

# **Оглавление**

# Список иллюстраций

1	Решение задачи (3) совместно с граничными условиями (4) . . . . .	8
2	Диаграмма деформирования . . . . .	9
3	Зона упругих деформаций . . . . .	9
4	Критерий разрушения . . . . .	10
5	Поле напряжений, $\sigma_{xx}$ . . . . .	11
6	Поле напряжений, $\sigma_{yy}$ . . . . .	11
7	Поле объемных деформаций, $\epsilon_v$ . . . . .	12
8	Результаты: полученные трещины для различных наклонов линии перфорации . . . . .	14
9	Моделирование распространения трещин ГРП для различных значений угла перфорации . . . . .	15

# Список таблиц

1	Параметры проведения экспериментов . . . . .	13
---	--	----

# **Решение дифференциальных уравнений с использованием универсального аппроксиматора**

# **Решение задачи распространения трещины ГРП**

Гидравлический разрыв пласта (ГРП) обычно используется для повышения продуктивности залежей углеводородов и является ключевым методом доступа к нетрадиционным сланцевым коллекторам. ГРП используется не только для создания макро-масштабных трещин, но также в соединении и реактивации ранее существовавших трещин на всех масштабах для создания транспортных путей внутри пластов. Транспортная связь между существовавшими ранее разломами (то есть перфорациями, швами и естественными трещинами) часто имеет решающее значение для добычи углеводородов из пластов. Эти естественные разрушения или другие дефекты могут вызывать сложные геометрии разрушения и пути потока, возникающие как в результате разрушения при растяжении, так и в результате сдвига.

Поскольку большинство скважин обсажены и требуют перфорирования для доступа к пласту, большинство операций по ГРП проводится через перфорацию. Перфорации играют жизненно важную роль в происхождении сложной геометрии разрушения. В трещиноватых коллекторах перфорации часто являются единственным гидравлическим соединением между трещиноватым коллектором и стволом скважины.

Гидравлические трещины, вызванные существующими перфорационными отверстиями, будут переориентироваться в направлении нормали к минимальному напряжению в дальней зоне, когда они распространяются из ствола скважины. Вблизи ствола скважины могут возникать множественные субпараллельные трещины вследствие процессов инициирования трещин, таких как перфорации и естественные дефекты, расположенные на стенке ствола скважины с открытым стволом. Гидравлические трещины обычно возникают либо из-за перфораций, расположенных в обсаженном стволе скважины, либо из существующих ранее естественных трещин, пересекающих необсаженный ствол скважины.

Однако, когда угол перфорации и разность горизонтальных напряжений велики, могут возникать двойные трещины вдоль перфораций и направления максимального напряжения. Это означает, что трещины, образованные гидравлическим разрывом от ориентированных перфораций, могут быть очень сложными.

В работах [6], [8], [5] представлен подробный вывод всех уравнений необходимых уравнений. Более подробное описание процессов, таких как течение суспензии в поровых средах и моделирование процесса ГРП можно найти здесь [4], [7].

## Моделирование пороупругой среды

Система уравнений, описывающая процесс фильтрации флюида в пороупругой среде:

$$\begin{aligned} -\nabla \cdot \sigma - \alpha \nabla p &= 0 \\ \phi \rho_f c_t \frac{\partial p}{\partial t} + \nabla \cdot \left( -\frac{\rho_f k}{\mu} \nabla p \right) &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

В представленной системе уравнений не рассматриваются процессы утечки флюида в пласт. Также исключена диффузионная составляющая из уравнения состояния для скелета:

$$-\nabla \cdot \sigma - \alpha \nabla p = \rho_s \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

Объемные деформации также считаются пренебрежимо малыми:

$$\frac{\partial \epsilon_v}{\partial t} = \frac{\partial \nabla \cdot u}{\partial t} = 0$$

