САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ЭКОНОМИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Конспект лекций по математической экономике

Булыгин М.Е. Э-1813
Санкт-Петербург 2021

§1. Введение

1.1. Проблемы, цели и задачи

Математическая экономика – математическая дисциплина, предметом которой являются модели экономических объектов, процессов и систем, а также методы их исследования.

Математическая экономика – направление в теоретической экономике, использующее математические методы и модели для описания экономических процессов.

Основные понятия:

- *Модель* (от лат. modulus – мера, норма, образец, аналог) – образ (в т.ч. условный или мысленный – изображение, описание, схема, чертеж, график, план, карта и т.п.) или прообраз (образец) какого-либо объекта или системы объектов, используемый при определенных условиях в качестве их «заместителя» или «представителя», объект-заместитель изучаемой системы.
- *Математическая модель* – описание объекта исследования на языке математики.
- *Математическое моделирование* – средство исследования сложных систем и объектов различной природы на основе их математических моделей. Для экономических систем и процессов – это основной инструмент изучения и анализа.

Информационный взрыв и «первобытное» мышление: обратная сторона информационной революции – постепенное смещение к мифологизированному первобытному мышлению, переключение с критического осмысления события или явления на сопереживательно-эмоциональное. Сужение сознания человека: оно становится фрагментированным, мозаичным, быстро теряется целостность восприятия. Один из главных вызовов – способность качественно осмысливать информацию, синтезируя из нередко противоречивой мозаичной картинки целостное представление.

Требования к математическим моделям:

- Адекватность;
- Конечность;
- Полнота (информативность);
- Упрощенность;
- Гибкость;
- Приемлемая трудоемкость разработки.

Построение математических моделей сложных систем – слабо формализуемый процесс. Можно выделить общую схему действий, этапы, но привести универсальный алгоритм, позволяющий построить математическую модель произвольной сложной системы невозможно.

Этапы построения математической модели:

1. Определение цели процесса моделирования;

2. Изучение предметной обалсти, выявление причинно-следственных связей, построение концептуальной модели;
3. Переход от концептуальной модели к формализованному описанию;
4. Проверка адекватности модели;
5. Корректировка модели;
6. Применение модели, проведение исследований и практическое использование;
7. Уточненение и улучшение модели.

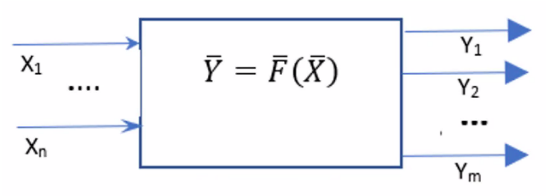
Подходы к моделированию:

- Аналитический;
- Экспериментальный;
- Аналитико-экспериментальный.

§2. Моделирование статических систем

2.1. Производственные функции

На входе эмпирические данные (выборка) $\overline{X} = (x_1, \cdots, x_n)$, на выходе конечные, прогнозные данные $\overline{Y} = (y_1, \cdots, y_m)$.



Производственная функция $\overline{Y} = F(\overline{X})$ – функция, выражающая зависимость между затратами ресурсов и объемами выпуска, где $\overline{X}$ – вектор используемых ресурсов, $\overline{Y}$ – вектор объемов выпуска продукции каждого вида.

Предполагается, что ПФ $F(x_1, \cdots, x_n)$ является достаточно гладкой – по крайней мере, дважды непрерывно дифференцируема. Тогда, из предположения вытекают следующие свойства неоклассических ПФ:

1. $F(x_1, \cdots, x_n) = 0$, если $x_i = 0$ хотя бы для одного $i = 1, 2, \cdots, n$ (при отсутствии хотя бы одного ресурса производство невозможно).
2. $F(x_1, \cdots, x_n)$ – возрастающая функция по каждому аргументу:
$$\frac{\partial F}{\partial x_i} > 0 \;\; \forall i : i = 1, \cdots, n$$
3. Выпуск по каждому аргументу неограничен.

