Cardinalité

Université de Toulouse

Année 2020/2021

Cardinalité des ensembles finis

Ensembles équipotents

Soient $E = \{a, b, c, d\}$ et $F = \{1, 2, 3\}$.

- Il existe une application surjective de E sur F, mais pas d'application injective.
- Il existe application injective de F sur E, mais pas d'application surjective.

En fait, il n'y a pas assez d'éléments dans F (ou trop peu dans E). Le cardinal d'un ensemble précise la notion de nombre d'éléments

Ensemble de même cardinal

Deux ensembles (fini ou non) sont **équipotents** ou de **même cardinal** s'il existe une bijection entre eux.

Cardinal d'un ensemble fini

Définition

Un ensemble E est **fini** si $E = \emptyset$ ou si $\exists n \in \mathbb{N}^*$ tel que E est en bijection avec $\{1, \ldots, n\}$. Cet entier est unique, il est appelé le **cardinal** de E noté $\mathrm{Card}\,(E)$. Si $E = \emptyset$, on pose $\mathrm{Card}\,(E) = 0$.

Pour montrer que cet entier est définit de manière unique, on prouve la proposition suivante :

Proposition

- S'il existe une application injective de $\{1, \ldots, n\}$ dans $\{1, \ldots, k\}$ alors $n \leq k$.
- S'il existe une application surjective de $\{1, \ldots, n\}$ dans $\{1, \ldots, k\}$ alors $n \geq k$.
- S'il existe une application bijection de $\{1, \ldots, n\}$ dans $\{1, \ldots, k\}$ alors $n = k$.

Définition

Un ensemble E est **fini** si $E = \emptyset$ ou si $\exists n \in \mathbb{N}^*$ tel que E est en bijection avec $\{1, \ldots, n\}$. Cet entier est unique, il est appelé le **cardinal** de E noté $\mathrm{Card}\,(E)$. Si $E = \emptyset$, on pose $\mathrm{Card}\,(E) = 0$.

Qui se traduit de la manière suivante avec les cardinaux.

Proposition

Soient E et F deux ensembles finis. On a :

- Il existe une application injective de E dans F si et seulement si $\mathrm{Card}\,(E) \leq \mathrm{Card}\,(F)$.
- Il existe une application surjective de E dans F si et seulement si $\mathrm{Card}\,(E) \geq \mathrm{Card}\,(F)$.
- Il existe une application bijective de E dans F si et seulement si $\mathrm{Card}\,(E) = \mathrm{Card}\,(F)$.

Principe des tiroirs

Soient E et F deux ensembles finis non vides et $f : E \to F$ une application.
Si $\mathrm{Card}\,(E) > \mathrm{Card}\,(F)$ alors il existe $x_1, x_2 \in E$ tels que $f(x_1) = f(x_2)$.

Nombre moyen de cheveux : 150000
Nombre d'habitant à Paris : 2,2 million
Il y a au moins deux personnes à Paris qui ont exactement le même nombre de cheveux.

Principe des tiroirs

Soient E et F deux ensembles finis non vides et $f : E \to F$ une application. Si $\mathrm{Card}\,(E) > \mathrm{Card}\,(F)$ alors il existe $x_1, x_2 \in E$ tels que $f(x_1) = f(x_2)$.

Nombre moyen de cheveux : 150000
Nombre d'habitant à Paris : 2,2 million
Il y a au moins deux personnes à Paris qui ont exactement le même nombre de cheveux.

Principe des tiroirs généralisé

Soient E et F deux ensembles finis non vides et $f : E \to F$ une application. Si $\mathrm{Card}\,(E) > k\,\mathrm{Card}\,(F)$ avec $k \in \mathbb{N}^*$ alors il existe une valeur de f qui est répétée au moins $k+1$ fois.

Dénombrement

Pourquoi dénombrer un ensemble fini ?