Итоговая система уравнений для дальнейшего анализа выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} -\nabla \cdot \sigma - \alpha \nabla p &= 0, \quad \sigma = \lambda (\nabla \cdot u) I + 2\mu \epsilon, \quad \epsilon = \frac{1}{2} [\nabla u + (\nabla u)^T] \\ \phi \rho_f c_t \frac{\partial p}{\partial t} + \nabla \cdot \left( -\frac{\rho_f k}{\mu} \nabla p \right) &= 0 \\ \phi &= \phi_0 e^{c_s(p-p_0)}, \quad c_t = c_f + \frac{\phi_0}{\phi} c_s, \quad \rho_f = \rho_0 (1 + c_f (p - p_0)) \end{aligned} \quad (2)$$

Все приближения были взяты с точностью до  $o(h)$  - линейного члена, так как рассматривается задача малых деформаций, поровое давление и плотности флюида меняются не значительно. При выводе системы уравнений использовался закон Дарси для описания скорости фильтрации флюида. Граничные и начальные условия будут рассмотрены далее.

Рассмотрим разрушение в некоторой области, которая подчиняется линейному закону:

$$-\nabla\sigma = f \quad (3)$$

Пусть имеется прямоугольная область  $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$  и граничные условия:

$$\begin{cases} \vec{u} = [u_x, u_y]^T \cdot \vec{n} = u_0, & \vec{x} = [x, y] \in \partial\Omega_d \\ \sigma \cdot n = T, & \vec{x} = [x, y] \in \partial\Omega_t \end{cases}$$

На части границы заданы фиксированные перемещения, на оставшейся границе постоянные напряжения.

Решение уравнения (3) - поле перемещений для всей области  $\Omega$ .

## Пример

Решение уравнения (3) для граничных условий:

$$\begin{cases} u_x = 0, & x = 0 \\ u_y = 0, & y = 2 \\ \sigma \cdot n = T_1 = 10^6 \text{ Па}, & x = 2 \\ \sigma \cdot n = T_2 = 5 \cdot 10^6 \text{ Па}, & y = 0 \end{cases} \quad (4)$$

Данная задача решается методом конечного элемента в вариационной постановке [1], [2]:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} [-\nabla\sigma \cdot v] d\Omega &= \int_{\Omega} f \cdot v d\Omega \\ \text{Первая формула Грина [9]: } \int_{\Omega} [-\nabla\sigma \cdot v] d\Omega &= \int_{\Omega} [\sigma \times \nabla v] d\Omega - \int_{\partial\Omega} [v \cdot (\sigma \cdot \vec{n})] d\partial\Omega \\ \int_{\Omega} [\sigma \times \nabla v] d\Omega &= \int_{\partial\Omega} [v \cdot (\sigma \cdot \vec{n})] d\partial\Omega + \int_{\Omega} f \cdot v d\Omega \end{aligned} \quad (5)$$

Домножив исходное уравнение на тестовую (пробную функцию  $v$ ) и проинтегрировав по области получаем постановку задачи в слабой форме. Данная задача реша-

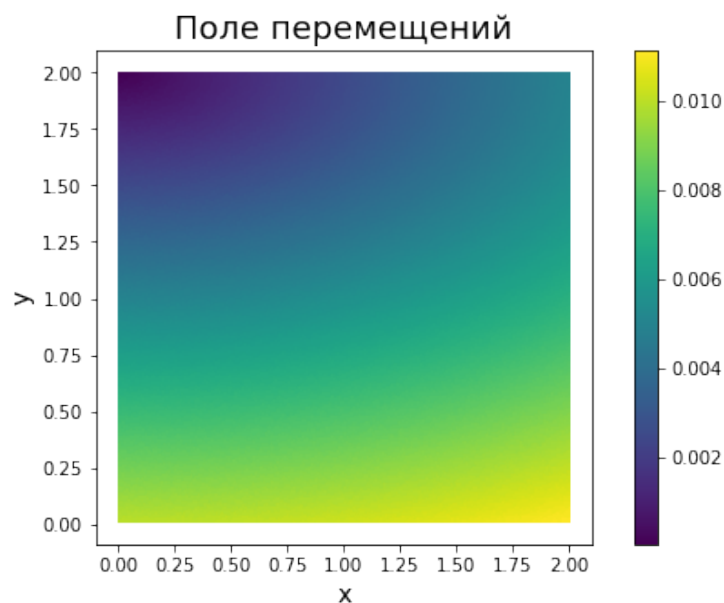


Рис. 1: Решение задачи (3) совместно с граничными условиями (4)