4. Предельная производительность факторов убывает:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_i^2} < 0 \ \ \forall i : i = 1, \cdots, n$$

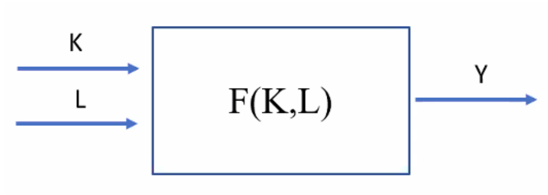
5. Линейная однородность или отдача от масштаба:

$$F(\lambda x_1, \cdots, \lambda x_n) = \lambda F(x_1, \cdots, x_n)$$

В общем случае (линейное при $\alpha = 1$):

$$F(\lambda x_1, \cdots, \lambda x_n) = \lambda^\alpha F(x_1, \cdots, x_n)$$

Макроэкономические ПФ: целевой показатель – Y (валовый внутренний продукт), входы модели K (основные производственные фонды), L (число занятых).



Производственная функция Кобба-Дугласа:

$$Y = F(K, L) = AK^\alpha L^\beta$$

Где $A > 0, \ 0 < \alpha < 1, \ 0 < \beta < 1$ обладает свойствами 1-4.

Ч.Кобб и П.Дуглас, используя данные по обрабатывающей промышленности США двадцатых годов прошлого века, получили оценки для $\alpha = 0.27, \beta \geqslant 0.73$.

Оценим параметры A, α, β производственной функции Кобба-Дугласа $Y = AK^\alpha L^\beta$:

- Для оценки параметров функции будем использовать метод наименьших квадратов.
- Потребуются исторические данные $(K_i, L_i, Y_i)_{i=1}^{i=M}$.

Для использования МНК линеаризуем ПФ Кобба-Дугласа, тогда линеаризованная форма ПФ Кобба-Дугласа имеет вид:

$$Y = AK^\alpha L^\beta$$

$$\ln Y = \ln \left(AK^\alpha L^\beta\right)$$

$$\ln Y = \ln A + \alpha \ln K + \beta \ln L$$

$$S(A, \alpha, \beta) = \sum_{i=1}^{M} (\ln A + \alpha \ln K_i + \beta \ln L_i - \ln Y_i)^2 = \sum_{i=1}^{M} \varepsilon^2 \to min$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial S}{\partial \ln A} = 0 \\ \dfrac{\partial S}{\partial \alpha} = 0 \\ \dfrac{\partial S}{\partial \beta} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2\sum\limits_{i=1}^{M}(\ln A + \alpha \ln K_i + \beta \ln L_i - \ln Y_i) \cdot 1 = 0 \\ 2\sum\limits_{i=1}^{M}(\ln A + \alpha \ln K_i + \beta \ln L_i - \ln Y_i) \cdot \ln K_i = 0 \\ 2\sum\limits_{i=1}^{M}(\ln A + \alpha \ln K_i + \beta \ln L_i - \ln Y_i) \cdot \ln L_i = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \ln A \cdot M + \alpha \cdot \sum\limits_{i=1}^{M} \ln K_i + \beta \cdot \sum\limits_{i=1}^{M} \ln L_i = \sum\limits_{i=1}^{M} \ln Y_i \\ \ln A \cdot \sum\limits_{i=1}^{M} \ln K_i + \alpha \cdot \sum\limits_{i=1}^{M} \ln^2 K_i + \beta \cdot \sum\limits_{i=1}^{M} \ln K_i \ln L_i = \sum\limits_{i=1}^{M} \ln Y_i \ln K_i \\ \ln A \cdot \sum\limits_{i=1}^{M} \ln L_i + \alpha \cdot \sum\limits_{i=1}^{M} \ln K_i \ln L_i + \beta \cdot \sum\limits_{i=1}^{M} \ln^2 L_i = \sum\limits_{i=1}^{M} \ln Y_i \ln L_i \end{cases}$$

Параметрическая идентификация: $B \cdot \overline{C} = \overline{Z}$

$$\overline{C} = \begin{pmatrix} \ln A \\ \alpha \\ \beta \end{pmatrix}, \quad \overline{Z} = \begin{pmatrix} \sum\limits_{i=1}^{M} \ln Y_i \\ \sum\limits_{i=1}^{M} \ln Y_i \ln K_i \\ \sum\limits_{i=1}^{M} \ln Y_i \ln L_i \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} M & \sum\limits_{i=1}^{M} \ln K_i & \sum\limits_{i=1}^{M} \ln L_i \\ \sum\limits_{i=1}^{M} \ln K_i & \sum\limits_{i=1}^{M} \ln^2 K_i & \sum\limits_{i=1}^{M} \ln K_i \ln L_i \\ \sum\limits_{i=1}^{M} \ln L_i & \sum\limits_{i=1}^{M} \ln K_i \ln L_i & \sum\limits_{i=1}^{M} \ln^2 L_i \end{pmatrix}$$