En informatique vous utiliserez la notion de dénombrement au moins dans les deux cas de figures suivants :

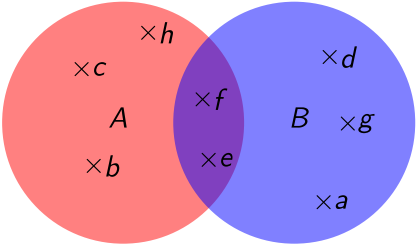
- dénombrer le nombre de cas à analyser par un algorithme en vu d'étudier sa complexité ;
- lorsqu'on tire au hasard un élément dans un univers finis Ω de manière équiprobable (c'est à dire que chaque élément ~~à~~ a la même probabilité d'être tiré), la probabilité que cet élément soit dans l'ensemble $A \subseteq \Omega$ est

$$\mathbf{P}(A) = \frac{\mathrm{Card}\,(A)}{\mathrm{Card}\,(\Omega)}.$$

Dénombrement et opérations sur les ensembles

Union

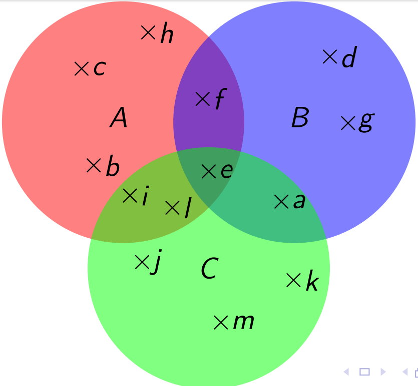
$$\mathrm{Card}\,(A \cup B) = \mathrm{Card}\,(A) + \mathrm{Card}\,(B) - \mathrm{Card}\,(A \cap B)$$



Union

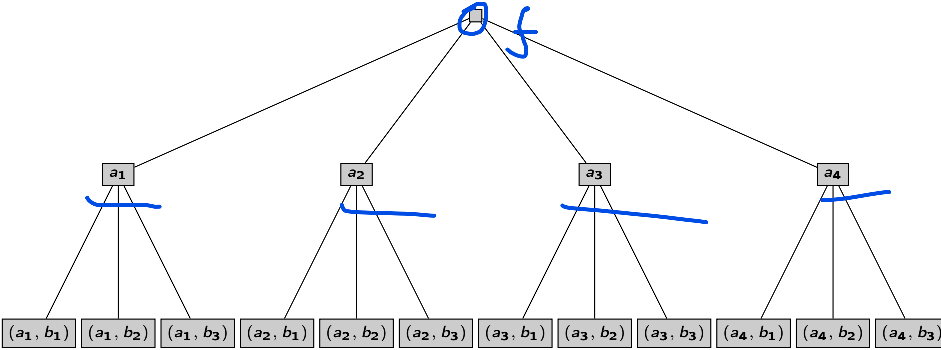
$$\mathrm{Card}\,(A \cup B) = \mathrm{Card}\,(A) + \mathrm{Card}\,(B) - \mathrm{Card}\,(A \cap B)$$

$$\mathrm{Card}\,(A \cup B \cup C) = \mathrm{Card}\,(A) + \mathrm{Card}\,(B) + \mathrm{Card}\,(C) - \mathrm{Card}\,(A \cap B)$$
$$-\mathrm{Card}\,(A \cap C) - \mathrm{Card}\,(B \cap C) + \mathrm{Card}\,(A \cap B \cap C)$$



Produit cartésien

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Card}\,(A \times B) &= \mathrm{Card}\,(A) \times \mathrm{Card}\,(B) \\
\mathrm{Card}\,(A_1 \times \cdots \times A_n) &= \mathrm{Card}\,(A_1) \times \cdots \times \mathrm{Card}\,(A_n)
\end{aligned}
$$



Dénombrement et opérations sur les ensembles

Passage au complémentaire

$$\mathrm{Card}\left(\overline{A}\right) = \mathrm{Card}\,(\Omega) - \mathrm{Card}\,(A)$$

Permutation de n éléments

Nombre de façon de ranger n objets dans l'ordre.

$$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times 2 \times 1$$

Examples :

Permutation de n éléments

Nombre de façon de ranger n objets dans l'ordre.

$$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times 2 \times 1$$

Examples :

- Voici les $4! = 24$ permutations de quatre éléments distinct a, b, c et d :

abcd	*abdc*	*acbd*	*acdb*	*adbc*	*adcb*
bacd	*badc*	*bcad*	*bcda*	*bdac*	*bdca*
cabd	*cadb*	*cbad*	*cdba*	*cdab*	*cdba*
dabc	*dacb*	*dbac*	*dbca*	*dcab*	*dcba*