лась с использованием свободно распространяемого пакета Fenics<sup>1</sup>. Далее это программное обеспечение будет рассмотрено подробнее, важно что Fenics предоставляет инструменты для решения вариационных задач (линейных и нелинейных). На 1 изображено поле перемещений - решение задачи (3).

## Моделирование разрушения

Рассмотрим диаграмму деформирования<sup>2</sup>. Для построения диграммы использовалось уравнение Рамберга-Осгуда<sup>3</sup>:

Данная кривая была смоделирована и состоит из двух зон:

- Зона упругих деформаций
- Зона пластических деформаций

При рассмотрении хрупких тел, пластические деформации, или необратимые деформации, отсутствуют, вместо этого сразу происходит разрушение. В данной работе рассматриваются только хрупкие тела и хрупкие разрушения, отсюда

<sup>1</sup>Проект FEniCS представляет собой набор бесплатных программных компонентов с открытым исходным кодом, общая цель которых - обеспечить автоматическое решение дифференциальных уравнений

<sup>2</sup>Диаграмма деформирования — графическое изображение зависимости между напряжениями и деформациями материала. Эта характеристика различна для различных материалов и определяется с помощью регистрации величины деформации при определённых приращениях величины растягивающих или сжимающих усилий

<sup>3</sup>Уравнение Рамберга-Осгуда было создано, чтобы описать нелинейную зависимость между напряжением и деформацией



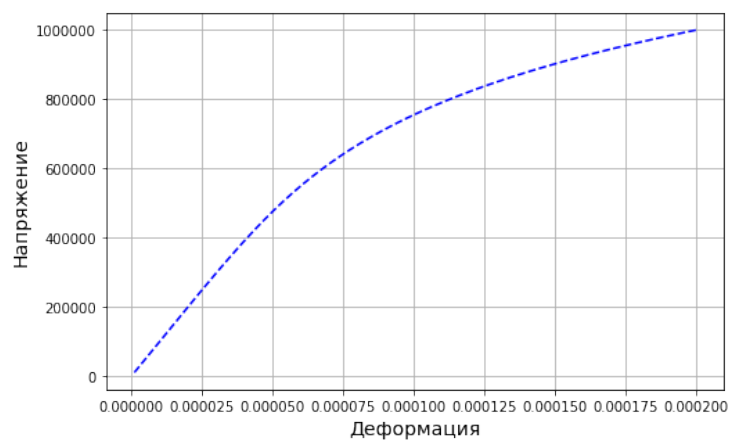


Рис. 2: Диаграмма деформирования

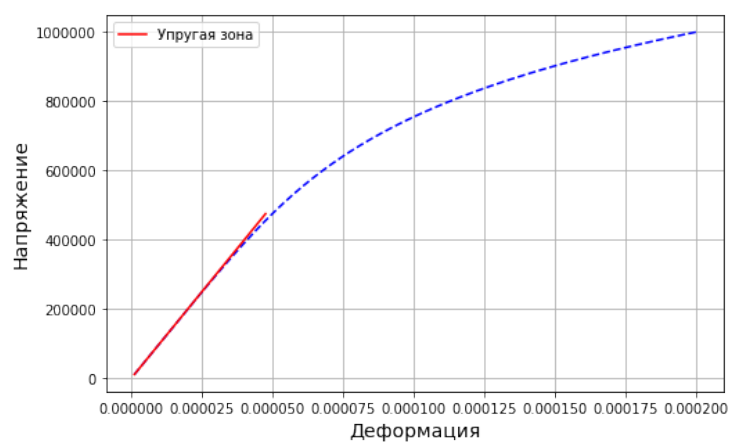


Рис. 3: Зона упругих деформаций

следует что при переходе из зоны упругих деформаций в зону пластических деформаций наступает разрушение.