Тогда матрица оценок параметров будет иметь вид $\overline{C} = B^{-1} \cdot \overline{Z}$.
Часто рассматривают $\beta = 1 - \alpha$, тогда ПФ Кобба-Дугласа имеет вид:

$$Y = AK^{\alpha}L^{1-\alpha}, \; 0 < \alpha < 1$$

- Для оценки параметров функции будем использовать метод наименьших квадратов.
- Потребуются исторические данные $(K_i, L_i, Y_i)_{i=1}^{i=M}$.

Линеаризованная форма ПФ Кобба-Дугласа с $\beta = 1 - \alpha$:

$$\ln Y = \ln A + \alpha \ln K + (1 - \alpha) \ln L$$

$$\ln\left(\frac{Y}{L}\right) = \ln A + \alpha \ln\left(\frac{K}{L}\right) \Rightarrow z = a + \alpha \cdot u$$

Почему $\alpha+\beta=1$? Экономический смысл: рассматривая удельные показатели $\frac{Y}{L}$ – производительность и $\frac{Y}{K}$ – капиталовооруженность. Идея состоит в том, чтобы уйти от учета количества занятых (L), если мы хотим охарактеризовать общее свойство экономики: экономики будут различаться не числом занятых, а от соотношения производительности и фондовооруженности.

Множество безразличия производителя (изокванты) – множество наборов производственных факторов, при использовании которых уровень производства не изменяется.

Для двух факторов – линии равного выпуска продукции на координатной плоскости (в осях K, L) – линии равного уровня выпуска продукции.

Анализ производственных функций.

Средние производительности факторов:

$$A_{FL} = \frac{F(K,L)}{L} \quad A_{FK} = \frac{F(K,L)}{K}$$

Предельные производительности факторов (величина, на которую изменится выпуск, если соответствующий фактор изменится на единицу при фиксированных значениях остальных факторов):

$$M_{FL} = \frac{\partial F(K,L)}{\partial L} \quad M_{FK} = \frac{\partial F(K,L)}{\partial K}$$

Для ПФ функции Кобба-Дугласа:

$$M_{FL} = \beta\frac{Y}{L} \quad M_{FK} = \alpha\frac{Y}{K}$$

Эластичность выпуска по факторам (на сколько процентов изменится объем выпуска при изменении соответствующего фактора на один процент):

$$\varepsilon_K = \frac{\partial \ln F(K,L)}{\partial \ln K} = \frac{M_{FK}}{A_{FK}} = \alpha$$
$$\varepsilon_L = \frac{\partial \ln F(K,L)}{\partial \ln L} = \frac{M_{FL}}{A_{FL}} = \beta$$

Замещение факторов: на изокванте значения ПФ постоянны, поэтому:

$$F(K,L) = const \Rightarrow dF = 0$$
$$dF = \frac{\partial F}{\partial K}dK + \frac{\partial F}{\partial L}dL = 0$$

$$MRS_K = -\frac{dK}{dL}\bigg|_{F=const} = \frac{\partial F}{\partial L}\Big/\frac{\partial F}{\partial K} = \frac{\beta K}{\alpha L}$$
$$MRS_L = -\frac{dL}{dK}\bigg|_{F=const} = \frac{\partial F}{\partial K}\Big/\frac{\partial F}{\partial L} = \frac{\alpha L}{\beta K}$$

Эластичность замещения факторов:

$$\delta_{K,L} = \frac{d\,(K/L)}{K/L}\Big/\frac{d(MRS)}{MRS}$$

ПФ с постоянной эластичностью замещения факторов (ПФ CES).

$$Y = A(bK^{-\rho} + (1-b)L^{-\rho})^{-\frac{\gamma}{\rho}}$$

Где $\sigma = \dfrac{1}{1+\rho}$эластичность замещения факторов, $0 < \gamma \leqslant 1,\ \rho > -1,\ 0 < b \leqslant 1.$

Если $\gamma = 1$ и $\rho \to 0 \Leftrightarrow \sigma \to 1$, то получаем ПФ Кобба-Дугласа.

