверждений, остается за разработчиком системы нечеткого вывода.