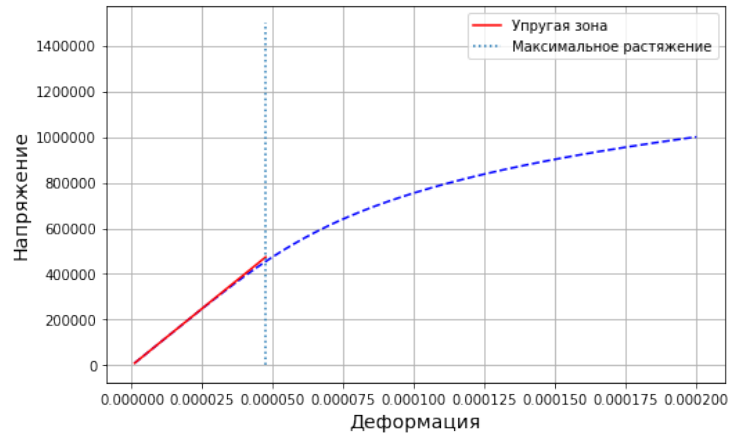


Рис. 4: Критерий разрушения

На 3 видно, что до некоторого напряжения, тело подчиняется линейному закону Гука. Простым критерием разрушения может быть максимальное растяжение (или сжатие), при которых упругая зона переходит в пластическую, а поскольку рассматриваются только хрупкие тела, то происходит сразу разрушение, соответственно.

Для приведенной кривой максимальная деформация, которая ведет к разрушению может быть взята  $\approx 5 \cdot 10^{-5}$  (4)

Таким образом, имея задачу (3) и критерий разрушения можно смоделировать область с заданными граничными условиями, а также предположить место разрушения.

### Пример

Рассмотрим задачу (3) и граничные условия:

$$\begin{cases} u_x = u_y = 0, & y = 2 \\ \sigma \cdot n = T_1 = 10^6 \text{ Па}, & x = \{0, 2\} \\ \sigma \cdot n = T_2 = 5 \cdot 10^6 \text{ Па}, & y = 0 \end{cases} \quad (6)$$

Результат решения задачи - поле напряжений и объемных деформаций. Также, из поля деформаций, применительно к данной задаче, можно сделать выводы о возникновении разрушения.

Видно, что в точках  $(x = 0, y = 2)$  и  $(x = 2, y = 2)$  возникают наибольшие напряжения и величина объемных деформаций также высока, отсюда можно сделать вывод, что разрушение начнется из этих точек и далее будет распространяться вдоль кривых на 7.