Если $\rho \to \infty \Leftrightarrow \sigma \to 0$, то получаем ПФ Леонтьева (т.к. абсолютно негибкая ПФ, факторы незаменяемые) $Y = A \min\left(\dfrac{K}{K_0}, \dfrac{L}{L_0}\right)$.

Если $\rho \to -1 \Leftrightarrow \sigma \to \infty$, то получаем линейную ПФ $Y = A(bK + (1-b)L)$.

2.2. Модель Леонтьева (модель межотраслевого баланса)

Исходными данными модели являются статистические таблицы, в которых содержатся данные об объемах конечной продукции (сколько какого продукта выпущено) и валовые отраслевые выпуски.

Например, фиксируем данные о производстве горючего. Для того чтобы наладить выпуск, нужна доставка и расход продукта. Тот продукт, который выпускается в качестве конечного фиксируется отдельно, а промежуточные затраты, необходимые для производства конечного продукта, тоже фиксируются.

Данные фиксируются в стоимостном и натуральном выражении, но мы будем предполагать, что данные представлены в стоимостном выражении. В строчках таблицы – межотраслевые объемы (сколько выпущено), в столбиках – сколько потрачено в соответствующей отрасли.

Предпосылки: в экономике n отраслей; каждая отрасль производит единственный вид продукции и потребляет продукцию других отраслей (которую она потребляет в процессе производства единственного вида продукции); разные отрасли производят разные виды продукции.

Обозначения:

- x_{ij} – объем продукции (в стоимостном выражении), произведенной в отрасли i и потребляемой отраслью j;
- X_i – валовый продукт отрасли i;
- $Y_i = F_i$ – конечный продукт отрасли i.

Баланс – все, что выпустили, то и потребили (потребность полностью удовлетворена).

Межотраслевой баланс (показывает, на что израсходован выпуск i-ой отрасли):

$$X_i = \sum_{j=1}^{n} x_{ij} + F_i \quad \text{где } i, j = 1, \cdots, n$$

Коэффицинт прямых затрат – затраты продукции i-ой отрасли, которые необходимы для производства единицы продукции j-ой отрасли.

$$a_{ij} = \frac{x_{ij}}{X_j} \Rightarrow X_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j + F_i \quad \text{где } i, j = 1, \cdots, n$$

Тогда возможно представление в матричной форме:

$$X = A \cdot X + F, \quad X, F \geq 0$$

Как использовать межотраслевой баланс? Если знаем валовые выпуски, можем определить конечное потребление; если знаем конечное потребление, можем сделать прогноз на валовый выпуск.

$$F = (E - A) \cdot X$$

$$X = (E - A)^{-1} \cdot F$$

Матрицы A, которые гарантируют $\forall F \Rightarrow \forall X > 0$, называются *продуктивными*.
Условия продуктивности матрицы A:

1. Если хотя бы для одного положительного вектора Y уравнение межотраслевого баланса $X = A \cdot X + Y$ имеет неотрицательное решение X, то матрица A продуктивна.

2. Для продуктивности матрицы A необходимо и достаточно существования и неотрицательности матрицы $(E - A)^{-1}$.

3. Неотрицательная матрица A продуктивна тогда и только тогда, когда матрица $(E - A)$ имеет n положительных последовательных главных миноров.

4. Неотрицательная матрица A продуктивна тогда и только тогда, когдая сходится матричный ряд $E + A + A^2 + \dots + A^k + \cdots$.

Обратная матрица Леонтьева $B = (E - A)^{-1}$ – это матрица полных затрат. Элементы этой матрицы b_{ij} – это количество продукции отрасли i, используемое для производства единицы конечного продукта отрасли j.

§3. Динамические модели экономики

3.1. Модель Солоу-Свана

Модель Солоу-Свана – модель экзогенного экономического роста.
Предположения и обозначения:

- Экономика замкнута;
- Экономика односекторна: Y – валовый внутренний продукт;
- K – капитал;
- I – инвестиции;
- C – конечно потребление;
- L – трудовые ресурсы;
- Имеет место баланс: $Y = C + I$;
- Зависимость валового внутреннего продукта от ресурсов выражается производственной функцией Кобба-Дугласа $Y = AK^{\alpha}L^{\beta}$.