$4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1$

$= 24$

Arrangement

Permutation de n éléments

Nombre de façon de ranger n objets dans l'ordre.

$$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times 2 \times 1$$

Examples :

- Voici les $4! = 24$ permutations de quatre éléments distinct a, b, c et d :

$$\begin{array}{cccccc} abcd & abdc & acbd & acdb & adbc & adcb \\ bacd & badc & bcad & bcda & bdac & bdca \\ cabd & cadb & cbad & cdba & cdab & cdba \\ dabc & dacb & dbac & dbca & dcab & dcba \end{array}$$

- De combien de façons pouvez-vous ranger 10 livres sur une étagère ?

Arrangement

Permutation de n éléments

Nombre de façon de ranger n objets dans l'ordre.

$$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times 2 \times 1$$

Examples :

- Voici les $4! = 24$ permutations de quatre éléments distinct a, b, c et d :

$$\begin{array}{cccccc} abcd & abdc & acbd & acdb & adbc & adcb \\ bacd & badc & bcad & bcda & bdac & bdca \\ cabd & cadb & cbad & cdba & cdab & cdba \\ dabc & dacb & dbac & dbca & dcab & dcba \end{array}$$

- De combien de façons pouvez-vous ranger 10 livres sur une étagère ?

$$10! = 3628800$$

Arrangement

Arrangements de p éléments parmi n sans répétition

Nombre de listes ordonnées de p éléments parmi n

$$A_n^p = n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times (n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Examples :

Arrangement

Arrangements de p éléments parmi n sans répétition

Nombre de listes ordonnées de p éléments parmi n

$$A_n^p = n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times (n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Examples :

- Les $A_4^3 = 4 \times 3 \times 2 = 24$ arrangements de 3 éléments choisis parmi a, b, c, d :

abc	abd	acb	acd	adb	adc
bac	bad	bca	bcd	bda	bdc
cab	cad	cba	cdb	cda	cdb
dab	dac	dba	dbc	dca	dcb

Arrangements de p éléments parmi n sans répétition

Nombre de listes ordonnées de p éléments parmi n

$$A_n^p = n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times (n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Examples :

- Quinze chevaux participes à une course, le nombre de tiercé est :

nombre de c = 15 // nb t = 3

3!

15!

Em : course

A_n^p

Arrangement

Arrangements de p éléments parmi n sans répétition

Nombre de listes ordonnées de p éléments parmi n

$$A_n^p = \underbrace{n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times (n-p+1)} = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Examples :

• Quinze chevaux participes à une course, le nombre de tiercé est :

$$A_{15}^3 = 15 \times 14 \times 13$$

Arrangements de p éléments parmi n sans répétition

Nombre de listes ordonnées de p éléments parmi n

$$A_n^p = n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times (n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Examples :

• Quinze chevaux participes à une course, le nombre de tiercé est :

$$A_{15}^3 = 15 \times 14 \times 13$$

• Nombre d'injection de $E = \{1, 2, 3\}$ dans $F = \{1, 2, \ldots, 15\}$:

Arrangements de p éléments parmi n sans répétition

Nombre de listes ordonnées de p éléments parmi n

$$A_n^p = n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times (n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Examples :

• Quinze chevaux participes à une course, le nombre de tiercé est :

$$A_{15}^3 = 15 \times 14 \times 13$$

• Nombre d'injection de $E = \{1, 2, 3\}$ dans $F = \{1, 2, \ldots, 15\}$:

$$A_{15}^3 = 15 \times 14 \times 13$$

Arrangement

Arrangement de p éléments parmi n avec répétition :

Nombre de listes ordonnées de p éléments parmi n, mais on s'autorise des répétitions éventuelles des éléments

$$n^p$$

Example :