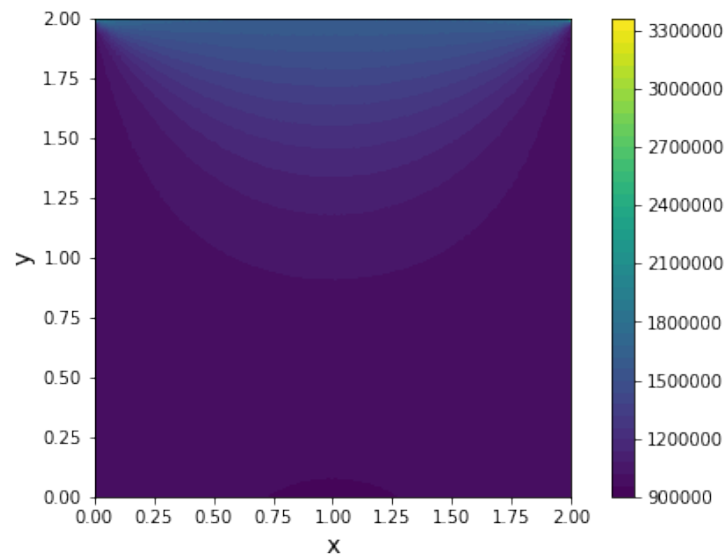


Рис. 5: Поле напряжений,  $\sigma_{xx}$

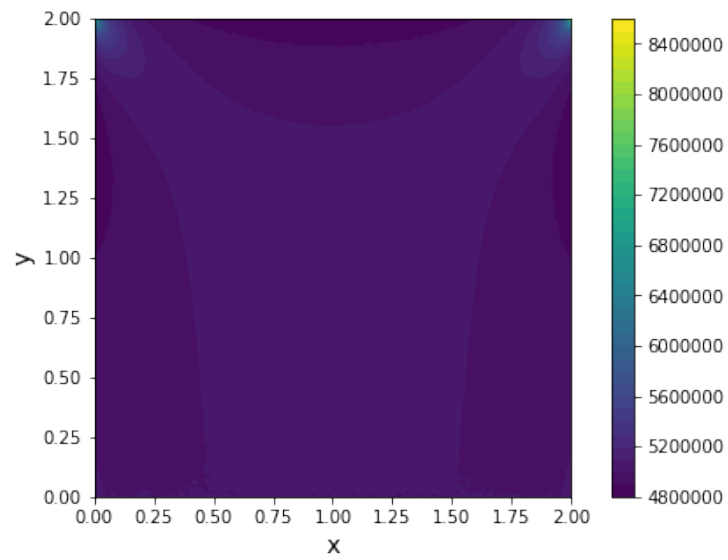


Рис. 6: Поле напряжений,  $\sigma_{yy}$

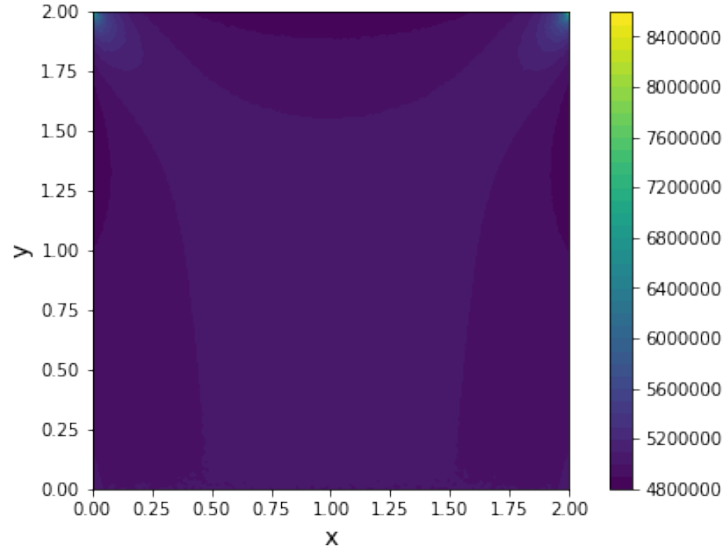


Рис. 7: Поле объемных деформаций,  $\epsilon_v$

## Моделирование распространения трещины ГРП

Для решения задачи (2) требуется построить слабую форму уравнения. Подробный вывод представлен, например, в [3]. В (2) искомыми функциями являются  $(u, p) \in V$  - пространство дважды непрерывных функций. Аналогично (5) введем проверочные функции  $(v, q) \in V_h$  и применим первую формулу Грина. Для первого уравнения:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} [-\nabla \cdot \sigma \cdot v - \alpha \nabla p \cdot v] d\Omega = \\ = \int_{\partial\Omega} [v \cdot (\sigma \cdot \vec{n})] d\partial\Omega + \int_{\Omega} [\sigma \times \nabla v] d\Omega - \int_{\partial\Omega} \alpha \nabla p \cdot v d\Omega \end{aligned}$$