Ресурсы:

- Труд L (численность рабочих, занятых в производстве) вводится в систему экзогенно и растет с постоянным темпом (γ – темп прироста трудовых ресурсов);

$$L(t+\Delta t) = L(t) + \gamma \cdot L(t) \cdot \Delta t$$

$$\Delta L = \gamma \cdot L \cdot \Delta t$$
$$\frac{dL}{dt} = \gamma L$$
$$L = L_0 e^{\gamma t}$$

- Динамика фондов K: за год фонды уменьшаются за счет износа на величину μK, где μ – доля фондов, которые выбывают за год (норма амортизации $0 < \mu < 1$), а увеличение фондов в течение года равно годовому объему инвестиций (с нулевым лагом)

$$\Delta K = -\mu \cdot K \cdot \Delta t + I \cdot \Delta t$$

$$\frac{dK}{dt} = -\mu \cdot K + I$$

- Инвестируется фиксированная доля ВВП (s – склонность к сбережению, $0 \leq s \leq 1$)

$$I = sY$$

Модель Солоу:

$$Y = AK^{\alpha}L^{\beta},$$
$$Y = C + I,$$
$$I = sY,$$
$$\frac{dL}{dt} = \gamma L, \qquad L(0) = L_0,$$
$$\frac{dK}{dt} = -\mu \cdot K + I, \qquad K(0) = K_0.$$

Модель Солоу в относительных показателях:

$$y = \frac{Y}{L}, \quad k = \frac{K}{L}, \quad i = \frac{I}{L}$$

Будем предполагать, что ПФ $F(K,L) = AK^{\alpha}L^{\beta}$ – неоклассическая с показателем однородности 1 ($\alpha + \beta = 1$).

$$K = kL \Rightarrow \frac{dK}{dt} = \frac{dk}{dt}L + \frac{dL}{dt}k$$

$$\frac{dk}{dt}L = -\mu K + sY - k\frac{dL}{dt}$$

$$\frac{dk}{dt}L = -\mu K - k\gamma L + sY$$

$$\frac{dk}{dt} = -\mu\frac{K}{L} - k\gamma + s\frac{Y}{L}$$

$$\frac{dk}{dt} = -\mu k - k\gamma + sy$$

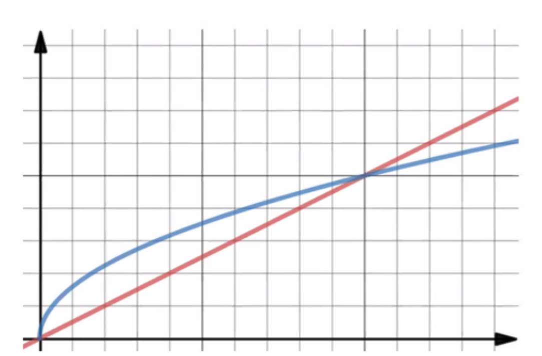
$$\frac{dk}{dt} = -(\mu+\gamma)k + sAk^{\alpha}$$

Качественный анализ динамики:

$$\frac{dk}{dt} = -(\mu+\gamma)k + sAk^{\alpha}$$

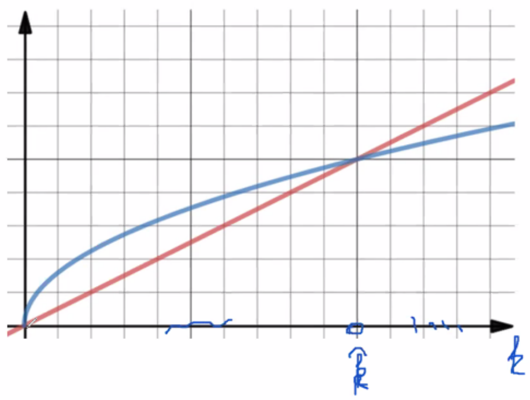
$$z_1 = (\gamma+\mu)k, \quad z_2 = sAk^{\alpha}$$

По оси абсцисс k, по оси ординат z:



$$(\gamma+\mu)k = sAk^{\alpha}$$

$$\hat{k} = \left(\frac{sA}{\gamma+\mu}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$



$$\frac{dk}{dt} > 0 \;\; \forall t : 0 \le t \le \hat{k}$$
$$\frac{dk}{dt} < 0 \;\; \forall t : t \ge \hat{k}$$

$$\frac{d^2k}{dt^2} = -(\gamma + \mu) + \alpha s A k^{\alpha-1}$$
$$(\gamma + \mu) = \alpha s A k^{\alpha-1}$$