Les $3^2 = 9$ arrangements avec répétitions de 2 éléments parmi a, b, c :

$$aa \quad ab \quad ac \quad ba \quad bb \quad bc \quad ca \quad cb \quad cc$$

Arrangement

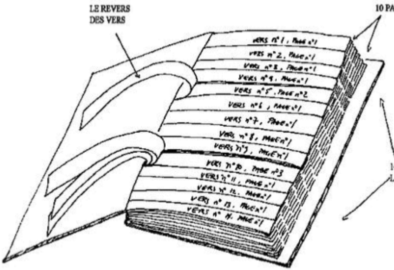
Arrangement de p éléments parmi n avec répétition :

Nombre de listes ordonnées de p éléments parmi n, mais on s'autorise des répétitions éventuelles des éléments

$$n^p$$

Example :

Raymond Queneau a écrit un ouvrage intitulé *Cent mille milliards de poèmes*. Il est composé de 10 pages contenant chacune 14 vers. Le lecteur peut composer son propre poème de 14 vers en prenant le premier vers de l'une des 10 pages puis le deuxième vers de l'une des 10 pages et ainsi de suite jusqu'au quatorzième vers.



$C_{10}^{14} =$

Arrangement

Arrangement de p éléments parmi n avec répétition :

Nombre de listes ordonnées de p éléments parmi n, mais on s'autorise des répétitions éventuelles des éléments

$$n^p$$

Proposition

Le cardinal de l'ensemble des applications de E dans F, noté F^E, est :

$$\mathrm{Card}\left(F^E\right) = \mathrm{Card}\left(F\right)^{\mathrm{Card}(E)}$$

Arrangement de p éléments parmi n avec répétition :

Nombre de listes ordonnées de p éléments parmi n, mais on s'autorise des répétitions éventuelles des éléments

$$n^p$$

Proposition

Le cardinal de l'ensemble des applications de E dans F, noté F^E, est :

$$\operatorname{Card}\left(F^E\right) = \operatorname{Card}(F)^{\operatorname{Card}(E)}$$

Proposition

Le cardinal de l'ensemble des parties d'un ensemble E fini est :

$$\operatorname{Card}(\mathcal{P}(E)) = 2^{\operatorname{Card}(E)}$$

Combinaisons de p éléments parmi n sans répétition :

nombre de sous-ensembles de p éléments dans un ensemble contenant n éléments

$$C_n^p = \frac{A_n^p}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

Example :

Les $C_3^2 = \frac{3!}{2!1!} = 3$ combinaisons de 2 éléments choisis parmi a, b, c :

$$ab \qquad ac \qquad bc$$

Proposition

$$C_n^{n-p} = C_n^p \qquad C_{n+1}^{p+1} = C_n^p + C_n^{p+1}$$

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k} \text{ (formule du binôme)}$$

Combinaisons de p éléments parmi n avec répétition :

Nombre de listes non ordonnées, avec répétition éventuelle, de p éléments dans un ensemble contenant n éléments

$$K_n^p = C_{n+p-1}^p = \frac{(n+p-1)!}{p!(n-1)!}$$

Examples :

Combinaisons de p éléments parmi n avec répétition :

Nombre de listes non ordonnées, avec répétition éventuelle, de p éléments dans un ensemble contenant n éléments

$$K_n^p = C_{n+p-1}^p = \frac{(n+p-1)!}{p!(n-1)!}$$

Examples :

• Les $K_4^2 = C_{4+2-1}^2 = \frac{(4+2-1)!}{(4-1)!2!} = \frac{5\times4}{2} = 10$ combinaisons avec répétitions de 2 lettres choisies parmi a, b, c, d sont :

$$aa \quad ab \quad ac \quad ad \quad bb \quad bc \quad bd \quad cc \quad cd \quad dd$$

Combinaison

Combinaisons de p éléments parmi n avec répétition :

Nombre de listes non ordonnées, avec répétition éventuelle, de p éléments dans un ensemble contenant n éléments

$$K_n^p = C_{n+p-1}^p = \frac{(n+p-1)!}{p!(n-1)!}$$

Examples :

- Les $K_4^2 = C_{4+2-1}^2 = \frac{(4+2-1)!}{(4-1)!2!} = \frac{5\times 4}{2} = 10$ combinaisons avec répétitions de 2 lettres choisies parmi a, b, c, d sont :

$$aa \quad ab \quad ac \quad ad \quad bb \quad bc \quad bd \quad cc \quad cd \quad dd$$

- Combien y a-t-il de dominos avec 10 symboles différents ?