Для второго уравнения вывод будет сделан в 2 этапа, первый - замена производных по времени на дискретный аналог, явный, а далее интегрирование с пробной функцией:

$$\phi \rho_f c_t \frac{\partial p}{\partial t} + \nabla \cdot \left( -\frac{\rho_f k}{\mu} \nabla p \right) \approx \phi \rho_f c_t \frac{p - p^t}{\tau} + \nabla \cdot \left( -\frac{\rho_f k}{\mu} \nabla p^t \right) = 0$$

И интегрирование по частям:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left[ \phi \rho_f c_t \frac{p - p^t}{\tau} q + \nabla \cdot \left( -\frac{\rho_f k}{\mu} \nabla p^t \right) q \right] d\Omega = \\ = \phi \rho_f c_t \int_{\Omega} \frac{pq - p^t q}{\tau} d\Omega - \int_{\Omega} \left[ \left( -\frac{\rho_f k}{\mu} \nabla p^t \right) \cdot \nabla q \right] d\Omega + \int_{\Omega} \left[ \left( -\frac{\rho_f k}{\mu} \nabla p^t \cdot n \right) q \right] d\partial\Omega \end{aligned}$$

Эксперимент №	$\theta$ , [рад.]	$\sigma_{min}$ [Па]	$\sigma_{max}$ [Па]	$\epsilon_{max}$
1	$\frac{\pi}{4}$	$10^6$	$5 \cdot 10^6$	$95 \cdot 10^{-3}$
2	$\frac{\pi}{12}$	$10^6$	$5 \cdot 10^6$	$95 \cdot 10^{-3}$
4	$-\frac{\pi}{12}$	$10^6$	$5 \cdot 10^6$	$95 \cdot 10^{-3}$
5	$-\frac{\pi}{4}$	$10^6$	$5 \cdot 10^6$	$95 \cdot 10^{-3}$

Таблица 1: Параметры проведения экспериментов

Система полученных уравнений была решена средствами Fenics и использовались слабые формы уравнений.

## Результаты

Предложенная задача была решена с параметрами представленными на 1. Расчет был произведен для разных значений угла между линией перфорации и направлением, перпендикулярным направлению максимального напряжения. Для простоты реализации алгоритма, вместо вращения линии перфорации, вращалась ось координат так, чтобы имитировать различные углы перфорации.

Величины механических параметров:

$$E = 10 \cdot 10^9 \text{ [Па]}, \nu = 0.25$$

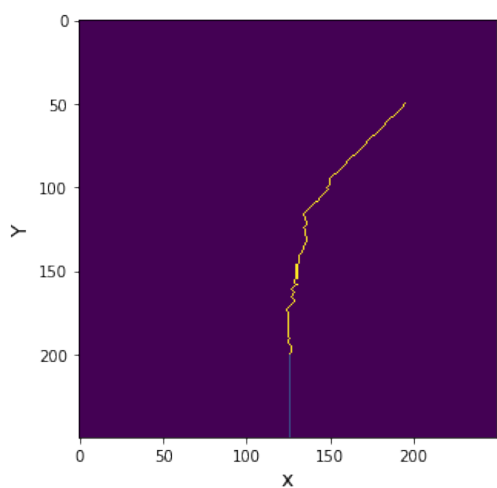
Проницаемость и вязкость флюида:

$$k = 200 \text{ [мДа]}, \mu = 10^{-7} \text{ [м / с] [м]}$$

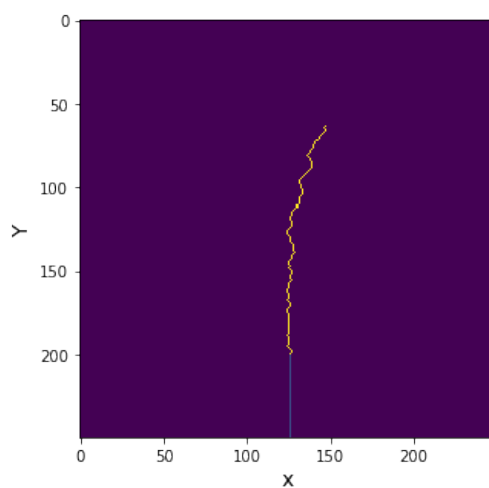
Как видно из 8 - направление трещины зависит от угла перфорации так, что сама трещина в процессе ГРП распространяется вдоль направления, перпендикулярного наибольшего напряжения -  $\sigma_{max}$ .

Для демонстрации итоговых результатов удобно отобразить промежуточные итоги на одном рисунке:

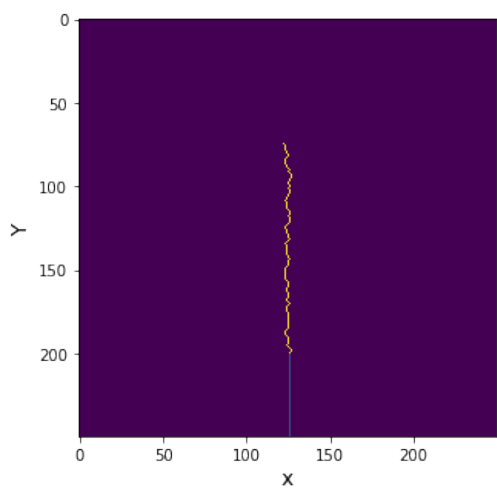
На 9 изображены трещины для разных значений угла перфорации, а также отображено направление, по которому предположительно трещина будет расти. Как можно видеть, данное предположение выполняется с использованием модели (2).