Дискретная форма:

$$\frac{dk}{dt} = -(\mu + \gamma)k + sAk^{\alpha}$$
$$\frac{\Delta k}{\Delta t} \approx -(\mu + \gamma)k + sAk^{\alpha}$$
$$k(t + \Delta t) = k(t) + \Delta t(-(\gamma + \mu)k(t) + sAk(t)^{\alpha})$$
$$\Delta t = 1$$
$$k(t + \Delta t) = k(t) - (\gamma + \mu)k(t) + sAk(t)^{\alpha}$$

Метод Эйлера (x_0 задан):

$$\frac{dx}{dt} = g(t, x)$$
$$x(t + \Delta t) = x(t) + \Delta t \cdot g(t, x)$$
$$x_i = x_{i-1} + \Delta g(t_{i-1}, x_{i-1})$$

Метод Рунге-Кутта:

$$\frac{dx}{dt} = g(t, x)$$
$$x(t_i + \Delta t) = x(t_i) + \Delta x(t_i)$$
$$\Delta x(t) = \frac{1}{6}\left(K_1^i + 2K_2^i + 2K_3^i + K_4^i\right)$$

3.2. Модель Самуэльсона-Хикса

Модель Кейнса.

Предположения модели:

- Экономика замкнута;
- Предложение эластично;
- Цены и процентная ставка фиксированы;
- Потребление в текущем периоде определеяется доходом в предществующем периоде.

$Y(t)$ – валовый выпуск экономики в момент времени t, $C(t)$ – спрос на потребительские товары, $I(t)$ – спрос на инвестиции, предполагаем, что $\Delta t = 1$, спрос $C(t)$ зависит от $Y(t)$ линейно, а инвестиции постоянны $I(t) = I$.

Считаем, что $Y(t+1) = C(Y(t)) + I(t)$.

Пусть спрос зависит от выпуска линейно, инвестиции фиксированы:

$$Y(t+1) = C_a + c \cdot Y(t) + I, \quad 0 \leq c \leq 1$$

Сначала внесем динамику и рассмотрим приращение Y во времени:

$$Y(t+1) = C_a + c \cdot Y(t) + I$$

$$Y(t+1) - Y(t) = C_a + c \cdot Y(t) - Y(t) + I$$

Если $\Delta t \neq 1$:

$$Y(t+1) - Y(t) = (C_a + c \cdot Y(t) - Y(t) + I) \cdot \Delta t$$

$$\frac{dY}{dt} = C_a + c \cdot Y(t) - Y(t) + I$$

$$\frac{1}{1-c} \cdot \frac{dY}{dt} = \frac{C_a + I}{1-c} - Y(t)$$

Если $y(t) = const$:

$$Y(t) = \frac{C_a + I}{1-c}$$

Модель Самуэльсона-Хикса.

Предположения:

- Пусть динамика инвестиций определяется динамикой ВВП:

$$I(t) = r \cdot (Y(t) - Y(t-1)) + I_a$$

- r – коэффициент акселерации, значение которого равно величине изменения инвестиций при изменении ВВП на одну единицу
- $Y(t+1) = C_a + c \cdot Y(t) + r \cdot (Y(t) - Y(t-1)) + I_a$
- $Y(t+1) = c \cdot Y(t) + r \cdot (Y(t) - Y(t-1)) + A$

Пусть $\Delta t \neq 1$:

$$Y(t+1) = c \cdot Y(t) + r \cdot (Y(t) - Y(t-1)) + A$$

$$Y(t+1) - 2Y(t) + Y(t-1) = C_a + I_a - (1-c) \cdot Y(t) - (1-r)(Y(t) - Y(t-1))$$

$$Y(t+1) - 2Y(t) + Y(t-1) = (C_a + I_a - (1-c) \cdot Y(t) - (1-r)(Y(t) - Y(t-1)))\, \Delta t$$

$$Y(t+\Delta t) - 2Y(t) + Y(t-\Delta t) = \big(C_a + I_a - (1-c) \cdot Y(t))(\Delta t)^2 - (1-r)(Y(t) - Y(t-\Delta t))\big)\, \Delta t$$