Combinaison

Combinaisons de p éléments parmi n avec répétition :

Nombre de listes non ordonnées, avec répétition éventuelle, de p éléments dans un ensemble contenant n éléments

$$K_n^p = C_{n+p-1}^p = \frac{(n+p-1)!}{p!(n-1)!}$$

Examples :

• Les $K_4^2 = C_{4+2-1}^2 = \frac{(4+2-1)!}{(4-1)!2!} = \frac{5\times 4}{2} = 10$ combinaisons avec répétitions de 2 lettres choisies parmi a, b, c, d sont :

$$aa \quad ab \quad ac \quad ad \quad bb \quad bc \quad bd \quad cc \quad cd \quad dd$$

• Combien y a-t-il de dominos avec 10 symboles différents ?

$$K_{10}^2 = C_{10+2-1}^2 = \frac{11!}{9!.2!} = \frac{11\times 10}{2} = 55$$

Résumé

Tirages de p éléments parmi n :

Tirages	Ordonnés	Non ordonnés
Sans remise	$A_n^p = \dfrac{n!}{(n-p)!}$	$C_n^p = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$
Avec remise	n^p	$K_n^p = C_{n+p-1}^p$

Résumé

Rangement de p objets dans n cases :

Objets	Discernables	Indiscernables
Un seul dans chaque case	$A_n^p = \dfrac{n!}{(n-p)!}$	$C_n^p = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$
Éventuellement plusieurs dans chaque case	n^p	$K_n^p = C_{n+p-1}^p$

Cardinalité des ensembles infinis

Ensembles dénombrables

Ensembles dénombrables

Définition : Ensemble dénombrable

Un ensemble est **dénombrable** s'il est fini ou s'il est en bijection $\mathbb{N}$.

Montrer que les ensembles suivants sont dénombrables :

- $\mathbb{N} \setminus \{0\}$ est dénombrable par la bijection
- l'ensemble des nombres pairs, noté $2\mathbb{N}$, est dénombrable par la bijection
- l'ensemble des nombres impairs, noté $2\mathbb{N}+1$, est dénombrable par la bijection
- l'ensemble des entiers relatifs $\mathbb{Z}$ est dénombrable par la bijection
- l'ensemble $\mathbb{N}^2$ est dénombrable par la bijection

Proposition

Tout sous-ensemble $X \subseteq \mathbb{N}$ est dénombrable.

Critère de dénombrabilité

Proposition

Il existe une application $f : X \to \mathbb{N}$ qui est injective si et seulement si X est dénombrable.

Exemples d'applications :

- Un sous-ensemble d'un ensemble dénombrable est dénombrable.
- $\mathbb{N}^2$ est dénombrable.
- $\mathbb{N}^k$ est dénombrable.
- Un produit fini d'ensembles dénombrables est dénombrable.

Proposition

Il existe une application $f : \mathbb{N} \to X$ qui est surjective si et seulement si X est dénombrable.

Exemples d'applications :

- $\mathbb{Q}$ est dénombrable.
- Une union dénombrable d'ensembles dénombrables est dénombrable.

Ensembles non dénombrables

Théorème (Cantor 1981)

Soient E un ensemble. Il n'existe pas d'application bijective de E dans $\mathcal{P}(E)$.

On en déduit que $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ n'est pas dénombrable.

Théorème

L'ensemble $[0, 1[$ n'est pas dénombrable.

Théorème de Cantor-Schröder-Bernstein

S'il existe une application injective de A vers B et une application injective de B vers A, alors il existe une application bijection de A vers B.

Exemple d'application :

$\mathcal{P}(\mathbb{N})$ et $[0,1]$ sont en bijection car les deux fonctions suivantes sont des injections :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathcal{P}(\mathbb{N}) & \longrightarrow & [0,1] \\ A & \longmapsto & \sum_{n \in A} 3^{-n} \end{array}$$

$$g : \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & \mathcal{P}(\mathbb{N}) \\ x = 0, x_0 x_1 x_2 x_3 x_4 \ldots & \longmapsto & \{i \in \mathbb{N} \text{ si } x_i = 1\} \end{array}$$