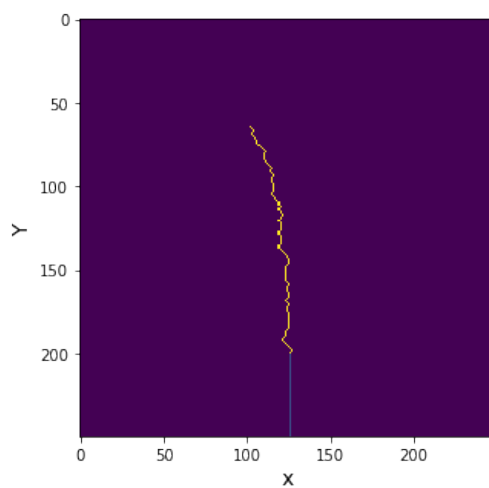
Эксперимент № 1



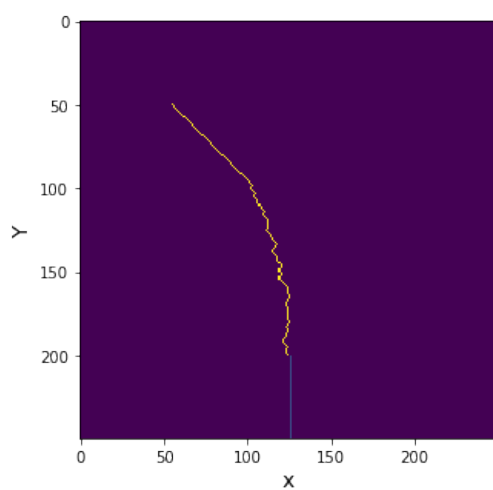
Эксперимент № 2



Эксперимент № 3



Эксперимент № 4



Эксперимент № 5

Рис. 8: Результаты: полученные трещины для различных наклонов линии перфорации

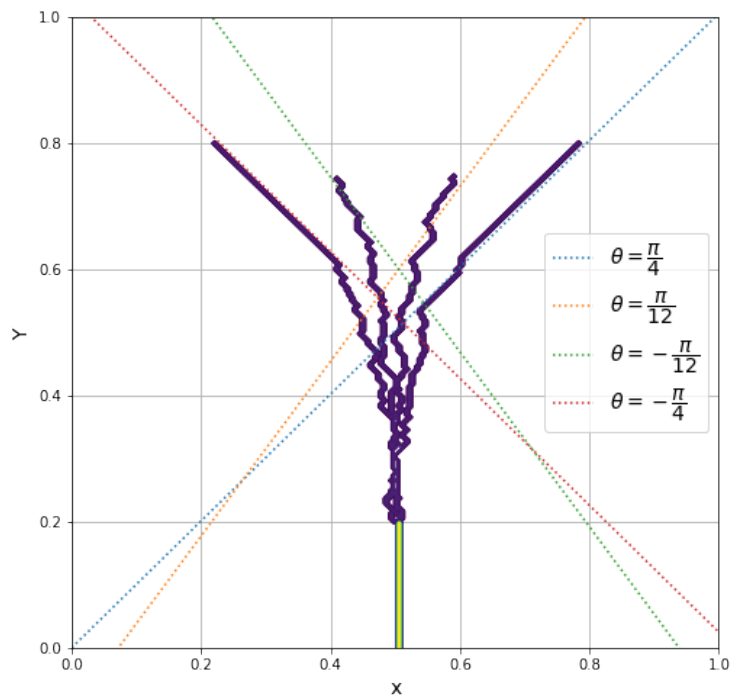


Рис. 9: Моделирование распространения трещин ГРП для различных значений угла перфорации

## Выводы

В данном разделе была рассмотрена задача о распространении трещины ГРП выходящей из заранее сделанной перфорации, а также рассмотрена зависимость того, как трещина растет от величины угла перфорации. Для моделирования среды использовалась простая линейная модель, рассмотрены хрупкие разрушения, а также в качестве модели фильтрации использовался закон Дарси.

В дальнейшем, можно добавить зависимость проницаемости от степени разрушения элемента, были проведены попытки учесть данный эффект, однако на данный момент работа еще не доделана. Также стоит отметить тот факт, что трещина имеет сложную структуру - это связано с тем фактом, что использовался метод конечного элемента и элементы Лагранжа - кусочно-линейные функции, а также сетка, состоящая из треугольных элементов. Все эти факты приводят к некоторым вычислительным погрешностям. Также вдобавок к погрешностям численного решения, добавляется момент, связанный с визуализацией.



# Литература

- [1] B.A. Finlayson. *The Method of Weighted Residuals and Variational Principles*. Classics in Applied Mathematics. Society for Industrial and Applied Mathematics, 2013.
- [2] C.A.J. Fletcher. *Computational Galerkin Methods*. Scientific Computation. Springer Berlin Heidelberg, 2012.
- [3] Ryan Haagenson, Harihar Rajaram, and Jeffery M Allen. A generalized poroelastic model using fenics with insights into the noordbergum effect. *Computers and Geosciences*.
- [4] R. Liu and Y. Jiang. *Fluid Flow in Fractured Porous Media*. Mdpi AG, 2019.
- [5] Andi Merxhani. An introduction to linear poroelasticity. *arXiv preprint arXiv:1607.04274*, 2016.
- [6] A.P.S. Selvadurai. *Mechanics of Poroelastic Media*. Solid Mechanics and Its Applications. Springer Netherlands, 1996.
- [7] R.W. Veatch, G.E. King, and S.A. Holditch. *Essentials of Hydraulic Fracturing: Vertical and Horizontal Wellbores*. PennWell Corporation, 2017.
- [8] H.F. Wang. *Theory of Linear Poroelasticity with Applications to Geomechanics and Hydrogeology*. Princeton Series in Geophysics. Princeton University Press, 2017.
- [9] Г.М. Фихтенгольц. *Основы математического анализа*. Издательство "Наука Главная редакция физико-математической литературы, 1968.