$$\frac{1}{\Delta t}\left(\frac{Y(t+\Delta t) - y(t)}{\Delta t} - \frac{Y(t) - Y(t-\Delta t)}{\Delta t}\right) = C_a + I_a - (1-c) \cdot Y(t) - (1-r)\frac{Y(t) - Y(t-1)}{\Delta t}$$

$$\frac{d^2Y}{dt^2} = C_a + I_a - (1-c) \cdot Y(t) - (1-r)\frac{dY}{dt}$$

Состояние равновесия (положим $Y(t) = C_0$):

$$C_a + I_a - (1-c) \cdot C_0 = 0$$

$$C_0 = \frac{C_a + I_a}{1-c}$$

$$Y(t) = \frac{C_a + I_a}{1-c}$$

Рассмотрим:

$$\frac{d^2Y}{dt^2} = C_a + I_a - (1-c) \cdot Y(t) - (1-r)\frac{dY}{dt}$$

Характеристическое уравнение:

$$\lambda^2 + (1-r) \cdot \lambda + (1-c) = 0$$

Исходя из корней характеристического уравнения делаем вывод о динамике $Y(t)$.
Количественный анализ:

$$\frac{1}{1-c} \cdot \frac{d^2Y}{dt^2} + \frac{1-r}{1-c} \cdot \frac{dY}{dt} + Y = \frac{A}{1-c}$$

Замена $\dfrac{dY}{dt} = u$:

$$\frac{du}{dt} = \frac{d^2Y}{dt^2}$$

$$\frac{d^2Y}{dt^2} = \left(-\frac{1-r}{1-c} \cdot \frac{dY}{dt} - Y + \frac{A}{1-c}\right)(1-c)$$

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} = \left(-\dfrac{1-r}{1-c} \cdot \dfrac{dY}{dt} - Y + \dfrac{A}{1-c}\right)(1-c) \\ \dfrac{dY}{dt} = u \end{cases}$$

§4. Модели микроэкономики

4.1. Моделирование сферы потребления

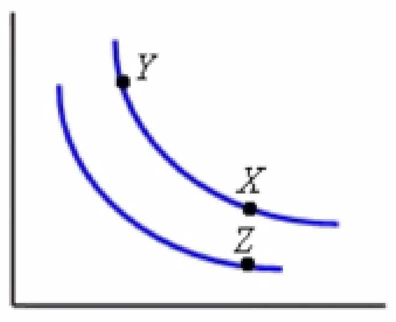
Предположения:

1. Потребитель может оценить желание приобрести благо посредством количественной оценки его полезности;
2. Предельная полезность каждого блага убывает;
3. Потребитель расходует свой бюджет, максимизируя полезность совокупности приобретенных благ.

Функция полезности $U(\overline{X}$: $U(\overline{X}_1) > U(\overline{X}_2)$, если $\overline{X}_1 \succ \overline{X}_2$.
Свойства функции полезности $U(\overline{X}$:

1. Функция растет по каждому аргументу;
2. Предельная полезность убывает.

Поверхность (кривая) безразличия: $U(X) = const$:



Задача потребительского выбора:

$$U(x_1, \cdots, x_n) \to \max$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i p_i \le I$$

$$x_i \ge 0$$

Но на самом деле:

$$U(x_1, \cdots, x_n) \to \max$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i p_i = I$$

$$x_i \ge 0$$

Решая такую оптимизационную задачу (для отдельно взятого потребителя) мы получаем *функцию спроса*: $x_i = x_i(p_1, \cdots, p_n, I)$. Функции спроса, как и функции полезностей, у разных потребитилей будут разными.

Метод множителей Лагранжа для $n = 2$ и $U = x_1 x_2$:

$$L(x_1, x_2, \lambda) = x_1 x_2 - \lambda(p_1 x_1 + p_2 x_2 - I) \to \max$$

Необходимое условие экстремума:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_1} = x_2 - \lambda p_1 = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial x_2} = x_1 - \lambda p_2 = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = p_1 x_1 + p_2 x_2 - I = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2 = \lambda p_1 \\ x_1 = \lambda p_2 \\ p_1 x_1 + p_2 x_2 = I \end{cases}$$

$$\begin{cases} p_1x_1 = p_2x_2 \\ p_1x_1 + p_2x_2 = I \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{I}{2p_1} \\ x_2 = \dfrac{I}{2p_2} \end{cases}$$

Пусть $p_1 = 2, p_2 = 5, I = 100$, тогда $x_1 = 25, x_2 = 10, U = 250$.
Рост цен. Компенсация дохода.
Модель Стоуна.

$$U = \prod_{i=1}^{n}(x_i - a_i)^{b_i} \to \max$$

$$0 < b_i < 1$$

Где a_i – какой-то минимальный набор каждого блага, который должен включаться в потребительскую корзину. Чем больше b_i, тем больше вклад блага i в общую полезность.

$$\sum_{i=1}^{n} x_i p_i = I$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i p_i \leq I$$

Решим оптимизиационную задачу потребительского выбора для модели Стоуна методом множителей Лагранжа:

$$L(x_1, \cdots, x_n, \lambda) = \prod_{i=1}^{n}(x_i - a_i)^{b_i} - \lambda\left(\sum_{i=1}^{n} x_i p_i - I\right) \to \max$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_1} = \dfrac{b_1}{x_1 - a_1}\prod\limits_{i=1}^{n}(x_i - a_i)^{b_i} - \lambda p_1 = 0 \\ \dots \\ \dfrac{\partial L}{\partial x_n} = \dfrac{b_n}{x_n - a_n}\prod\limits_{i=1}^{n}(x_i - a_i)^{b_i} - \lambda p_n = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i p_i - I = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{b_k}{x_k - a_k}\prod\limits_{i=1}^{n}(x_i - a_i)^{b_i} = \lambda p_k \\ \sum\limits_{i=1}^{n} x_i p_i = I \end{cases}$$

$$b_k \prod (x_i - a_i)^{b_i} = \lambda p_k (x_k - a_k)$$

Суммируем:

$$\sum_{k=1}^{n} b_k \prod (x_i - a_i)^{b_i} = \sum_{k=1}^{n} \lambda p_k (x_k - a_k)$$

$$\sum_{k=1}^{n} b_k \prod (x_i - a_i)^{b_i} = \lambda \sum_{k=1}^{n} (p_k x_k - p_k a_k)$$

$$\sum_{k=1}^{n} b_k \prod (x_i - a_i)^{b_i} = \lambda (I - \sum_{k=1}^{n} p_k a_k)$$

$$\begin{cases} b_k U = \lambda p_k (x_k - a_k) \\ \sum_{i=1}^{n} b_i I = \lambda (I - \sum_{k=1}^{n} p_k a_k) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda = \frac{\sum_{i=1}^{n} b_i U}{I - \sum_{i=1}^{n} a_i p_i} \\ b_k U = \frac{\sum_{i=1}^{n} b_i U}{I - \sum_{i=1}^{n} a_i p_i} p_k (x_k - a_k) \end{cases}$$

$$p_k (x_k - a_k) = \frac{b_k}{\sum_{i=1}^{n} b_i} \cdot \left(I - \sum_{i=1}^{n} a_i p_i \right)$$

$$x_k = a_k + \frac{b_k}{\sum_{i=1}^{n} b_i} \cdot \left(I - \sum_{i=1}^{n} a_i p_i \right) \Big/ p_k$$

Моделирование поведения производителей. Модель фирмы:

1. $\overline{X} \in \mathbb{R}_+^n$ – затраты
2. $\overline{Y} \in \mathbb{R}_+^m$ – выпуск
3. $\overline{Y} = F(\overline{X})$ – производственная функция
4. $p = (p_1, \cdots, p_m)$ – цены выпуска
5. $w = (w_1, \cdots, w_m)$ – цены ресурсов
6. $R = p \cdot F(\overline{X})$
7. $C = w \cdot \overline{X}$
8. $\pi = p \cdot F(\overline{X}) - w \cdot \overline{X}$

Максимизация прибыли:

$$\pi = p \cdot F(\overline{X}) - w \cdot \overline{X} \to \max$$
$$X^* = X^*(p, w)$$

Бывает, что максимизируют выручку:

$$p \cdot F(\overline{X}), \ \ w \cdot \overline{X} \le C$$

Максимизация прибыли:

1. $Q = a \cdot P + b$
2. Общие затраты: $c = v \cdot Q + F = v \cdot (a \cdot P + b) + F = v \cdot a \cdot P + v \cdot b + F$